

# Optimizacija oblika tensegrity sistema

Ivan Franić<sup>1</sup>, izv.prof.dr.sc. Petra Gidak<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ivan.franic@sza.hr

<sup>2</sup>Sveučilište u Zagrebu Građevinski fakultet, pgidak@grad.hr

## Sažetak

U radu je predložena metoda za pronalaženje sila i optimizaciju geometrije tensegrity sistema prema objektivu željenih sila u štapovima. Navedeni sistemi sadrže tlačne i vlačne elemente, pa time odstupaju od prednapetih vlačnih mreža kabela i jednoslojnih tlačnih rešetki koje su često predmet optimizacije metodom gustoća sila. Formulacija predstavlja metodu lokalne optimizacije primjenom nelinearnih najmanjih kvadrata, kojom je geometrija prvotno odabranog sistema, odabrana temeljem iskustva ili prije poznatog sličnog sistema, modificirana kako bi se smanjio rezidual između ostvarenih sila u štapovima te onih željenih od strane korisnika.

*Ključne riječi: pronalaženje oblika, optimizacija, štapni sustavi, tensegrity kupole, nelinearni najmanji kvadrati, metoda gustoće sila*

## Shape optimization of tensegrity systems

### Abstract

In the following article a method for force finding of tensegrity systems, and geometry optimization of those systems w.r.t. objective as prescribed target forces in elements is proposed. Such systems are composed of struts and cables, and therefore differ from pure tensile nets or compressive systems often optimized by force density method. The formulation represents a method of local optimization, based on nonlinear least squares, in which geometry of initial system, chosen based on experience or known examples, is modified with purpose of reducing the residual given by difference between achieved forces in members and those specified by user.

*Key words: form finding, optimization, truss systems, tensegrity domes, nonlinear least squares, force density method*

## 1 Uvod

### 1.1 Općenito

U radu se predlaže metoda za traženje oblika i optimizaciju tensegrity sistema. Metoda kao cilj uzima generalizaciju metode gustoća sila (eng. Force density method, FDM), koja se učestalo koristi u pronalaženju oblika vlačnih prednapetih mreža kabela ili jednoslojnih tlačnih rešetki, na mješovite sustave u kojima su prisutni tlačni i vlačni elementi. Poznato je da primjena metode gustoća sila podbacuje kada su prisutni tlačni i vlačni elementi u sustavu. Rezultati dobiveni FDM u navedenom slučaju predstavljaju degenerirane geometrije dimenzije manje od zadane dimenzije problema. Konkretno, problem zadan u 3 dimenzije daje 2-dimenzionalno rješenje.

### 1.2 Pregled postojećih metoda i prakse

Metode predložene za problem pronalaženja oblika mogu se podijeliti u 3 glavne kategorije: pronalaženje sila, pronalaženje oblika, te optimizacija topologije.

#### 1.2.1 Metode za traženje sila

U slučaju traženja sila topologija i geometrija sustava je poznata, te kroz proces rješenja ostaje konstantna, dok se pronalaze prihvatljive sile prednapona u pojedinim elementima, uz eventualno djelovanje vanjskih sila i zadane rubne uvijete. Također, moguće je zadavanje određenih ograničenja na varijable, kao što su npr. simetrija rješenja, predznak pronađene sile u pojedinim elementima i sl. Među nekima od metoda su DSVD metoda, predložena od [1] zasnovana na SVD dekompoziciji matrice ravnoteže sustava za dobivanje nezavisnih modova prednapona, te pronalaženju integralnog moda prednapona među dobivenim singularnim vektorima; te XFDM, proširena metoda gustoće sila, koja modificira metodu gustoća sila ograničenjima na pozicije točaka kako bi se primijenila na problem pronalaženja sila [2]

#### 1.2.2 Metode za traženje oblika

U slučaju traženja oblika formulira se problem u kojem sustav jednadžbi ima manjak jednadžbi u odnosu na broj nepoznanica, pa se kao ulazni podatci uvode željene sile ili duljine elemenata. U ovu kategoriju spada npr. metoda gustoća sila (FDM), i nelinearna metoda gustoća sila, (NLFDM) [3] koja je pronašla sveobuhvatnu primjenu u pronalaženju oblika prednapetih mreža kabela, te predstavlja jednu od najzastupljenijih metoda za pronalaženje oblika u praksi. Kao proširenje

FDM pojavljuje se Updated reference strategy, te Extended updated reference strategy (URS i x-URS) [4, 5] koja generalizira principe FDM na pronalaženje oblika prednapetih membranskih konstrukcija. Metode zasnovane na metodi gustoća sila, međutim, podbacuju kod sustava od vlačnih i tlačnih elemenata, kao što u svom radu [6] autor pokazuje. Kao rješenje navedenog problema predložen je niz metoda koje se u suštini temelje na iterativnoj modifikaciji matrice gustoća sile i/ili matrice ravnoteže sistema (opisane u poglavlju 2.2), s ciljem ostvarivanja singularnosti potrebne za pronalaženje prihvatljivog rješenja, kao što su Adaptivna metoda gustoće sila (Adaptive force density method), te Napredna metoda gustoće sila (Advanced force density method) [7, 8, 9, 10]. Ipak, potrebna su dodatna razmatranja i pretpostavke kako bi metode predložene u navedenoj literaturi prihvaćale ciljeve optimizacije u pogledu željenih sila u elementima, kao što je slučaj u klasičnoj FDM. Izvorno se FDM primijenila na prednapete mreže kabela, a u istom se obliku može primijeniti i na optimizaciju poprečnog presjeka jednoslojnih tlačnih rešetki, temeljem vlačno tlačne analogije (eng. Hanging cloth analogy).

### 1.2.3 Metode za optimizaciju topologije

Optimizacija topologije kao nepoznanice uzima i konektivnost elemenata, uz geometriju i sile u elementima. Obzirom na veliki opseg nepoznanica ovakve procedure često zahtijevaju definiranje velikog broja ograničenja na same varijable kako bi rezultati bili primjenjivi; ili ljudsku interpretaciju i doradu rezultata, ponajviše zbog složenosti i nepravilnosti dobivene geometrije rješenja, koja za sobom povlači kompleksnost izvedbe samih komponenti konstrukcije. Među najčešće metode spadaju algoritmi koji pretpostavljaju apsolutnu povezanost elemenata (postoje elementi između svakog čvora sustava), (eng. Ground structure) te potom sustavno eliminiraju elemente koji se kroz iteraciju pokazuju neiskorišteni prema zadanom kriteriju [11].

## 2 Optimizacija geometrije po kriteriju traženih sila u elementima

### 2.1 Općenito

Opisana je metoda kojom je moguće provesti optimizaciju tensegrity sustava sa rubnim uvjetima (tensegrity kupole) kako bi se ostvario željeni omjer sila između elemenata u sustavu. U prvom dijelu ovog poglavlja opisana je metoda kojom se pronalazi prihvatljivi vektor sila u elementima za zadanu geometriju sustava, dok je u drugom dijelu predložen optimizacijski algoritam koji temeljem pronađenog iznosa sila pronalazi promjenu u geometriji koja smanjuje rezidual zadan razlikom između ostvarenog vektora sila te željenog. Obzirom da male promjene u

geometriji mogu imati značajan utjecaj na iznose sila u elementima, problem je nelinearan, te se rješava iterativno prema teoriji 2. reda. Problem kao takav može posjedovati više lokalnih minimuma, a početna geometrija može utjecati na dobiveno rješenje, odnosno minimum prema kojem iteracija konvergira. Prema tome, potrebna je evaluacija dobivenih rezultata, pri čemu je, ukoliko vektor reziduala u konvergiranom rješenju nije zadovoljavajući, potrebno krenuti od drugačije inicijalne geometrije, ili izmijeniti samu topologiju sistema.

## 2.2 Matrični opis ravnoteže sustava

Neka je  $m$  broj elemenata sustava te neka je  $n$  broj točaka sustava. Matrica  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  predstavlja povezanost elemenata u sustavu te time jedinstveno definira topologiju sustava: ako je element  $k$  određen točkama  $i, j$  red matrice koji odgovara tom elementu definiran je kao:

$$C_k^i = 1, C_k^j = -1, C_k^h = 0, \quad i < j, \quad h \neq i \wedge j \quad (1)$$

Također, neka je  $q$  vektor gustoća sile definiran kao

$$q = L^{-1}p \quad (2)$$

Pri čemu vektor  $p$  predstavlja vektor sila u pojedinim elementima sustava, a matrica  $L$  jest dijagonalna matrica čije vrijednosti na dijagonali odgovaraju duljinama pojedinih elemenata sustava. Radi lakšeg zapisa, definira se generalni vektor slobodnih koordinata čvorova, generalni vektor koordinata fiksnih čvorova (ležajeva), te generalni vektor vanjskih sila opterećenja redom kao:

$$\beta = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}, \beta_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix}, p_{ext} = \begin{bmatrix} p_{ext\ x} \\ p_{ext\ y} \\ p_{ext\ z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Gdje  $x, y, z$  predstavljaju koordinate svih čvorova sustava;  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  predstavljaju vektore koordinata slobodnih čvorova,  $x_f, y_f, z_f$  predstavljaju koordinate fiksnih čvorova, te  $p_{ext\ x}, p_{ext\ y}, p_{ext\ z}$  predstavljaju komponente vanjske sile u smjerovima osi Kartezijevog koordinatnog sustava. Fiksni čvorovi odgovaraju ležajevima konstrukcije, te se u njima pojavljuju sile reakcije, dok u ostalim, slobodnim čvorovima, ravnoteža mora biti zadovoljena samim djelovanjima elemenata te vanjskih sila na taj čvor.

Uz navedeni zapis, uvode se matrice  $D, D_f$  i  $A$  opisane kao:

$$D = C^TQC, D_f = C^TQC_f, A = \begin{bmatrix} \bar{C}^T \text{diag}(Cx) \\ \bar{C}^T \text{diag}(Cy) \\ \bar{C}^T \text{diag}(Cz) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Gdje je matrica povezanosti  $C$  rastavljena kao  $C = [C_f \bar{C}]$ , pri čemu  $\bar{C}$  predstavlja dio matrice koji odgovara slobodnim čvorovima, a  $C_f$  fiksnim čvorovima. Uz uvedene termine, globalni sustav jednadžbi ravnoteže moguće je izraziti kao:

$$D \otimes I^{\{3 \times 3\}} \beta = p_{ext} - D_f \otimes I^{\{3 \times 3\}} \beta_f \quad (5)$$

Ili

$$Aq = p_{ext} \quad (6)$$

Valja navesti da ova 2 matrična zapisa predstavljaju isti sustav izražen oko 2 različite varijable, konkretno koordinata slobodnih čvorova  $\beta$  i gustoće sila sustava  $q$ .

### 2.3 Pronalaženja sila u sustavu

Ako pretpostavimo vektor željenih sila u sustavu kao  $\bar{p}$ , iz sljedećeg izraza dobiva se vektor prototipa gustoća sile definiran kao:

$$\bar{q} = L^{-1}\bar{p} \quad (7)$$

U pravilu, prototip vektora gustoća sila  $\bar{q}$  ne zadovoljava uvijete ravnoteže sila u slobodnim čvorovima za inicijalno definiranu geometriju sustava, izraženu jednadžbom (6), stoga se u slobodnim čvorovima stvara vektor reziduala sile definiran kao:

$$A\bar{q} - p_{ext} = -r \quad (8)$$

Obzirom da je geometrija zadana koordinatama  $x, y, z$  kroz trajanje ovog koraka fiksna, vrijedi pretpostavka o superpoziciji sila, pa je tako moguće tražiti promjenu vrijednosti vektora gustoća sila  $\Delta q$ , čiji će rezultirajući vektor sila poništiti vektor reziduala koji postoji u inicijalno zadanoj geometriji

$$A\Delta q = r \quad (9)$$

Matrica  $A$  u pravilu je "široka" pravokutna matrica koja predstavlja linearni operator u sustavu sa više varijabli nego jednadžbi (obzirom da su sustavi koji pri-

hvaćaju prednaponske sile statički neodređeni, ili u posebnom slučaju koji će biti spomenut kasnije, sustavi sa singularnom matricom  $A$ ).

Prema tome, sustav (9) u pravilu prihvaća beskonačno mnogo rješenja. Dekompozicijom po singularnim vrijednostima matrice  $A$  dobiva se:

$$SVD(A) = USW^T \quad (10)$$

Matrica  $S$  na glavnoj dijagonali sadrži singularne vrijednosti  $\sigma$ , dok su ostali članovi  $=0$ . Matrice  $U$  i  $W$  rastavljene su kao  $U = [U_h \ U_s]$ ,  $W = [W_h \ W_s]$ , na način da  $U_h$ ,  $W_h$  predstavljaju prvih  $h$  stupaca matrica  $U$  i  $W$ , a  $U_s$  i  $W_s$  predstavljaju ostale stupce, pri čemu  $h$  predstavlja rank matrice  $A$ .

Uz navedeno, hiperploha kojom su definirana rješenja sustava (9) definirana je jednadžbom

$$\Delta q = \sum_{i=1}^h \frac{u_i^T r}{\sigma_{ii}} w_i + W_s \alpha \quad (11)$$

Gdje su  $u_i$ ,  $w_i$  vektori-stupci matrica  $U$  i  $W$ ,  $\sigma_{ii}$  singularne vrijednosti sa glavne diagonale  $S$ , dok je  $\alpha$  vektor neodređenih koeficijenata.

Za detaljniju raspravu o primjeni SVD dekompozicije na predmetnu problematiku, i vezu sa rješenjima najmanjim kvadratima, čitatelj se upućuje na [12].

S obzirom na prisustvo beskonačno mnogo rješenja sustava, primjenjuje se metoda najmanjih kvadrata, koja traži  $\Delta q$  sa najmanjom vektorskom normom:

$$\Delta q = \arg \min \|\Delta q\|_2^2 \quad (12)$$

Kao rješenje jednadžbe dobiva se

$$\Delta q = A^T (AA^T)^{-1} r \quad (13)$$

$$q = \tilde{q} + \Delta q \quad (14)$$

$$p = L q \quad (15)$$

Geometrijski, dobiveno rješenje najmanjim kvadratima predstavlja ortogonalnu projekciju točke pretpostavljenog (u ovom slučaju odabranog prototipa vektora gustoća sila) rješenja na hiperravninu svih prihvatljivih rješenja sustava. Za detaljniju raspravu o primjeni metode najmanjih kvadrata čitatelj se upućuje na [13]

## 2.4 Optimizacija oblika obzirom na željene sile u elementima

Za sve elemente u sistemu određuju se, kao kriterij optimizacije, željene sile u elementima. Nadalje, ako do sada predstavljenu proceduru zapišemo kao funkciju koja kao ulazni podatak uzima vrijednosti koordinata slobodnih točaka  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , a vraća vrijednosti sila u elementima (zbog jednostavnosti zapisa koordinate slobodnih točaka objedinjene su u jedan vektor  $\beta(3)$ ):

$$p(\beta) = Lq = L\tilde{q} + LA^T (AA^T)^{-1} r \quad (16)$$

Moguće je formirati i funkciju reziduala kao razlike sila iz  $i$ -tog koraka te zadanih vrijednosti sila

$$f(\beta) = p(\beta) - \bar{p} \quad (17)$$

Minimizacijom reziduala postavlja se problem optimizacije. Obzirom da je broj koordinata slobodnih čvorova u pravilu veći od broja elemenata, problem se formuliра kao problem nelinearnih najmanjih kvadrata.

Lokalnom linearizacijom funkcije  $f(\beta)$  oko točke  $\beta^{[i]}$  u koraku  $i$ , minimum reziduala se traži iterativno Gauss-Newtonovom metodom generalnog oblika:

$$\beta^{[i+1]} = \beta^{[i]} - G^{[i]+} f(\beta)^{[i]} \quad (18)$$

$$G^{[i]} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( f(\beta)^{[i]} \right) \quad (19)$$

Gdje  $G^{[i]+}$  označava pseudo-inverznu tangentnu matricu  $G^{[i]}$ . Za dobivanje tangentne matrice,  $G$  korištena je numerička derivacija (metoda konačnih razlika u 2 točke sa korakom  $u$  prema naprijed).

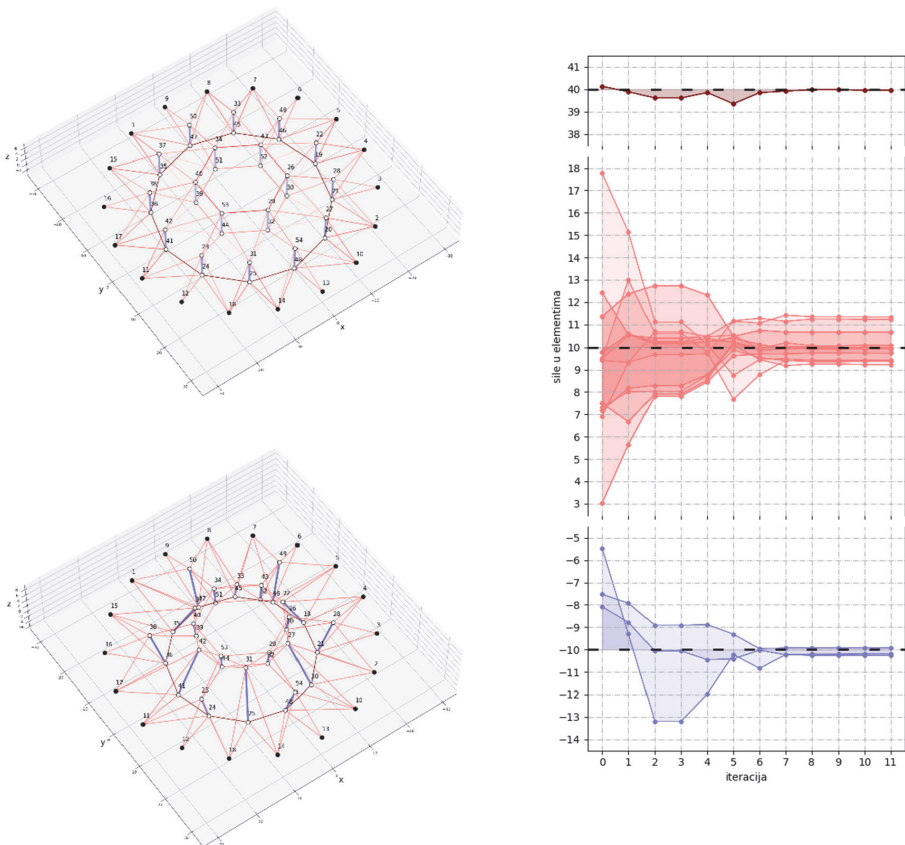
Obzirom na probleme konvergencije klasične Gauss Newton metode, koja je ovisna o odabiru početne geometrije i koliko je ona bliska geometriji u kojoj se ostvaruje minimum razlike ostvarenih i željenih sila, u praksi se često koriste poboljšani algoritmi uz pretraživanje po pravcu (eng. line search) ili regije povjerenja (trust region) koji kontroliraju veličinu koraka u svakoj iteraciji. Za navedeni problem korišten je Levenberg-Marquard algoritam, koji klasičnu Gauss-Newton metodu modificira dodatnim terminom  $\lambda$ , gdje je  $\lambda$  faktor prigušenja, a  $I$  identitetna matrica

$$\beta^{[i+1]} = \beta^{[i]} - \left( G^{[i]T} G^{[i]} + \lambda I \right)^{-1} G^{[i]T} f(\beta)^{[i]} \quad (20)$$

Pri čemu se faktor prigušenja odabire obzirom na uspješnost prošlog koraka u pogledu smanjenja ili povećanja reziduala. Na taj način klasična Gauss Newton metoda prigušena je dodatnim terminom, koji osigurava da se metoda približi rješenju, uz cijenu usporenja metode. U područjima loše konvergencije će prema tome nadvladati termin prigušenja, dok će u područjima sa visokom stopom konvergencije prednosti imati termini iz klasične Gauss Newton metode. Na taj način metoda nema problema sa konvergencijom, ali se produljuje trajanje optimizacije. U numeričkim primjerima za rješenje problema nelinearnih najmanjih kvadrata korištena je Scipy procedura `scipy.optimize.least_squares`, primjenom Levenberg-Marquardt algoritma. Kao kriteriji za zaustavljanje iteracije odabire se norma promjene reziduala u uzastopnim koracima kao  $\Delta f(\beta)$ ,  $\min = 0.005$

### Numerički primjer 1: Kiewit tensegrity kupola

U sljedećem primjeru provedena je optimizacija tensegrity kupole s okulusom, željene sile su specificirane kao 10 u užadima, -10 u štapovima, i 40 u glavnom donjem pojasu kupole.



Slika 1. Početna geometrija (lijevo gore), optimizirana geometrija (lijevo dolje), dijagram optimizacije (desno)



### 2.4.1 Slučaj sa singularnom matricom A

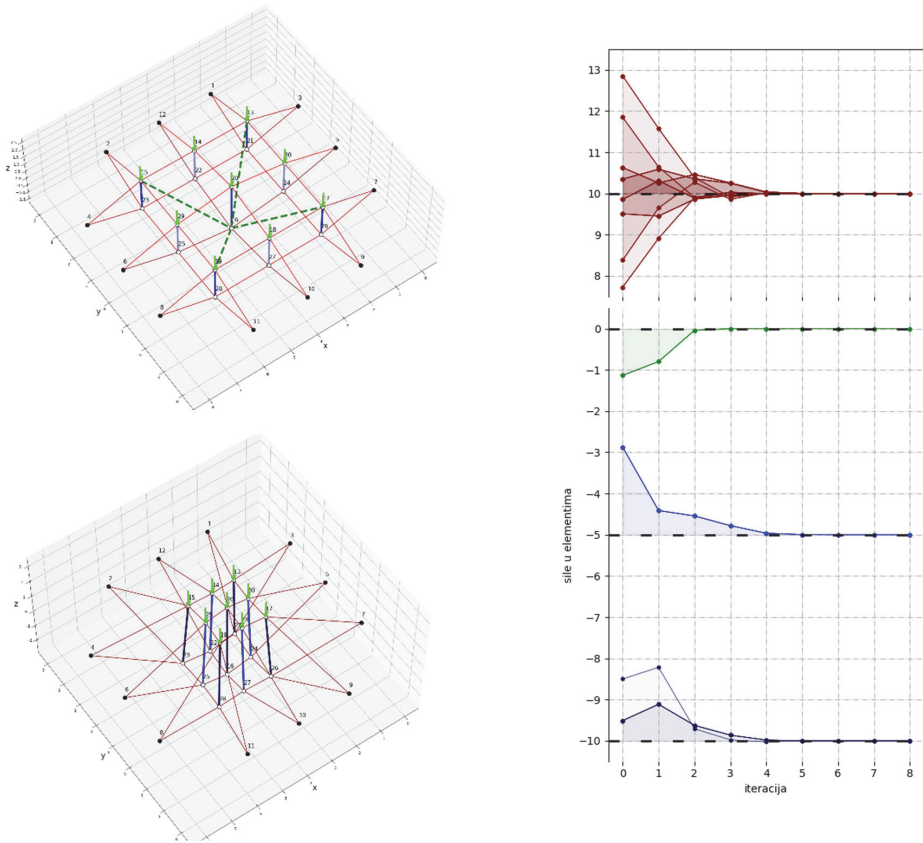
Do sada pokazani primjeri bazirani su na regularnim statički neodređenim sustavima, čija nezavisna rješenja prednapona proizlaze iz stupnja statičke neodređenosti. Međutim, mogući su i sustavi čija matrica A jest singularna, pri čemu svaka singularna vrijednost dobivena u SVD dekompoziciji matrice A dovodi do 1 nezavisnog rješenja prednapona i odgovarajućeg trenutnog mehanizma sustava [12] Obzirom da derivacija reziduala potrebna za optimizacijski proces sadrži derivaciju pseudoinverzne matrice, moguće je očekivati lošu kondicioniranost u postupku rješenja blizu točaka u kojima matrica mijenja rank. Prema tome, u ovakvim slučajevima predlaže se modifikacija početne geometrije sistema dodatnim virtualnim elementima, u kojima se potom u optimizacijskom procesu zahtjeva sila =0. Kako optimizacijski proces ne mora nužno ostvariti rješenje sa rezidualom 0, potrebno je osigurati da virtualni članovi u konačnom rješenju ne posjeduju sile. Usvojena je metoda množenja reziduala koeficijentom važnosti, pri čemu se formula u (20) augmentira težinskom matricom W, koja predstavlja dijagonalnu matricu sa koeficijentima važnosti pojedinih objekta optimizacije (članova vektora reziduala).

$$\beta^{[i+1]} = \beta^{[i]} - \left( G^{[i]T} W G^{[i]} + \lambda I \right)^{-1} G^{[i]T} W f(\beta)^{[i]} \quad (21)$$

Moguće je na ovaj način zadati važnost ostvarenja pojedinog od ciljeva optimizacije naspram preostalih ciljeva. U konkretnom slučaju, iščezavanje sila u virtualnim elementima obavezno mora biti ostvareno kako bi optimizacija bila uspješna, dok ostvarenje željenih sila u ostalim (realnim) štapovima ne mora biti stopostotno zadovoljeno, te u mnogo realnih slučajeva niti ne može biti. Prema tome, neka su članovi reziduala virtualnih štapova primarni ciljevi optimizacije, sa koeficijentom važnosti 10 000, dok su ostali ciljevi optimizacije množeni sa koeficijentom važnosti od 1. Valja napomenuti da kod ovakvog nametanja ostvarenosti objekta funkcije, koeficijent važnosti nužnih objekta treba biti dovoljno velik da nadjača ostale ciljeve u optimizaciji, ali opet ne prevelik kako ne bi doveo do loše kondicioniranosti tangentne matrice.

#### Numerički primjer 2: dvoslojna prednapeta mreža

U sljedećem primjeru provedena je optimizacija dvoslojne prednapete mreže razdijeljene štapovima. Željene sile u užadima su 10, a u štapovima -5, te -10, također sustav je opterećen vanjskim djelovanjem u iznosu od -1 po z osi u gornjim čvorovima konstrukcije. Kako je matrica A singularna, uvedena su 4 virtualna elementa koji osiguravaju dobru kondicioniranost tangentne matrice u optimizaciji.



**Slika 2. Početna geometrija (lijevo gore), optimizirana geometrija (lijevo dolje), dijagram optimizacije (desno)**

Numerički primjeri pokazuju iznose pojedinih reziduala po elementima kroz tijek optimizacije. U oba primjera zadržano je značajno smanjenje norme reziduala u odnosu na početnu konfiguraciju. Karakteristike proračuna neovisne su o mjerilu geometrije te o mjernoj jedinici sile, pa su jedinice u numeričkim primjerima prikazane kao bezdimenzionalne

### 3 Zaključak

Predstavljena je metoda za optimizaciju oblika tensegrity konstrukcija. Metoda je temeljena na uspostavljanju funkcije reziduala kao razlike traženih sila i onih ostvarenih u trenutnoj konfiguraciji sistema. Sile u koraku iteracije dobivene su, između beskonačno mnogo rješenja, metodom najmanjih kvadrata. Napominje se da funkcije reziduala mogu imati više lokalnih i globalnih minimuma, pa stoga

izložena metoda spada u metode lokalne optimizacije, a dobivena rješenja mogu ovisiti o polaznoj geometriji sustava. Za traženje globalnog minimuma, moguća je primjena raznih algoritama za globalnu optimizaciju, no sama tematika globalne optimizacije predstavlja vrlo široko područje za sebe te time ostaje van opsega ovog rada. Predložena metoda dopušta definiranje rubnih uvjeta kao fiksnih ležajeva, kao i vanjskih sila koje djeluju u čvorovima sistema.

Nadalje, iako je rad fokusiran na objektiv optimizacije u pogledu željenih sila u štapovima, napominje se da je primjenom principa izloženih u radu, moguće formulirati i druge objektivne optimizacije, kao i dodavati razna ograničenja na sam optimizacijski proces. Kao nastavak istraživanja, predlaže se detaljnije razmatranje analitičke formulacije tangentne matrice u procesu optimizacije, dodatna razmatranja u pogledu uvjeta konvergencije i ostvarivosti ciljeva optimizacije, zadanje drugačijih ciljeva optimizacije, dodatne modifikacije samog optimizacijskog algoritma za predmetni problem, te razmatranje karakteristika konstrukcija dobivenih predloženom optimizacijom (izvedivost, stabilnost, krutost, itd.)

## Literatura

- [1] Yuan, X., Chen, L., Dong, S., Prestress design of cable domes with new forms, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 9, pp. 2773–2782, 2007.
- [2] Malerba, P. G., Patelli, M., Quagliaroli, M., An Extended Force Density Method for the form finding of cable systems with new forms, *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 42, no. 2, pp. 191–210, 2012.
- [3] Schek, H.-J., The force density method for form finding and computation of general networks, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 3, pp. 115–134, 1974.
- [4] Bletzinger, K.-U., Ramm, E., A General Finite Element Approach to the form Finding of Tensile Structures by the Updated Reference Strategy, *International Journal of Space Structures*, vol. 14, no. 2, pp. 131–145, 1999.
- [5] Bletzinger, K.-U., Dieringer, F., Wüchner, R., The eXtended Updated Reference Strategy for the form finding of tensile structures, *VI International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, STRUCTURAL MEMBRANES*, pp. 154–165, 2013.
- [6] Vassart, N., Motro, R., Multiparametered Formfinding Method: Application to Tensegrity Systems, *International Journal of Space Structures*, vol. 14, no. 2, 1999.
- [7] Zhang, J. Y., Ohsaki, M., Tensegrity Structures, Form Stability and Symmetry, vol. 6. Nagoya: Springer, 2014.

- [8] Gan, B. S., *Computational Modeling of Tensegrity Structures: Art, Nature, Mechanical and Biological Systems*. Koriyama: Springer International Publishing, 2019.
- [9] Tran, C. H., Lee, J., Advanced form-finding for cable-strut structures, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, no. 14–15, pp. 1785–1794, 2010.
- [10] Tran, H., Lee, J., Lee, K., Advanced form-finding for cable dome structures, in *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*, Valencia, 2009.
- [11] Tejani, G., Savsani, V., Bureerat, S., *Truss Topology Optimization: A Review*, *Scholar's Press*, 2018.
- [12] Pellegrino, S., Structural computations with the Singular Value Decomposition of the equilibrium matrix, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30., pp. 3025–3035, 1993.
- [13] Golub, G. H., van Loan, C. F., *Matrix Computations*, 4<sup>th</sup> ed. Baltimore: JHU Press, 2013.