DOI: https://doi.org/10.5592/CO/PhDSym.2018.03

# Statističke metode u geotehnici

**Nicola Rossi[1],** prof.dr.sc. **Meho Saša Kovačević[2]**

[1] Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za geotehniku, *nrossi@grad.hr*

[2] Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za geotehniku, *msk@grad.hr*

## Sažetak

U geotehničkoj praksi se još uvijek često provode isključivo determinističke analize zbog većeg iskustva u njihovoj primjeni i determinističkom određivanju parametara modela. Suprotnost njima su statističke metode kojima se nastoji kvantificirati varijabilnost i nepouzdanost pojedinih varijabli. Budući da se geotehnika bavi upravo takvim materijalima, pogoduje primjeni statistike koja se sve više koristi praksi. Kao i determinističke metode, tako i statističke imaju određene nedostatke kada se primjenjuju same ili prevladavaju u analizama. Zbog toga bi jednakomjerno sudjelovanje obiju metoda u analizama rezultiralo optimalnim rezultatima. U radu je dan pregled nekih od najkorištenijih statističkih metoda u geotehničkoj praksi.

*Ključne riječi: statističke metode, geotehnika, analiza pouzdanosti*

# Statistical methods in geotechnics

## Abstract

Deterministic analyses are still often used in geotechnical engineering because great experience in their use, and in selection of deterministic model parameters, has so far been acquired. Their opposites are statistical methods the aim of which is to quantify variability and uncertainty of various variables. Since geotechnics studies precisely such materials, it favours the use of statistics that is increasingly used in practice. Just like deterministic methods, statistical methods also have their shortcomings when used by themselves or when prevailing in analyses. That is why an equal participation of the two methods in analyses would yield optimum results. An overview of some statistical methods that are most commonly used in geotechnical engineering is also provided in the paper.

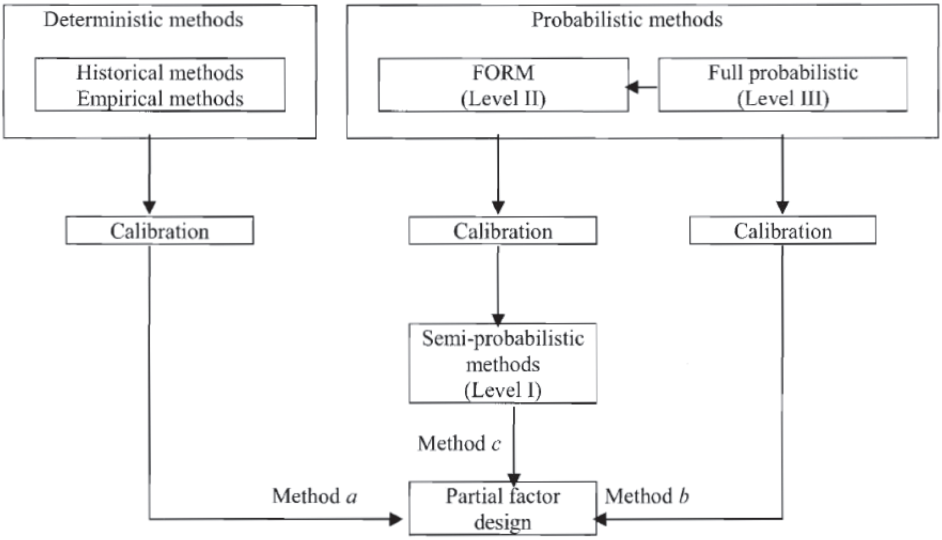
*Key words: probabilistic methods, geotechnical engineering, reliability analysis*

# 1 Uvod

Geotehnika je grana građevine koja se bavi materijalima s izrazitom razinom nesigurnosti u smislu parametara koji ih opisuju. U praksi je često potrebno predvidjeti ponašanje velikog volumena tla ili stijene iz često vrlo ograničenog broja pokusa na malim uzorcima, čime se dobivaju grubo aproksimirani modeli tla zbog nepoznate stratigrafije i parametara tih materijala. Osim toga, uz varijabilnost parametara materijala zbog heterogenosti, zbog poteškoća u dopremi neporemećenog uzorka u laboratorij, pripremi relevantnog uzorka za ispitivanje te često nedostupnih sofisticiranijih ispitivanja, pogreške se mogu dogoditi u cijelom procesu od istražnih radova do završetka provođenja pokusa. Stoga konačni rezultati mogu i među uzorcima istog tla znatno varirati. Usprkos svemu tome, u geotehničkom inženjerstvu se još uvijek vrlo često primjenjuje deterministički pristup za odabir relevantnih parametara materijala te provedbe analiza. Takav pristup se odnosi na odabir konzervativnih vrijednosti parametara materijala koje, zbog mogućih nesigurnosti, treba dodatno umanjiti primjenom parcijalnih faktora prema Eurokodu 7, za različite proračunske pristupe. Na taj se način postiže određena razina sigurnosti koja je, čak i u slučaju predimenzioniranja konstrukcija, opravdana zbog nesigurnosti povezanih s tlom i stijenom. S ciljem optimizacije rješenja, odnosno projektiranja isplativijih konstrukcija uz zadovoljavajuću razinu sigurnosti, moguća je primjena statističkih metoda. Upravo spomenuta varijabilnost parametara i nesigurnosti u dobivene rezultate uvelike pogoduju primjeni statističkih metoda za njihovu analizu. Dakle, cilj analiza pouzdanosti (eng. *reliability design*) jeste osigurati zadovoljavajuće ponašanje projektiranog sustava unutar granica ekonomičnosti [1].

Parcijalni faktori za djelovanja, otpornosti ili parametre materijala dobivaju se na više načina. Osnovna razlika je da je jedan pristup deterministički, a drugi probabilistički. Deterministički pristup određivanja parcijalnih faktora bazira se na povijesnom i empirijskom pristupu, a probabilistički bazira na statističkim metodama (slika 1.). Parcijalni faktori definirani Eurokodom dobiveni su prije svega primjenom determinističkog pristupa [2].

Iako je faktor sigurnosti moguće dobiti i statističkim metodama, takav faktor vrijedi samo za specifičnu proračunsku situaciju za koju je izveden. Dakle, faktor sigurnosti primjerice od 1,5 ne daje dosljednu razinu pouzdanosti pri korištenju u različitim slučajevima. S druge strane, statističkim metodama je moguće definirati traženu razinu pouzdanosti koju želimo uvijek postići te pomoću nje izvesti potrebnu otpornost da bi se ona postigla [1]. U ovom radu je dan pregled nekih od statističkih metoda koje se koriste u geotehničkoj praksi, s ciljem uzimanja u obzir varijabilnosti parametara materijala u proračunima.




**Slika 1. Metode izračuna parcijalnih faktora sigurnosti [2]**

## 2 Prednosti i nedostatci statističkih metoda

Statističkim metodama moguće je definirati traženu razinu pouzdanosti koja ostaje konzistentna pri različitim proračunskim situacijama, gdje bi jedinstveni faktor sigurnosti davao dvije različite vrijednosti pouzdanosti. U proračune je preporučeno, osim čisto statističkih metoda, primijeniti i prethodna iskustva na sličnim zahvatima. U slučaju da se gradi konstrukcija bez prethodnih iskustava, ili u slučaju da iskustva nisu dobra, statističkim metodama moći će se i dalje provesti analize s izračunom razine pouzdanosti, dok empirijski pristup neće biti moguć [1].

S druge strane kod statističkih metoda postoji potreba za definiranjem određenih statističkih parametara svake varijable koja ulazi u proračun, iako zbog malog broja dostupnih podataka često nisu poznati. U tom se slučaju mogu jedino pretpostaviti na temelju prethodnih iskustava ili aproksimirati iz dostupnih podataka.

Kako sume slučajnih varijabli, prema središnjem graničnom teoremu, naginju prema normalnoj raspodjeli, ona se može koristiti za aproksimaciju velikog broja pojava u prirodi, što se odnosi i na parametre tla, opterećenja, otpornosti itd. [3, 4]. Provođenje statističkih analiza također zahtijeva jača računala koja moraju biti u stanju provesti tisuće do stotine tisuća analiza, što je mnogo zahtjevnije od determinističkog rješavanja istog problema.

# 3 Osnovna terminologija

U ovom su poglavlju dani opisi nekih pojmova vezanih za statistiku, a koji se ovdje upotrebljavaju. Svaki događaj ili parametar s čijom vrijednosti postoji određena razina nesigurnosti, potrebno je zadati na adekvatan način. To se postiže slučajnim varijablama (eng. *random variable*) kao funkcijama koje opisuju tu varijaciju, u potpunosti određenima svojom slikom i raspodjelom. U slučaju da su vrijednosti dviju slučajnih varijabli ovisne jedna o drugoj, ovisnost se opisuje pomoću koeficijenta korelacije. Koeficijent korelacije (eng. *coefficient of correlation*) je stoga mjera linearne ovisnosti između dviju slučajnih varijabli. Može poprimiti vrijednosti u rasponu od [-1,1], gdje vrijednost 0 označava odsutnost linearne ovisnosti, a 1 i -1 postojanje jake linearne ovisnosti među varijablama. Pri tome negativne vrijednosti razumijevaju rast vrijednosti jednog parametra s padom drugog, a pozitivne rast vrijednosti jednog s rastom drugog parametra. Kada se više slučajnih varijabli poveže u jednu funkciju, dobiva se funkcija slučajnih varijabli koja se, ako opisuje granično stanje nekog događaja, naziva funkcija graničnog stanja (eng. *limit state function*). Dakle, takva funkcija kao argumente prima slučajne varijable koje definiraju kriterij stabilnosti određenog zahvata, a označava se sa $g(x) = y$. Funkcija je definirana na način da $y > 0$ označava zadovoljavajuće ponašanje/ishode, a $y < 0$ nezadovoljavajuće.
Za opisivanje rasapa distribucije vjerojatnosti mogu se upotrijebiti različiti parametri, među kojima je koeficijent varijacije (eng. *coefficient of variability - cov*), bezdimenzijski parametar definiran jednadžbom (1).
Indeks pouzdanosti (eng. *reliability index*) je koeficijent koji može poslužiti za ocjenu pouzdanosti problema na sličan način kao što to radi deterministički faktor sigurnosti. U većini slučajeva očekivane i zahtijevane vjerojatnosti otkazivanja poprimaju vrlo male vrijednosti (npr. $10^{-5}$), što može otežati interpretaciju rezultata. S obzirom na to da postoji veza između indeksa pouzdanosti i vjerojatnosti otkazivanja, indeksom pouzdanosti je moguće prikazati rezultate na razumljiviji način. Originalni izraz indeksa pouzdanosti dan je jednadžbom (2).

$$cov = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|} \tag{1}$$

$$\beta = \frac{\mu_X}{\sigma_X} \tag{2}$$

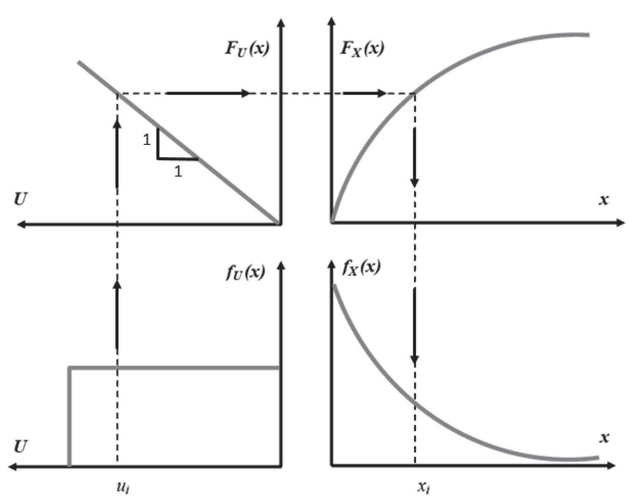
gdje su:

$\sigma_x$ - standardna devijacija slučajne varijable X
$\mu_x$ - očekivana vrijednost slučajne varijable X
cov - koeficijent varijacije
$\beta$ - indeks pouzdanosti.

# 4 Statističke metode

## 4.1 Monte Carlo Simulation (MCS) i Latin Hypercube Sampling (LHS)

Monte Carlo metoda zasniva se na slučajnom odabiru velikog broja mogućih vrijednosti parametara na temelju definiranih distribucija vjerojatnosti za svaki od njih. Prije analize je potrebno definirati kriterij graničnog stanja kojim se, za svaku vrijednost ili skup vrijednosti, determinističkim pristupom provjerava zadovoljava li konstrukcija uvjete stabilnosti. Procedura za provođenje analiza Monte Carlo metodom razumijeva odabir distribucije vjerojatnosti slučajnih varijabli, definiranje granica uzorkovanja varijabli, te provođenja velikog broja analiza sa slučajno odabranim vrijednostima [5]. Kako bi se uzela u obzir međusobna ovisnost nekih parametara materijala zbog realnijeg odabira slučajnih uzoraka, koristi se koeficijent korelacije. Slučajno odabrani broj druge varijable se korigira prema tom koeficijentu nakon odabira vrijednosti prve varijable. Uzorkovanje se izvodi tako da se nasumice odabere broj ($u_i$) na intervalu [0,1] s uniformnom distribucijom, koji odgovara vjerojatnosti da će slučajna varijabla poprimiti vrijednosti manje od nekog broja ($x_i$), ovisno o kumulativnoj distribuciji slučajne varijable. Dakle, inverznom funkcijom se pronalazi vrijednost slučajne varijable ($x_i$) za koju vrijedi $u_i = P[X \le x_i]$. Postupak je grafički prikazan na slici 2. Na kraju se vjerojatnost otkazivanja definira kao omjer broja analiza koje su dale nezadovoljavajući rezultat i ukupnog broja provedenih analiza.




**Slika 2. Grafički prikaz određivanja vrijednosti slučajne varijable ovisno o slučajnom broju i kumulativnoj distribuciji [5] $f_U(x)$, $f_X(x)$ - distribucije vjerojatnosti slučajnih varijabli U i X; $F_U(x)$, $F_X(x)$ - funkcije kumulativne distribucije slučajnih varijabli U i X; $u_i$, $x_i$ - vrijednosti slučajnih varijabli U i X**

Razina pouzdanosti metode raste s brojem uzorkovanja, a s porastom broja uzorkovanja raste zahtjevnost i vrijeme proračuna. Broj potrebnih simulacija također raste s porastom zahtijevane razine pouzdanosti same metode, porastom broja slučajnih varijabli te smanjenjem očekivane vjerojatnosti otkazivanja. Zbog toga je ova metoda praktično primjenjiva za rješavanje jednostavnijih problema. Budući da broj ponavljanja ovisi o različitim parametrima te utječe na zahtjevnost proračuna, jednadžbama (3) i (4) može se okvirno izračunati broj potrebnih simulacija za određeni problem. Statistički je izvedena jednadžba (3) koja povezuje broj potrebnih ponavljanja sa zahtijevanom razinom pouzdanosti, standardnom devijacijom koja pripada toj razini pouzdanosti te brojem slučajnih varijabli [6].

$$N_{mc} = \left[ \frac{d^2}{4 \cdot (1-\varepsilon)^2} \right]^m \tag{3}$$

gdje su:

$N_{mc}$ - broj Monte Carlo simulacija

$\varepsilon$ - zahtijevana razina pouzdanosti (0-100 %) u decimalnom obliku

d - standardna normalna devijacija za određenu razinu pouzdanosti; prema Čebiševljevoj nejednakosti

m - broj slučajnih varijabli.

Još jedna jednadžba po kojoj se može pretpostaviti broj simulacija je izraz (4), prema [7]:

$$N_{mc} = \left( \frac{d}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1-P}{P} \tag{4}$$

gdje su:

$N_{mc}$ - broj Monte Carlo simulacija

$\alpha$ - prihvatljiva greška (1-$\varepsilon$)

d - standardna normalna devijacija za određenu razinu pouzdanosti

P - vjerojatnost otkazivanja (pretpostavka).

Kako bi se odstranili problemi s potrebnim velikim brojem ponavljanja, odnosno umanjila zahtjevnost metode i povećala pouzdanost za isti broj ponavljanja, razvijene su razne metode koje optimiziraju uzorkovanje Monte Carlo simulacije, među kojima je i Latin Hypercube. LHS predstavlja metodu uzorkovanja s multivarijatnom distribucijom slučajnih varijabli koje imaju neku međusobnu ovisnost. Odabir uzoraka se izvodi na način da se distribucija svake varijable podijeli na *n* intervala jednakih vjerojatnosti (broj intervala mora biti jednak za svaku varijablu). Zatim se na svakom intervalu bira uzorak takav da on jedini leži u svojoj hiperravnini poravnatoj s koordinatnim osima. Dakle svaki uzorak se bira pamteći sve prethodno odabrane uzorke, čime se optimizira uzorkovanje što znatno ubrzava i smanjuje zahtjevnost simulacija.

## 4.2 Metoda Point Estimate (PE)

Koristi se za numeričku aproksimaciju prvog, drugog i trećeg momenta funkcija slučajnih varijabli, pomoću funkcije graničnog stanja i momenata pojedinih slučajnih varijabli. Ideja je da se kontinuirane slučajne varijable aproksimiraju ekvivalentnim diskretnim varijablama s istim vrijednostima momenata. Tako se procjenjuju lokacije točaka najpovoljnijih za provođenje numeričke integracije funkcije, tzv. Gaussove točke integracije, metodama Gaussove kvadrature. Ova je metoda stoga primjena Gaussove kvadrature u svrhe određivanja momenata slučajne funkcije. U većini slučajeva proračun se provodi u dvije točke. Za slučaj dvije ili više varijabli pretpostavlja se da su njihove distribucije simetrične te one mogu ili ne moraju biti u međusobnoj ovisnosti (koeficijent korelacije). Svaka slučajna varijabla se normalizira čime se ostvaruje srednja vrijednost u ishodištu koordinatnog sustava. Kada se odrede po dvije točke svake distribucije, odredi se $2^n$ točaka (*n* je broj varijabli) koje se nalaze na svakoj mogućoj kombinaciji prethodno određenih točaka. Izraz (5) daje očekivanu vrijednost funkcije Y na potenciju m (momenti funkcije graničnog stanja), pri čemu su: P - težinski koeficijenti koji ovise o točkama u kojima se evaluira podintegralna funkcija; $y_i$ - vrijednost funkcije Y u točki $x_i$.

$$E\left[Y^m\right] \approx \sum P_i \cdot y_i^m \tag{5}$$

Nedostatak metode je taj da će, ako bude veći broj slučajnih varijabli, broj točaka integracije postati prevelik za praktične svrhe. Napravljene su razne modifikacije metode kojima se umanjuje broj potrebnih točaka integracije s $2^n$ na 2n+1 ili 2n, svaka sa svojim prednostima i nedostatcima [8, 9].

## 4.3 First Order Second Moment (FOSM)

Naziv ove metode proizlazi iz toga što koristi proširenje funkcije Talyorovim redom prvog stupnja za određivanje prvog i drugog momenta funkcije, odnosno očekivanja i varijancije, samo pomoću prvog i drugog momenta slučajnih varijabli. Da bi se odredilo očekivanje i standardna devijacija neke funkcije slučajnih varijabli $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i)$, trebalo bi poznavati raspodjelu te funkcije. Kako to u praksi često nije poznato već su poznata samo očekivanja i varijacija slučajnih varijabli $x_i$, ovom metodom je moguće aproksimirati raspodjelu funkcije y te dobiti tražene vrijednosti za funkciju slučajnih varijabli. Momenti višeg stupnja (trećeg i četvrtog) koji opisuju asimetričnost (eng. *skewness*) i zaobljenost (eng. *kurtosis*) distribucije se zanemaruju. Proširenjem neke funkcije redom prvog stupnja ona se linearizira u odabranoj točki. U ovom slučaju se ta točka odnosi na očekivanje funkcije, a funkcija koja se aproksimira je funkcija graničnog stanja (y). Linearizacija funkcije u točki $\mu_y$ može dati velike greške u slučaju izrazito nelinearnih funkcija. Također, metoda u određenim slučajevima daje i različite rezultate za različite formulacije istog problema [5], kako je prikazano u tablici 1. [4]. Da bi se pomoću opisane metode odredila vjerojatnost sloma ili indeks pouzdanosti, potrebno je unaprijed definirati funkciju graničnog stanja koja označava granicu prihvatljivog ponašanja sustava. Indeks pouzdanosti može služiti kao mjera sigurnosti, slično faktoru sigurnosti, pri čemu daje više informacija jer je izravno povezan s vjerojatnošću sloma te raspisivanjem može dati uvid u parametre koji najviše utječu na stabilnost (tablica 1.).

**Tablica 1. Koeficijenti pouzdanosti za različite definicije istog slučaja**

| y | β | |
|---|---|---|
| R - S | $\frac{F-1}{\sqrt{F^2 \cdot cov_R^2 + cov_S^2}}$ | R – otpornosti<br>S – djelovanja<br>$F = \frac{\mu_R}{\mu_S}$<br>$\mu_R$ – očekivana vrijednost R<br>$\mu_S$ – očekivana vrijednost S |
| $\frac{R}{S}-1$ | $\frac{F-1}{F\sqrt{cov_R^2 + cov_S^2}}$ | |

## 4.4 First/Second Order Reliability Metode (FORM, SORM)

Unaprjeđenje FOSM metode napravili su Hasofer i Lind (1974.), u kojemu su predložili invarijantno rješenje za indeks pouzdanosti [4]. U ovom slučaju se funkcija graničnog stanja linearizira u točki najveće vjerojatnosti otkazivanja, umjesto u njenoj očekivanoj vrijednosti. Da bi se ta točka pronašla, potrebno je najprije svaku slučajnu varijablu standardizirati pretvaranjem u jediničnu normalnu slučajnu varijablu kojoj je očekivanje 0, a standardna devijacija i varijacija 1, kako je definirano jednadžbom (6).

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \tag{6}$$

Formira se nova funkcija graničnog stanja (g(Z)) čija je najbliža točka ishodištu, od ishodišta udaljena za vrijednost indeksa pouzdanosti β. Ta se točka često naziva najvjerojatnijom točkom otkazivanja te se proširenje funkcije radi u toj točki [5]. U slučaju da ploha sloma definirana funkcijom graničnog stanja nije linearna, onda je raznim metodama optimizacije ili iterativnim metodama potrebno naći minimalnu udaljenost plohe od ishodišta. Tada je indeks pouzdanosti funkcija koja ovisi o jediničnim normalnim slučajnim varijablama Z:

$$\beta(Z) = \left(Z^T \cdot Z\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Vjerojatnost otkazivanja se zatim može izračunati prema vezi s indeksom pouzdanosti:

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) \tag{8}$$

gdje je $\Phi$ kumulativna funkcija standardne normalne distribucije.

Slično kao i kod FOSM metode, FORM metoda daje dobre rezultate za približno linearne funkcije u području oko točke najmanje udaljenosti, dok u slučaju izrazito nelinearne plohe graničnog stanja može dati pogrešne rezultate.
SORM metoda razlikuje se od prve utoliko što se funkcija graničnog stanja aproksimira proširenjem drugog reda umjesto prvog, čime se poboljšava aproksimacija funkcije, a definicija same funkcije je ista kao kod FORM. U geotehničkoj praksi se pokazalo da SORM metoda daje vrlo slične rezultate FORM metodi [4].

## 5 Zaključak

Postoji niz statističkih metoda za primjenu u geotehničkoj praksi, a koje se mogu primijeniti u raznim fazama projektiranja, od samog početka pri planiranju istražnih radova do analiza konačnih rezultata. Metode opisane u ovom radu su neke od najčešće upotrebljavanih. Prilikom provođenja proračuna potrebno je definirati određen broj slučajnih varijabli koje se odnose na bilo koje parametre čiji ishodi ili vrijednosti nisu sa sigurnošću poznate. Njihovom kombinacijom definira se funkcija granične ravnoteže kojom se, bez obzira na korištenu metodu, procjenjuje vjerojatnost pojave nezadovoljavajućih rezultata. U geotehničkoj praksi se još uvijek često izbjegavaju statističke metode, a provode se, iskustveno zadovoljavajuće dobre, determinističke analize. Određene metode mogu poslužiti za jednostavne analize (FOSM, PE, FORM, MCS…), a druge imaju mogućnost primjene i u sofisticiranijim analizama (MCS, SORM…). Kombinacije analitičkih i statističkih metoda mogu se napraviti na više razina - od primjene jednostavnih analitičkih zajedno s jednostavnim statističkim, do primjene kompleksnih analitičkih i statističkih, te bilo kakvih ostalih kombinacija kompleksnosti jednih i drugih analiza [10]. Čak i prilikom upotrebe statističkih metoda u praksi, često se koriste krajnosti gdje se sve usmjeri na jedan tip analize pa su i rezultati uvjetovani jednim ili drugim tipom. Ujednačeno uključivanje analitičkih i probabilističkih metoda u analizu geotehničkog problema dalo bi optimalne modele u kojima bi se uključivanjem iskustva moglo utjecati na rezultate proračuna, a da se pri tome i dalje obuhvate sve željene nesigurnosti vezane za problem.

## Literatura

[1] Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, (ed. Fenton, G. A.), Lecture notes for the Workshop on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Logan, Utah, 1997.

[2] Eropean Committee for Standardization: EN 1990:2002+A1:2005, Eurocode - Basis of structural design, 2005.

[3] Fenton, G. A., Griffiths, D. V.: Review of Probability Theory, Random Variables, and Random Fields (Chapter), Probability Methods in Geotechnical Engineering, (ur. Griffiths, D. V., Fenton, G. A.), Springer Wien New York, Udine, 2007.

[4] Nadim, F.: Tools and Strategies for Dealing with Uncertainty in Geotechnics (Chapter), Probability Methods in Geotechnical Engineering, (ur. Griffiths, D. V., Fenton, G. A.), Springer Wien New York, Udine, 2007.

[5] Choi, S.K., Grandhi, R.V., Canfield, R.A.: Reliability-based Structural Design. London: Springer, 2007.

[6] GEO-SLOPE International, Ltd.: Stability Modeling with GeoStudio, 1200, 700 - 6th Ave SW, Calgary, AB, Canada, 2017.

[7] Gibson, W.: Probabilistic methods for slope analysis and design, Australian Geomechanics Journal, 46 (2011) 3, pp. 1-10.

[8] Christian, J.T., Baecher, G.B.: The point estimate method with large number of variables, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 26 (2002) 15, pp. 1515-1529.

[9] Christian, J.T., Baecher, G.B.: Point-Estimate Method as Numerical Quadrature, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 125 (1999) 9, pp. 779-786.

[10] Kaggwa, W.S., Kuo, Y.L.: Probabilistic techniques in geotechnical modelling - Which one should you use?, Australian Geomechanics Journal, 46 (2011) 3, pp. 21-28.