

<https://doi.org/10.31896/k.28.6>

Stručni rad

Prihvaćeno 3. 5. 2024.

ANDREJ NOVAK
MARTINA ARMANDA

Primjena Cahn-Hilliardove jednadžbe za uslikavanje binarnih slika

The application of the Cahn-Hilliard equation for digital image inpainting**ABSTRACT**

We investigate the application of the Cahn-Hilliard (CH) equation for digital image inpainting, focusing on various choices of nonlinear potential, including the double well potential and classifiers based on shock filters. These potentials are crucial in shaping the inpainting results, and their selection depends on the characteristics of specific images and the desired properties of reconstruction. Additionally, we present a numerical scheme based on the principle of convexity splitting, and we demonstrate the results of inpainting simple binary shapes. Throughout the text, we emphasize the fundamental features of the Cahn-Hilliard equation to enable a better understanding of the role of partial differential equations in image processing.

Key words: Cahn-Hilliard equation, digital image inpainting, numerical methods, image processing

MSC2010: 68U10, 65M06, 94A08, 35K55

Primjena Cahn-Hilliardove jednadžbe za uslikavanje binarnih slika**SAŽETAK**

Istražujemo primjenu Cahn-Hilliardove (CH) jednadžbe za potrebe uslikavanja digitalnih slika, fokusirajući se na različite izbore nelinearnog potencijala, uključujući potencijal dvostruke jame i klasifikatore temeljene na šok filteru. Ovi potencijali su ključni u oblikovanju rezultata uslikavanja, a njihov odabir ovisi o karakteristikama specifičnih slika i željenim svojstvima rekonstrukcije. Također, predstavljamo numeričku shemu zasnovanu na principu cijepanja po konveksnosti, te prikazujemo rezultate uslikavanja jednostavnih binarnih oblika. Kroz tekst stavljamo naglasak na osnovne karakteristike Cahn-Hilliardove jednadžbe kako bismo omogućili bolje razumijevanje uloge parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u obradi slika.

Ključne riječi: Cahn-Hilliardova jednadžba, uslikavanje digitalnih slika, numeričke metode, obrada slike

1 Uvod

Problem uslikavanja potječe iz potrebe za restauracijom umjetničkih slika, gdje su muzejski restauratori ručno obavljali slike koje su pretrpjele oštećenja. Potreba za obradom slika prirodno se proširila od umjetničkih slika, preko fotografije i filma, do digitalnih slika s pojavom računala. Nepoznate ili oštećene regije slike nazivamo domenom uslikavanja.

Za sliku f , definiranu na domeni slike $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, cilj je rekonstruirati sliku na domeni uslikavanja (dio koji je oštećen) $\omega \subset \Omega$ tako da se dobivena rekonstrukcija prirodno uklapa u ostatak slike (tj. da se prirodno prošire karakteristike slike unutar domene uslikavanja).

Inspirirani tehnikama ručnog uslikavanja, Bertalmio i suradnici [2] bili su među prvima koji su uveli neizotropnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (PDJ) koja iz okoline

domene uslikavanja $\Omega \setminus \omega$ glatko prenosi informacije u smjeru izofota (krivulja konstantnog intenziteta sive) unutar domene uslikavanja ω . Napomenimo da je neizotropna difuzija u ovom slučaju poželjan izbor zato što osigurava oštrinu rekonstruirane slike. Preciznije, razmatrali su sljedeću jednadžbu:

$$u_t = \nabla^\perp u \cdot \nabla \Delta u \text{ na } \omega, \quad (1)$$

$$u = f(\mathbf{x}) \text{ na } \Omega \setminus \omega, \quad (2)$$

gdje je okomiti gradijent $\nabla^\perp u = (-u_y, u_x)$ smjer najmanje promjene intenziteta slike, a Laplacian Δu je mjera glatkoće slike. Budući da izofote ovise o geometriji domene uslikavanja i ne smiju se presjeci u konačnom vremenu, nužno je ovaj proces ispreplesti s jednadžbom u kojoj postoje difuzijski efekti [33].

Općenito, uslikavanje digitalnih slika može se podijeliti u dvije skupine: strukturalno orijentirane metode i metode

temeljene na teksturi. Obje skupine imaju bogatu teorijsku i praktičnu pozadinu [22, 36, 37]. U ovom radu bavit ćemo se strukturno orijentiranim uslikavanjem binarnih slika, što podrazumijeva obnovu rubova i jednoliko obojenih dijelova slike (bez teksture), za koje su posebno prikladni pristupi temeljeni na PDJ.

Prije skoro dva desetljeća Bertozzi i suradnici [4, 5] su predložili modificiranu Cahn–Hilliardovu jednadžbu kao model za uslikavanje visokokonstrastnih ili binarnih slika koji značajno pojednostavljuje prethodno korištene metode (primjerice Esedoglu–Shenov model [23]).

2 Cahn-Hilliardova jednadžba

Cahn-Hilliardova (također CH u nastavku) jednadžba je makroskopski model polja koji opisuje razdvajanje faza [34] binarne legure pri fiksnoj temperaturi. Štoviše, CH jednadžba se koristi u biologiji [25], modeliranju tokova fluida [30, 29], a posebno u obradi slika [7, 8, 10, 11, 12, 31]. Neka je $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \{-1, 1\}$ dana binarna slika. Interpolacija $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ originalne slike f dobiva se kao rješenje modificirane CH jednadžbe:

$$u_t = \Delta(\nu H'(u) - \mu \Delta u) + \lambda(\mathbf{x})(f - u), \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = f(\mathbf{x}), \quad (4)$$

zajedno s odgovarajućim rubnim uvjetima koje ćemo kasnije precizirati. Konstante $\mu, \nu > 0$ ovise o konkretnoj situaciji, a za neki veliki $\lambda_0 > 0$, izraz vjernosti $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiran je na sljedeći način:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_0, & \text{ako } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \omega, \\ 0, & \text{ako } \mathbf{x} \in \omega. \end{cases} \quad (5)$$

U posebnom slučaju kada $H(u) = \frac{1}{2}(1 - u^2)^2$ (naziva se potencijal dvostruke jame) i $\lambda = 0$, jednadžba (3) svodi se na dobro poznatu CH jednadžbu [13]. Izraz vjernosti osigurava da rezultirajuća slika u ne odstupa značajno od originalne slike f izvan domene uslikavanja. Opisno govoreći, za velike λ_0 izraz $\lambda(\mathbf{x})(u - f)$ ne smije biti velik zato što se u protivnom ne može kontrolirati ostatkom jednadžbe. Stoga, za velike λ_0 , slika u mora ostati bliska originalnoj slici na $\Omega \setminus \omega$ (budući da je tada umnožak $\lambda_0(u - f)$ umjeren i, grubo govoreći, može se kontrolirati s $u_t - \Delta(\nu H'(u) - \mu \Delta u)$). Usput napominjemo da je to također razlog zašto rubni uvjeti za (3) nisu od presudne važnosti i utjecat će samo u vrlo maloj okolini ruba domene slike (pretpostavljajući da je domena uslikavanja daleko od ruba domene slike).

3 Izbor nelinearnog potencijala H

U ranim istraživanjima, promatrao se funkcional $H(u)$ koji predstavlja nelinearni potencijal s dvije jame koje odgovaraju vrijednostima $u = -1$ i $u = 1$. U kontekstu uslikavanja binarnih slika, vrijednosti $u = 1$ i $u = -1$ mogu označavati bijele i crne piksele, respektivno. Ukratko, budući da H usmjerava intenzitete piksela prema jednoj od ovih jama, moglo bi se, posuđujući terminologiju iz strojnog učenja, smatrati da H djeluje kao klasifikator. Tijekom posljednjih deset godina, potraga za fizički smislenim potencijalom H bila je opsežna. Početna motivacija za to nastala je zbog činjenice da rješenja CH jednadžbe s potencijalom dvostruke jame ne ostaju unutar intervala $[-1, 1]$. U mnogim primjenama to narušava zakone fizike koji upravljaju sustavom; međutim, s računalnog stajališta, ovaj problem se može riješiti tehnikom uvođenja praga. Pri tome redefiniramo bilo koje vrijednosti $u > 1$ kao $u = 1$ i bilo koje vrijednosti $u < -1$ kao $u = -1$. Na primjer, ovaj pristup može se naći u istraživanjima Cherfils et al. [16, 17], gdje se u završnim koracima numerička shema isprepleće s pragom.

Druga mogućnost je korištenje logaritamskog potencijala [18, 19]:

$$H_{log}(u) = \frac{\theta}{2} ((1+u) \log(1+u) + (1-u) \log(1-u)) + \frac{\theta_c}{2} (1-u^2), \quad (6)$$

gdje su $0 < \theta < \theta_c$ konstante. Singularnost $H'_{log}(u)$ dodatno nameće uvjet omeđenosti rješenja $u \in (-1, 1)$. U usporedbi s polinomijalnim potencijalima, primjenom logaritamskog potencijala na digitalnim slikama mogu se ostvariti bolji rezultati uslikavanja te konstruirati numeričke sheme koje brže konvergiraju [16].

Nedavno je razmatrana verzija CH jednadžbe koja koristi kvadratni potencijal [7, 26]. Preciznije, ovaj pristup uključuje korištenje potencijala definiranog na sljedeći način:

$$H_{quad}(u) = \Psi(u) + \frac{1}{2}(1-u)^2, \quad (7)$$

$$\Psi(u) = I_{[-1,1]}(u) = \begin{cases} 0, & \text{ako } u \in [-1, 1], \\ +\infty, & \text{inače,} \end{cases}$$

gdje s $I_{[-1,1]}$ označavamo indikatorsku funkciju koja uzima vrijednost 0 ako je u unutar intervala $[-1, 1]$, a $+\infty$ ako nije. U [7], autori su koristili metodu konačnih elemenata za probleme uslikavanja digitalnih slika i pokazali da se s ovakvim (jednostavnijim) potencijalom mogu dobiti zadovoljavajući rezultati uslikavanja.

4 Numerička rješenja temeljena na pristupu cijepanja po konveksnosti

S obzirom na široku primjenjivost, ali i numeričke izazove koje predstavlja CH jednadžba, do sada je razvijen čitav arsenal numeričkih metoda [6, 7, 15]. Ovdje ćemo se posvetiti pristupu cijepanja po konveksnosti čije je temelje postavio Eyre [24], a kasnije i drugi istraživači [15, 27, 28]. Naime, neka je \mathcal{H} Hilbertov prostor i $E = E_1 - E_2$ energija takva da se može pisati kao razlika dviju konveksnih energija E_1 i E_2 . Tada diskretizacija

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} = -\nabla_{\mathcal{H}} E_1(u^{n+1}) - \nabla_{\mathcal{H}} E_2(u^n), \quad (8)$$

gradijentnog toka

$$u_t = -\nabla_{\mathcal{H}} E(u), \quad (9)$$

zadovoljava svojstvo energetske stabilnosti $E(u^{n+1}) \leq E(u^n)$ (vidi [1] za detalje oko izvoda bezuvjetno stabilnih shema prvog i drugog reda). CH jednadžba se izvodi kao H^{-1} gradijentni tok Ginzburg-Landauove energije definirane na sljedeći način:

$$E_1[u] = \int_{\Omega} \left[vH(u(\mathbf{x})) + \frac{1}{2}\mu|\nabla u(\mathbf{x})|^2 \right] d\mathbf{x}, \quad (10)$$

gdje u tipično označava koncentraciju, $H(u)$ je gustoća slobodne energije Helmholtza, v i μ su konstante koje utječu na debljinu tranzicijskog područja između dviju faza. Napominjemo da se Soboljev prostor $H^{-1}(U)$ definira kao dualni prostor prostora $H_0^1(U)$. Ovaj prostor uključuje sve neprekidne linearne funkcionalne na $H_0^1(U)$, gdje U predstavlja odgovarajući otvoreni podskup od \mathbb{R}^n . Prostor $H_0^1(U)$ sadrži funkcije iz $L^2(U)$ čije slabe deriacije također pripadaju $L^2(U)$, s dodatnim uvjetom da funkcije iščezavaju na rubu skupa U u smislu tragova (za više detalja iz funkcionalne analize čitatelja upućujemo na [9]). Nadalje, član s izrazom vjernosti može se izvesti kao L^2 gradijentni tok energije definirane s

$$E_2[u] = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus \omega} (f - u)^2 d\mathbf{x}. \quad (11)$$

Uočimo da se modificirana CH jednadžba (3) ne može formalno definirati kao gradijentni tok.

Kako bismo numerički riješili ovu jednadžbu, koristimo metodu cijepanja po konveksnosti. Postupak je sljedeći: želimo podijeliti svaku od energija na konveksni i konkavni dio kako bismo konstruirali poluimplicitnu numeričku shemu u kojoj se konveksni dio diskretizira implicitno,

dok se konkavni dio diskretizira eksplicitno. Stoga, ako zapišemo energije na sljedeći način

$$E_1(u) = E_{11}(u) - E_{12}(u), \quad (12)$$

$$E_2(u) = E_{21}(u) - E_{22}(u), \quad (13)$$

rezultirajuća shema cijepanja po konveksnosti je uvjetno stabilna ako su sve energije E_{ij} , $i, j = 1, 2$ konveksne.

Da bismo postigli konveksnost energija, dodajemo i oduzimamo isti izraz od E_1 i E_2 , te dobivamo:

$$E_{11}(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 \frac{C_1}{2} |u|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad (14)$$

$$E_{12}(u) = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\varepsilon} H(u) + \frac{C_1}{2} |u|^2 \right) d\mathbf{x}, \quad (15)$$

$$E_{21}(u) = \int_{\Omega \setminus \omega} \frac{C_2}{2} |u|^2 d\mathbf{x}, \quad (16)$$

$$E_{22}(u) = \int_{\Omega \setminus \omega} \left(-\lambda_0 (f - u)^2 + \frac{C_2}{2} |u|^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (17)$$

Konstante $C_1, C_2 > 0$ trebaju biti dovoljno velike kako bi se osiguralo da su energije E_{12} i E_{22} konveksne. Očito, E_{11}, E_{21} su konveksne neovisno o C_1 i C_2 , a ako je $2C_2 > \lambda_0$ tada je E_{22} konveksna. Primijetimo da u svrhu simulacija uvijek možemo pronaći dovoljno velik C_1 tako da je E_{12} konveksna. Konstantu $\varepsilon > 0$ uvodimo tako da je $\mu = \varepsilon$ i $v = \varepsilon^{-1}$, zato što je pokazano da $\mu v \approx 1$ daje najprirodnije rezultate uslikavanja.

Podjela definirana s (14),(15),(16),(17), daje sljedeću shemu za vremenski korak:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{dt} = & -\nabla_{H^{-1}}(E_{11}(u^{n+1}) - E_{12}(u^n)) - \\ & -\nabla_{L^2}(E_{21}(u^{n+1}) - E_{22}(u^n)), \end{aligned} \quad (18)$$

gdje n označava vremenski korak, a dt veličinu koraka. Umetanjem E_{ij} u (18), dobivamo:

$$\begin{aligned} (1 + C_2 dt)u^{n+1} + \varepsilon dt \Delta^2 u^{n+1} - C_1 dt \Delta u^{n+1} \\ = \frac{dt}{\varepsilon} \Delta h_{\delta}(u^n) - C_1 dt \Delta u^n + \lambda dt (f - u^n) + (1 + C_2 dt)u^n. \end{aligned} \quad (19)$$

U daljnim računima pretpostavljamo da je Ω digitalna slika veličine $P \times Q$ s Neumannovim rubnim uvjetom

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla(\Delta u) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (20)$$

Zbog značajnog pojednostavljenja operatora Δ i Δ^2 u Fourierovom prostoru, opisanog u nastavku, koristit ćemo Fourierovu pretvorbu za prostornu diskretizaciju (više detalja o Fourierovoj pretvorbi se može pronaći u 6. poglavlju

[21]).

Inverzna diskretna Fourierova pretvorbu svakog elementa u_{pq} definirana je kao

$$u_{pq} = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{Q-1} \hat{u}_{kl} e^{2\pi i k p/P} e^{2\pi i l q/Q}, \quad (21)$$

s k, l koji predstavljaju indekse u Fourierovom prostoru, a \hat{u}_{kl} element matrice \hat{u} .

Diskretni Laplaceov operator koji djeluje na u_{pq} dobiven metodom konačnih razlika može se zapisati kao

$$\Delta u_{pq} = \frac{u_{p+1,q} + u_{p-1,q} - 2u_{pq}}{dx^2} + \frac{u_{p,q+1} + u_{p,q-1} - 2u_{pq}}{dy^2}. \quad (22)$$

Biramo prostorne korake $dx = dy = 1$ i, umetanjem u_{pq} iz (21) u (22) i uspoređujući izraze pod zbrojevima, dobivamo

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u}_{kl} &= \left(e^{2\pi i k/P} + e^{-2\pi i k/P} - 2 + e^{2\pi i l/Q} + e^{-2\pi i l/Q} - 2 \right) \hat{u}_{kl} \\ &= 2(\cos(2\pi k/P) + \cos(2\pi l/Q) - 2) \hat{u}_{kl} \\ &:= K_{kl} \cdot \hat{u}_{kl}. \end{aligned} \quad (23)$$

Pri čemu uvažavanjem $K_{kl} = 2(\cos(2\pi k/P) + \cos(2\pi l/Q) - 2)$, istim postupkom za Δ^2 dobivamo

$$\Delta^2 \hat{u}_{kl} = K_{kl}^2 \cdot \hat{u}_{kl}. \quad (24)$$

Sada, s ovim definicijama operatora Δ i Δ^2 , dobivamo jednadžbu za vremensku evoluciju elemenata u_{kl} zapisujući cijelu jednadžbu (19) u Fourierovom prostoru

$$\begin{aligned} (1 + C_2 dt) \widehat{u^{n+1}}_{kl} + \varepsilon dt K_{kl}^2 \widehat{u^{n+1}}_{kl} - C_1 dt K_{kl} \widehat{u^{n+1}}_{kl} \\ = \frac{dt}{\varepsilon} K_{kl} (\widehat{h_\delta(u^n)})_{kl} - C_1 dt K_{kl} \widehat{u^n}_{kl} + (\lambda dt (\widehat{f - u^n}))_{kl} \\ + C_2 dt \widehat{u^n}_{kl} + \widehat{u^n}_{kl}. \end{aligned} \quad (25)$$

Konačno, preuređivanjem (25) rezultira sljedećom shemom:

$$\begin{aligned} \widehat{u^{n+1}}_{kl} = \\ \frac{\widehat{u^n}_{kl} + dt \left(\frac{1}{\varepsilon} K_{kl} \cdot (\widehat{h_\delta(u^n)})_{kl} - C_1 K_{kl} \cdot \widehat{u^n}_{kl} + (\lambda (\widehat{f - u^n}))_{kl} + C_2 \widehat{u^n}_{kl} \right)}{1 + C_2 + \varepsilon K_{kl}^2 - C_1 K_{kl}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Da bismo dobili u^{n+1} , primijenimo inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju na $\widehat{u^{n+1}}$. Na kraju spomenimo da za uslikavanje većih regija često moramo implementirati metodu u dva koraka. Prvo, započinjemo proces uslikavanja s većim vrijednostima ε , što rezultira povezivanjem oblika s difuzno razmazanim rubovima. Drugi korak zatim koristi rezultate prvog koraka i nastavlja s mnogo manjim vrijednostima ε kako bi se izoštrio rub nakon ponovnog spajanja.

5 Rezultati

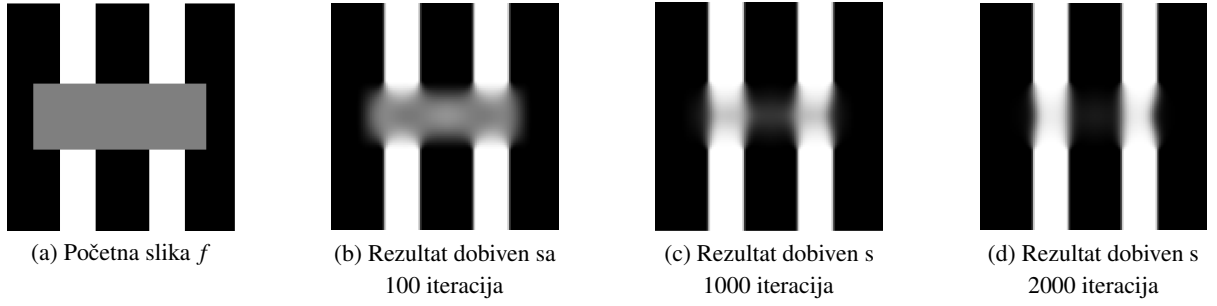
U ovom odjeljku predstavljamo rezultate uslikavanja binarnih slika korištenjem CH jednadžbe. Istražujemo uslikavanje standardnih oblika kao što su pruge ili križ. Također pokazujemo mehanizam uslikavanja prikazujući rezultate uslikavanja nakon 100, 1000, 2000 vremenskih koraka. Na kraju, dajemo primjere kako pojednostaviti i proširiti predloženu metodu s ciljem smanjenja računalne složenosti i poboljšanja kvalitete uslikavanja. Sve su simulacije dobivene korištenjem programskog paketa Matlab, a izvedene na standardnom stolnom računalu. Radi jednostavnosti, skalirali smo slike (u tonovima sive) tako da su intenziteti u rasponu $[-1, 1]$. Napominjemo da je indeks strukturne sličnosti (SSIM) metoda za mjerenje sličnosti između dviju slika. SSIM je uveden kao poboljšanje tradicionalnih metoda poput PSNR (*engl.* peak signal-to-noise ratio) i MSE (*engl.* mean squared error), koje ponekad ne odražavaju percipiranu vizualnu sličnost. SSIM indeks poprima vrijednost između -1 i 1, gdje 1 označava maksimalnu sličnost između dvije slike.



(a) Početna slika f (b) Rezultat uslikavanja s CH jednadžbom

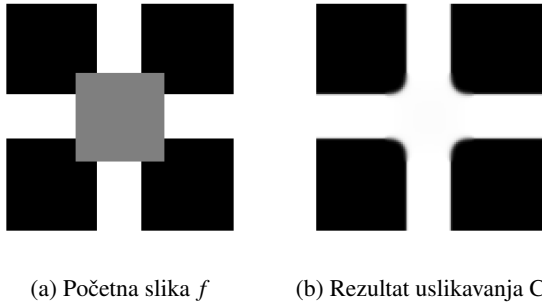
Slika 1: Rezultati uslikavanja slike paralelnih pruga.

Na Slici 1 vidimo rezultate djelovanja CH jednadžbe s potencijalom dvostruke jame na standardnoj binarnoj slici pruga. Sivo područje na slici 1(a) označava domenu uslikavanja. Odabir parametara izvršen je metodom iscrpnog pretraživanja. Kao što možemo vidjeti, ovaj pristup uslikavanju prirodno nastavlja karakteristike slike unutar područja uslikavanja s visokim SSIM-om 0.9701. Slika 1(b) je dobivena nakon 3000 vremenskih koraka. Koristili smo dvoskalni pristup, pri čemu smo ukupni broja iteracija i podijelili u $i = i_1 + i_2$, gdje se iteracije i_2 izvode s promijenjenim parametrom ε . Kao što je prije spomenuto, ovo je standardan pristup u uslikavanja većih domena (vidi na primjer [3]). Počinjemo s $\varepsilon = 100$, a nakon 1500 iteracija se približavamo ravnotežnom stanju. Zatim prelazimo na manju vrijednost $\varepsilon = 1$ te činimo dodatnih 1500 vremenskih koraka.



Slika 2: Mehanizam uslikavanja prikazan na slici paralelnih pruga.

Na Slici 2 možemo vidjeti evoluciju procesa uslikavanja dobivenu s ukupno 100, 1000 i 2000 vremenskih koraka. U početku koristimo $\varepsilon = 100$, a nakon što smo učinili polovicu od ukupnih vremenskih koraka, prelazimo na manju vrijednost $\varepsilon = 2$ te činimo ostale vremenske koraka. Uočite da je domena uslikavanja u ovom slučaju veća nego na Slici 1.



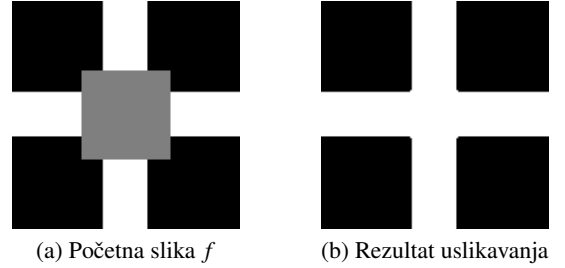
Slika 3: Rezultati uslikavanja slike koja sadrži bijeli križ.

Sljedeća testna slika sastoji se od bijelog križa s oštećenim područjem koje se nalazi u sredini slike. Odgovarajući rezultati uslikavanja prikazani su na Slici 3 i u skladu su s rezultatima iz literature (vidi na primjer Sliku 3.1 u [6] ili Slike 1 i 2 u [4]). Korišteni parametri je ista dvoskalna tehnika kao i prije s $\varepsilon = 100$ pa $\varepsilon = 1$, a pripadni SSIM je 0.9608.

Iako su rezultati dobiveni CH jednadžbom impresivni, pažljivim promatranjem područja koja sadrže crno-bijelo ili bijelo-crno prijelaze na Slici 1(b) mogu se uočiti difuzijski efekti koji se ne pojavljuju na Slici 4(a) koja je rekonstruirana jednadžbom sa sljedećim klasifikatorom [32]

$$H'_\delta(u) = h_\delta(u) = v \frac{\Delta u}{|\Delta u| + \delta} |\nabla u|, \quad (27)$$

pri čemu je $\delta > 0$ konstanta. Ovaj klasifikator je baziran na regulariziranoj verziji šok filtera $h_0 = -\text{sgn}(\Delta u)|\nabla u|$ kojeg su uveli Rudin i Osher [35, 38].



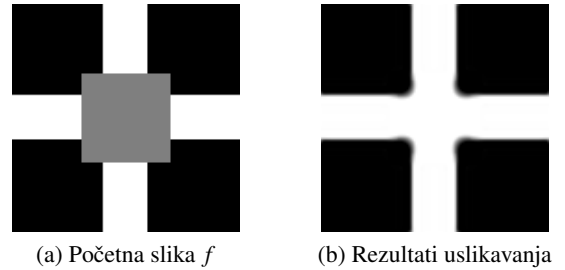
Slika 4: Rezultati uslikavanja dobiveni korištenjem (27). Završne slike su isprepletene s pragom.

Slično, na slici 3(b) također možemo uočiti nedostatak oštih rubova crnih kvadrata koje bismo očekivali u domeni uslikavanja. Na slici 4(c) vidimo da predložena jednadžba oblikuje rubove i prirodno proširuje značajke slike. Kao i prije, korišten je dvoskalni pristup s $\varepsilon = 25$, te $\varepsilon = 2.7$ kroz sveukupno 800 vremenskih koraka.

Motivirani konstrukcijom dokaza postojanja rješenja koji počiva na tehnikama fiksne točke [32], možemo razmotriti varijantu potencijala (27) koji daje linearnu jednadžbu tako da fiksiramo nelinearni dio (klasifikator) tako da ovisi samo o početnoj slici. Preciznije, kada kažemo linearna varijanta predložene jednadžbe, mislimo na sljedeće:

$$u_t = \Delta \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta f}{|\Delta f| + \delta} |\nabla f| - \varepsilon \Delta u \right) + \lambda(f - u). \quad (28)$$

Prednost ovog pristupa je da se nelinearni dio (27) sada prikazuje kao $h(f)$. Stoga se može unaprijed izračunati i održavati konstantnim tijekom evolucije u vremenu.



Slika 5: Rezultati uslikavanja dobiveni korištenjem linearne varijante modificirane CH (28).

Početna vrijednost bila je $\varepsilon = 25$, a nakon 2500 vremenskih koraka mijenjamo je na $\varepsilon = 2.7$. Ukupno je izvršeno 8000 vremenskih koraka. Rezultirajuća slika, slika 5(b), usporediva je s onom dobivenom nelinearnom verzijom potencijala i stoga bi se moglo tvrditi da ova metoda predstavlja kompromis između jednostavnosti računanja i kvalitete uslikavanja. Očigledni nedostatak korištenja linearnog potencijala su difuzijski učinci oko uglova križa, ali to se može eliminirati uvođenjem praga. Ovaj pristup u dva koraka standardan je u slikanju s Cahn-Hilliardovom jednadžbom (vidi na primjer [7, 14]). Za dobivanje vrijednosti praga prikladna je Matlab funkcija `graythresh`.

6 Zaključak

U ovom kratkom izlaganju željeli smo prikazati osnovne značajke CH jednadžbe s primjenom na uslikavanje binarnih oblika. Kroz eksperimentalne rezultate demonstrirali smo potencijal CH jednadžbe u obnovi rubova i jednoliko obojene dijelove slike, čime se prirodno nastavljaju karakteristike slike unutar domene uslikavanja. Štoviše, pokazali smo da modificirana CH jednadžba, primijenjena kroz dvo-skalni pristup, omogućava efikasno uslikavanje područja s minimalnim difuzijskim artefaktima. Ovaj rad otvara put prema razumijevanju složenih mehanizama uslikavanja i potiče na razvoj naprednih algoritama za obradu digitalnih slika.

6.1 Zahvale

Ovo istraživanje je podržano od strane Hrvatske zaklade za znanost pod brojem projekta HRZZ-MOBODL-2023-08-7617 i IP-2022-10-7261 Analysis of Partial Differential Equations and Shape Optimization (ADESO). Stalna adresa A. N. je Sveučilište u Zagrebu.

Literatura

- [1] BACKOFEN, R., WISE, S. M., SALVALAGLIO, M., VOIGT, M., Convexity splitting in a phase field model for surface diffusion, *Int. J. Num. Anal. Model.* **16** (2020), 192–209.
- [2] BERTALMIO, M., SAPIRO, G., CASELLES, V., BALLESTER, C., Image inpainting, *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 417–424, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 2000, <https://doi.org/10.1145/344779.344972>
- [3] BERTALMIO, M., BERTOZZI, A., SAPIRO, G., Navier-Stokes, fluid dynamics, and image and video inpainting, *Computer Vision and Pattern Recognition*, 2001. CVPR 2001. *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 1. IEEE, 2001, <https://doi.org/10.1109/CVPR.2001.990497>
- [4] BERTOZZI, A., ESEDOGLU, S., GILLETTE, A., Inpainting of binary images using the Cahn-Hilliard equation, *IEEE Trans Image Process.* **16** (2006), 285–291, <https://doi.org/10.1109/tip.2006.887728>
- [5] BERTOZZI, A., ESEDOGLU, S., GILLETTE, A., Analysis of a two-scale Cahn-Hilliard model for binary image inpainting, *Multiscale Modeling & Simulation* **6**(3) (2007), 913–936, <https://doi.org/10.1137/060660631>
- [6] BERTOZZI, A., SCHÖNLIEB, C. B., Unconditionally stable schemes for higher order inpainting, *Comm. Math. Sci.* **9**(2) (2011), 413–457, <https://dx.doi.org/10.4310/CMS.2011.v9.n2.a4>
- [7] BOSCH, J., KAY, D., STOLL, M., WATHEN, J. A., Fast solvers for Cahn-Hilliard inpainting, *SIAM J. Imaging Sci.* **7**(1) (2014), 67–97, <https://doi.org/10.1137/130921842>
- [8] BOSCH, J., STOLL, M., A fractional inpainting model based on the vector-valued Cahn-Hilliard equation, *SIAM J. Imaging Sci.* **8** (2015), 2352–2382, <https://doi.org/10.1137/15M101405X>
- [9] BREZIS, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011, <https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7>
- [10] BRKIĆ, L. A., MITROVIĆ, D., NOVAK, A., On the image inpainting problem from the viewpoint of a nonlocal Cahn-Hilliard type equation, *J. Adv. Res.* **25** (2020), 67–76, <https://doi.org/10.1016/j.jare.2020.04.015>
- [11] BRKIĆ, L. A., NOVAK, A., A nonlocal image inpainting problem using the linear Allen-Cahn equation, *Advances in Non-Integer Order Calculus and Its Applications*, Malinowska, Agnieszka B., Mozyrska, D., Sajewski, Ł. (ur.), 2020, 229–239, https://doi.org/10.1007/978-3-030-17344-9_17
- [12] BURGER, M., HE, L., SCHÖNLIEB, C. B., Cahn-Hilliard inpainting and a generalization for grayvalue images, *SIAM J. Imaging Sci.* **2**(4) (2009), 1129–1167, <https://doi.org/10.1137/080728548>
- [13] CAHN, J. W., HILLIARD, J. E., Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy, *J. Chem. Phys.* **28**(2) (1958), 258–267, <https://doi.org/10.1063/1.1744102>

- [14] CARRILLO, J. A., KALLIADASIS, S., LIANG, F., PEREZ, S. P., Enhancement of damaged image prediction through Cahn–Hilliard image inpainting, *R. Soc. Open Sci.* **8** (2021), 201294, <https://doi.org/10.1098/rsos.201294>
- [15] CHENG, M., WARREN, J. A., An efficient algorithm for solving the phase field crystal model, *J. of Computational Physics* **227**(12) (2008), 6241–6248, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.03.012>
- [16] CHERFILS, L., HUSSEIN, F., MIRANVILLE, A., On the Bertozzi–Esedoglu–Gillette–Cahn–Hilliard equation with logarithmic nonlinear terms, *SIAM J. Imaging Sci.* **8**(2) (2015), 1123–1140, <https://doi.org/10.1137/140985627>
- [17] CHERFILS, L., HUSSEIN, F., MIRANVILLE, A., Finite-dimensional attractors for the Bertozzi–Esedoglu–Gillette–Cahn–Hilliard equation in image inpainting, *Inverse Problems & Imaging* **9**(1) (2015), 105–125, <https://doi.org/10.3934/ipi.2015.9.105>
- [18] CHERFILS, L., MIRANVILLE, A., ZELIK, S., The Cahn–Hilliard equation with logarithmic potentials, *Milan J. Math.* **79** (2011), 561–596, <https://doi.org/10.1007/s00032-011-0165-4>
- [19] COPETTI, M. I. M., ELLIOTT, C. M., Numerical analysis of the Cahn–Hilliard equation with a logarithmic free energy, *Numer. Math.* **63** (1992), 39–65, <https://doi.org/10.1007/BF01385847>
- [20] DAI, S., DU, Q., Weak Solutions for the Cahn–Hilliard Equation with Degenerate Mobility, *Arch. Rational Mech. Anal.* **219** (2016), 1161–1184, <https://doi.org/10.1007/s00205-015-0918-2>
- [21] DEMMEL, J., *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [22] ESEDOGLU, S., OSHER, S. J., Decomposition of images by the anisotropic Rudin–Osher–Fatemi model, *Comm. Pure App. Math.* **57**(12) (2004), 1609–1626, <https://doi.org/10.1002/cpa.20045>
- [23] ESEDOGLU, S., JIANHONG, S., Digital inpainting based on the Mumford–Shah–Euler image model, *Eur. J. App. Math.* **13** (2002), 353–370, <https://doi.org/10.1017/S0956792501004904>
- [24] EYRE, D. J., Unconditionally gradient stable time marching the Cahn–Hilliard equation, *MRS Online Proceedings Library (OPL)* **529** (1998), 39–46, <https://doi.org/10.1557/PROC-529-39>
- [25] FISCHER, P., MERGHEIM, J., STEINMANN, P., On the C1 continuous discretization of nonlinear gradient elasticity: A comparison of NEM and FEM based on Bernstein–Bézier patches, *International journal for numerical methods in engineering* **82**(10) (2010), 1282–1307, <https://doi.org/10.1002/nme.2802>
- [26] GARCKE, H., FONG LAM, K., STYLES, V., Cahn–Hilliard inpainting with the double obstacle potential, *SIAM Journal on Imaging Sciences* **11**(3) (2018), 2064–2089, <https://doi.org/10.1137/18M1165633>
- [27] GLASNER, K., ORIZAGA, S., Improving the accuracy of convexity splitting methods for gradient flow equations, *J. Comp. Phys.* **315** (2016), 52–64, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.03.042>
- [28] GOMEZ, H., HUGHES, T. J.R., Provably unconditionally stable, second-order time-accurate, mixed variational methods for phase-field models, *J. Comp. Phys.* **230** (2011), 5310–5327, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.03.033>
- [29] HAN, D., WANG, X., A second order in time, uniquely solvable, unconditionally stable numerical scheme for Cahn–Hilliard–Navier–Stokes equation, *J. Comp. Phys.* **290** (2015), 139–156, <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.02.046>
- [30] LIU, C., SHEN, J., A phase field model for the mixture of two incompressible fluids and its approximation by a Fourier-spectral method, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **179**(3–4) (2003), 211–228, [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(03\)00030-7](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00030-7)
- [31] MIRANVILLE, A., *The Cahn–Hilliard equation: recent advances and applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.
- [32] NOVAK, A., REINIĆ, N., Shock filter as the classifier for image inpainting problem using the Cahn–Hilliard equation, *Comp. & Math. App.* **123** (2022), 105–114, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.07.021>
- [33] NOVAK, A., ŠTAJDUHAR, A., Application of Linear and Nonlinear Heat Equation in Digital Image Processing, *KoG* **18** (2014), 45–52.
- [34] NOVICK-COHEN, A., The Cahn–Hilliard equation, *Handbook of differential equations: evolutionary equations 4* (2008), 201–228, [https://doi.org/10.1016/S1874-5717\(08\)00004-2](https://doi.org/10.1016/S1874-5717(08)00004-2)

- [35] OSHER, S., RUDIN, L. I., Feature-oriented image enhancement using shock filters, *SIAM J. Num. Anal.* **27**(4) (1990), 919–940, <https://doi.org/10.1137/0727053>
- [36] RUDIN, L. I., OSHER, S., FATEMI, E., Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **60** (1992), 259–268, [http://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](http://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F)
- [37] SHEN, J., CHAN, T. F., Mathematical models for local nontexture inpaintings, *SIAM J. App. Math.* **62**(3) (2002), 1019–1043, <https://doi.org/10.1137/S0036139900368844>
- [38] WEICKERT, J., Coherence-enhancing shock filters, Michaelis, B., Krell, G. (ur.) *Pattern Recognition, DAGM 2003. Lecture Notes in Computer Science*, **2781**, Springer, Berlin, Heidelberg, https://doi.org/10.1007/978-3-540-45243-0_1

Andrej Novak

orcid.org/0000-0002-7828-4870

e-mail: andrej.novak@phy.hr

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Bijenička cesta 32, 10000 Zagreb, Hrvatska

Sveučilište u Beču
Fakultet za matematiku
1090 Beč, Austrija

Martina Armada

e-mail: marty4arm@gmail.com

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Bijenička cesta 32, 10000 Zagreb, Hrvatska
Studentica u vrijeme pisanja ovog rukopisa.