

## Zaostajanje posmika kod čeličnih nosača

Hrvoje Vukoja<sup>1</sup>, doc.dr.sc. Anđelko Vlašić<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Metal-Projekt d.o.o., [hvukoja1992@gmail.com](mailto:hvukoja1992@gmail.com)

<sup>2</sup> Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za konstrukcije, [vlastic@grad.hr](mailto:vlastic@grad.hr)

### Sažetak

Prilikom globalne analize čeličnih nosača oslonjenih kontinuirano preko više ležajeva (otvorenog ili zatvorenog poprečnog presjeka) potrebno je u obzir uzeti posmičnu deformabilnost pojasa proračunom sudjelujuće širine – utjecaj "zaostajanja posmika" (eng. *shear-lag*). U radu su uspoređene vrijednosti koeficijenta sudjelujuće širine duž nosača izračunate izrazi- ma iz norme HRN EN 1993-1-5 te numeričkom analizom metodom konačnih elemenata. Za slučaj kontinuiranog opterećenja uzduž cijeloga nosača značajnije odstupanje postoji samo na drugom ležaju, dok je slučaj opterećenja parom koncentriranih sila dao manje vrijednosti sudjelujuće širine u poljima nosača. Ovaj rad je uvod u daljnje istraživanje ponašanja nosača sa zakrivljenim pojasom, za što su dane i početne smjernice.

*Ključne riječi: čelični nosač, posmična deformabilnost, zaostajanje posmika, zakrivljeni pojas*

## Shear lag of steel girders

### Abstract

During global analysis of multi-span girders resting on several bearings (of open or closed cross section), it is necessary to take into account the shear flexibility of the zone by calculating the effective width, i.e. the shear lag effect. The values of shear lag coefficient along girders, calculated via expressions given in HRN EN 1993-1-5, are compared with the corresponding values obtained by numerical analysis using the finite element method. For the case of continuous load along the entire girder, a significant deviation exists at the second bearing only, while lower effective width values were obtained in girder span zones in the case of loading with a pair of concentrated forces. This paper is an introduction to further research of girders with curved flanges, for which initial guidelines are given in this paper.

*Key words: steel girder, shear flexibility, shear lag, curved flange*

## 1 Uvod

Kod savijanja nosača sa zadovoljenim uvjetom  $L/h < 5$  pretpostavlja se da vrijedi Bernoullijeva hipoteza ravnih presjeka - za linearno elastičan materijal ravni poprečni presjeci prilikom deformacije ostaju ravni iz čega proizlazi i linearna raspodjela normalnih naprezanja po visini poprečnog presjeka. Ova hipoteza u potpunosti je zadovoljena samo za slučaj "čistog" savijanja, za konstantnu vrijednost momenta savijanja uzduž nosača, pri čemu ne djeluje poprečna sila. Kod slučaja opterećenja nosača poprečnim silama, uslijed posmičnih naprezanja dolazi do posmične deformacije poprečnih presjeka, čime se narušava hipoteza ravnih presjeka.

Međutim, za spomenuti omjer visine i duljine nosača pokazano je da se utjecaj deformacije uslijed posmičnih naprezanja/deformacija može zanemariti te se u većini slučajeva proračun naprezanja i deformacija nosača može svesti na problem jedno-dimenzionalnog elementa s pripadnim fleksijskim krutostima. Pritom se, promatramo li tankostijene otvorene i zatvorene poprečne presjeke, zanemaruje plošno ponašanje hrptova i pojasnica te njihova posmična deformabilnost.

Promatramo li nosač opterećen poprečnim silama u ravnini svojih hrptova, savijanjem hrptova te uzdužnim pomacima vlakana na spoju s pojasnicom, u pojasnici dolazi do uzdužnih normalnih i horizontalnih posmičnih naprezanja pa samim time i poprečnih normalnih naprezanja (uslijed spriječenih pomaka).

Raspodjela posmičnog opterećenja na pojasnicu uzduž nosača uzima se kao da je afina dijagramu posmičnih sila, iako zbog posmične deformabilnosti pojasnice dolazi do preraspodjele momenata savijanja, a samim time i poprečnih sila duž nosača. Ne treba zaboraviti da i promjenjiva fleksijska krutost duž nosača ("pokrivanje" momenata savijanja prilikom dimenzioniranja nosača) dovodi do preraspodjele momenata savijanja.

Promatramo li sad posebno pojasnicu kao zaseban disk opterećen samo rubnim posmičnim opterećenjem, za relativno niske vrijednosti omjera (polovice) širine i duljine raspona (razmaka između nultočaka momentnog dijagrama) nosača praktički se može pretpostaviti jednolika raspodjela uzdužnih naprezanja po širini pojasnice (pojasnica se ponaša kao štap, a ekscentričnost je opterećenja zanemarena), dok je za veće omjere ( $b_o/L_e > 0,02$  - slika 2.a i 2.b, prema HRN EN 1993-1-5) potrebno odrediti raspodjelu uzdužnih naprezanja po širini pojasnice. Uslijed posmične deformabilnosti pojasnice treba očekivati da će vlakna pojasnice bliža hrptu biti opterećena od onih udaljenijih - ova pojava naziva se "zaostajanje posmika" (eng. *shear-lag*).

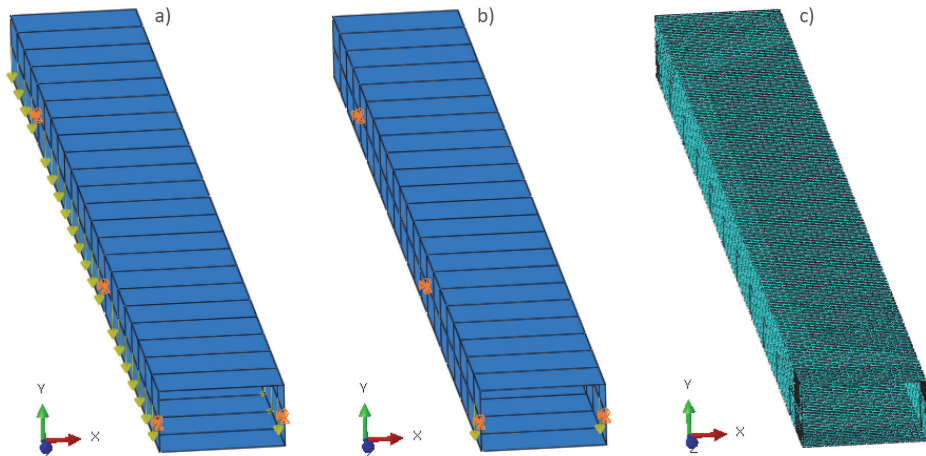
Stoga se uvodi koncept sudjelujuće širine  $b_{eff} = \beta \cdot b_o$ , kojim se posmična podatljivost pojasnice uzima u obzir isključivanjem dijela pojasnice udaljenijeg spoju s hrptom, uz zadovoljenje uvjeta ravnoteže uzdužne sile integriranjem naprezanja po širini pojasnice.

Proračunom širokopojasnih nosača, ne uzimajući u obzir zaostajanje posmika, nalazimo se na strani nesigurnosti, budući da je velika mogućnost podcjenjivanja vrijednosti naprezanja u spoju pojasnice s hrptom. Samim time podcjenjujemo i deformacije poprečnog presjeka te postoji mogućnost da se dio nosača plastificira bez naše namjere.

Budući da se čelični nosači velikih raspona uglavnom sastavljaju od vitkih limova, postoji problem stabilnosti uslijed djelovanja tlačnih naprezanja (osim ako se radi o poprečnom presjeku klase 3 ili manje prema HRN EN 1993-1-1). Takvi vitki limovi imaju uzdužne ukrute (otvorene ili zatvorene) koje sprječavaju izbočivanje i čija se uzdužna krutost prilikom proračuna sudjelujuće širine uzima u obzir izračunom koeficijenta ortotropije pojasnice  $\alpha_0$ . Uzdužne ukrute povećavaju samo udužnu krutost pojasnice, no ne i posmičnu, pa se time povećava efekt zaostajanja posmika kod takvih nosača.

## 2 Numerička analiza kontinuiranog čeličnog nosača

Izrađen je numerički model čeličnog nosača (programski paket Simulia Abaqus) sandučastog poprečnog presjeka, kontinuiranog preko raspona duljine 8,0 m i 10,0 m te s prepustom duljine 4,0 m (model kao u HRN EN 1993-1-5). Nosač je zgloбно oslonjen na točkastim ležajevima u sredini hrpta te opterećen: a) kontinuiranim opterećenjem u ravnini hrptova uzduž cijelog nosača i b) "hodajućim" parom koncentriranih sila (po jedna na svakom hrptu) koje se kreću uzduž nosača. Poprečni presjek nosača je sanduk visine hrpta 1000 mm te debljine 10 mm i širine pojasa 2000 mm s debljinom 20 mm. Model je diskretiziran linearnim plošnim konačnim elementima veličine 100 x 100 mm. Budući da je model geometrijski i materijalno linearan, velike relativne vitkosti elemenata nemaju utjecaj na konačan traženi rezultat, jer koeficijent sudjelujuće širine ovisi samo o relativnim vrijednostima naprezanja u poprečnom presjeku (sva naprezanja mogu se izraziti kao postotak maksimalnog naprezanja).



Slika 1. a) Numerički model - rubni uvjeti i kontinuirano opterećenje; b) Prikaz jednog od položaja (uzduž nosača) "hodajućeg" para koncentriranih sila; c) Prikaz mreže konačnih elemenata

Iz rezultata numeričke analize izračunani su koeficijenti sudjelujuće širine duž nosača koristeći ravnotežu uzdužnih sila integriranjem diskretnih vrijednosti normalnih naprezanja (uzdužnih sila) u konačnim elementima:

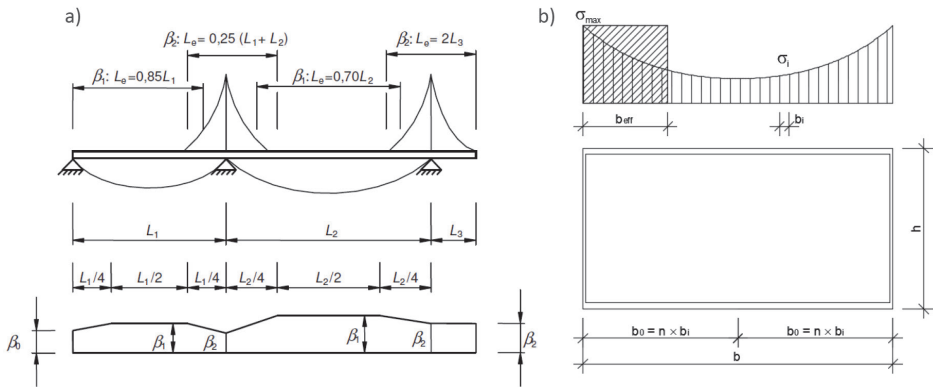
$$\sum_{i=1}^n N_z = \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{z,i} \times \frac{b_0}{n} \right) \times t = \sigma_{z,\max} \times b_{\text{eff}} \times t \quad (1)$$

Iz toga proizlazi

$$\beta = \frac{b_{\text{eff}}}{b_0} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{z,i}}{\sigma_{z,\max} \times n} \quad (2)$$

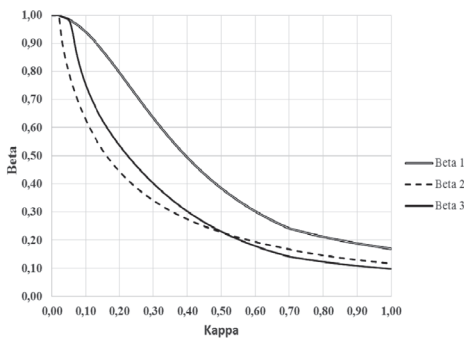
gdje su:

- $\beta$  - koeficijent sudjelujuće širine
- $b_{\text{eff}}$  - sudjelujuća širina pojasnice poprečnog presjeka nosača
- $b_0$  - širina polovice pojasnice poprečnog presjeka nosača
- $n$  - broj konačnih elemenata u širini polovice pojasnice
- $\sigma_{z,i}$  - normalno naprezanje (prema globalnom koordinatnom sustavu) u konačnom elementu
- $\sigma_{z,\max}$  - maksimalno normalno naprezanje (u elementu uz spoj pojasnice i hrpta)
- $N_z$  - uzdužna sila konačnog elementa
- $t$  - debljina pojasnice (i plošnog konačnog elementa).

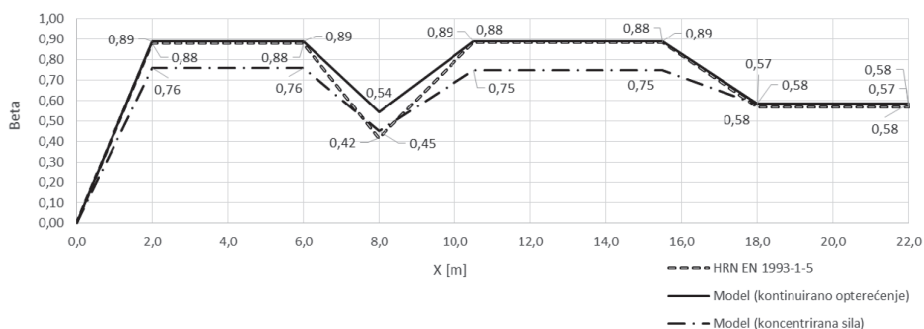


Slika 2. a) Statički sustav i raspodjela sudjelujućih širina [2]; b) "Stvarna" i zamjenska raspodjela naprezanja u pojasu

Dobiveni rezultati uspoređeni su s vrijednostima dobivenim izrazima prema [2], čiji je grafički prikaz zavisnosti sudjelujućih širina o  $\kappa$  (omjer  $b_0/L_e$  pomnožen koeficijentom ortotropije  $\alpha_0$ ) vidljiv na slici 3. U obzir su uzete samo vrijednosti dobivene integriranjem normalnih naprezanja poprečnih presjeka s maksimalnim/minimalnim momentima savijanja. Na rubnim poprečnim presjecima (početak i kraj nosača) sudjelujuće širine nisu tražene budući da su vrijednosti uzdužnih naprezanja zanemarive (moment savijanja je praktički jednak nuli) te se njihovim integriranjem dobivaju besmislene vrijednosti  $\beta$ . Vrijednosti sudjelujuće širine također nisu tražene ni u poprečnim presjecima između ekstrema funkcija momenata savijanja (blizu područja u kojima se nalaze nultočke), koji mogu biti djelomično u vlak u i tlaku, jer zbog preraspodjele uzdužnih naprezanja uslijed zaostajanja posmika (a time i preraspodjele momenata savijanja) ne postoji idealna nultočka, tj. poprečni presjek okomit na os nosača u kojem su sva uzdužna naprezanja jednaka nuli. Integracijom naprezanja suprotnih predznaka (vlak i tlak) tada bi se također dobile besmislene vrijednosti  $\beta$ .



Slika 3. Koeficijenti sudjelujuće širine u ovisnosti o omjeru  $b_0/L_0$  prema [2]



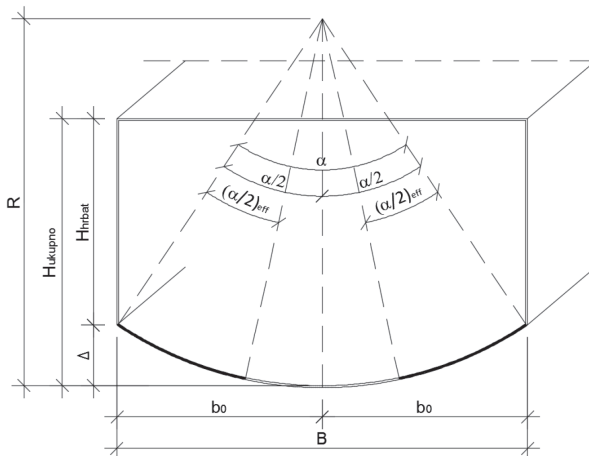
**Slika 4. Usporedba vrijednosti sudjelujuće širine duž nosača koristeći rezultate dobivene numeričkom analizom modela s vrijednostima dobivenim izrazima iz [2] za isti nosač**

Numeričkom analizom nosača za slučaj kontinuiranog opterećenja pokazana su mala odstupanja od vrijednosti dobivenih prema [2]. Osjetno odstupanje postoji samo na drugom ležaju nosača (22 %), što može biti posljedica preraspodjele momenata savijanja uslijed zaostajanja posmika te povećanog naprezanja u spoju hrpta s pojasnicom neposredno iznad ležaja. Za slučaj "hodajućeg" para koncentriranih opterećenja izračunane su vrijednosti sudjelujućih širina uzduž cijelog nosača za sve položaje para sila. Na temelju familije krivulja određena je anvelopa s minimalnim vrijednostima sudjelujuće širine uzduž nosača (najveći efekt zaostajanja posmika). Vrijednosti u poljima nosača su 15 % manje nego za slučaj kontinuiranog opterećenja zbog velikih posmičnih deformacija te "skoka" u dijagramu posmičnih sila na mjestu djelovanja koncentrirane sile - efekt sličan ponašanju nosača na ležaju. Usporedba vrijednosti sudjelujuće širine duž nosača koristeći rezultate dobivene numeričkom analizom modela s vrijednostima dobivenim izrazima iz [2] za isti nosač prikazana je na slici 4.

### 3 Smjernice za daljnje istraživanje - analiza nosača sa zakrivljenim pojasom

Poseban slučaj je širokopojasni nosač sa zakrivljenim pojasnicama, često korišten u mostogradnji zbog povoljnog aerodinamičkog oblika te iz estetskih razloga, slika 4. Kod takvog nosača, uz pretpostavku da je omjer  $L/h$  takav da se hrptovi ponašaju u skladu s hipotezom ravnih presjeka, postoji prirast/pad naprezanja po širini pojasa ne samo zbog posmične deformabilnosti pojasa, već i zbog udaljavanja/približavanja vlakana pojasa neutralnoj osi, ovisno o tome radi li se o konkavnoj ili konveksnoj zakrivljenosti. U praksi se uglavnom susrećemo s konveksnim zakrivljenostima donjih pojasa nosača, pa je potrebno pronaći zakon raspodjele uzdužnih naprezanja po širini pojasnice, uzimajući u obzir parametre zakrivljenosti pojasa, njegove širine te raspone nosača. Za niske vrijednosti radijusa zakrivljenosti pojasa utjecaj

će smanjenja zaostajanja posmika (udaljavanjem od spoja s hrptom povećava se i udaljenost od neutralne osi) biti znatan, a za visoke vrijednosti (približavanje formi ravnog pojasa) utjecaj će smanjenja biti neznatan. Stoga se uvodi pojam "sudjelujućeg kuta" pojasa (definira dio luka koji će ostati "aktivan"), no u ovom slučaju, osim što mora biti zadovoljen uvjet ravnoteže uzdužnih sila, uzdužna naprezanja efektivnog dijela pojasa (svedenog na maksimalno naprezanje pojasa) moraju imati jednak rezultirajući moment savijanja na proizvoljnu točku kao i integrirana naprezanja dobivena numeričkom analizom plošnih elemenata.



Slika 5. Skica poprečnog presjeka nosača sa zakrivljenim donjim pojasom (radijus zakrivljenosti  $R$ )

## 4 Zaključak

U radu su uspoređene vrijednosti sudjelujuće širine izračunane izrazima iz [2] te numeričkom analizom pomoću metode konačnih elemenata. Za slučaj kontinuiranog opterećenja duž cijelog nosača vrijednosti se sudjelujuće širine uglavnom (uz relativno mala odstupanja) podudaraju s analitički dobivenim vrijednostima iz [2] (osim na drugom ležaju). Međutim, slučaj opterećenja parom koncentriranih sila u poljima dao je manje vrijednosti sudjelujuće širine od onih dobivenih za slučaj kontinuiranog opterećenja zbog velikih posmičnih deformacija te "skoka" u dijagramu posmičnih sila na mjestu djelovanja koncentrirane sile. Ovaj rad uvod je u daljnje istraživanje širokopojasnih nosača, ali sa zakrivljenim pojasima, gdje po širini pojasnice dolazi do nejednolike raspodjele normalnih naprezanja ne samo zbog utjecaja zaostajanja posmika, već i zbog udaljavanja od neutralne osi poprečnog presjeka. U računalnom programu provest će se parametarska analiza nosača s različitim raspodjelama, širinama i radijusima zakrivljenosti pojasa.

## Literatura

- [1] Ivanyi, M., Skaloud, M.: *Steel plated structures*, Springer-Verlag Wien, 1995, Originally published by CISM, Udine, 1995.
- [2] European Committee for Standardization (CEN): *EN 1993-1-5 (2006): Design of steel structures - Part 1-5: General rules - Plated structural elements*, 2006.
- [3] Abaqus v.6.7-6.12.: *Analysis Users Manual & Theory manual*, Dassault Systemes Simulia Corp.
- [4] Johansson, B., Maquoi, R., Sedlacek, G., Müller, C., Beg, D.: *Commentary and worked examples to EN 1993-1-5 „Plated structural elements“*, European Communities, Italy, 2007.
- [5] Guggenberger, W.: *Flächentragwerke - Vorlesungsunterlagen*, Technische Universität Graz, Graz, 2016.
- [6] Timoshenko, S., Goodier, J.N.: *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company, Inc., USA, 1951.
- [7] Šimić, V.: *Otpornost materijala 1*, Sveučilište u Zagrebu, Školska knjiga, Zagreb, 2002.