

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

**O METODAMA PRORAČUNA TROZGLOBNIH I SLIČNIH
STATIČKI ODREĐENIH RAVNINSKIH SISTEMA**

ZAVRŠNI RAD IZ PREDMETA
GRAĐEVNA STATIKA 1

Karla Choudhury, 0082060176

Mentor: doc. dr. sc. Petra Gidak

Ak. God. 2020./2021. Zagreb, 2021.

SADRŽAJ

1. Uvod.....	1
2. Osnovni pojmovi.....	1
3. Analitička metoda	
3.1. Općenito o analitičkoj metodi.....	2
3.2. Primjer 1.	3
3.3. Primjer 2.	10
3.4. Primjer 3.	16
4. Grafička metoda	
4.1. Općenito o grafičkoj metodi.....	23
4.2. Primjer 4.	26
5. Superpozicijska metoda	
5.1. Općenito o superpozicijskoj metodi.....	36
5.2. Primjer 5.	38
5.3. Primjer 6.	46
6. Zaključak.....	52

1. Uvod

U ovom završnom radu opisane su metode proračuna statički određenih trozglobnih i sličnih ravninskih sistema. Kao glavna skupina navedenih sistema izdvajaju se trozglobni okviri na koje ćemo se bazirati. Isti sustav riješen je pomoću tri metode (analitička, grafička i mješovita – grafoanalitička metoda) uz popratna objašnjenja proračuna.

2. Osnovni pojmovi

Prije svega, potrebno je definirati pojmove koji se nalaze u samom naslovu ovoga rada.

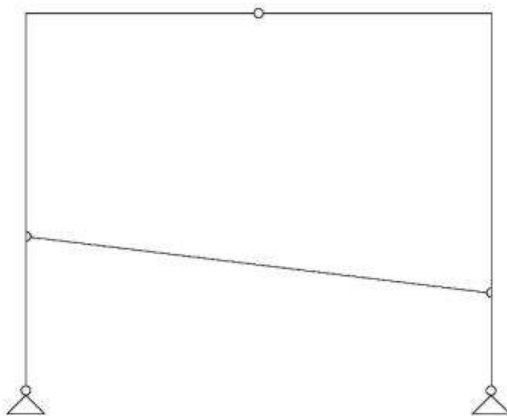
Metode proračuna

Metode proračuna koje ćemo ovdje opisati su: analitička, grafička i grafoanalitička metoda. Cilj svake metode je dobiti iznos unutarnjih sila i reakcija sistema koji se riješava. Kako bismo naglasili važnost sila koje se javljaju kao reakcija sustava opterećenog vanjskim djelovanjima možemo reći da je za njihovo određivanje razvijeno više računalnih programa koji olakšavaju rad, nama (budućim) inženjerima građevine. No, naš rad ne završava samo utipkavanjem parametara u računalo, već moramo imati mogućnost provjere točnosti i logičnosti dobivenih podataka.

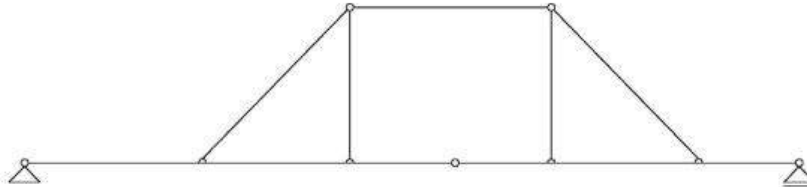
Trozglobni sistemi

Trozglobni sistemi, kako samo ime nalaže, sadrže tri zgloba. To je sistem od dva tijela gdje svako tijelo ima svoj zglob na koji se oslanja tj. ležajnu zglobno nepomičnu vezu i treći (srednji) zglob koji spaja ta dva tijela. S obzirom da se u praksi koriste kao nosivi sustavi hala, sportskih dvorana i mostova važno je znati „o metodama proračuna“ ovakvih sistema. Trozglobni nosači mogu biti trozglobni okviri ili trozglobni lukovi, a diskovi mogu biti punostijeni ili rešetkasti.

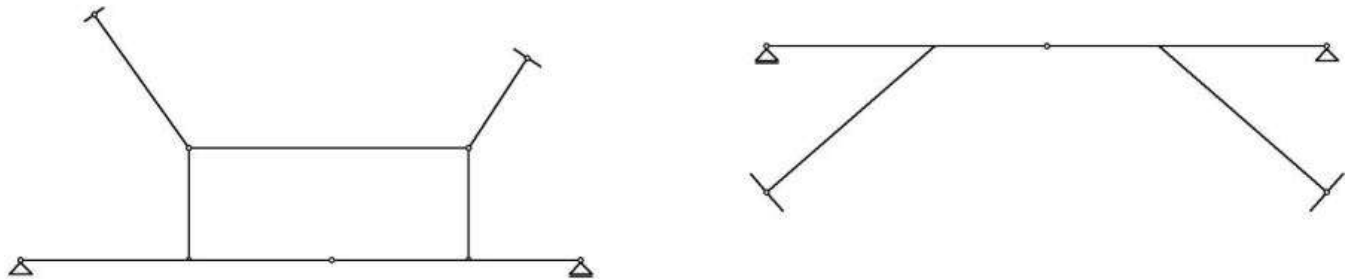
Kao primjer sustava sličnog trozglobnom, izdvaja se trozglobni sustav sa zategom. Zatega se dodaje kako bi se horizontalne sile mogle uravnotežiti u samom nosaču, a to je potrebno kada podloga na kojoj se nalazi nosač nema dovoljno dobre uvjete za prihvat horizontalnih sila. U tom slučaju mijenja se i izgled statičkog sustava na način da ležaj na jednom od dva diska prelazi u klizni, a drugi ostaje nepomični u slučaju pojave aktivnih horizontalnih sila. I naravno, dodaje se zatega koja se zglobno spaja za oba diska.



Ovdje možemo spomenuti i ojačane grede. Sastoje se od ravne grede i sistema zglobno povezanih štapova s gornje ili donje strane koji imaju funkciju povećanja nosivosti i smanjenja progiba. Sile unutar štapova prenose se unutar sustava. Ovaj sustav sličan je trozglobnim sistemima jer je zglobno oslonjena na podlogu i ima zglob u nekom presjeku ojačanog dijela kako bi se postigla statička određenost.



Ovještene i poduprte grede spadaju u istu skupinu sustava. Sastavljene su od dvije ravne grede spojene zglibom, a na krajevima su oslonjene na podlogu pomoću pomičnih i nepomičnih ležajeva. Iznad ili ispod grede se također nalazi sustav štapova kao i kod ojačanih greda, ali razlika je u tome što se kod ovješanih (ili poduprtih) greda sile u štapovima prenose izvan sustava.



Trozglobni i slični nosači statički su određeni. Statički određeni nosači definiraju se kao geometrijski nepromjenjive strukture s minimalno potrebnim i pravilno raspoređenim vezama koje osiguravaju geometrijsku nepromjenjivost strukture. To znači da se nepoznate unutarnje sile i reakcije mogu odrediti pomoću tri osnovna uvjeta ravnoteže (cijelog sistema i/ili njegovih dijelova). Za takav sustav postoji samo jedno ravnotežno stanje s obzirom na položaj, smjer i iznos zadanoga opterećenja.

3. Analitička metoda

3.1. Općenito o analitičkoj metodi

Kako je već spomenuto, trozglobni sustavi su statički određeni i mogu se riješiti s 3 osnovne jednačbe ravnoteže. No, kod trozglobnih nosača imamo 4 nepoznate reakcije u ležajnim zglibovima i 2 nepoznate reakcije u srednjem zglibu, što čini 6 nepoznanica: u svakom zglibu se nalazi vertikalna i horizontalna reakcija. Taj problem rješava se upravo činjenicom da su to sustavi od dva diska, a srednji zglob nam omogućuje da svaki od njih promatramo posebno i da za svaki postavimo 3 jednačbe ravnoteže koje u konačnici čine 9 jednačbi što je i više nego dovoljno za određivanje 6 nepoznanica. Naime, ako je

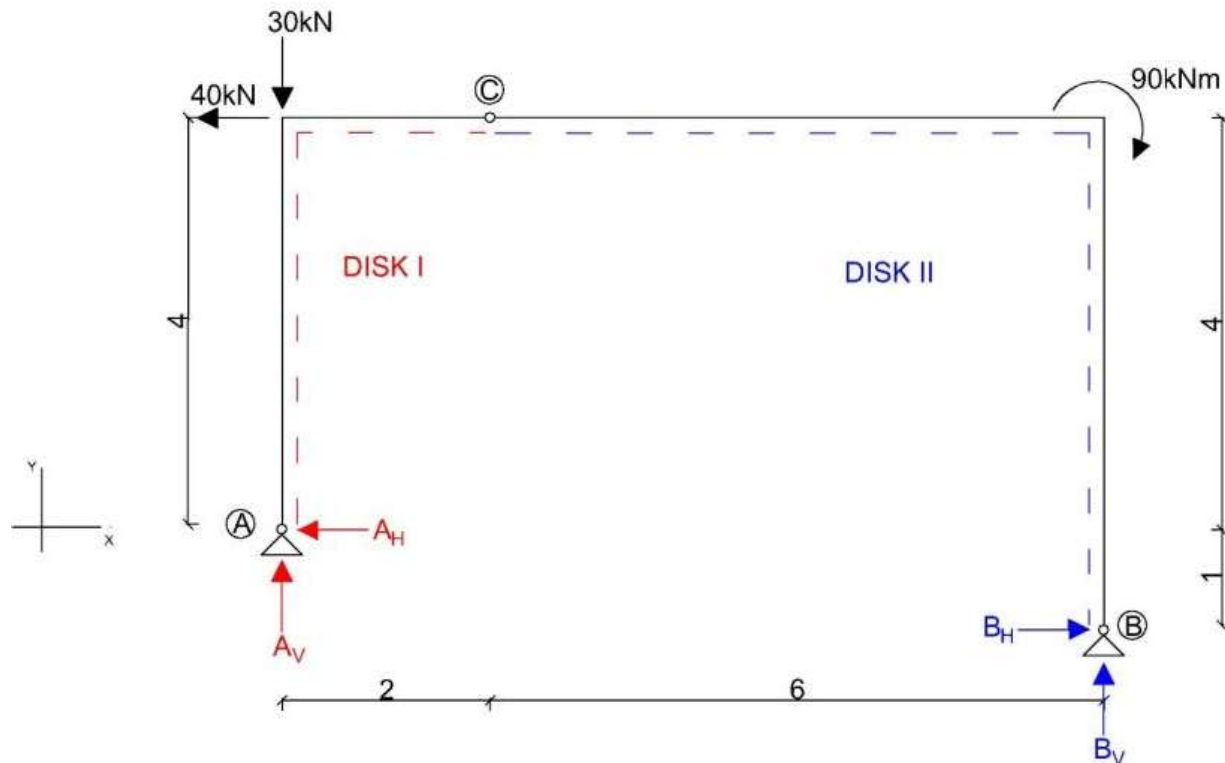
statički sistem u ravnoteži, tada je i svaki njegov dio također u ravnoteži (pa i onaj najmanji – infinitezimalni).

Tijek proračuna prikazan je na sljedećem primjeru.

3.2. Primjer 1.

Najprije moramo uočiti dva diska: disk I i disk II. Sustav promatramo kao cjelinu ili kao odijeljene diskove, zavisno o potrebi. Položaje zglobova označimo s A, B i C tako da AC čini disk I, a CB čini disk II.

Određivanje sila u vanjskim vezama i u srednjem zglobu: znamo da se reakcije javljaju u ležajevima, ali ne znamo njihovu vrijednost, pravac djelovanja i orijentaciju. Kako bi olakšali postupak rješavanja, pravac djelovanja dijelimo na horizontalno i vertikalno djelovanje, a smjer djelovanja proizvoljno odaberemo.



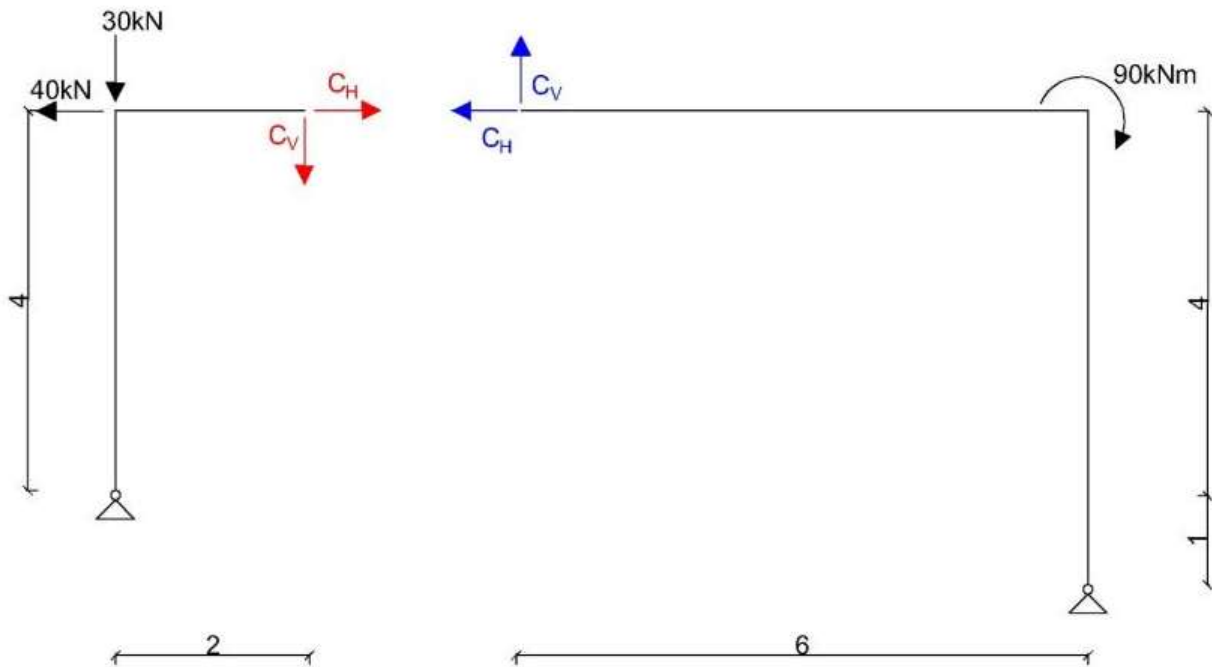
Radimo sumu momenata u točki B za cijeli sustav tako da dobijemo izraze za reakciju A:

$$\sum M_B^{I+II} = 0 \quad - 90 + 30 \cdot 8 + 40 \cdot 5 + A_H \cdot 1 - A_V \cdot 8 = 0$$

Potrebna nam je i druga jednadžba koja sadrži iste te nepoznanice. Nju dobijemo iz sume momenata oko točke C, ali samo za disk I.

Odvajanjem diska I u zglobu C od diska II javlja se dodatna nepoznata reakcija kojoj je nepoznat pravac djelovanja pa ćemo njezine komponente podijeliti na horizontalni i vertikalni smjer. Tako dobivamo

datne dvije nepoznanice u zglobu C koje ćemo nazvati C_H i C_V . Te sile predstavljaju silu kojom disk I djeluje na disk II. Isto tako, na disku II se pojavljuju sile iste vrijednosti, ali suprotne orijentacije i predstavljaju silu kojom disk II djeluje na disk I.



S obzirom da radimo sumu momenata u točki C, sile C_H i C_V ne ulaze u jednadžbu.

$$\sum M_C^I = 0 \quad 30 \cdot 2 - A_H \cdot 4 - A_V \cdot 2 = 0$$

Na taj način dobijemo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice pomoću kojih određujemo vrijednosti sile A.

$$-90 + 30 \cdot 8 + 40 \cdot 5 + A_H \cdot 1 - A_V \cdot 8 = 0$$

$$30 \cdot 2 - A_H \cdot 4 + A_V \cdot 2 = 0$$

$$A_H = -6,47 \text{ kN}$$

$$A_V = 42,94 \text{ kN}$$

Reakciju B određujemo slično kao i reakciju A: Iz sume momenata u točki A za cijeli sustav - u jednadžbu ulaze nepoznate komponente sile B koje ćemo nazvati B_H i B_V :

$$\sum M_A^{I+II} = 0 \quad -90 + 40 \cdot 4 + B_H \cdot 1 + B_V \cdot 8 = 0$$

Nakon toga, radimo sumu momenata u srednjem zglobu samo za disk II iz koje dobijemo izraze za iste nepoznanice kao u prvoj jednadžbi:

$$\sum M_C^{II} = 0 \quad -90 + B_H \cdot 5 + B_V \cdot 6 = 0$$

Riješavanjem sustava jednadžbi dobijemo vrijednosti komponenti reakcije B:

$$B_H = 33,53 \text{ kN}$$

$$B_V = -12,94 \text{ kN}$$

Nakon što odredimo sve vanjske reakcije, moramo odrediti i reakcije u srednjem zglobu C. To radimo na način da rastavimo diskove. Proizvoljno odaberemo disk i radimo sumu momenata na ležajnom zglobu ili jednostavnije, sumu reakcija po x i y osi uz prethodno definiran koordinatni sustav.

Sumu sila na disku II:

$$F_x^{II} = 0 \quad -33,53 + C_H = 0 \quad (5)$$

$$C_H = 33,53 \text{ kN}$$

$$F_Y^{II} = 0 \quad -12,94 + C_V = 0 \quad (6)$$

$$C_V = 12,94 \text{ kN}$$

Dokazali smo da je za rješavanje svih 6 nepoznanica dovoljno 6 jednadžbi, no važno je napomenuti da to nije jedini mogući postupak. Korištenjem i preostalih jednadžbi možemo dobiti isto rješenje. U ovom slučaju njih ćemo iskoristiti za provjeru. Ustanovimo koje su jednadžbe neiskorištene:

Suma sila po x i y osi za disk I:

$$F_x^I = 0 \quad -40 + C_H - A_H = 0$$
$$-40 + 33,53 - (-6,47) = 0$$

$$F_Y^I = 0 \quad -30 - C_V + A_V = 0$$
$$-30 - 12,94 + 42,94 = 0$$

Suma sila po x i y osi za cijeli sustav:

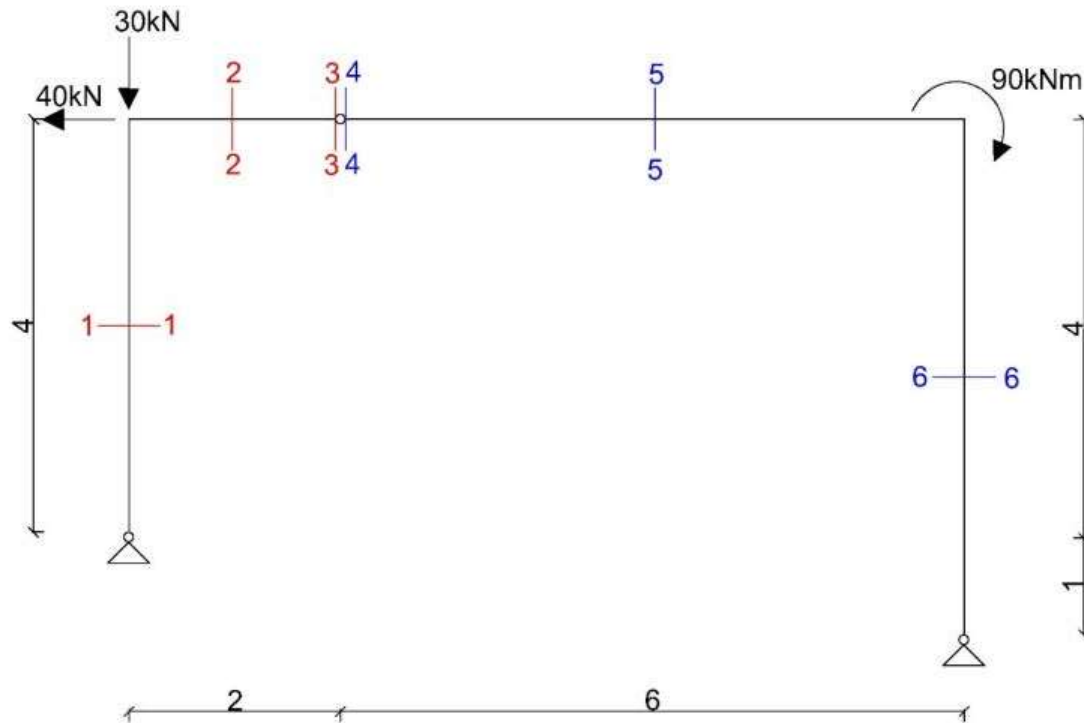
$$F_x^{I+II} = 0 \quad -40 - A_H + B_H = 0$$
$$-40 - (-6,47) + 33,53 = 0$$

$$F_Y^{I+II} = 0 \quad -30 + A_V + B_V = 0$$
$$-30 + 42,94 - 12,94 = 0$$

Sile u poprečnim presjecima: Tek nakon određivanja vanjskih reakcija, možemo odrediti reakcije unutar presjeka. U svakom presjeku elemenata postoje 3 nepoznate unutarnje reakcije: poprečna i uzdužna sila te moment savijanja.

Unutarnje sile određujemo metodom presjeka. Pomoću ove metode možemo odrediti vrijednosti unutarnjih sila u elementima koji su u ravnotežnom stanju s obzirom na vanjska opterećenja. Postupak se sastoji od „rezanja“ diskova na mjestu na kojem se traži unutarnja sila. Rezanjem se pojavljuju 3 nepoznate unutarnje sile koje onda uravnotežujemo s vanjskim reakcijama i opterećenjem.

One predstavljaju djelovanje ostatka sustava na dio sustava koji promatramo. Pri tome treba paziti na odabir lokalnog sustava koji ovisi o geometriji elementa.



Krećemo od diska I s lijeve strane.

Presjek 1-1

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 & & N_1 + A_V = 0 & & N_1 = -A_V = -42,94 \text{ kN} \\ \sum F_Y = 0 & & T_1 - A_H = 0 & & T_1 = A_H = -6,74 \text{ kN} \\ \sum M_1 = 0 & & M_1 - A_H \cdot 2 = 0 & & M_1 = 2 \cdot A_H = 2 \cdot (-6,47) = -12,94 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Presjek 2-2

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 & & N_2 - A_H - 40 = 0 & & N_2 = A_H + 40 = (-6,47) + 40 = 33,53 \text{ kN} \\ \sum F_Y = 0 & & -T_2 + A_V - 30 = 0 & & T_2 = A_V - 30 = 42,94 - 30 = 12,94 \text{ kN} \\ \sum M_2 = 0 & & M_2 + 30 \cdot 1 - A_H \cdot 4 - A_V \cdot 1 = 0 & & \\ M_2 = -30 \cdot 1 + A_H \cdot 4 + A_V \cdot 1 = -30 \cdot 1 + (-6,47) \cdot 4 + 42,94 \cdot 1 = -12,94 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Presjek 3-3

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 & & N_3 - A_H - 40 = 0 & & N_3 = A_H + 40 = (-6,47) + 40 = 33,53 \text{ kN} \\ \sum F_Y = 0 & & -T_3 + A_V - 30 = 0 & & T_3 = A_V - 30 = 42,94 - 30 = 12,94 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sum M_3 = 0 \quad M_3 + 30 \cdot 2 - A_H \cdot 4 - A_V \cdot 2 = 0$$

$$M_3 = -30 \cdot 2 + A_H \cdot 4 + A_V \cdot 2 = -30 \cdot 2 + (-6,47) \cdot 4 + 42,94 \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$$

Presjek 3 nalazi se na mjestu zgloba tako da je tu vrijednost momenta 0 što smo i dokazali. Isto bismo dobili i da presjek napravimo odmah iz zgloba na disku II.

Presjek 4-4

$$\sum M_4^I = 0 \quad M_4 + 30 \cdot 2 - A_H \cdot 4 - A_V \cdot 2 = 0$$

$$M_4 = -30 \cdot 2 + A_H \cdot 4 + A_V \cdot 2 = -30 \cdot 2 + (-6,47) \cdot 4 + 42,94 \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$$

Također, ako krenemo s druge strane sustava, od točke B, što bi ovdje bilo i povoljnije jer ima manje reakcija koje ulaze u jednadžbu ravnoteže, rješenje bi bilo isto:

$$\sum M_4^{II} = 0 \quad -M_4 - 90 + B_H \cdot 5 + B_V \cdot 6 = 0$$

$$M_4 = -90 + B_H \cdot 5 + B_V \cdot 6 = -90 + 33,53 \cdot 5 + (-12,94) \cdot 6 = 0 \text{ kNm}$$

Presjek 5-5

$$\sum F_x = 0 \quad -N_5 + B_H = 0 \quad N_5 = B_H = 33,53 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -T_5 + B_V = 0 \quad T_5 = B_V = 12,94 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \quad -M_5 - 90 + B_H \cdot 5 + B_V \cdot 3 = 0$$

$$M_5 = -90 + B_H \cdot 5 + B_V \cdot 3 = -90 + 33,53 \cdot 5 + (-12,94) \cdot 3 = 38,83 \text{ kNm}$$

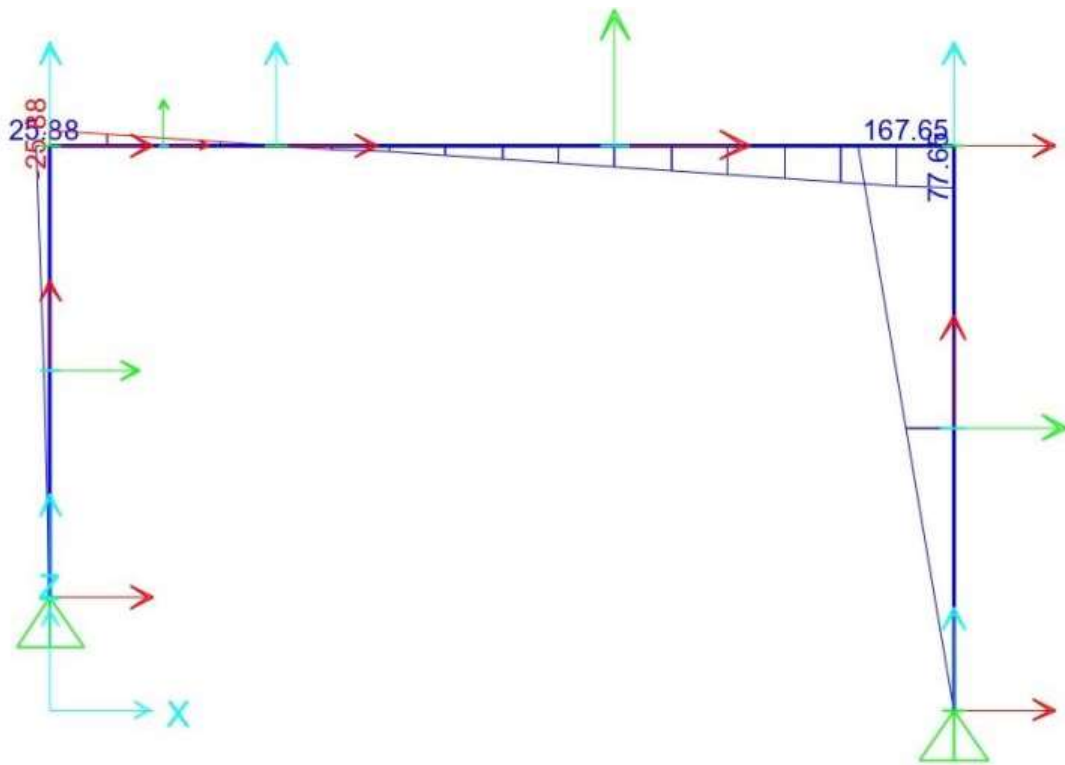
Presjek 6-6

$$\sum F_x = 0 \quad T_6 + B_H = 0 \quad T_6 = -B_H = -33,53 \text{ kN}$$

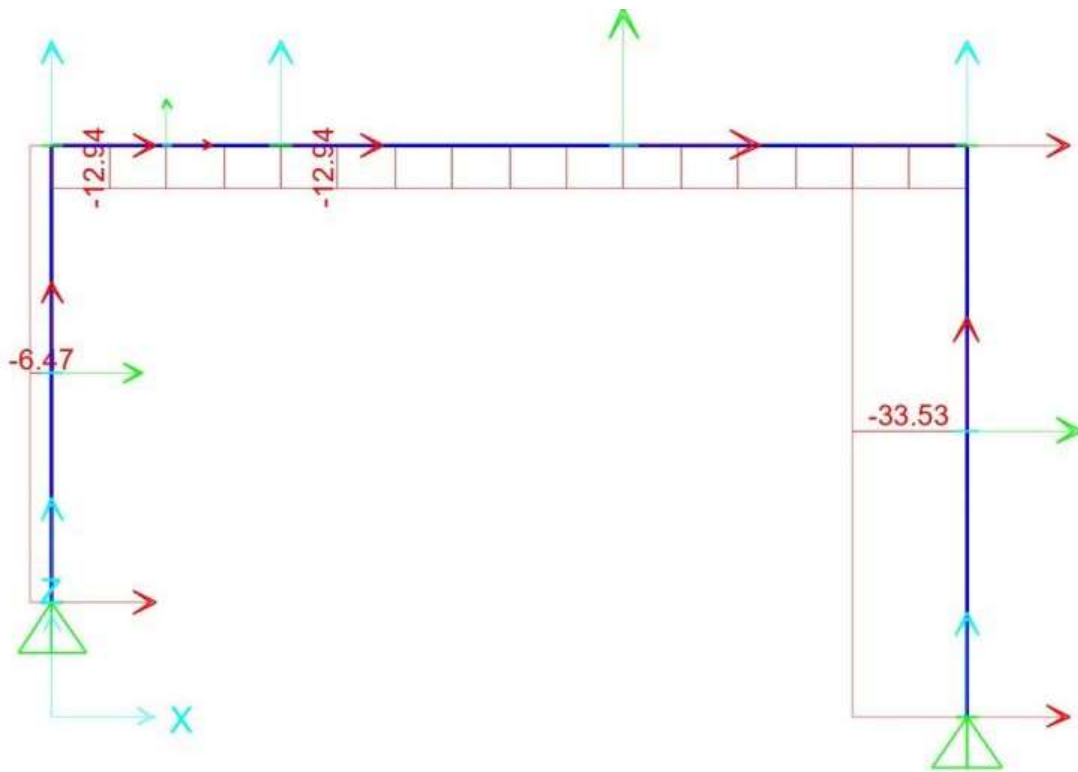
$$\sum F_y = 0 \quad N_6 + B_V = 0 \quad N_6 = -B_V = 12,94 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \quad -M_6 + B_H \cdot 2,5 = 0 \quad M_6 = B_H \cdot 2,5 = 33,53 \cdot 2,5 = 83,83 \text{ kNm}$$

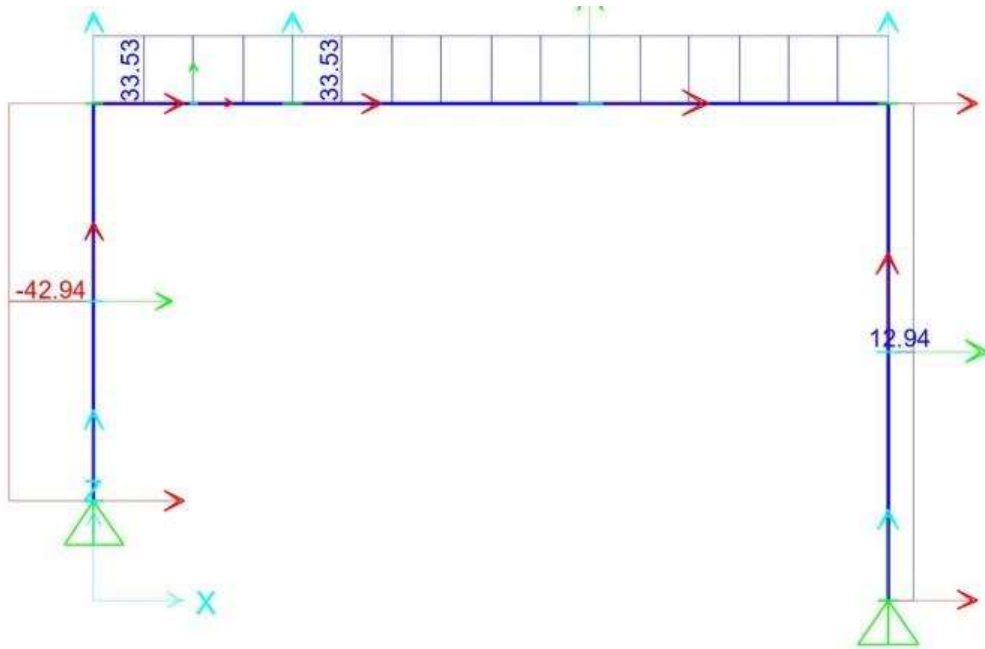
M diagram



T diagram

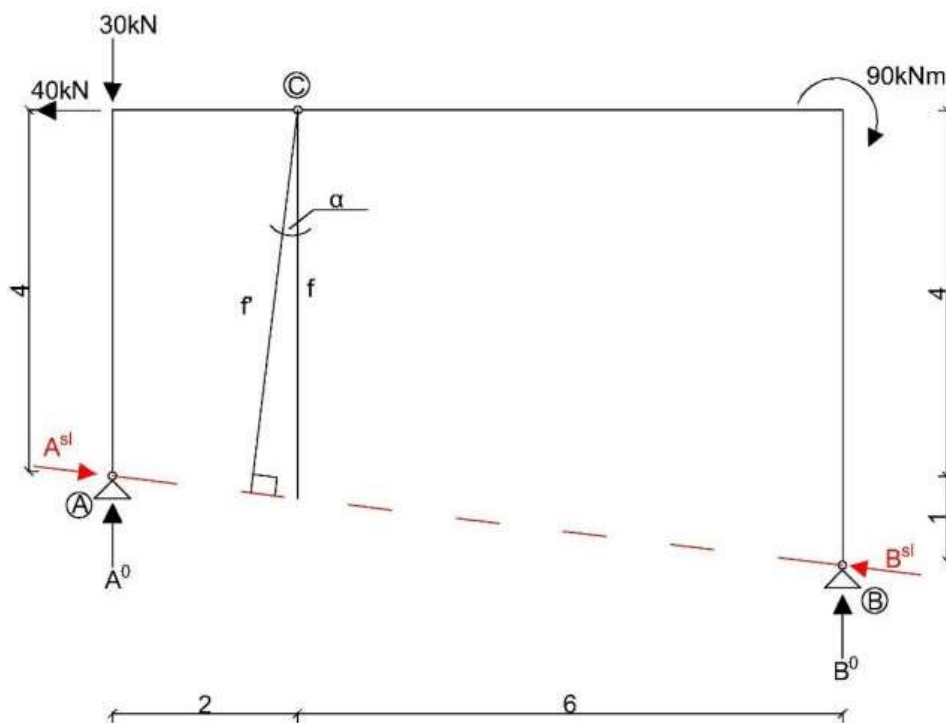


N diagram



3.3. Primjer 2.

Drugim načinom rješavanja možemo izbjeći ispisivanje sustava jednažbi već komponente reakcije izračunamo iz jedne jednažbe postavljene za jednu nepoznicu sistema. Proračun započinjemo rastavljanjem reakcija na ležajevima u vertikalnom smjeru i smjeru spojnice zglobnih ležajeva kao što je prikazano na slici.



Kako pravac djelovanja reakcije A^{sl} prolazi točkom B, ona ne ulazi u jednažbu ravnoteže momenata u odnosu na točku B već je jedina nepoznanica vertikalna komponenta A^0

$$\sum M_B^{I+II} = 0 \quad -A^0 \cdot 8 - 90 + 40 \cdot 5 + 30 \cdot 8 = 0 \quad A^0 = 43,75 \text{ kN}$$

Isto vrijedi i za jednažbu ravnoteže momenata u točki A, nepoznanica je vertikalna komponenta reakcije B, B^0 .

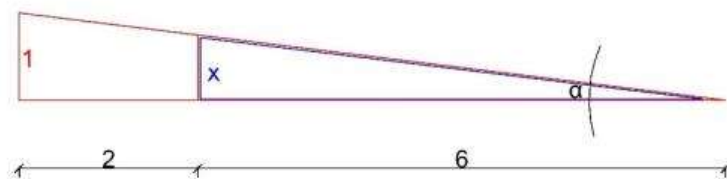
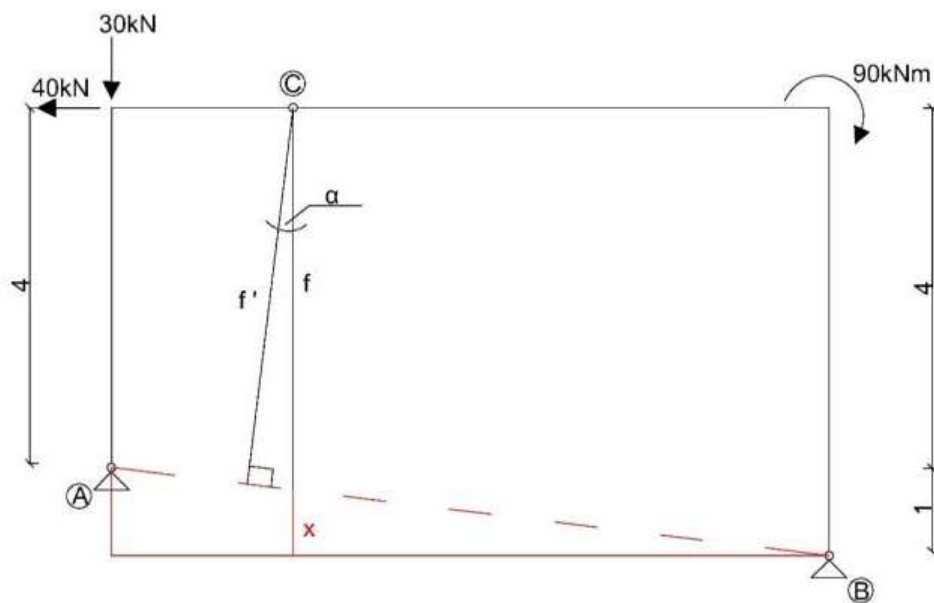
$$\sum M_A^{I+II} = 0 \quad B^0 \cdot 8 - 90 + 40 \cdot 4 = 0 \quad B^0 = -8,75 \text{ kN}$$

Nakon određivanja vrijednosti vertikalnih komponenti A^0 i B^0 , jedina nepoznanica koja se javlja u jednažbi ravnoteže momenata u točki C za disk II je reakcija A^{sl} .

$$\sum M_C^I = 0 \quad A^{sl} \cdot f' - A^0 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 0$$

$$A^{sl} = \frac{43,75 \cdot 2 - 30 \cdot 2}{4,22} = 6,52 \text{ kN}$$

Krak reakcije f' predstavlja ortogonalnu projekciju točke C na spojnicu ležajeva. Vrijednost udaljenosti između ortogonalne projekcije točke C i točke C dobije se pomoću sličnosti trokuta iz geometrije sustava na sljedeći način:



$$\frac{1}{8} = \frac{x}{6}$$

$$x = 0,75\text{m}$$

$$f = 5 - x = 5 - 0,75 = 4,25\text{ m}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\alpha = 7,13^\circ$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{f'}{f}$$

$$f' = f \cdot \text{cos}\alpha = 4,25 \cdot \text{cos}(7,13^\circ) = 4,22\text{m}$$

Analogno, jednadžbom ravnoteže momenata oko točke C za disk II, dobijemo vrijednost reakcije B^{sl}

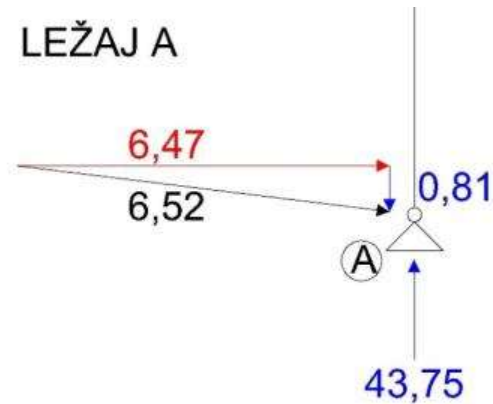
$$\sum M_C^{\text{II}} = 0 \quad -B^{\text{sl}} \cdot f' + B^0 \cdot 6 - 90 = 0$$

$$B^{sl} = \frac{(-8,75) \cdot 6 - 90}{4,22} = -33,77 \text{ kN}$$

Nakon određenih vrijednosti reakcija sustava, možemo ih „rasporediti“ u globalni koordinatni sustav pomoću kuta α preko sljedećih relacija:

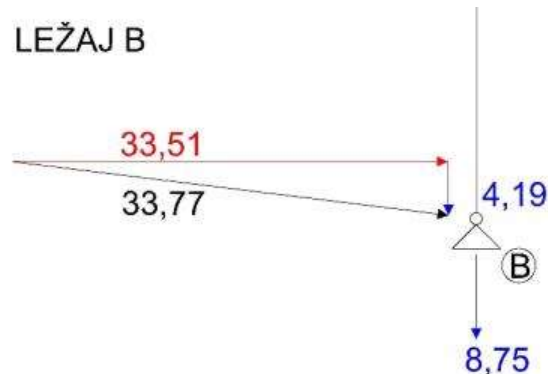
$$A_V = A^0 - A^{sl} \cdot \sin\alpha = 43,75 - 6,52 \cdot \sin(7,13^\circ) = 43,75 - 0,81 = 42,94 \text{ kN}$$

$$A_H = A^{sl} \cdot \cos\alpha = 6,52 \cdot \cos(7,13^\circ) = 6,47 \text{ kN}$$



$$B_V = B^0 + B^{sl} \cdot \sin\alpha = -8,75 + (-33,77) \cdot \sin(7,13^\circ) = -8,75 - 4,19 = -12,94 \text{ kN}$$

$$B_H = B^{sl} \cdot \cos\alpha = (-33,77) \cdot \cos(7,13^\circ) = -33,51 \text{ kN}$$

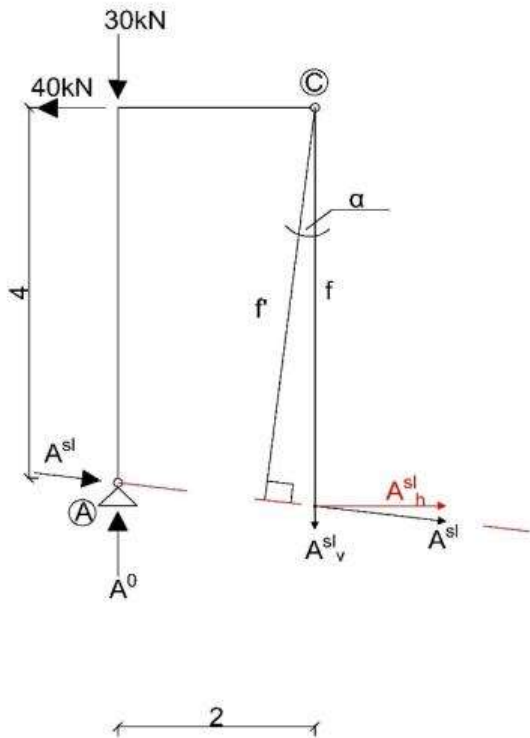


Ili, umjesto reakcije A_{sl} i B_{sl} , možemo direktno računati horizontalne komponente te reakcije. U tom slučaju krak više nije f' već samo f koji se izračuna u nekoliko koraka manje. Ponovimo, prvo sličnost trokuta, zatim razlika cijele dužine stranice i vrijednosti x daje nam vrijednost f .

$$\frac{1}{8} = \frac{x}{6}$$

$$x = 0,75 \text{ m}$$

$$f = 5 - x = 5 - 0,75 = 4,25 \text{ m}$$



- horizontalna komponenta reakcije A^{sl}

$$\sum M_C^I = 0 \quad A^{sl}_h \cdot f + 30 \cdot 2 - A_0 \cdot 2 = 0$$

$$A^{sl}_h = \frac{-30 \cdot 2 + A_0 \cdot 2}{f}$$

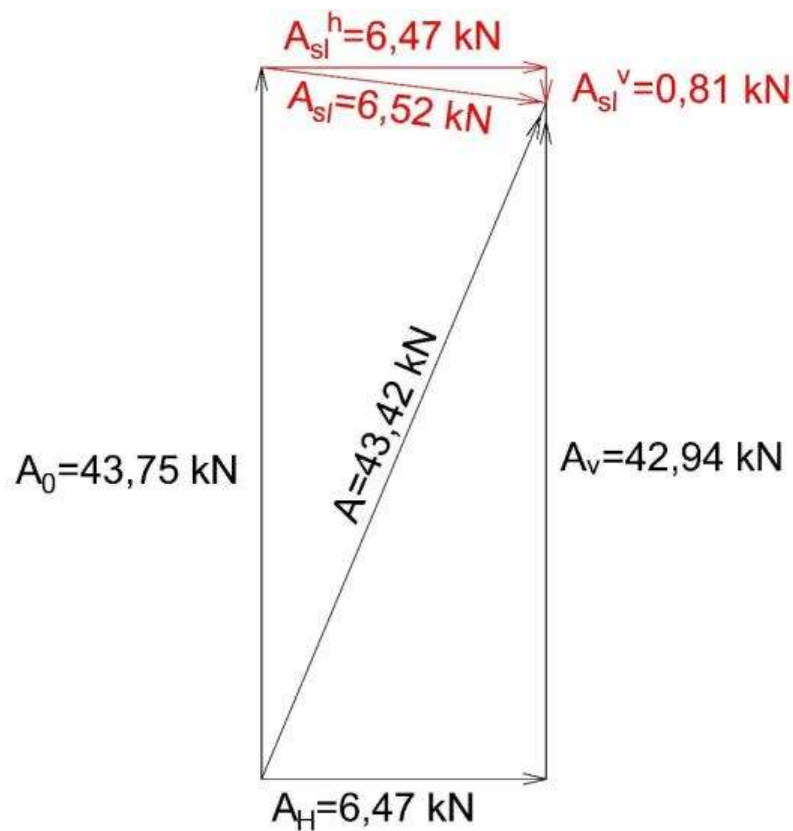
$$= \frac{-30 \cdot 2 + 43,75 \cdot 2}{4,25} = 6,47 \text{ kN}$$

- reakcija A^{sl}

$$A^{sl} = \frac{A^{sl}_h}{\cos \alpha} = \frac{6,47}{\cos(7,13^\circ)} = 6,52 \text{ kN}$$

- vertikalna komponenta reakcije A^{sl}

$$A^{sl}_v = A^{sl} \cdot \sin \alpha = 6,52 \cdot \sin(7,13^\circ) = 0,81 \text{ kN}$$



- horizontalna komponenta reakcije B^{sl}

$$\sum M_C^{II} = 0 \quad -B_h^{sl} \cdot f - 90 + B_0 \cdot 6 = 0$$

$$B_h^{sl} = \frac{-90 + B_0 \cdot 6}{f}$$

$$= \frac{-90 + (-8,75) \cdot 6}{4,25} = -33,53 \text{ kN}$$

- reakcija B^{sl}

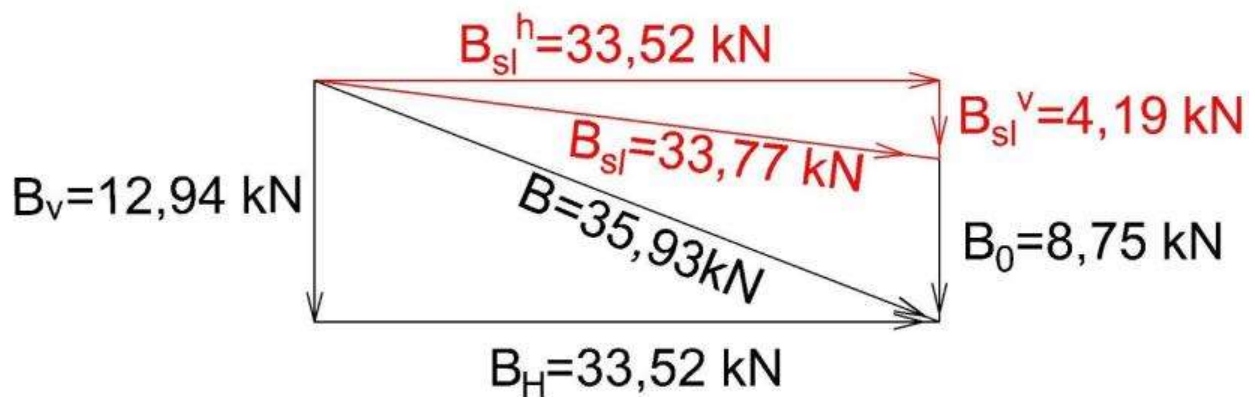
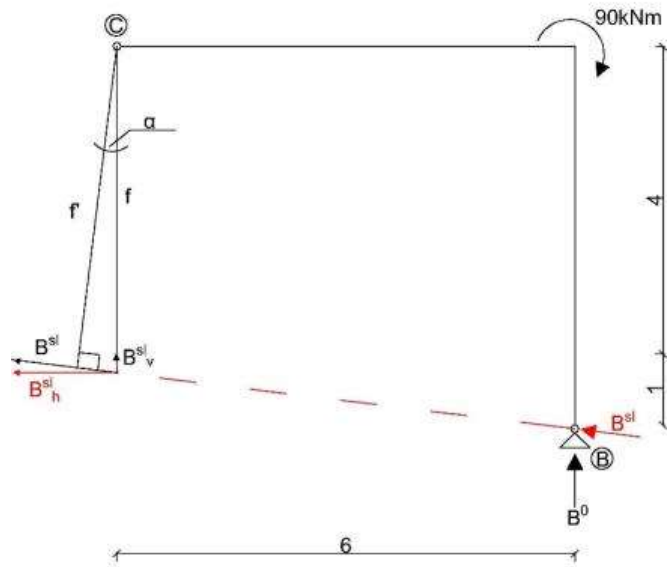
$$B^{sl} = \frac{B_h^{sl}}{\cos \alpha} = \frac{-33,52}{\cos(7,13^\circ)}$$

$$= -33,78 \text{ kN}$$

- horizontalna komponenta reakcije B^{sl}

$$B_v^{sl} = B^{sl} \cdot \sin \alpha$$

$$= -33,78 \cdot \sin(7,13^\circ) = -4,19 \text{ kN}$$



Primjetimo da kod ovog postupka dobijemo konačne horizontalne komponente reakcija A i B, no moramo još dobiti konačne izraze za vertikalne komponente kao i u prethodnom postupku:

$$A_V = A^0 - A^{sl} \cdot \sin\alpha = 43,75 - 6,52 \cdot \sin(7,13^\circ) = 43,75 - 0,81 = 42,94 \text{ kN}$$

$$B_V = B^0 + B^{sl} \cdot \sin\alpha = -8,75 + (-33,77) \cdot \sin(7,13^\circ) = -8,75 - 4,19 = -12,94 \text{ kN}$$

Proračun sila u presjeku isti je kao i u primjeru 1. Dakle vrijedi:

Presjek 1-1

$$\sum F_X = 0 \quad N_1 + A_V = 0 \quad N_1 = -A_V = -42,94 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad T_1 - A_H = 0 \quad T_1 = A_H = -6,74 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad M_1 - A_H \cdot 2 = 0 \quad M_1 = 2 \cdot A_H = 2 \cdot (-6,47) = -12,94 \text{ kNm}$$

Presjek 2-2

$$\sum F_X = 0 \quad N_2 - A_H - 40 = 0 \quad N_2 = A_H + 40 = (-6,47) + 40 = 33,53 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -T_2 + A_V - 30 = 0 \quad T_2 = A_V - 30 = 42,94 - 30 = 12,94 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0 \quad M_2 + 30 \cdot 1 - A_H \cdot 4 - A_V \cdot 1 = 0$$

$$M_2 = -30 \cdot 1 + A_H \cdot 4 + A_V \cdot 1 = -30 \cdot 1 + (-6,47) \cdot 4 + 42,94 \cdot 1 = -12,94 \text{ kNm}$$

Presjek 3-3

$$\sum F_X = 0 \quad N_3 - A_H - 40 = 0 \quad N_3 = A_H + 40 = (-6,47) + 40 = 33,53 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -T_3 + A_V - 30 = 0 \quad T_3 = A_V - 30 = 42,94 - 30 = 12,94 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0 \quad M_3 + 30 \cdot 2 - A_H \cdot 4 - A_V \cdot 2 = 0$$

$$M_3 = -30 \cdot 2 + A_H \cdot 4 + A_V \cdot 2 = -30 \cdot 2 + (-6,47) \cdot 4 + 42,94 \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$$

Presjek 4-4

$$\sum F_X = 0 \quad N_4 - A_H - 40 = 0 \quad N_4 = A_H + 40 = (-6,47) + 40 = 33,53 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -T_4 + A_V - 30 = 0 \quad T_4 = A_V - 30 = 42,94 - 30 = 12,94 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0 \quad M_4 + 30 \cdot 2 - A_H \cdot 4 - A_V \cdot 2 = 0$$

$$M_4 = -30 \cdot 2 + A_H \cdot 4 + A_V \cdot 2 = -30 \cdot 2 + (-6,47) \cdot 4 + 42,94 \cdot 2 = 0 \text{ kNm}$$

Presjek 5-5

$$\sum F_x = 0 \quad -N_5 + B_H = 0 \quad N_5 = B_H = 33,53 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -T_5 + B_V = 0 \quad T_5 = B_V = 12,94 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \quad -M_5 - 90 + B_H \cdot 5 + B_V \cdot 3 = 0$$

$$M_5 = -90 + B_H \cdot 5 + B_V \cdot 3 = -90 + 33,53 \cdot 5 + (-12,94) \cdot 3 = 38,83 \text{ kNm}$$

Presjek 6-6

$$\sum F_x = 0 \quad T_6 + B_H = 0 \quad T_6 = -B_H = -33,53 \text{ kN}$$

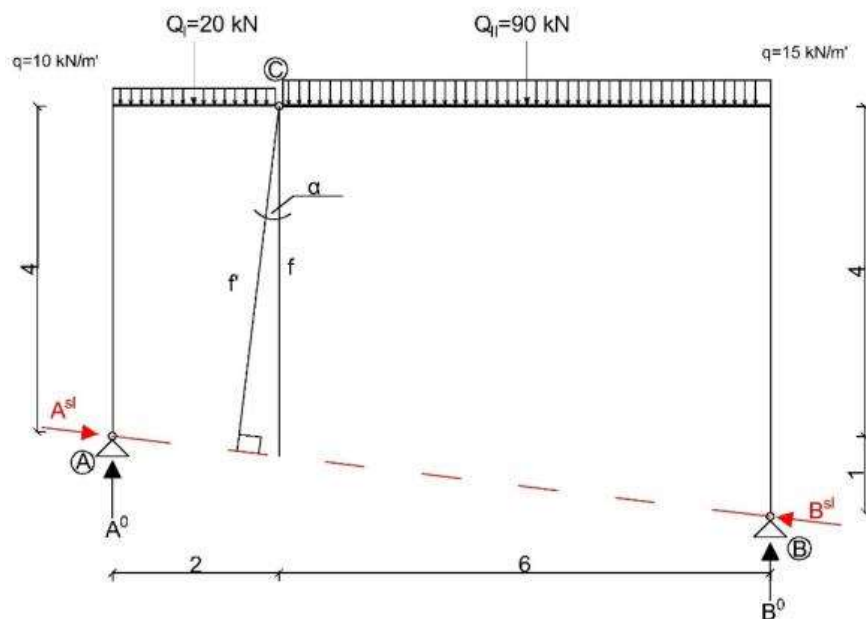
$$\sum F_y = 0 \quad N_6 + B_V = 0 \quad N_6 = -B_V = 12,94 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \quad -M_6 + B_H \cdot 2,5 = 0$$

$$M_6 = B_H \cdot 2,5 = 33,53 \cdot 2,5 = 83,83 \text{ kNm}$$

3.4. Primjer 3.

Prethodno prikazani postupka ima veći značaj ako su opterećenja sistema samo vertikalna što ćemo prikazati na sljedećem primjeru.



Kao i u prethodnom primjeru, proračun započinjemo rastavljanjem reakcija na ležajevima u vertikalnom smjeru i smjeru spojnice zglobnih ležajeva kao što je prikazano na slici.

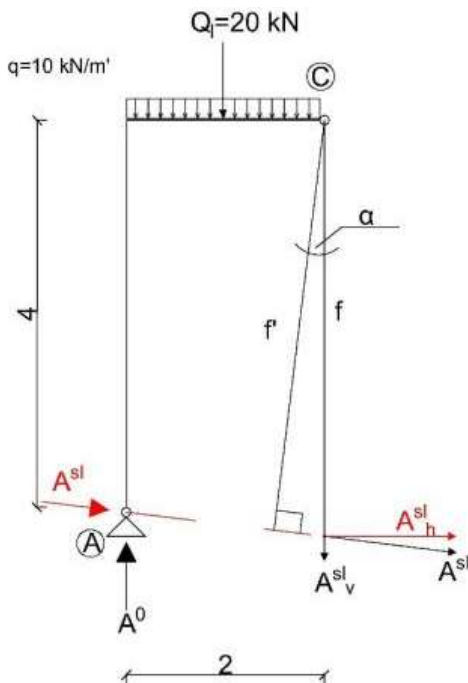
Jednadžba ravnoteže momenata oko točke B:

$$\sum M_B^{I+II} = 0 \quad -A^0 \cdot 8 + 20 \cdot 7 + 90 \cdot 3 = 0 \quad A^0 = 51,25 \text{ kN}$$

Jednadžba ravnoteže momenata oko točke A:

$$\sum M_A^{I+II} = 0 \quad B^0 \cdot 8 - 20 \cdot 1 - 90 \cdot 5 = 0 \quad B^0 = 58,75 \text{ kN}$$

Nakon određenih vertikalnih reakcija, reakcije A_{sl} i B_{sl} na spojnici dijelimo na horizontalne i vertikalne komponente na mjestu ortogonalne projekcije točke C na spojnici ležajeva. Na taj način hvatište horizontalne komponente nalazi se ispod točke C, a vertikalna komponenta prolazi točkom C pa ne ulazi u jednadžbu ravnoteže momenata oko spomenute točke.



- horizontalna komponenta reakcije A^{sl}

$$\sum M_C^I = 0$$

$$A_h^{sl} \cdot f - A^0 \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 0$$

$$A_h^{sl} = \frac{2 \cdot A^0 - 20 \cdot 1}{f} = \frac{2 \cdot 51,25 - 20 \cdot 1}{4,25} = 19,41 \text{ kN}$$

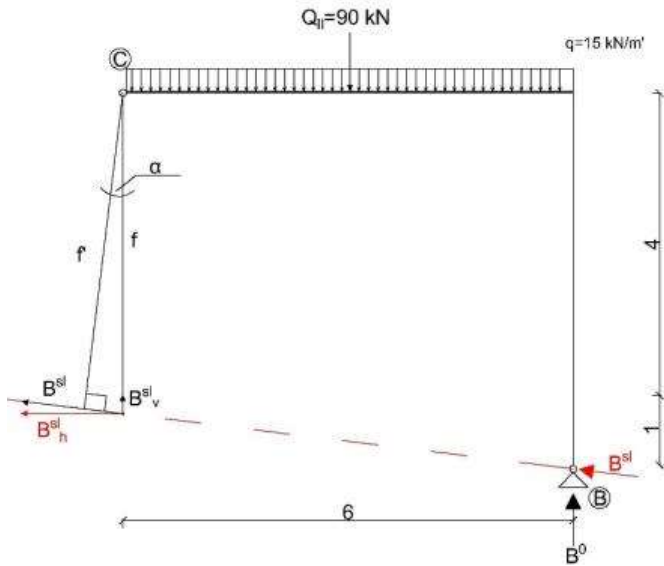
Iz skice vidimo da je krak horizontalne komponente dužina f . Vrijednost dužine f dobivamo iz geometrije nosača, pomoću sličnosti trokuta, kao u primjeru 1 i 2.:

$$\frac{1}{8} = \frac{x}{6}$$

$$x = 0,75 \text{ m}$$

$$f = 5 - x = 5 - 0,75 = 4,25 \text{ m}$$

Jednadžba ravnoteže momenata u točki C za disk II:



• horizontalna komponenta reakcije B_{sl}

$$\begin{aligned}\sum M_C^I &= 0 \\ -B_h^{sl} \cdot f + B^0 \cdot 6 - 90 \cdot 3 &= 0 \\ B_{sl}^h &= \frac{6 \cdot B^0 - 90 \cdot 3}{f} \\ &= \frac{6 \cdot 58,75 - 90 \cdot 3}{4,25} = 19,41 \text{ kN}\end{aligned}$$

Važno je primjetiti da horizontalne komponente reakcije A_{sl} i B_{sl} imaju isti intenzitet i suprotan smisao djelovanja. Iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila slijedi: $A_h^{sl} = A_H$ i $B_h^{sl} = B_H$ tj. $A_H = -B_H$.

Kako su A_{sl} i B_{sl} jedine reakcije koje imaju horizontalnu komponentu i djeluju na istom pravcu, zaključujemo da će i one imati isti intenzitet i suprotan smisla djelovanja.

Reakcija A_{sl} :

$$A_{sl} = \frac{A_{sl}^h}{\cos \alpha} = \frac{19,41}{\cos(7,13)} = 19,56 \text{ kN}$$

Reakcija B_{sl} :

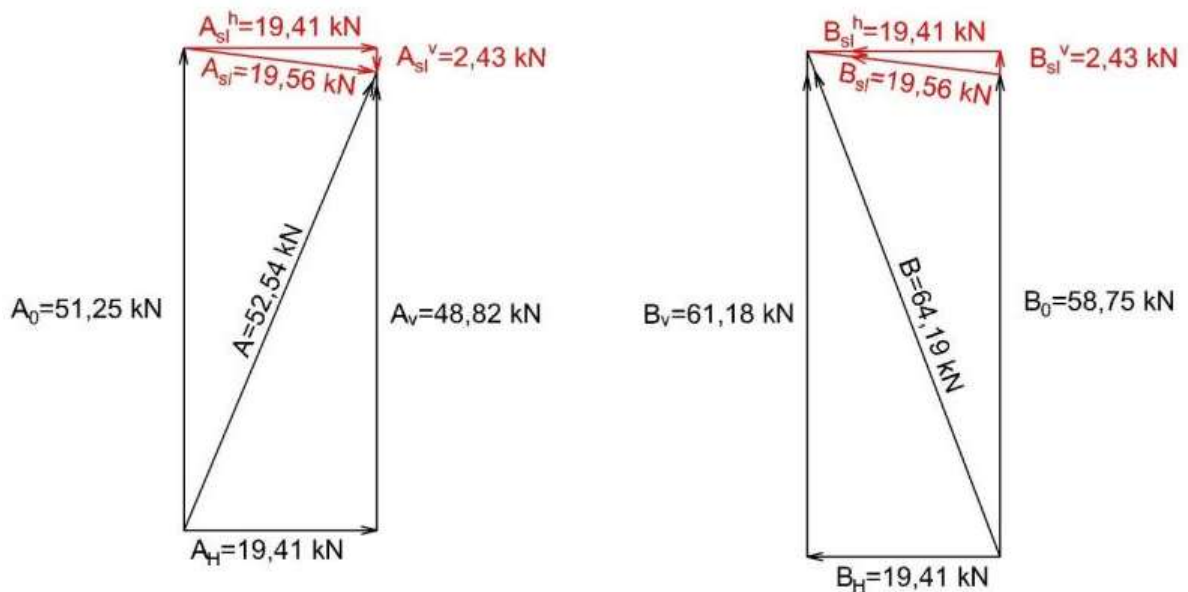
$$B_{sl} = \frac{B_{sl}^h}{\cos \alpha} = \frac{19,41}{\cos(7,13)} = 19,56 \text{ kN}$$

Vertikalna komponenta reakcije A_{sl} dodaje se vertikalnoj reakciji A^0 :

$$A_v = A^0 - A_{sl}^v = A^0 - \sin \alpha \cdot A_{sl} = 51,25 - 2,43 = 48,82 \text{ kN}$$

Također, vertikalna komponenta reakcije B_{sl} dodaje se vertikalnoj reakciji B^0 :

$$B_v = B^0 + B_{sl}^v = B^0 + \sin \alpha \cdot B_{sl} = 58,75 - 2,43 = 61,18 \text{ kN}$$



Smisao ovog postupka je da trozglozni i slični sustavi opterećeni samo vertikalnim silama imaju i horizontalne reakcije koje, da bi bile u ravnoteži, moraju djelovati na istom pravcu, imati isti intenzitet i suprotan smisao djelovanja.

Slijedi proračun sila u presjeku:

Presjek 1-1

$$\sum M = 0$$

$$M_1 + A_H \cdot 4 = 0$$

$$M_1 = -A_H \cdot 4 = -19,41 \cdot 4 = -77,65 \text{ kNm}$$

$$\sum F_x = 0$$

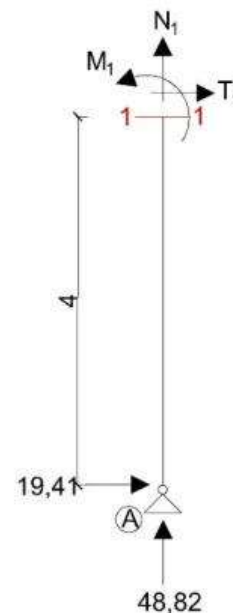
$$T_1 + A_H = 0$$

$$T_1 = -A_H = -19,41 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_V + N_1 = 0$$

$$N_1 = -A_V = -48,82 \text{ kN}$$



Presjek 2-2

$$\sum M = 0$$

$$M_2 + A_H \cdot 4 = 0$$

$$M_2 = -A_H \cdot 4 = -19,41 \cdot 4 = -77,65 \text{ kNm}$$

$$\sum F_x = 0$$

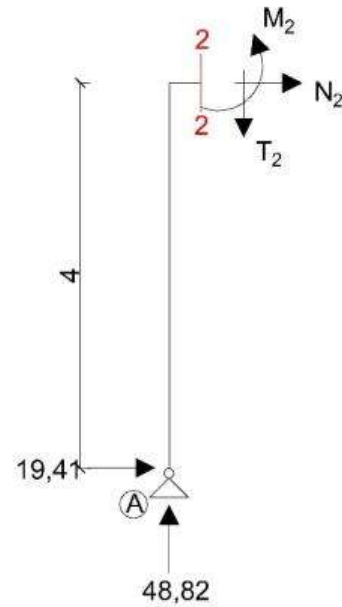
$$N_2 + A_H = 0$$

$$N_2 = -A_H = -19,41 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_V - T_2 = 0$$

$$T_2 = A_V = 48,82 \text{ kN}$$



Presjek 3-3

$$\sum M = 0$$

$$-M_3 - B_H \cdot 5 = 0$$

$$M_3 = -B_H \cdot 5 = 19,41 \cdot 5 = -97,06 \text{ kNm}$$

$$\sum F_x = 0$$

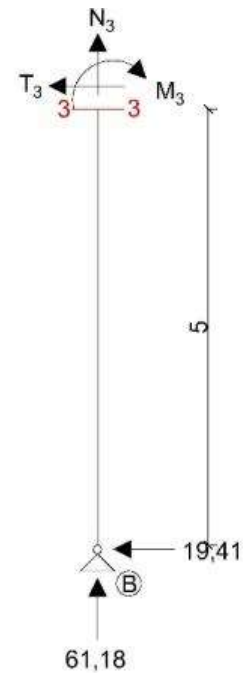
$$-T_3 - B_H = 0$$

$$T_3 = -B_H = -19,41 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_V + N_3 = 0$$

$$N_3 = -A_V = -61,18 \text{ kN}$$

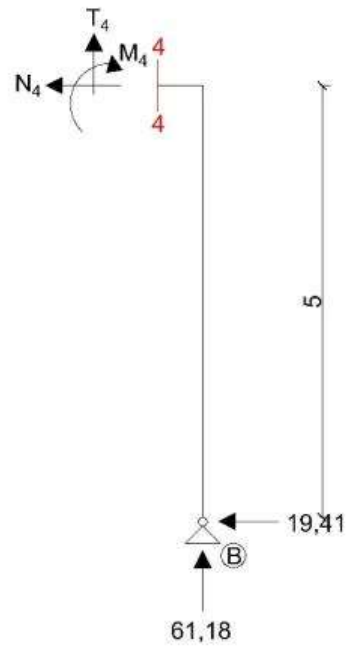


Presjek 4-4

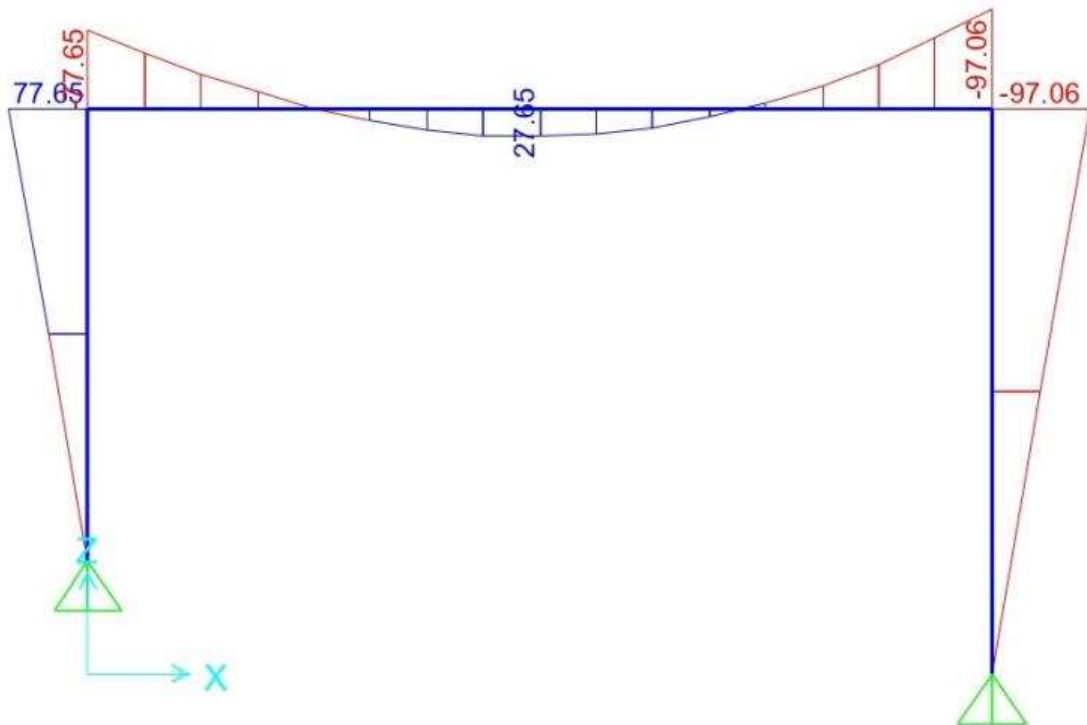
$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ -M_4 - B_H \cdot 5 &= 0 \\ M_4 &= -B_H \cdot 519,41 \cdot 5 = -97,06 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ -N_4 - B_H &= 0 \\ N_4 &= -B_H = -19,41 \text{ kN}\end{aligned}$$

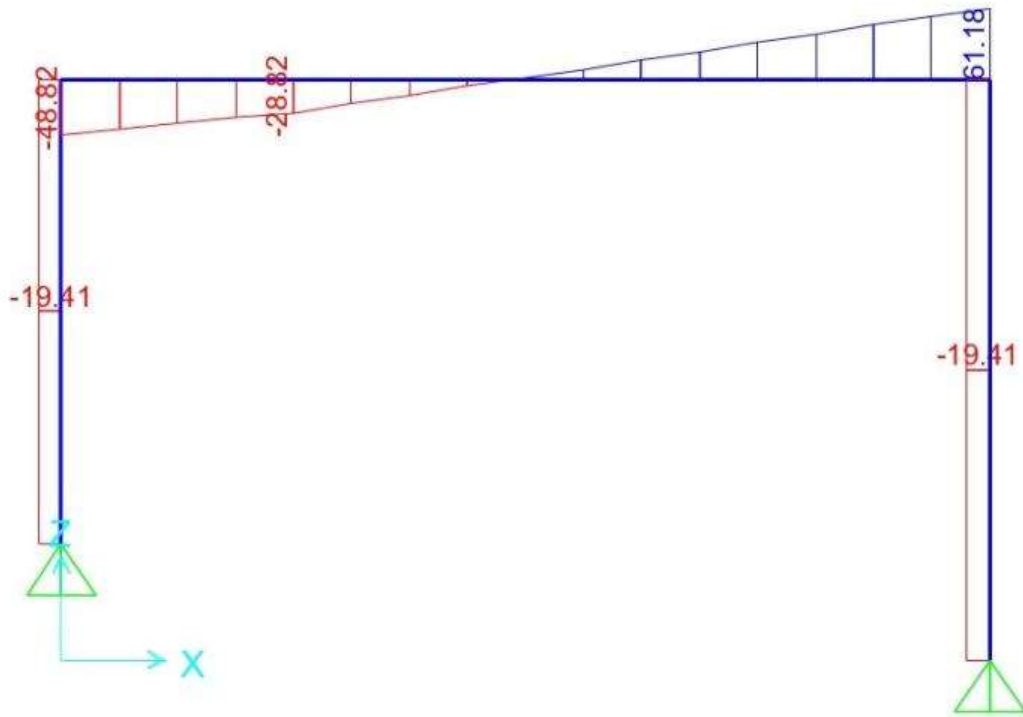
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ T_4 + B_V &= 0 \\ T_4 &= -B_V = -61,18 \text{ kN}\end{aligned}$$



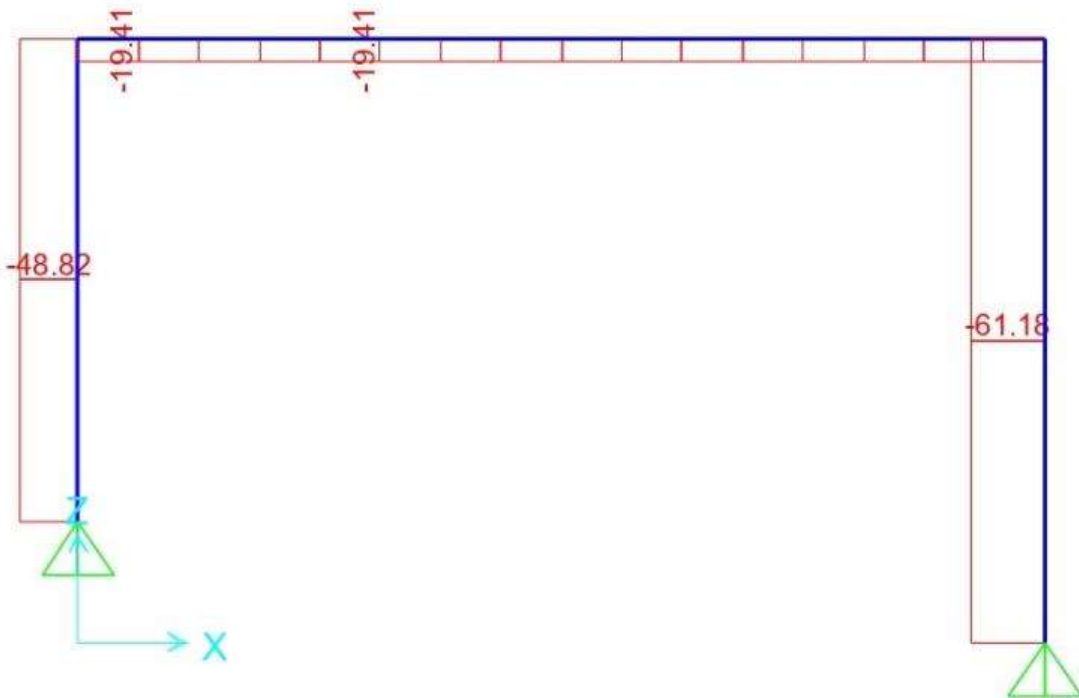
M diagram



T diagram



N diagram

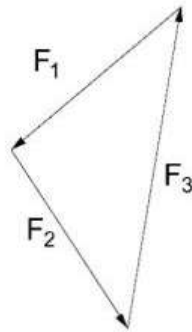


4. Grafička metoda

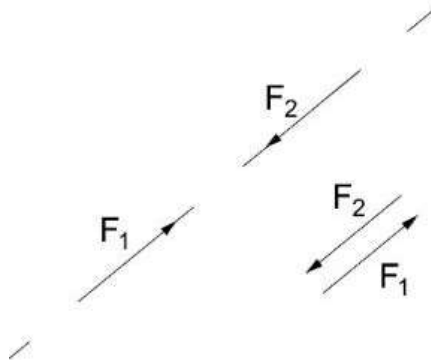
4.1. Općenito o grafičkoj metodi

Kada se govori o uvjetima ravnoteže, u grafičkom smislu, misli se na uravnotežavanje dvije ili tri sile. Svaki sustav ima dvije reakcije koje se trebaju uravnotežiti s vanjskim opterećenjem. Vanjska opterećenja mogu biti brojna, a nama treba samo jedno. U tom slučaju uvodimo rezultantu vanjskih sila. To znači da sve sile koje djeluju na sustav reduciramo na jednu silu koja reprezentira njihova djelovanja. Sve sile promatramo kao vektor koji je određen svojim pravcem djelovanja, intenzitetom i orijentacijom.

Tri neparalelne sile u ravnini nalaze se u stanju ravnoteže ako im se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki i ako im je trokut sila zatvoren.



Dvije sile su u ravnoteži ako imaju isti pravac djelovanja, isti intenzitet i suprotan smisao orijetacije.



Poligon sila, verižni poligon i Culmanov postupak glavni su „alati“ ove metode. Koriste se kada su nepoznate tri veličine, dakle, intenzitet sila i/ili pravac djelovanja.

Poligon sila

Dvije, ili više sila možemo zamijeniti jednom silom- rezultantom, koja ima isti učinak na zadani sustav. Sile promatramo kao vektore, a njihovu rezultantu dobijemo vektorskim zbrajanjem. Poligon sila konstruiramo u planu sila tako što na kraj jednog vektora, „nadodamo“ hvatište

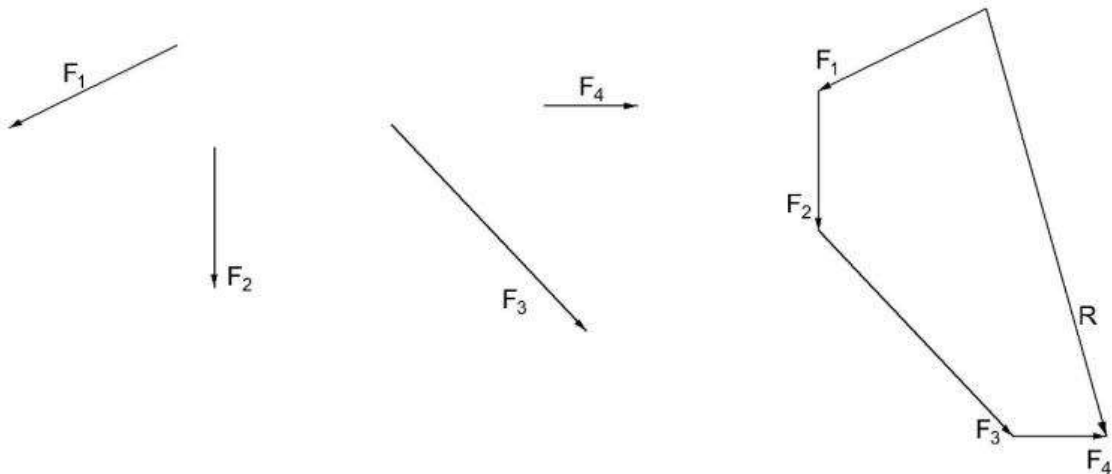
drugog vektora i na taj način, proizvoljnim redosljedom, dodajemo vektore na prethodne formirajući poligon.

Poligon sila može biti otvoren i zatvoren. Zatvoreni poligon sila znači ravnotežu sila. Rezultanta je jednaka nuli. Sustav opterećen takvim silama nalazi se u stanju mirovanja.

$$F_1+F_2+F_3+F_4+\dots+F_n=0$$

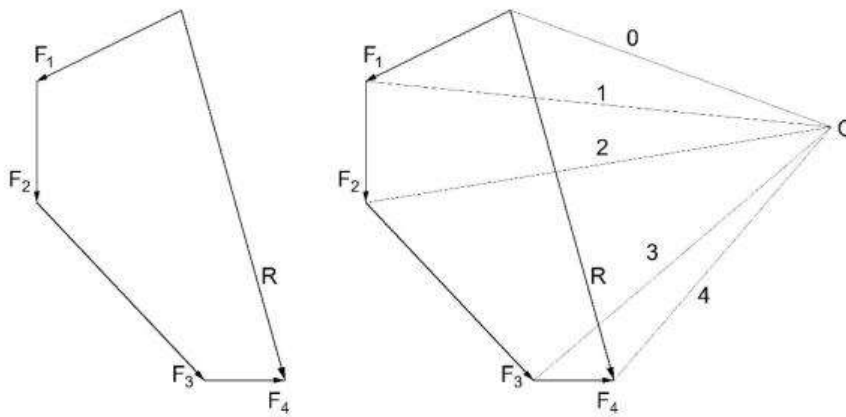
Otvoreni poligon sila ima suprotno značenje. Sustav nije u ravnoteži i kao rezultat dobijemo silu tj. rezultantu koja nam grafički pokazuje iznos, smjer i orijentaciju sile koja je potrebna da bi sustav sila bio u ravnoteži.

$$F_1+F_2+F_3+F_4+\dots+F_n=R$$



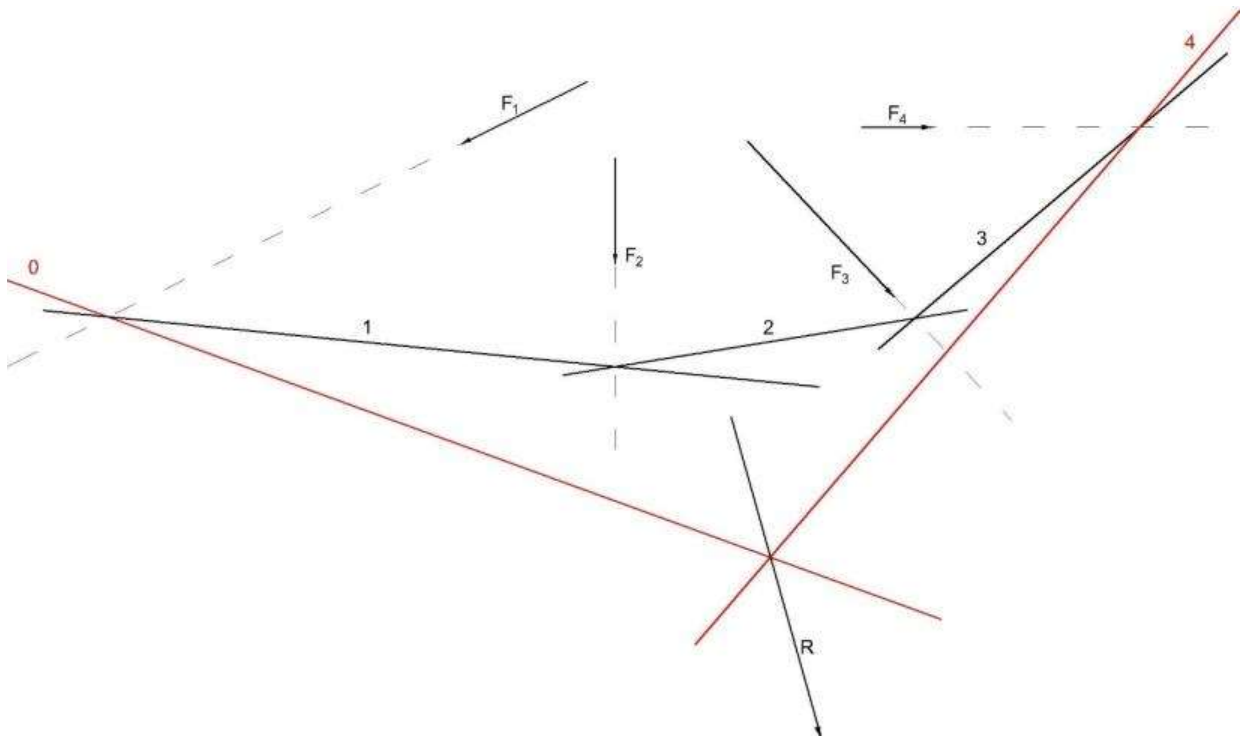
Verižni poligon

U planu sila može se odrediti iznos rezultante pomoću poligona sila, ali ne i njezin položaj u planu položaja, tj položaj u odnosu na sile koje smo zbrajali u poligonu sila. Za to nam služi verižni poligon. Prvi dio konstrukcije verižnog poligona radi se na planu sila. Odaberemo neki pol O, zatim iz njega pomoću linija, koje zovemo polne osi, „opišemo“ svaku silu koja se nalazi u poligonu. To znači da sili dodamo dvije osi sa početkom u polu O gdje jedna os završava u hvatištu sile, a druga os na završnom kraju vektora. Tako za svaku silu, dobijemo trokut koji čini ta sila i dvije polne zrake.



Zatim se u planu položaja crta verižni poligon na sljedeći način:

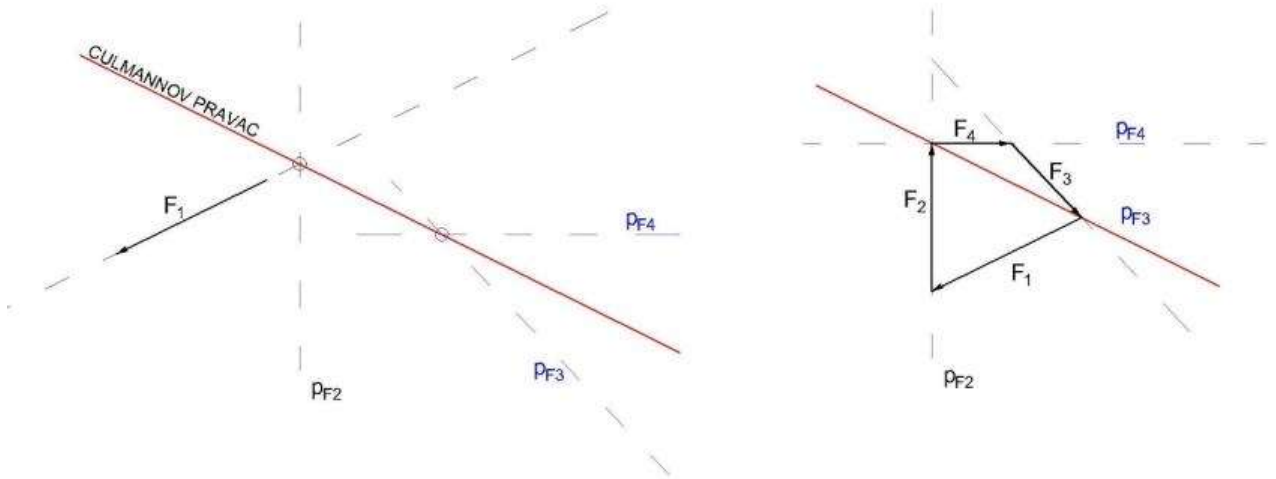
Zraku 0 paralelno prenesemo na plan položaja na neku točku pravca sile F_1 . Zatim zraku 1 prenesemo u plan položaja u točku u kojoj se sijeku pravac sile F_1 i os 0. Zraka 1 dio je i sile F_2 tako da mora sijeći pravac djelovanja sile F_2 . Zraka 2 na isti način prenesemo tako da prolazi sjecištem pravca sile F_2 i zrake 1. Zraka 2 mora presijecati pravac djelovanja sile F_3 , a zraka 3 prolazi sjecištem pravca zrake F_3 i zrake 2. Zraku 3 povučemo tako da siječe pravca djelovanja sile F_4 . U tu točku transliramo i zraku 4 koja je ujedno i posljednja zraka.



Primjetimo da u poligonu sila rezultantu R opisuju zrake 0 i 4, tj prva i zadnja zraka. Na mjestu gdje se one sijeku nalazi se položaj rezultante u odnosu na sile F_1 , F_2 , F_3 i F_4 .

Culmannov postupak

Još jedan od načina uravnotežavanja sila je Culmannov postupak. On se koristi kada imamo četiri sile u ravnini koje treba uravnotežiti. Jedna od sila je poznata, a ostale sile imaju poznate samo pravce djelovanja. Četiri su sile u ravnoteži ako rezultanta bilo koje dvije sile leži na pravcu određenom rezultantom preostalih dviju sila (taj se pravac naziva Culmannovim pravcem), te ako su te dvije rezultante jednake po veličini, a suprotne po smjeru djelovanja. Ideja Culmannove metode je da se četiri sile svedu na ravnotežu dviju sila. U planu položaja označimo točku koja označava sjecište bilo koja dva pravca sile. S druge dvije sile napravimo isto. Dobili smo dvije točke koje definiraju Culmannov pravac.



Zatim u planu sila paralelno transliramo Culmannov pravac. Poznatu silu transliramo tako da joj se hvatište nalazi na Culmannovom pravcu. Pravac koji smo spojili u planu položaja s tom silom transliramo tako da čini trokut sila. Preostale pravce sile također transliramo na Culmannov pravac tako da im je rezultanta jednaka po iznosu, ali suprotne orijentacije.

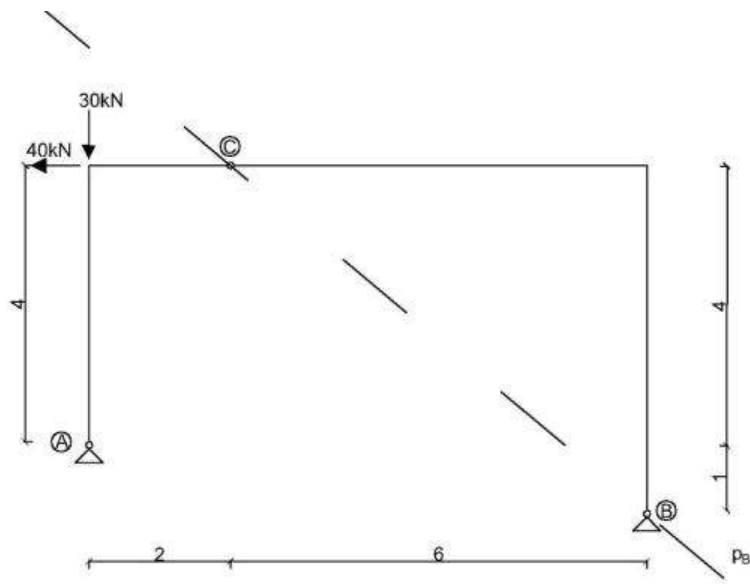
4.2. Primjer 4.

Zadatak započinjemo određivanjem reakcija. S obzirom da trozglobni sustav ima dva nepomična ležaja, poznate su točke kojima prolaze pravci reakcija. Nepoznat je nagib pravca, orijentacija i vrijednost reakcije. U analitičkom postupku nepoznate bi bile horizontalna i vertikalna komponenta reakcije A i B, ali pri grafičkom je postupku jednostavnije u obzir uzeti cijelu reakciju, a ne njezine komponente.

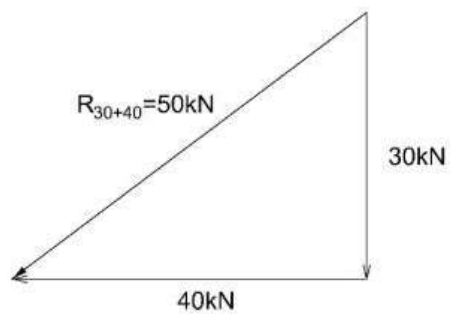
Grafičko rješavanje trozglobnih i sličnih sustava bazira se na principu superpozicije. Kreće se sa uravnotežavanjem jednog diska, zatim drugog diska, a onda se ti utjecaji zbrajaju.

Krenimo od opterećenog diska I.

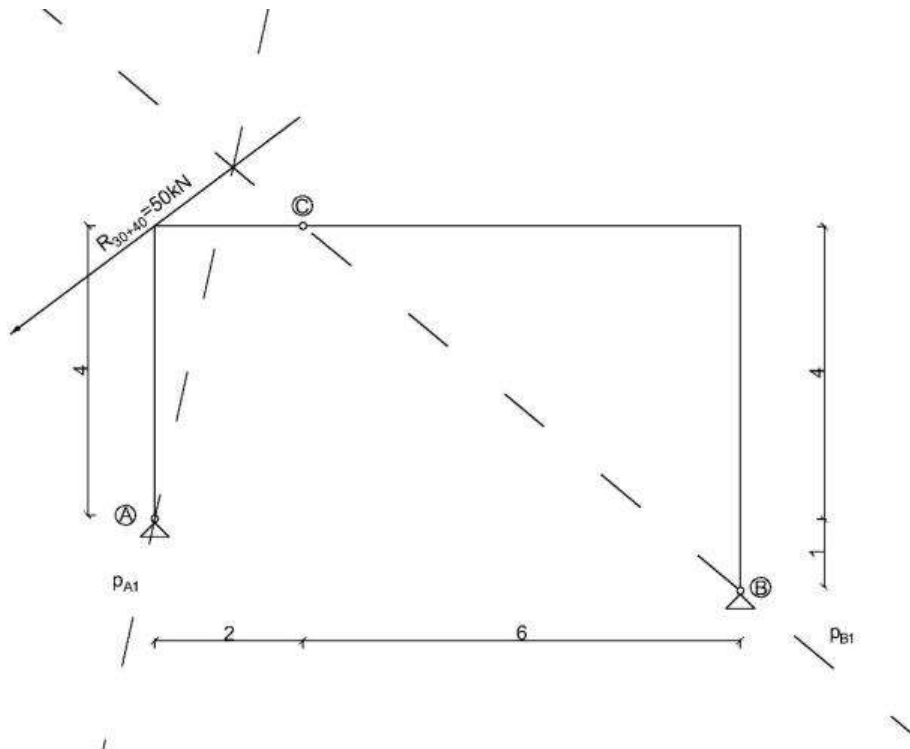
Promatramo kako na disk I, koji je opterećen, utječe neopterećeni disk II. Oslobodimo ga svih opterećenja koja na njega djeluju, u ovom slučaju momenta od 90. Kada je disk neopterećen, pravac reakcije tog diska mora prolaziti srednjom zglobom C.



Kada smo odredili pravac utjecaja diska II na disk I, moramo ga uravnotežiti s opterećenjima na disku I. Uvjet ravnoteže svodi se na ravnotežu tri sile: A, B i rezultante opterećenja na disku I koja nam je poznata:

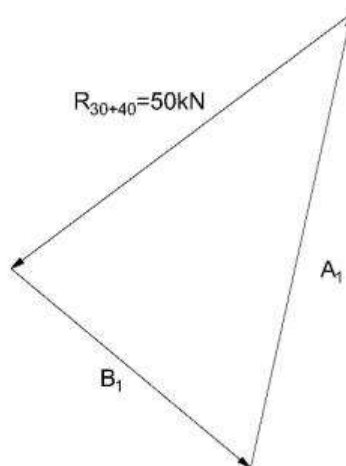


Nagib pravca reakcije A određen je sjecištem pravca reakcije B i rezultante.



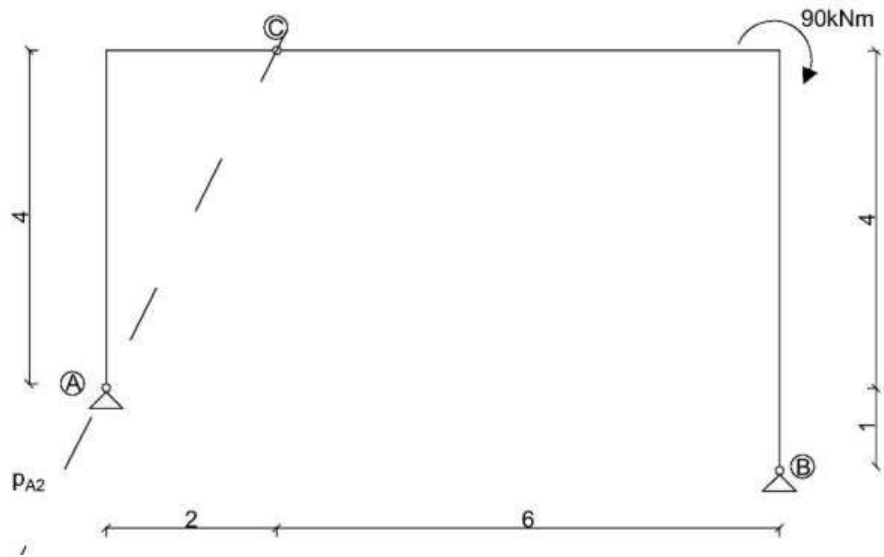
Poznati su pravci ležajnih reakcija. Orijetaciju i vrijednost odredimo pomoću trokuta sila:

$$A_1 + B_1 + R_{30+40} = 0$$



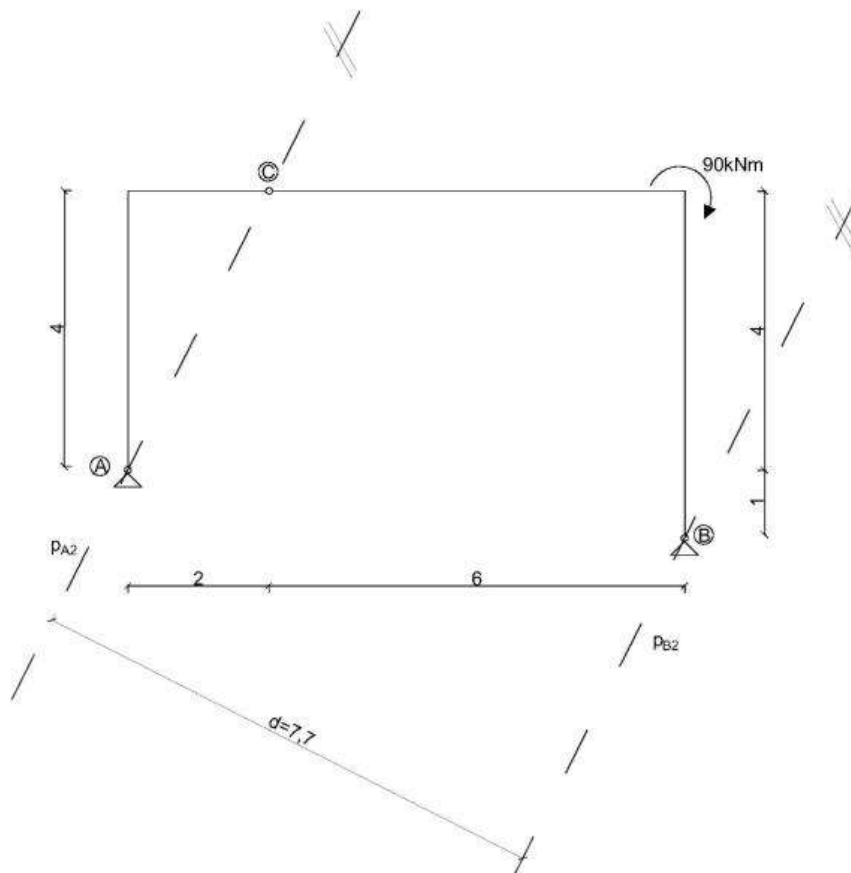
Očitano:
 $A_1 = 54,78 \text{ kN}$
 $B_1 = 36,62 \text{ kN}$

Promotrimo sada opterećeni disk II. U ovom slučaju disk I oslobodimo svih opterećenja koja na njega djeluju, sile od 30 kN i 40 kN. Reakcija diska I prolazi srednjim zglobovom C.



Disk II opterećen je samo momentom. Moment nema svoj pravac djelovanja koji bismo sijekli s pravcem djelovanja druge reakcije i na taj način zadovoljili ravnotežu.

Moment uravnotežavamo spregom sila: dvije međusobno paralelne sile, istog iznosa i suprotno umjerene na točno određenom razmaku hvatišta d.

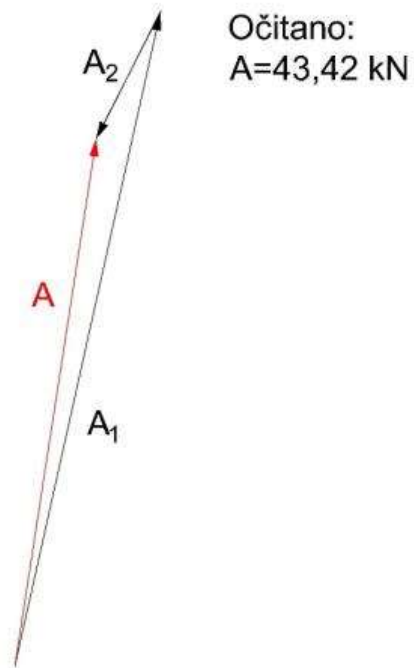


Nagib pravca reakcije A je određen točkom A i C što znači da nagib pravca reakcije B mora biti paralelan pravcu reakcije A. Njihova orijetacija usmjerena je tako da radi moment koji je suprotan „vrtnji“ momenta od 90, a vrijednost je jednaka:

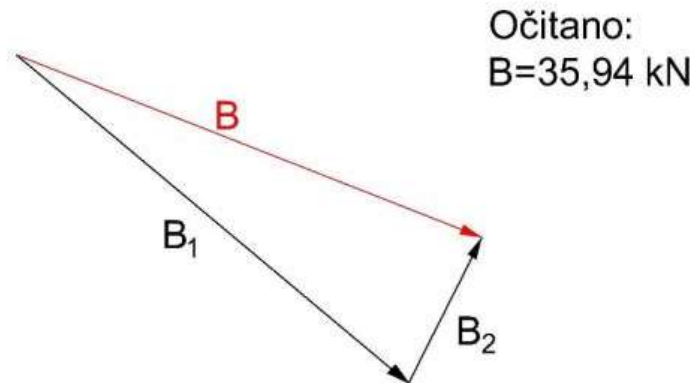
$$|A_2| = |B_2| = \frac{M}{d} = \frac{90}{7,7} = 11,69 \text{ kN}$$



Vektorskim zbrajanjem komponenti A_1 i A_2 dobijemo konačnu reakciju A:

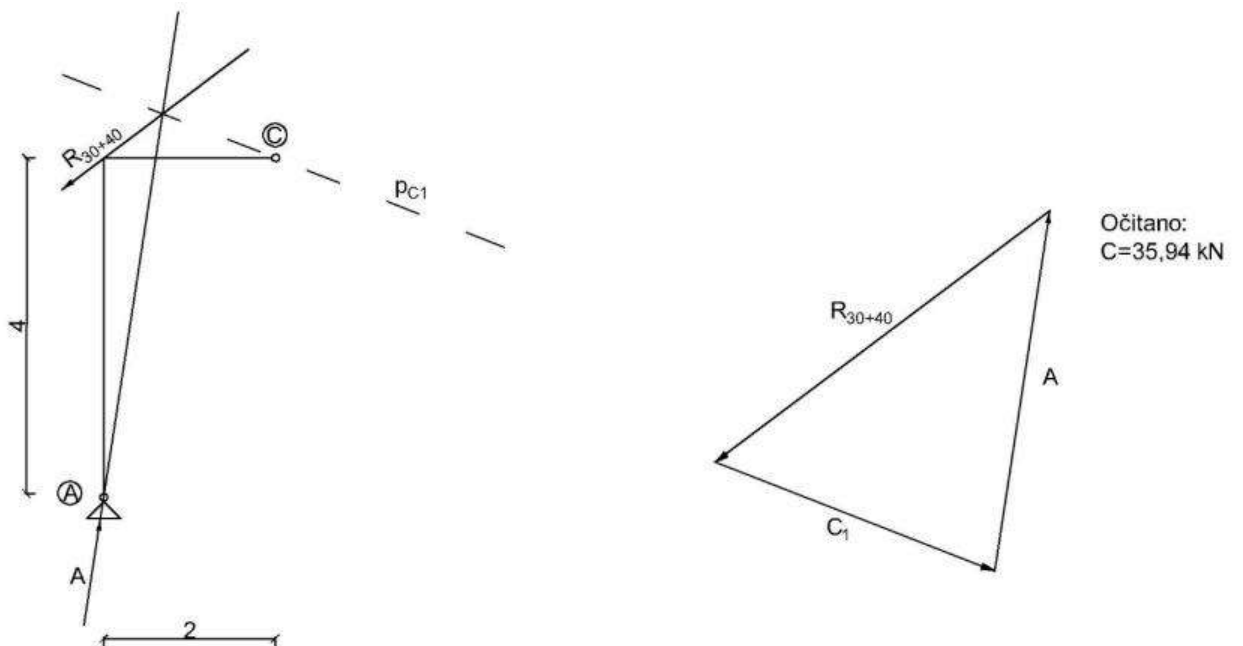


Vektorskim zbrajanjem komponenti B_1 i B_2 dobijemo konačnu reakciju B:



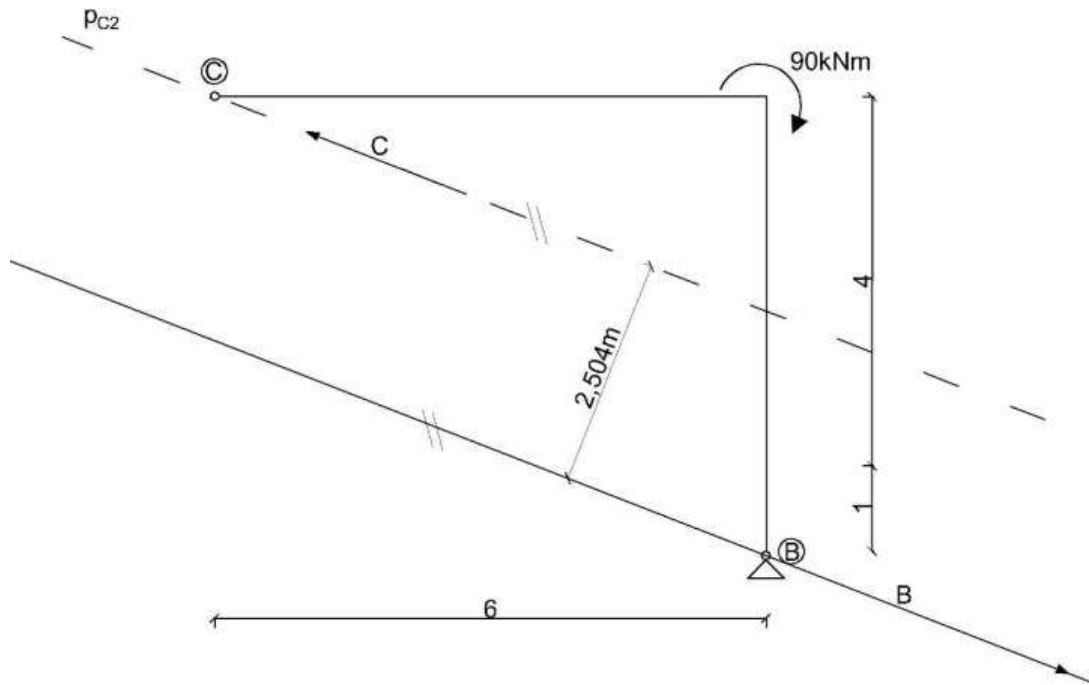
Reakciju C možemo odrediti promatrajući samo disk I ili disk II.

Odaberemo li disk I, imamo dvije poznate sile: rezultantu opterećenja diska I i reakciju A koje moramo uravnotežiti s reakcijom C.



Ako odaberemo disk II, reakciju C moramo uravnotežiti momentom od 90kNm i reakcijom B. Riješenje je spreg sila reakcije B i reakcije C. Pravac reakcije C mora biti paralelan s pravcem reakcije B, smjer suprotan, a iznos isti:

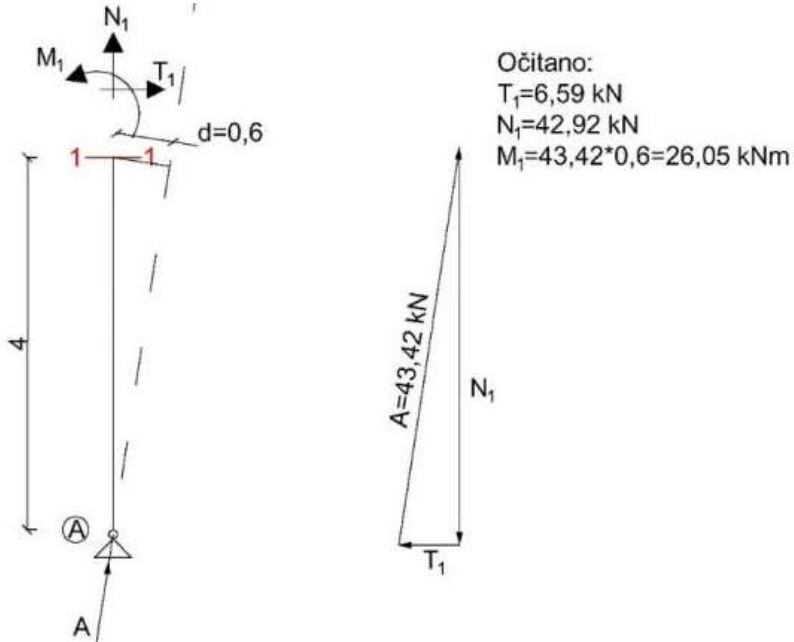
$$|C| = \frac{M}{d} = \frac{90}{2,504} = 35,94\text{kN}$$



Reakcije u presjeku:

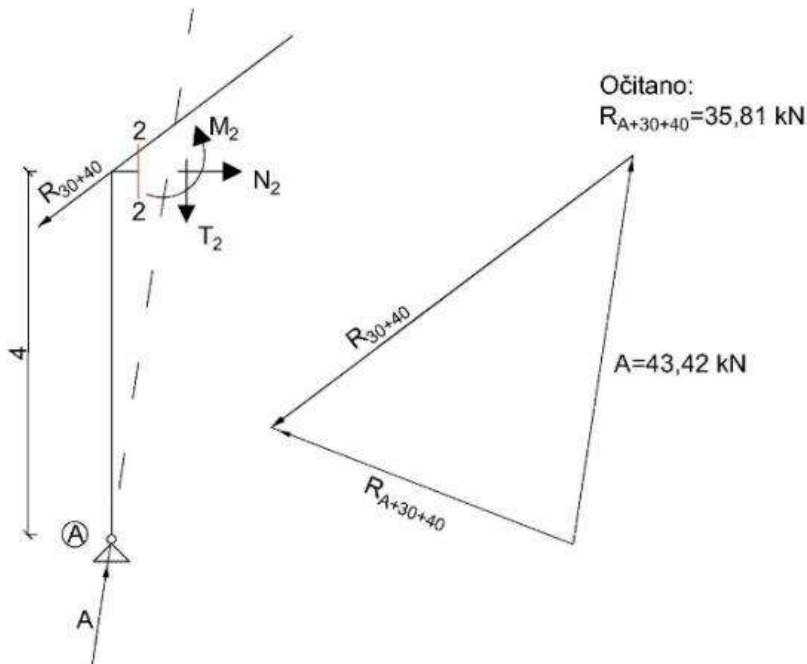
Presjek 1-1

Imamo tri sile koje je potrebno uravnotežiti- trokut sile. Za vrijednost momenta u presjeku moram odrediti krak koji je okomit na pravac djelovanja reakcije A, koju možemo promatrati kao rezultantu sile koje djeluju na elemntu do presjeka 1.

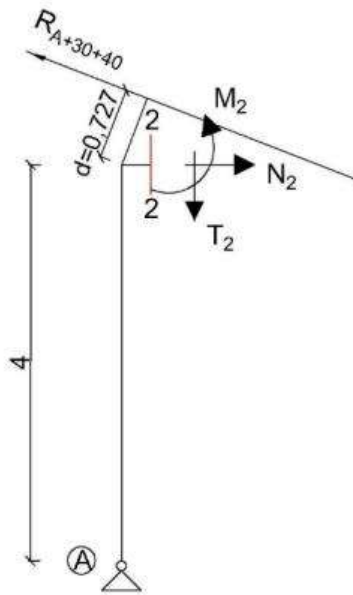


Presjek 2-2

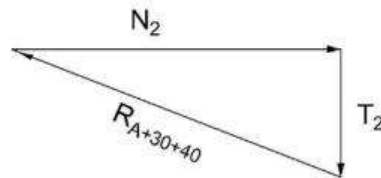
Da bismo uravnotežili sile u presjeku 2, najprije moramo odrediti rezultantu djelovanja koja se pojavljuju do tog presjeka, to su sile A i R_{30+40} .



Zatim, ponovo imamo tri sile koje je potrebno uravnotežiti pomoću trokuta sila. Krak momenta očitamo od točke presjeka okomito na rezultantu.

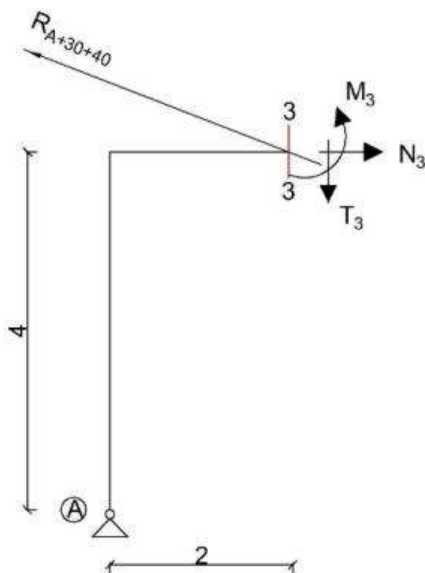


Očitano:
 $T_2 = 12,92 \text{ kN}$
 $N_2 = 33,40 \text{ kN}$
 $M_2 = 35,81 \cdot 0,727 = 26,05 \text{ kNm}$

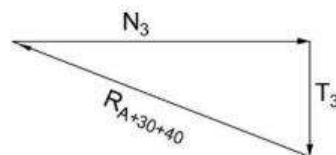


Presjek 3-3

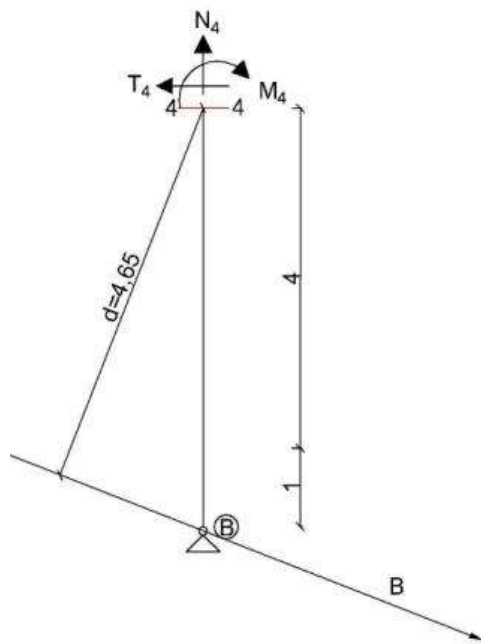
U presjeku 3 vidimo kako je hvatište rezultante, svih sila koje djeluju na disk I, u zglobu što znači da je krak 0m , tj. moment u zglobu je 0 .



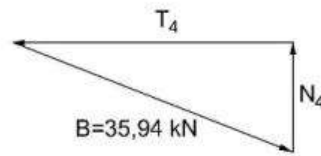
Očitano:
 $T_3 = 12,92 \text{ kN}$
 $N_3 = 33,40 \text{ kN}$
 $M_3 = 35,81 \cdot 0,0 = 0 \text{ kNm}$



Presjek 4-4



Očitano:
 $T_4=33,48 \text{ kN}$
 $N_4=13,08 \text{ kN}$
 $M_4=35,94 \cdot 4,65=167,12 \text{ kNm}$



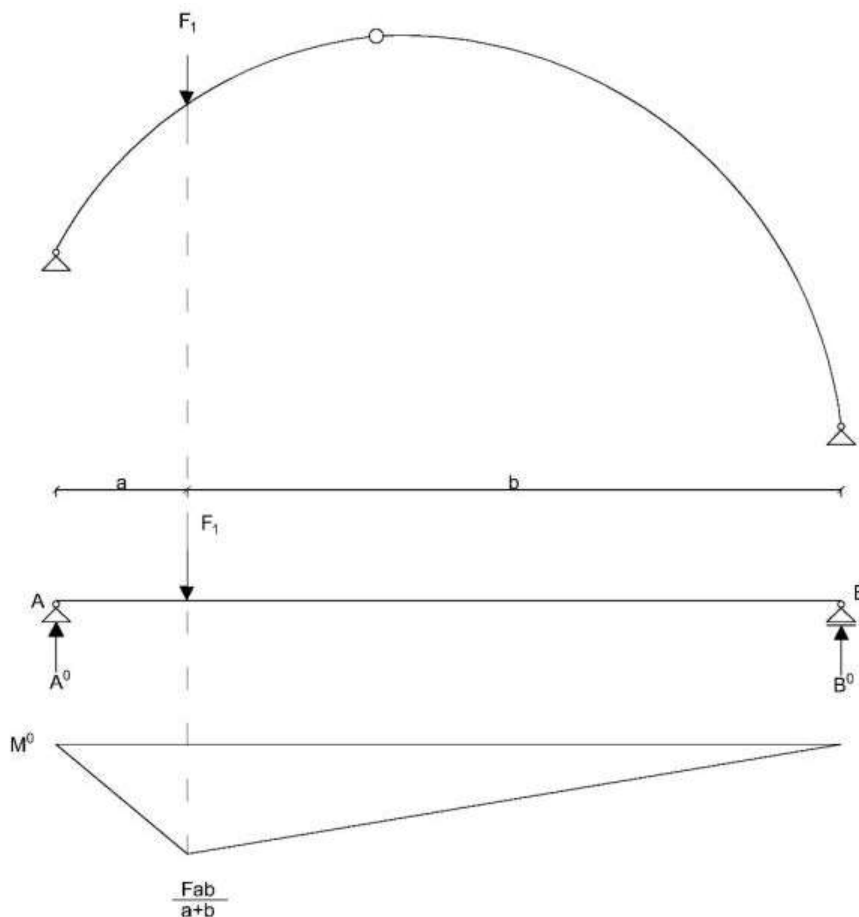
5. Superpozicijska metoda

5.1. Općenito o superpozicijskoj metodi

Superpozicijski postupak koristimo za relativno brzo i jednostavno crtanje dijagrama momenta savijanja kada je sustav opterećen vertikalnim opterećenjima. Pojam „superpozicija“ ukazuje na zbrajanje, tj. u ovom postupku grafičko oduzimanje dijagrama momenata savijanja od dva različita „stanja“ istog sustava kako bismo dobili konačni oblik dijagrama.

Ideja postupka je sljedeća:

Zadani trozglojni sustav zamijenimo s prostom gredom koja ima iste raspone.



Opterećenja, koja mogu biti samo vertikalna i momenti savijanja, sa trozglobnog sustava prenesemo na novu „zamjenjujuću gredu“ pritom pazeći da rasponi hvatišta sila ostanu nepromjenjeni.

Ako promatramo jednadžbu ravnoteže momenata oko točke B za trozglobni okvir:

$$\sum M_B = 0 \quad - A^0 \cdot (a + b) + F_1 \cdot b = 0$$

i uspredimo ju s jednađbom ravnoteže momenata oko točke B na prostoj gredi:

$$\sum M_B = 0 \quad - A^0 \cdot (a + b) + F_1 \cdot b = 0$$

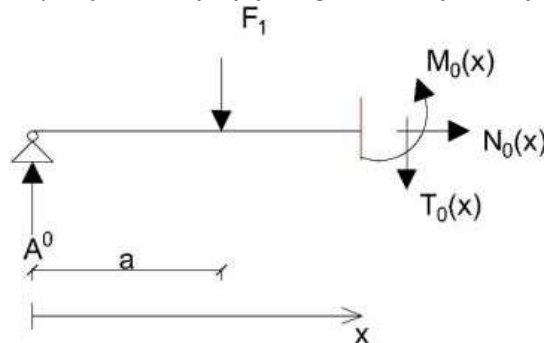
dokuzujemo da oblik zamjenjujuće grede ne utječe na vrijednosti reakcija sve dok su opterećenja vertikalna.

To nas dovodi do sljedećeg izraza, na kojem se ujedno i temelji ova metoda:

$$M(x) = M^0(x) - M^H(x)$$

Dakle, vrijednost momenta savijanja $M(x)$ u nekom presjeku trozglobnog nosača jednaka je razlici vrijednosti momenta savijanja, u tom presjeku, dobivenog od verikalnih sila $M^0(x)$ na zamjenjujućoj gredi i vrijednosti momenta savijanja, u tom presjeku, dobivenog od horizontale sile $M^H(x)$.

Iz sume momenata u nekom presjeku zamjenjujuće grede dobijemo sljedeću jednađbu:

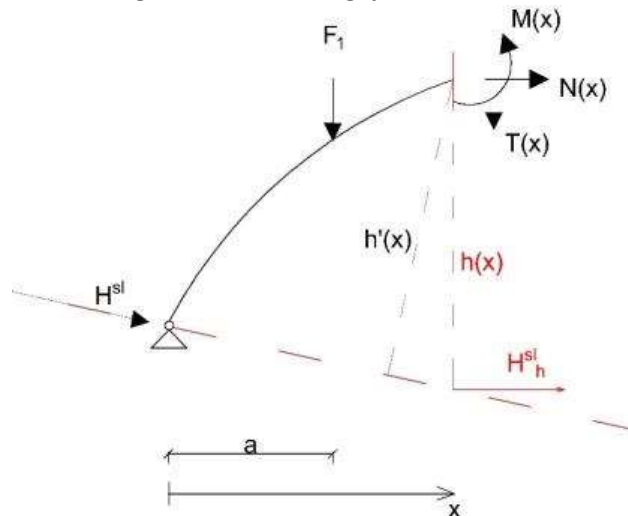


$$\sum M_x = 0 \quad M_0(x) - A^0 \cdot x + F_1 \cdot (x - a) = 0$$

$$M_0(x) = A^0 \cdot x - F_1 \cdot (x - a) = 0$$

kojom opisujemo momentni dijagram savijanja na zamjenjujućoj gredi.

Ako presjek napravimo na trozglobnom sustavu gdje u obzir uzimamo i horizontalnu reakciju:



$$\sum M_x = 0 \quad M(x) - A^0 \cdot x + F_1 \cdot (x - a) + H^{sl} \cdot h'(x) = 0$$

$$H^{sl} \cdot h'(x) = H_h^{sl} \cdot h(x) = H^{sl} \cdot \cos\alpha \cdot h(x)$$

$$M(x) = \underbrace{A^0 \cdot x - F_1 \cdot (x - a)}_{M_0(x)} - H_h^{sl} \cdot h(x)$$

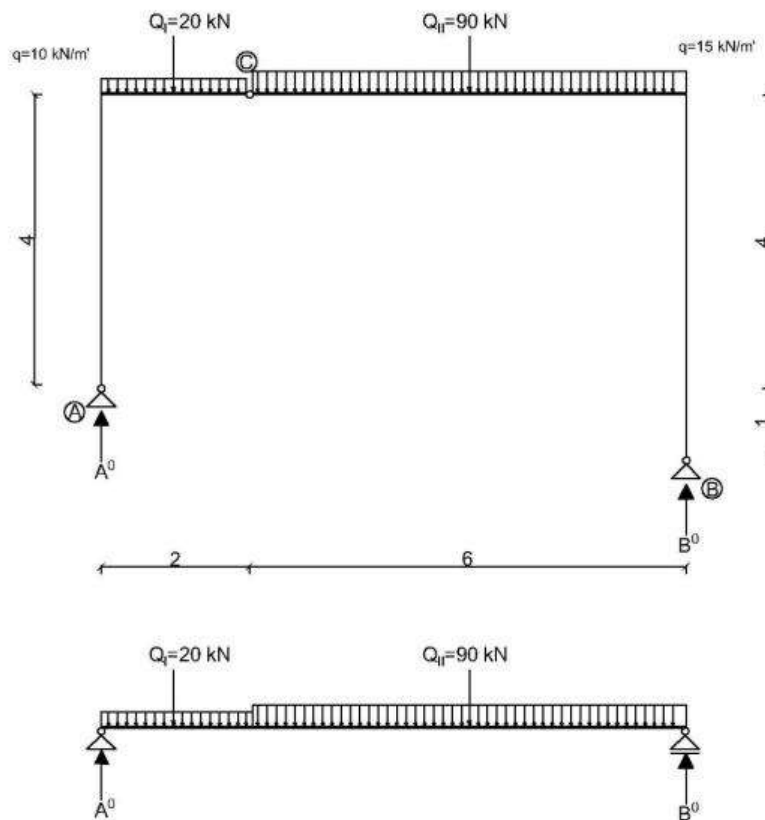
Komponentu H_h^{sl} možemo označavati samo kao H jer je to jedina i konačna horizontalna reakcija sustava:

$$M(x) = M_0(x) - H \cdot f(x)$$

Dokazali smo da dijagram momenata savijanja na trozglobnom nosaču za zadano opterećenje može se nacrtati superponirajući momentni dijagram M_0 na zamjenjujućoj gredi i dijagram momenata na trozglobnom nosaču.

5.2. Primjer 5.

Proračun započinjemo zamjenom zadanog trozglobnog okvira sa zamjenjujućom prostom gredom:



Preslikamo zadana vanjska opterećenja i odredimo reakcije A_0 i B_0 te napravimo momentni dijagram koji nazivamo M^0 . Time smo grafički prikazali utjecaj vertikalnih sila i dobili prvi dio desne strane jednadžbe $M(x) = M^0(x) - M^H(x)$.

$$\sum M_B = 0 \quad -A^0 \cdot 8 + Q_I \cdot 7 + Q_2 \cdot 3 = 0$$

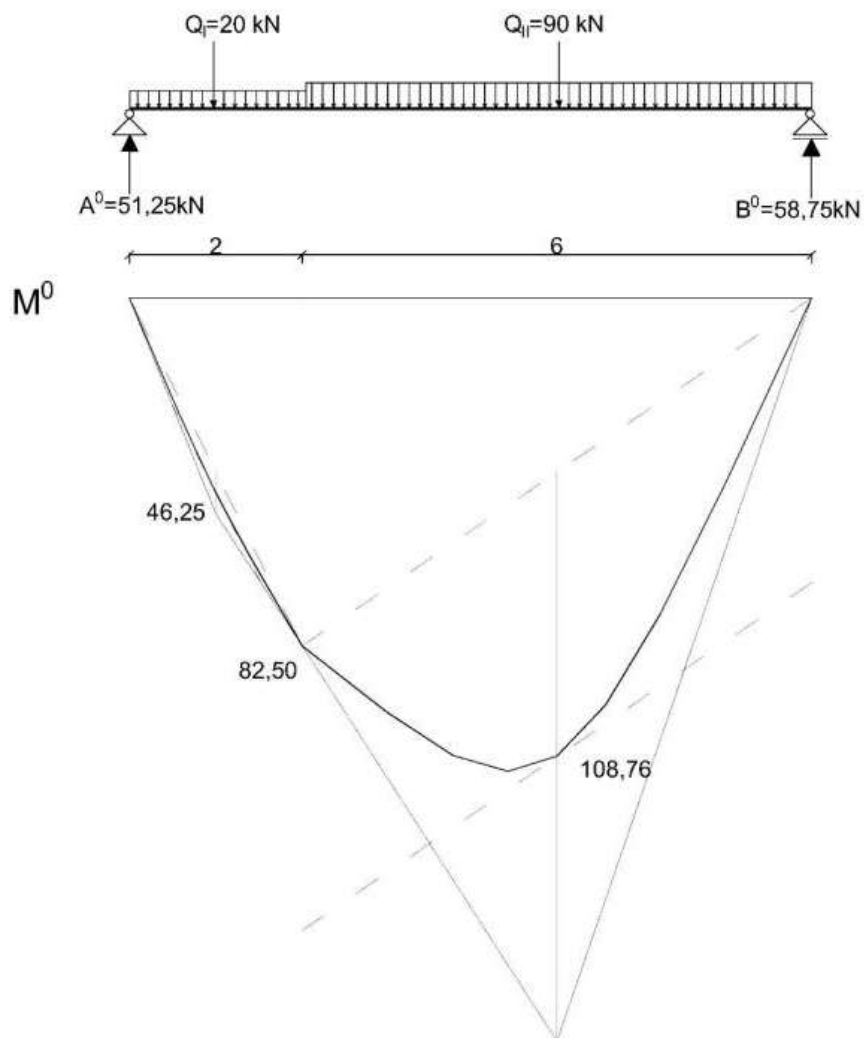
$$\sum M_A = 0 \quad B^0 \cdot 8 - Q_I \cdot 1 - Q_2 \cdot 5 = 0$$

$$A^0 = \frac{7 \cdot 20 + 3 \cdot 90}{8} = 51,25 \text{ kN}$$

$$B^0 = \frac{1 \cdot 20 + 5 \cdot 90}{8} = 58,75 \text{ kN}$$

$$\frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8} = 5 \text{ kNm}^2$$

$$\frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{15 \cdot 6^2}{8} = 67,5 \text{ kNm}^2$$



Dio koji se odnosi na utjecaj horizontalnih reakcija dobijemo pomoću afinog preslikavanja zadanog nosača na momentni dijagram M_0 tako da se oni preklapaju.

Započinjemo na način da reakcije na ležajevima rastavljamo u vertikalnom smjeru i smjeru spojnice zglobnih ležajeva.

Kao što smo već spomenuli, na toj spojnici nalazi se horizontalna komponenta reakcije A_{sl} i B_{sl} , one su ujedno i jedine horizontalne reakcija u sustavu. S obzirom na to možemo napisati:

$$A = A^0 + A^{sl}$$

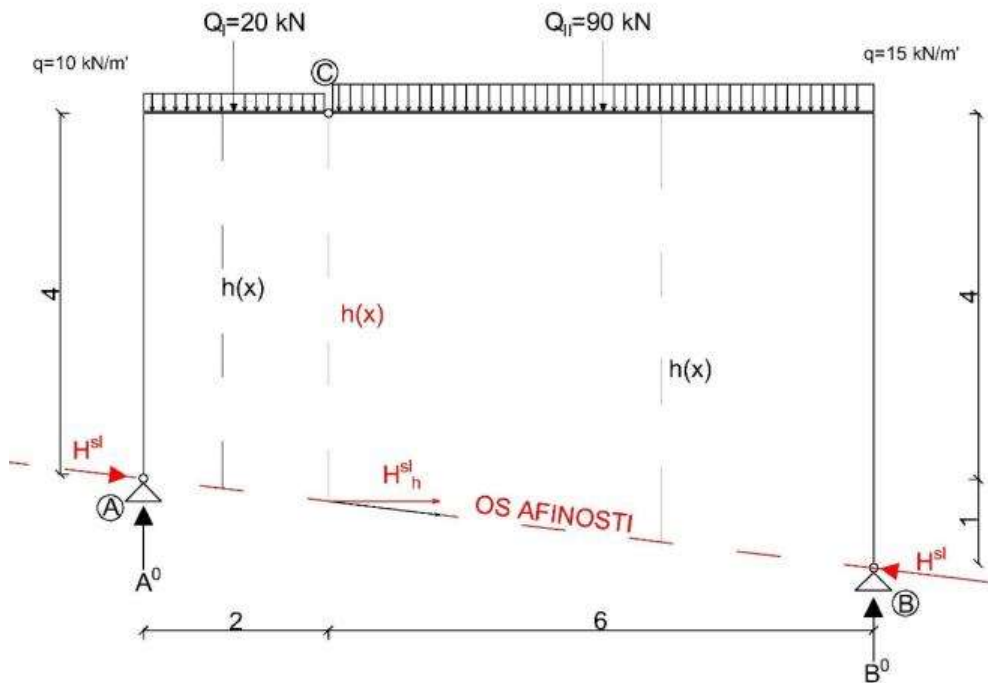
$$B = B^0 + B^{sl}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A^{sl} \cdot \cos\alpha - B^{sl} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$A^{sl} = B^{sl} = H^{sl}$$

Kako taj pravac prenosi samo horizontalnu reakciju H^{sl} , nazvat ćemo ga os afinosti u polju nosača. Zaključujemo da se os afinosti nalazi na pravcu koji prenosi horizontalnu silu. Momentni dijagram koji crtamo primjenom osi afinosti su momenti koji su uzrokovani silom na toj osi afinosti, dakle utjecaj horizontalne komponente H_h^{sl} :

$$M^H(x) = H_h^{sl} \cdot h(x)$$



Momentni dijagram M^H ovisi o vrijednosti reakcije H_h^{sl} koja je konstantnog iznosa i o geometriji nosača koju uzimamo u obzir preko $h(x)$. Duljina $h(x)$ je vertikalna udaljenost od osi nosača do osi afinosti.

Os afinosti u polju nosača pravac je djelovanja sile H^{sl} (pravac određen točkama A i B), dok je os afinosti u polju momenata nulta linija dijagrama M^0 . Nakon definiranih osi afinosti, svakoj točki nosača pridružujemo vrijednost momenta određenu relacijom:

$$(x, h(x)) \rightarrow (x, H \cdot h(x))$$

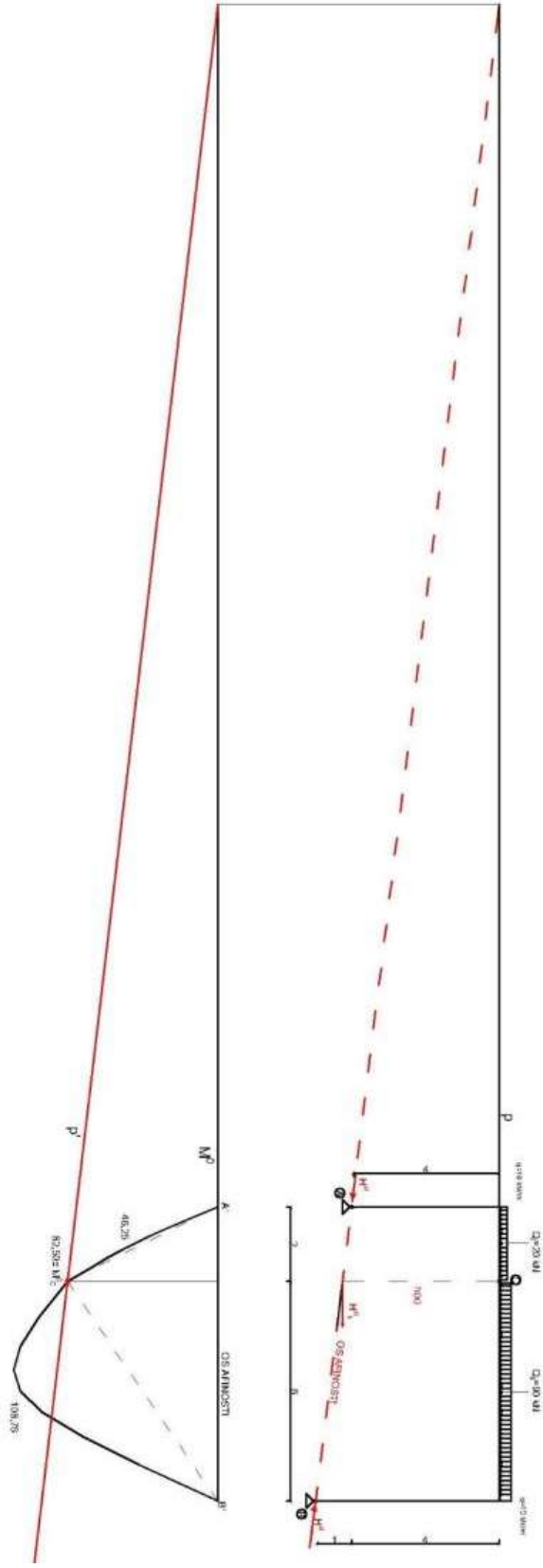
Znamo da je u zglobu C konačna vrijednost momenta nula.

$$M(x) = M_C^0 - H \cdot h_c(x) = 0$$

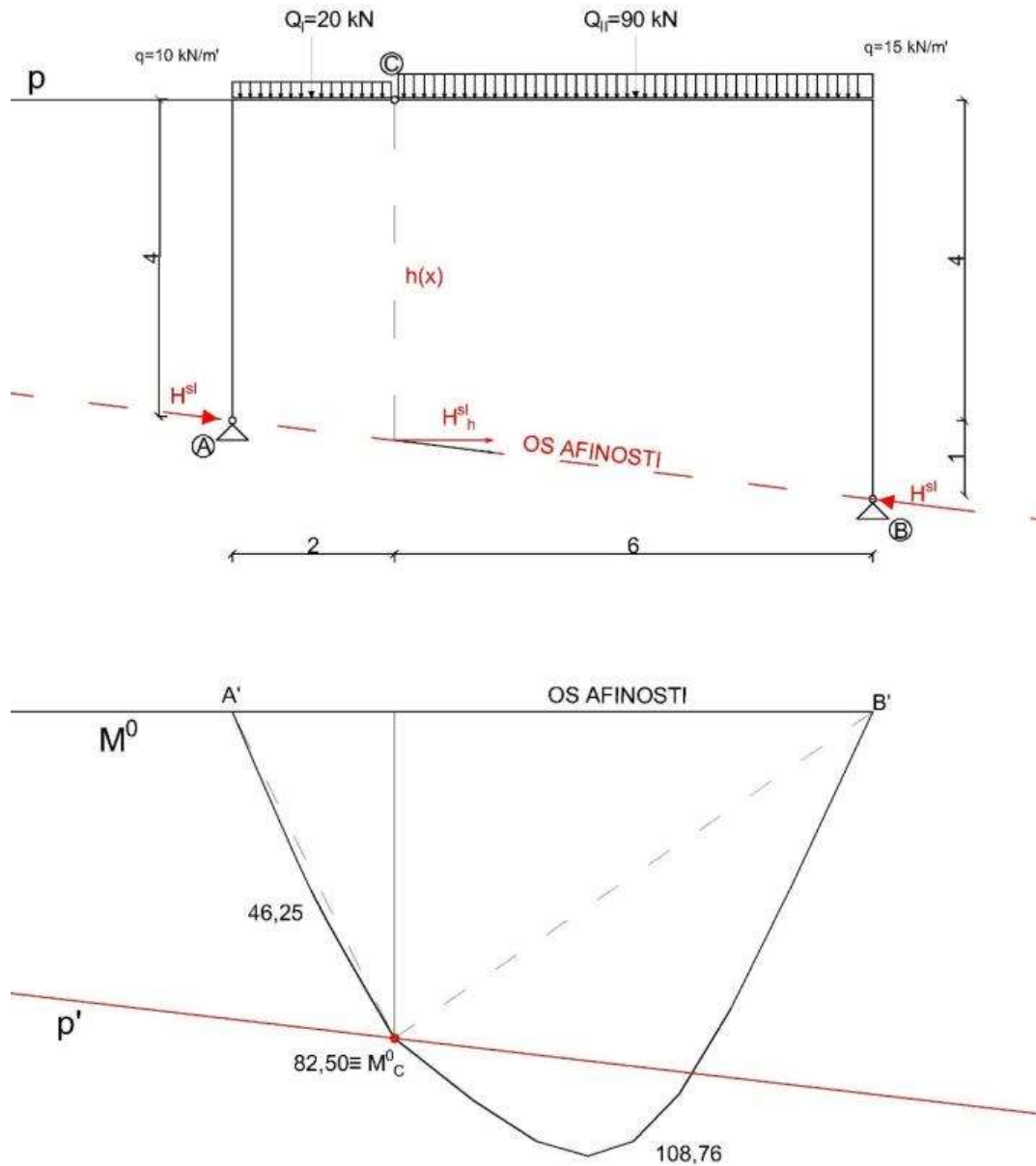
Dijagram M_C^0 smo već odredili. Moment savijanja od horizontale sile jednak sili H pomnoženoj s pripadnim krakom $h_c(x)$. To znači da u afinom pridruživanju točku C moramo pridružiti na mjesto na kojem će moment savijanja od horizontalne sile biti jednak momentu savijanja od vertikalnog opterećenja: $M_C^0 = -H \cdot h_c(x)$.

Počinjemo od elemnta na kojem se nalazi točka C . Afinu sliku tog pravca nalazimo tako da označimo točku sjecišta pravca koji je određen tim elemntom i osi afinosti u polju nosača, nazovimo ga pravac p . Zatim iz te točke napravimo vertikalu do osi afinosti u polju momenta. Njihovo sjecište definira točku pravca p' koji mora prolaziti kroz afinu sliku točke C , tj točkom M_C^0 .

$$M_C^0 - H \cdot h_c(x)$$



Malo detaljniji prikaz:



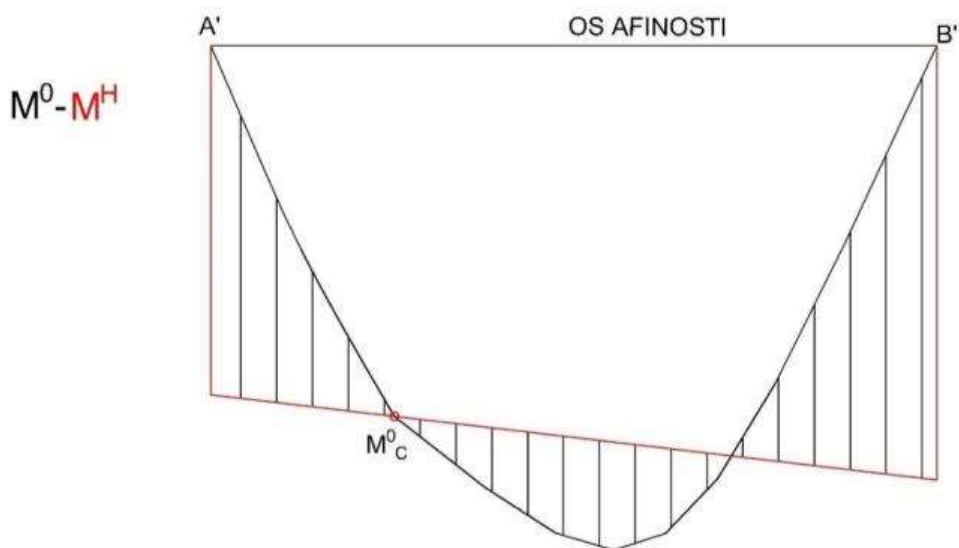
Ovim parom pridruženih točaka zadali smo afino pridruživanje ostalih parova točaka. Primjetimo da se ležajevi nalaze na osi afinosti u polju nosača. Poznavajući činjenicu da sve točke koje se nalaze na osi afinosti preslikavaju same u sebe, tako se i ove točke preslikaju na os afinosti u polju momenta.

$$(x_A, h_A(x)) \rightarrow (x_A, M_A)$$

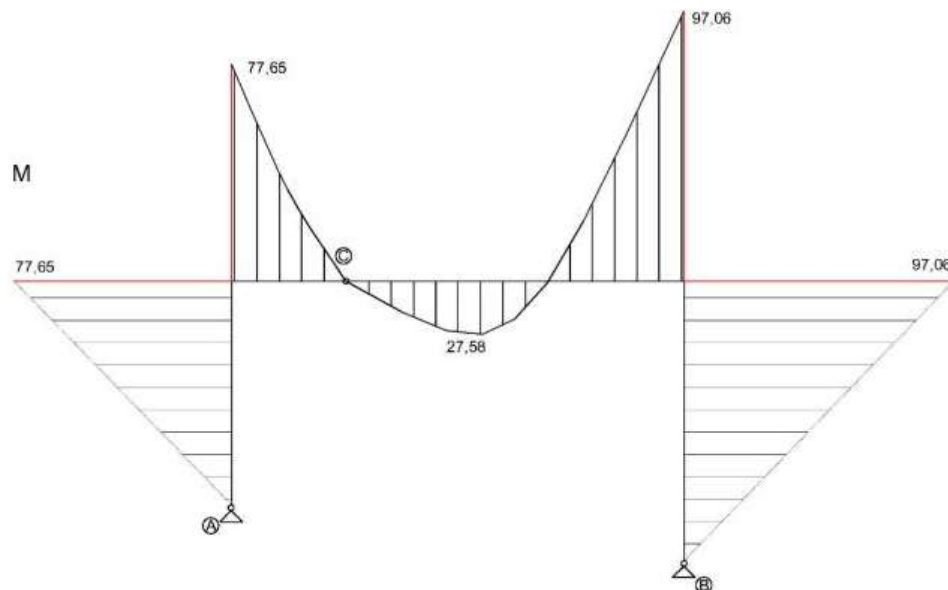
$$(x_B, h_B(x)) \rightarrow (x_B, M_B)$$

Sada nam je poznata kompletna desna strana jednadžbe : $M(x) = M^0(x) - M^H(x)$ i jedino što preostaje je oduzeti ta dva dijagrama kako bismo dobili konačni dijagram.

Grafičko preklapanje dijagrama nam omogućava njihovo „oduzimanje“. Dijelovi koji se preklapaju se ponište, a ostatak predstavlja konačni momentni dijagram M .



Konačne vrijednosti momenata očitavamo (po vertikalnim linijama) od krivulje dijagrama M^0 do krivulje dijagrama M^H . Krivulja dijagrama M^H postaje nul linija konačnog dijagrama. Očitane vrijednosti prenosimo na os nosača. One vrijednosti koje se nalaze iznad nul-linije, crtamo s „vanjske“ strane nosača, a vrijednosti ispod nul-linije crtamo s „unutarnje“ strane nosača. Vrijednosti momenata savijanja na vrhovima stupova dobivamo temeljem ravnoteže momenata u čvorovima.



Prikazan je još jedan način pronalaženja afine slike pravca p u slučaju, kao što je ovaj, kada se os afinosti i pravac p ne bi sijekle na papiru.

Nakon što smo odredili os afinosti, odabiremo par pridruženih točaka, od koji uvijek odabiremo zglob C i njegovu afinu sliku C' .

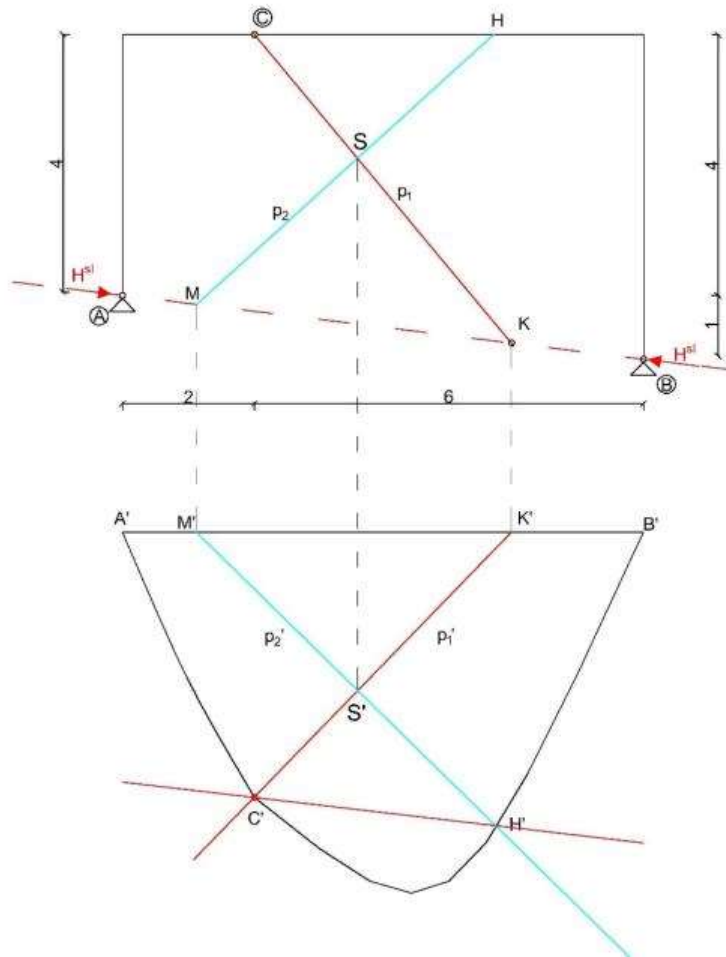
Pravac p_1 započinjemo u točki C zatim proizvoljno odabremo još jednu točku K na osi afinosti u polju nosača što znači da se točka K projicira u samu sebe na os afinosti u polju dijagrama - K' .

Za pravac p_2 obje točke su proizvoljne: točka na osi nosača H i točka na osi afinosti M koja se isto projicira na os afinosti u polju momenta u M' . Primjetimo da se pravci p_1 i p_2 sijeku.

Da definiramo afinu projekciju pravca p_2 treba nam još jedna točka koja se nalazi na tom pravcu. Sjecište tih pravca, S , jedina je zajednička točka tih pravaca. Zaključujemo da se njezina afina slika S' mora nalaziti na pravcu p_1' , ali i na pravcu p_2' .

Kada smo odredili afine slike M' i S' , možemo odrediti položaj pravca p_2' i afinu sliku točke H' .

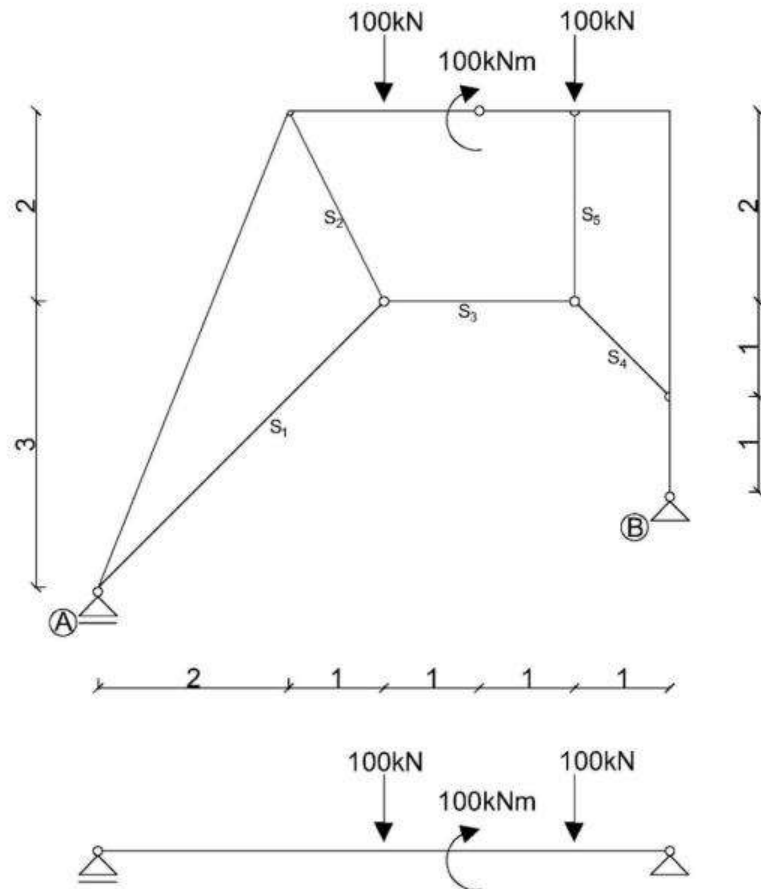
Kako točke C i H definiraju gredu našeg okvira u polju nosača, tako i njihove afine slike definiraju afinu sliku te grede tj. afinu sliku pravca p' .



5.3. Primjer 6.

Ako je u trozglobnom sustavu uključena i zatega ili sustav zatega, tada ona preuzima horizontalnu silu. Umetanjem zatega, jedan od zglobnih ležajeva postaje pomični, da bi se osigurala statička određenost sustava.

Zatega ne mijenja prvi korak superpozicijskog postupka kojim svodimo sustav na zamjenjujuću prostu gredu i opterećujemo ju s istim opterećenjem.



Reakcije zamjenjujućeg sustava:

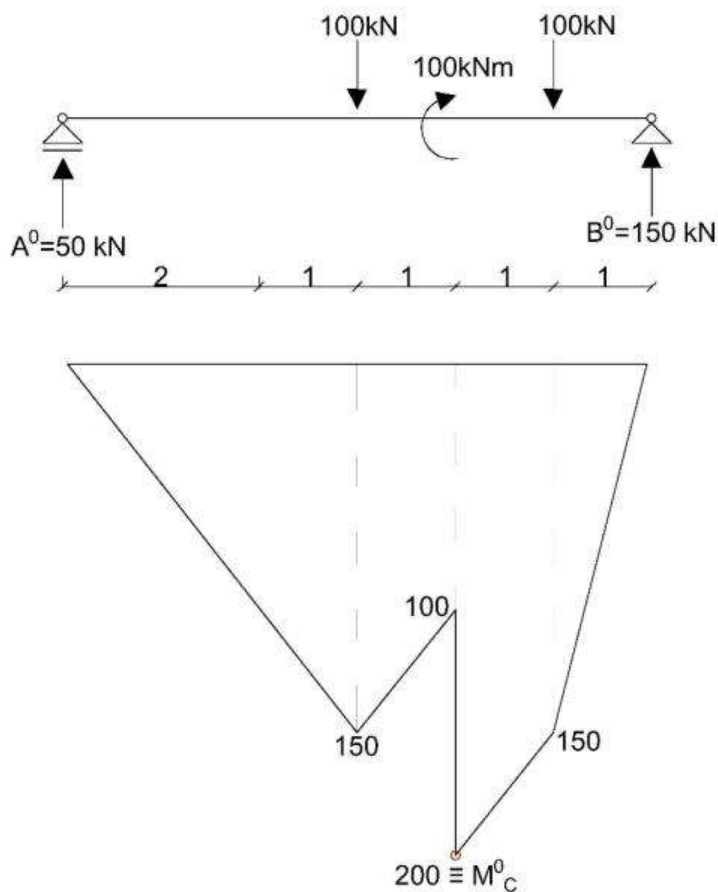
$$\sum M_A = 0 \quad -100 \cdot 3 - 100 - 100 \cdot 5 + B_0 \cdot 6 = 0$$

$$B_0 = \frac{100 \cdot 3 + 100 + 100 \cdot 5}{6} = 150 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \quad 100 \cdot 3 - 100 + 100 \cdot 1 + A_0 \cdot 6 = 0$$

$$A_0 = \frac{100 \cdot 3 - 100 + 100 \cdot 1}{6} = 50 \text{ kN}$$

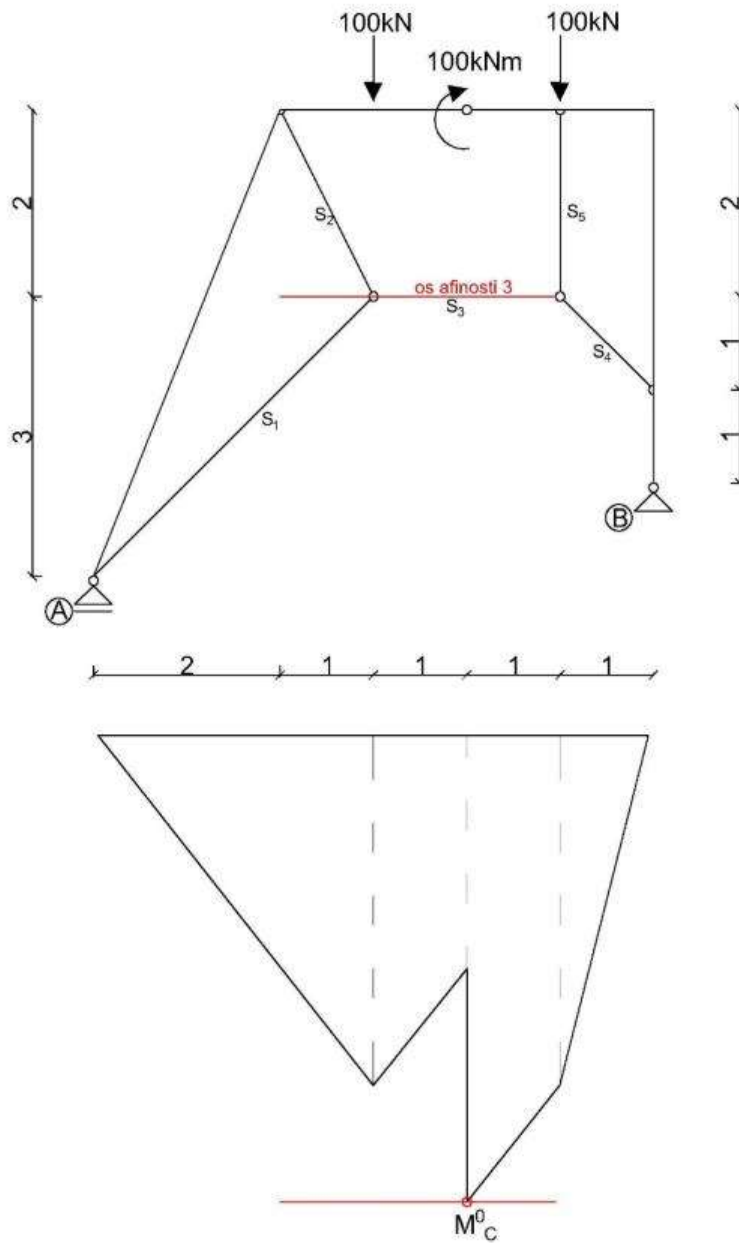
Poznavajući reakcije sustava, crtamo momentni dijagram savijanja koji predstavlja utjecaj od vertikalnih sila.



Afina preslikavanje nosača zadajemo izrazom : $M^Z(x) = Z \cdot h(x)$ gdje je Z horizontalna sila u zatezi, a $h(x)$ vertikalna udaljenost od osi afinosti do osi elementa nosača. Kao i uvijek, najprije pridružujemo par točaka (C, M_C^0) kojim je zadano afino pridruživanje:

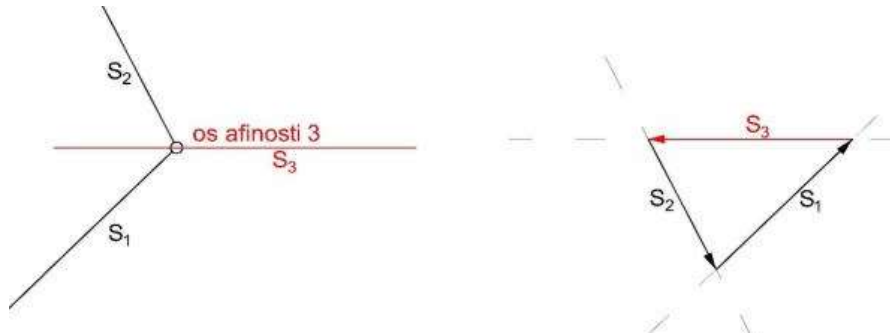
$$(x_C, h_C(x)) \rightarrow (x_C, M_C^0)$$

Pravac osi grede kojom prolazi zglob, paralelan je sa zategom što čini njezinu afinu sliku u beskonačnosti, tj. crtamo ju paralelno s osi afinosti.

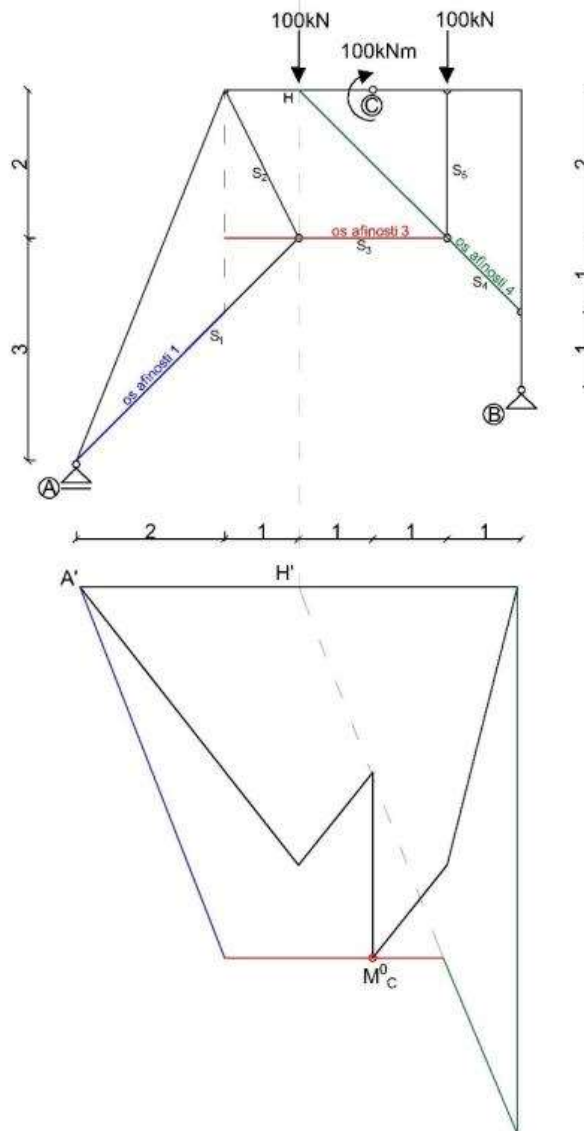


Ako detaljnije promotrimo lijevi disk, vidimo da imamo jednu horizontalnu zategu i dvije kose. Sve tri zatege prenose horizontalnu silu, a znamo da se os afinosti nalazi tamo gdje se nalazi i horizontalna sila. No, os afinosti može biti samo jedan pravac koji odredimo tako da postavimo ravnotežu čvora: $S_1 + S_2 + S_3 = 0$
 Trokut sila mora bit takav da je rezultanta sile S_1 i S_2 jednaka sili S_3 po iznosu i pravcu djelovanja, a suprotna po orijentaciji:

$$R_{1,2} = -S_3$$



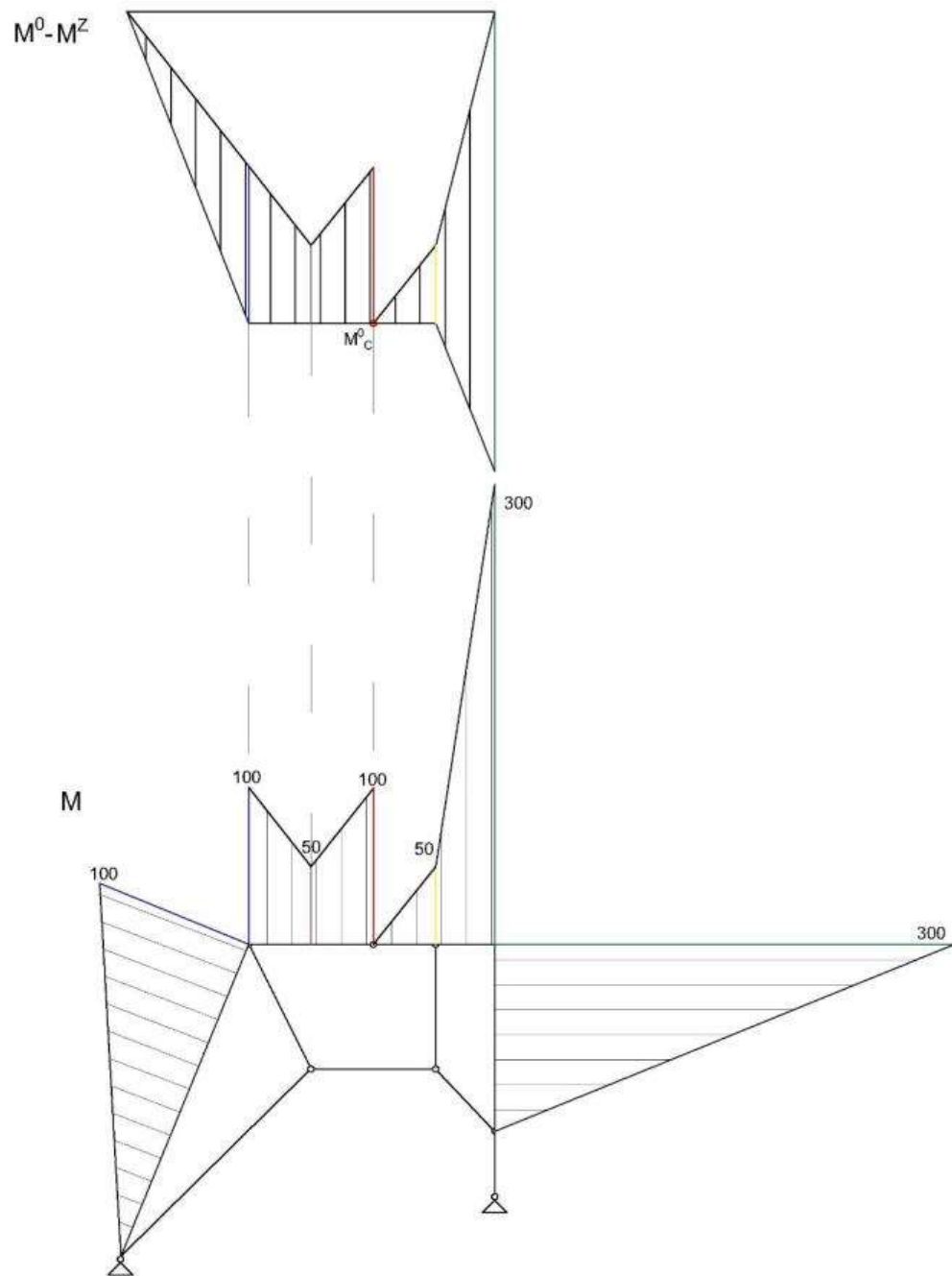
To znači da se u horizontalnoj zatezi 3 i dalje prenosi horizontalna sila sve do kraja djelovanja horizontalne komponente sile S_2 , kada ju preuzima zatega 1. Na tom dijelu zatega 1 predstavlja os afinosti i preko nje se preslikava kosi dio nosača. Kako zatega 1 završava u ležaju A, tako se točka A preslikava sama u sebe na os afinosti u polju dijagrama, a kosi dio se mora nastaviti na afinu sliku nosača određenu osi afinosti 3.



Ako promotrimo desni disk, vidimo isto tri zatege, ali jedna od njih je vertikalna i ne prenosi horizontalnu silu. Iz tog razloga horizontalna se sila nastavlja na kosu zategu 4 koja predstavlja os afinosti za dio nosača desno od zatege 5.

Da bismo preslikali dio grede određen osi afinosti 4, moramo naći njihovo sjecište, označimo ga sa H. Zatim projiciramo točku sjecišta na os afinosti u polju dijagrama gdje se afino preslikavanje ovog dijela mora nastaviti na afinu sliku određenu osi afinosti 3.

Tako preklopljene dijagrame grafički oduzimamo da bismo dobili konačni momentni dijagram savijanja na originalnom nosaču.

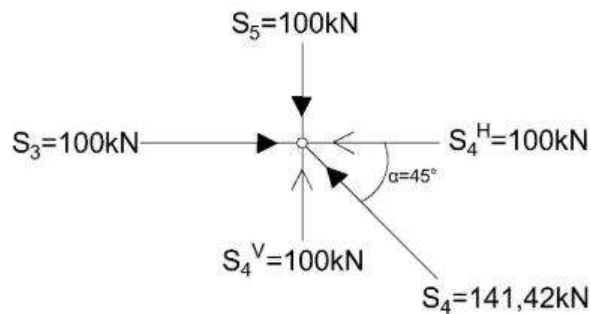


Nakon nacrtanog konačnog dijagrama savijanja, možemo uočiti kako na desnom stupu dijagram počinje tek od mjesta spajanja zatege i stupa. S obzirom da nema horizontalnih reakcija, horizontala se sila pojavljuje tek u zatezi pa tu počinje i momentni dijagram. Dok je na lijevoj strani zatega odmah spojena s ležajem A gdje se javlja i moment savijanja. Ponovimo, sve sile u zategama se uravnotežuju unutar sustava i zato nema horizontalnih reakcija. Zatege se zglobno spajaju za elemente sustava i prenose samo uzdužnu silu stoga ni na njima nema momenta savijanja.

Silu u zatezi S_3 možemo dobiti iz već poznatog izraza: $M^Z(x) = Z \cdot h(x)$, gdje M^Z je vrijednost momenta u afinoj slici zgloba C, koji u našem slučaju iznosi 200kNm, a $h(x)$ je udaljenost od zatege do zgloba koju očitamo iz plana nosača i iznosi $h(x)=2m$. Z označava silu u zatezi S_3 .

$$S_3 = \frac{M_C^0}{h(x)} = \frac{200}{2} = 100 \text{ kN}$$

Brzu analitičku provjeru možemo provesti uravnotežavanje čvora u kojem se spajaju zatega S_3 , S_4 , i S_5 . Znamo da je u zatezi 5 sila $S_5=100 \text{ kN}$. Zatim, zatega 4 je pod kutem $\alpha = 45^\circ$ stoga vrijedi $S_4^H=S_4^V=100 \text{ kN}$. Samim time, horizontalna komponenta zatege S_4^H uravnotežava se sa silom u zatezi 3, pa je $S_3=100 \text{ kN}$.



6. Zaključak

Nakon kratkog pregleda metoda proračuna trozglobnih i sličnih sistema možemo istaknuti neke prednosti i mane svake od metoda. Za analitičku metodu možemo lako zaključiti da se dobiju najtočnija rješenja u odnosu na ostale dvije metode. Jednostavno se upravlja opterećenjima neovisno o pravcu djelovanja, vrijednosti i samom broju sila i momenata. Dok je kod grafičke metode prvo potrebno prilagoditi mjerilo koje odgovara vrijednostima sila, a kod superpozicije metode bitno je da su opterećenja vertikalna.

Možemo spomenuti da superpozicijskom metodom možemo riješavati sustave koji su opterećeni i horizontalnim silama, ali onda ne bismo mogli koristiti „zamjenjuću gredu“ što dodatno komplicira postupak.

Kao nedostatak analitičke možemo istaknuti vrijeme koje je potrebno za ručno rješavanje jednadžbi, a to je proces koji je, naravno, podložan greškama velikih razmjera čije ispravljanje gotovo pa nije isplativo.

Nedostatak grafičke i grafoanalitičke metode je nedovoljna preciznost prilikom ručnog rješavanja zadataka. No, te greške malo odstupaju od stvarih rješenja, naravno u slučaju točno provedenih koraka proračuna. Zbog toga ove dvije metode možemo koristiti kao provjeru analitički dobivenih rezultata jer su relativno brze i praktične ako se radi o manjem broju sila.

Literatura:

Fresl K.: Građevna statika 1, Predavanja; <http://www.grad.hr/nastava/ga/sr/prcm.pdf>

Baniček M., Fresl K., Šamec E., Werner H.: Affine transformations of three-hinged arches: reviving an old method; <https://www.grad.unizg.hr/images/50014321/IASS2017.pdf>