

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

TEOREM MÜLLER – BRESLAUA

ZAVRŠNI RAD

Studentica: Maja Mrša

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Ak.god. 2010./11.

Zagreb, 13. rujna 2011.

Sadržaj

1. Uvod	2
2. Definicija utjecajne funkcije i utjecajne linije	3
3. Primjena utjecajnih linija	5
3.1. Utjecaj jedne koncentrirane sile	5
3.2. Utjecaj niza koncentriranih sila	5
3.3. Utjecaj distribuirane sile	7
3.4. Utjecaj koncentriranog momenta	9
4. Iskaz teorema Müller – Breslaua	10
5. Pomoćni teoremi	10
5.1. Teorem o uzajamnosti radova (Betti)	10
5.2. Teorem o uzajamnosti pomaka (Maxwell)	12
5.3. Teorem o virtualnim pomacima za elastična tijela	13
6. Varijante dokaza teorema Müller – Breslaua	15
6.1. Dokaz pomoću Bettijevog teorema	15
6.2. Dokaz pomoću Maxwellovog teorema	17
6.3. Dokaz pomoću virtualnog rada	23
7. Primjena teorema – crtanje utjecajnih linija	25
8. Zaključak	41
Literatura	42

1. Uvod

U ovom ćemo radu obraditi teorem Heinricha Müller - Breslaua i njegovu primjenu pri određivanju utjecajnih funkcija i utjecajnih linija na statički neodređenim sistemima. Najprije ćemo objasniti pojmove utjecajne funkcije i utjecajne linije i prikazati njihovu primjenu, te iskazati sam teorem. Obradit ćemo i pomoćne teoreme: Bettijev teorem o uzajamnosti radova, Maxwellov teorem o uzajamnosti pomaka i teorem o virtualnim pomacima za elastična tijela, te provesti varijante dokaza teorema Müller - Breslaua pomoću svakog od njih. Na kraju ćemo prikazati primjenu teorema na nekoliko primjera, pri čemu će sistemi biti riješeni metodom sila i metodom pomaka. Za crtanje utjecajnih linija primijenit ćemo Mohrovu analogiju.

2. Definicija utjecajne funkcije i utjecajne linje

Određene konstrukcije, poput mostova, nadvožnjaka, kranskih staza služe preuzimanju pokretnih opterećenja kao što su cestovna vozila, vlakovi ili kranovi. Prilikom proračuna takvih konstrukcija nailazimo na određene probleme. Kao prvo, određivanje reakcija i unutarnjih sila za pokretna opterećenja postupcima koji se primjenjuju za nepomična opterećenja dosta je složeno. Naime, promjenom položaja opterećenja mijenjaju se i vrijednosti statičkih i drugih veličina u nosačima. Poseban problem nastaje ako se opterećenja kreću velikim brzinama. Tada dolazi do ubrzanja dijelova nosača, te se javljaju i inercijalne sile koje treba uzeti u obzir u proračunu. Uz pretpostavku da se opterećenja kreću manjim brzinama, inercijalne je sile moguće zanemariti, jer su proporcijalne ubrzanjima. Upravo se pri takvim pokretnim opterećenjima najviše koristimo utjecajnim linijama i utjecajnim funkcijama. Upotrebljavamo ih također i pri ostalim oblicima pokretnih opterećenja kao i u provođenju proračuna za nepokretna opterećenja ako ih ima više vrsta.

Već smo spomenuli da se prilikom promjene položaja opterećenja u nosaču mijenjaju reakcije, unutrašnje sile i pomaci. Da bi odredili kako se te veličine mijenjaju, potrebno ih je izračunati više puta, u različitim karakterističnim položajima opterećenja. Proračun nosača pomoću utjecajnih linija brz je i jednostavan, ako možemo primijeniti princip superpozicije.

Utjecajne funkcije su u općenitom obliku funkcije dviju varijabli, jedna varijabla je mjesto na nosaču u kojem se želi odrediti neka veličina, a druga je položaj jediničnog opterećenja. U praktičnim proračunima se mjesto tražene veličine unaprijed zadaje, te je stoga utjecajna funkcija funkcija jedne varijable, i to položaja jediničnog opterećenja.

Neka na nosač djeluje jedinična sila u točki x_1 i neka je pri tom djelovanju vrijednost određene sile ili pomaka η_1 . Prema principu superpozicije će pri djelovanju sile P_1 vrijednosti P_1 u x_1 vrijednost te veličine biti $P_1 \cdot \eta_1$, uz pretpostavku da promjena vrijednosti sile ne uzrokuje mijenjanje pravca njezina djelovanja.

Utjecajna funkcija $\eta_{\bar{x}}$ za statičku ili kinematičku veličinu \mathfrak{F} u točki \bar{x} je funkcija položaja jedinične sile koja pokazuje ovisnost veličine \mathfrak{F} o položaju jedinične sile na nosaču.

Utjecajna funkcija, dakle, svakom položaju jedinične sile na nosaču pridružuje vrijednost tom silom izazvane poopćene sile ili poopćenog pomaka u nekoj fiksnoj točki nosača:

$$\eta_{\bar{x}} : x \rightarrow \eta_{\bar{x}}(x);$$

gdje je $\eta_{\bar{x}}(x)$ vrijednost veličine \mathfrak{F} u točki \bar{x} .

Utjecajna linija je grafički prikaz utjecajne funkcije na linijskim nosačima, a utjecajna ploha predstavlja grafički prikaz na plošnim nosačima.

Utjecajna linija za neku veličinu je, prema tome, linija čije ordinate daju vrijednosti te veličine ako jedinična sila djeluje u točkama za koje očitavamo te ordinate.

Na statički određenim sistemima utjecajne su funkcije za statičke veličine po dijelovima linearne funkcije ili konstante, pa su utjecajne linije uvijek sastavljene od dijelova pravaca, dok su kod statički neodređenih sistema utjecajne funkcije nelinearne, a utjecajne linije, po dijelovima, krivulje. Utjecajne linije za (pooćene) pomake su po dijelovima krivulje na svim sistemima.

Za određivanje utjecajnih funkcija i utjecajnih linija neke statičke veličine možemo primijeniti statički ili kinematički postupak.

U statičkom postupku izraz za iznos tražene veličine \mathcal{F} u točki \bar{x} u obliku funkcije položaja x izvodi se iz uvjeta ravnoteže nosača opterećenog jediničnom silom u po volji odabranoj točki x .

Kinematički postupak temelji se na teoremu Müller - Breslaua. Kod statički određenih sistema postupak određivanja utjecajne linije zasniva se na teoremu o virtualnim pomacima krutih tijela, pa utjecajnu liniju crtamo kao plan pomaka mehanizma nastalog raskidanjem veze koja u izvornom sistemu prenosi dotičnu silu, ako zadamo jedinički pomak na mjestu i u smislu suprotnom od djelovanja te sile. Za statički neodređen izvorni sistem, raskidanjem odgovarajuće veze, dobivamo sistem koji je geometrijski nepromjenjiv, te crtamo njegovu progibnu liniju. Ovaj se postupak zasniva na teoremu o uzajamnosti radova, na teoremu o uzajamnosti pomaka ili na teoremu o virtualnim pomacima za deformabilna tijela.

3. Primjena utjecajnih linija

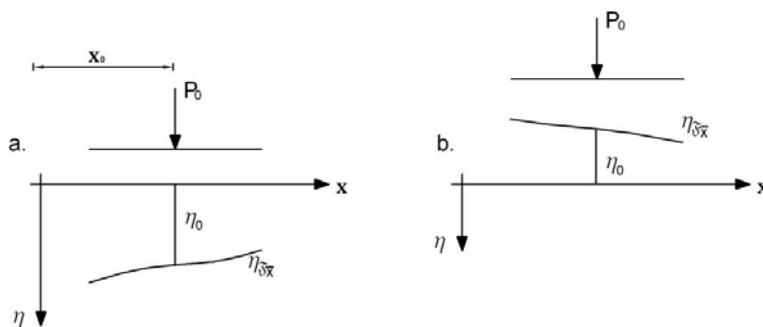
U nastavku ćemo detaljnije opisati kako se pomoću utjecajnih funkcija ili utjecajnih linija mogu izračunati tražene veličine za djelovanja raznih opterećenja. Pretpostavit ćemo zasad da su nam utjecajna funkcija $\eta_{\bar{x}}$ i utjecajna linija za traženu veličinu \mathcal{F} u točki \bar{x} poznate. Da bi primjena bila jednoznačna moraju biti definirani koordinatni sustav i pretpostavljene pozitivne orijentacije opterećenja i veličine \mathcal{F} .

3.1. Utjecaj jedne koncentrirane sile

Neka na nosač djeluje koncentrirana sila P_0 u točki x_0 i neka je vrijednost utjecajne linije u toj točki $\eta_0 = \eta_{\bar{x}}(x_0)$. Tada će vrijednost veličine F u točki x_0 biti

$$F_{\bar{x}}(P_0) = P_0 \cdot \eta_0.$$

Za izračunavanje vrijednosti $F_{\bar{x}}$ treba paziti da li je ta vrijednost pozitivna ili negativna. Ako predznak ordinate η_0 ima isti smisao kao djelovanje sile P_0 , vrijednost će biti pozitivna (slika 1.a), a u suprotnom negativna (slika 1.b).



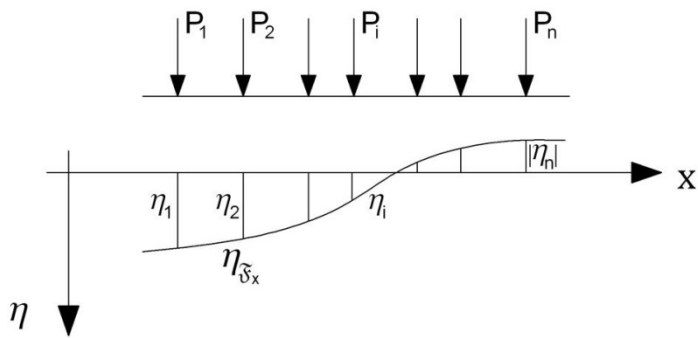
Slika 1.

3.2. Utjecaj niza koncentriranih sila

Neka na nosač djeluju koncentrirane sile niza $\{P_i\}_{i=1}^n = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ u točkama x_i u kojima su vrijednosti utjecajne funkcije $\eta_i = \eta_{\bar{x}}(x_i)$. Tada će ukupan utjecaj biti

$$F_{\bar{x}}(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i;$$

pri čemu treba uvažiti predznake vrijednosti η_i i orijentacije sila.

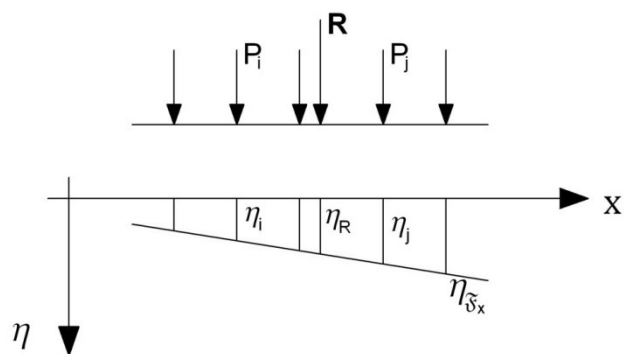


Slika 2.

U posebnom slučaju, kada je na dijelu nosača na kojem djeluje niz koncentriranih sila $P_i, i = 1, \dots, n$, utjecajna linija dio pravca, može se dokazati da je utjecaj tog niza sila jednak utjecaju njihove rezultante, pa tada možemo pisati

$$F_{\bar{x}}(\{P_i\}_{i=1}^n) = F_{\bar{x}}(R),$$

gdje je $R = \sum_{i=1}^n P_i$ vrijednost rezultante R sila P_i .



Slika 3.

Na temelju toga utjecaj se može izračunati množenjem vrijednosti rezultante s ordinatom utjecajne linije umjesto da se određuju ordinate ispod svake sile i zatim rezultat dobiva iz sume produkata svih sila s odgovarajućim ordinatama utjecajnih linija. Pri tome treba napomenuti da, ako je utjecajna linija sastavljena od nekoliko dijelova pravca, treba naći onoliko rezultanti koliko je i dijelova, jer jedna rezultanta može zamijeniti samo one sile koje djeluju na istom pravčastom segmentu.

3.3. Utjecaj distribuirane sile

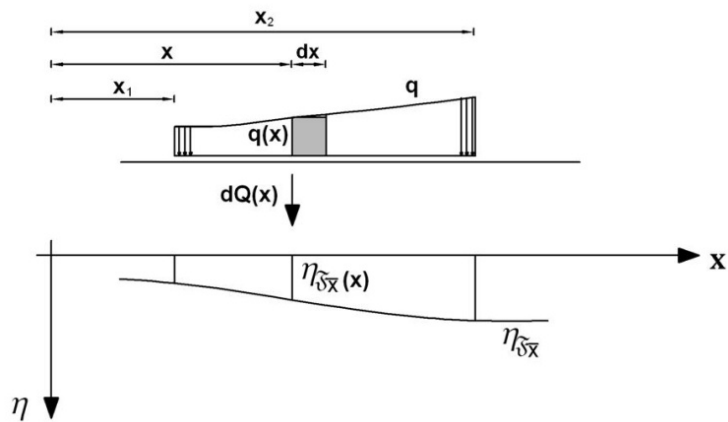
Uzmimo da na nosač između točaka x_1 i x_2 djeluje distribuirana sila čija je vrijednost opisana funkcijom q .

Ako opterećenje q na odsječku $[x, x + dx]$ zamijenimo infinitesimalnom koncentriranom silom $dQ(x)$ čija je vrijednost $dQ(x) = q(x) dx$ s hvatištem u x , tada će utjecaj te sile biti

$$F_{\bar{x}}(dQ(x)) = dQ(x) \eta_{\delta\bar{x}}(x) = q(x) dx \eta(x) = q(x) \eta_{\delta\bar{x}}(x) dx = d[F_{\bar{x}}(\mathbf{q})](x).$$

Ukupni utjecaj distribuirane sile na dijelu $[x_1, x_2]$ dobit ćemo integracijom:

$$F_{\bar{x}}(\mathbf{q}) = \int_{x_1}^{x_2} d[F_{\bar{x}}(\mathbf{q})](x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \eta_{\delta\bar{x}}(x) dx.$$

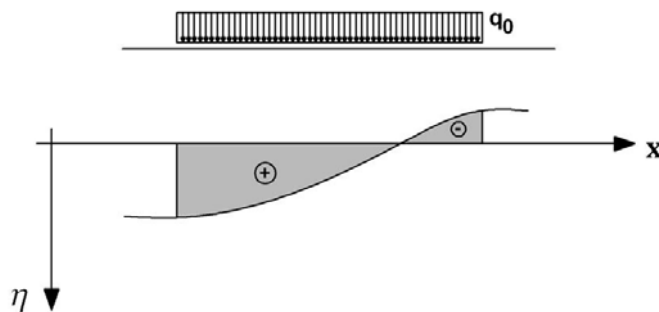


Slika 4.

Za slučaj kad je kontinuirana sila jednoliko raspodijeljena, $q(x) = q_0$, bit će

$$F_{\bar{x}}(q_0) = q_0 \mathfrak{A}_{1,2},$$

gdje $\mathfrak{A}_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \eta_{\delta\bar{x}}(x) dx$ predstavlja površinu između krivulje $\eta_{\delta\bar{x}}$ i koordinatne osi x na segmentu $[x_1, x_2]$. No ta površina nije geometrijska veličina, njezina vrijednost, tj. vrijednost integrala može biti i negativna (slika 5.).



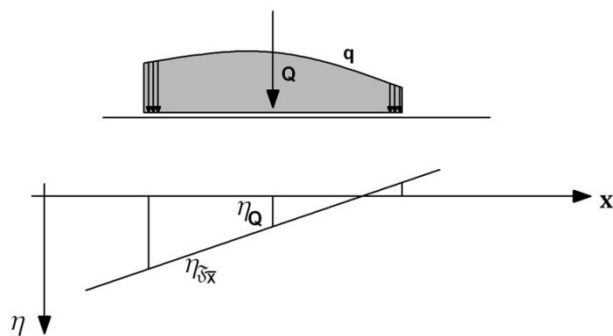
Slika 5.

Zaključujemo da se utjecaj jednoliko distribuiranog opterećenja može izračunati kao umnožak njegove vrijednosti i površine između utjecajne linije i koordinatne osi x na dijelu nosača na kojem opterećenje djeluje, vodeći računa o predznacima.

Za slučaj kada je pak utjecajna funkcija na dijelu nosača na kojem djeluje distribuirana sila q linearna, utjecaj distribuirane sile jednak je utjecaju rezultante te sile (slika 6.) :

$$F_{\bar{x}}(q) = F_{\bar{x}}(Q),$$

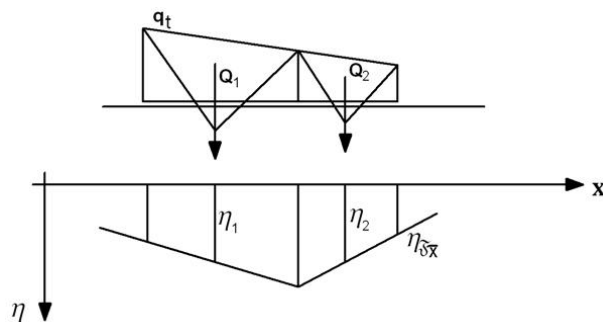
gdje je $Q = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$ vrijednost rezultante distribuirane sile q.



Slika 6.

Kao i kod računanja utjecaja niza sila, moramo voditi računa o tome je li utjecajna linija, na dijelu nosača na kojem djeluje distribuirana sila, sastavljena od više dijelova pravaca. Ako jest, za svaki takav segment treba izračunati rezultantu i utjecaje zbrojiti (slika 7.):

$$F_{\bar{x}}(q_t) = Q_1\eta_1 + Q_2\eta_2.$$



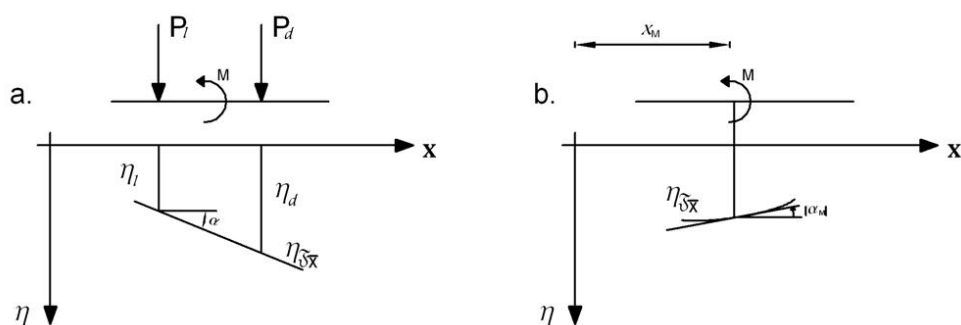
Slika 7.

3.4. Utjecaj koncentriranog momenta

Uzmimo zasad da je utjecajna linija linearna (slika 8.a). Koncentrirani moment M vrijednosti M , koji djeluje u točki x_M , zamijenit ćemo spregom sila P_l i P_d vrijednosti $P_l = P_d = M/\lambda$, gdje je λ njihova međusobna udaljenost. Utjecaj tog sprega će biti

$$F_{\bar{x}}(P_l, P_d) = -M \operatorname{tg} \alpha,$$

gdje je α orijentirani kut između osi x i pravca utjecajne linije.



Slika 8.

Kako je utjecajna funkcija u našem slučaju rastuća, slijedi da je kut α pozitivan.

Prema tome, za ravninu xz imamo da je pozitivan onaj kut čiji je smisao jednak smislu vrtnje kazaljke na satu, dok neke veličine, poput momenta ili kuta zaokreta osi nosača smatramo pozitivnim ako im je smisao suprotan smislu vrtnje kazaljke na satu, bez obzira u kojem se koordinatnom sustavu nalaze.

Kako izraz $M \operatorname{tg} \alpha$ ne ovisi o razmaku sila λ , možemo pisati:

$$F_{\bar{x}}(M) = -M \operatorname{tg} \alpha.$$

(Negativan predznak u izrazu za $F_{\bar{x}}$ posljedica je suprotnih smjerova vrtnje momenta M i kuta α .)

Možemo zaključiti da za linearnu utjecajnu funkciju položaj hvatišta koncentriranog momenta ne utječe na vrijednost $F_{\bar{x}}$.

Ako je utjecajna funkcija nelinearna (slika 8.b), utjecaj je koncentriranog momenta

$$F_{\bar{x}}(M) = -M \operatorname{tg} \alpha_M,$$

gdje je α_M orijentirani kut nagiba tangente na utjecajnu liniju u hvatištu x_M momenta M .

Kako se nagib tangente na krivulju utjecajne linije mijenja duž osi nosača, sada položaj hvatišta momenta utječe na vrijednost veličine $F_{\bar{x}}$.

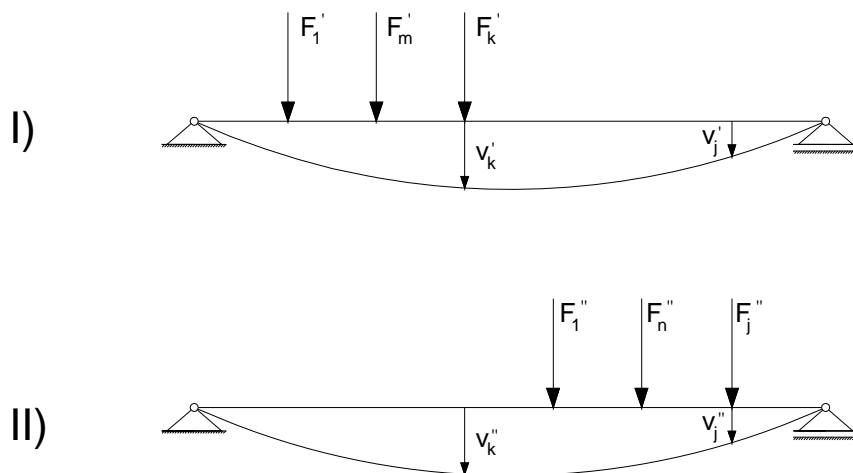
4. Iskaz teorema Müller – Breslaua

Teorem Müller – Breslaua je temelj za kinematički postupak određivanja utjecajnih linija za statičke veličine na statički neodređenim sistemima. Kako su utjecajne funkcije za takve sisteme najčešće nelinearne funkcije, tako su i utjecajne linije najčešće sastavljene od dijelova krivulja. Prema tom teoremu utjecajna linija jednaka je progibnoj liniji nosača zbog jediničnog prisilnog pomaka na mjestu i u smislu suprotnom od statičke veličine za koju tražimo utjecajnu liniju.

5. Pomoćni teoremi

5.1. Teorem o uzajamnosti radova (Bettijev teorem)

Promatramo prostu gredu na koju djeluju dva uravnotežena sustava sila, sistem sila I, F_k' ($k=1,2,\dots,m$), i sistem sila II, F_j'' ($j=1,2,\dots,n$).



Slika 9.

Pretpostavit ćemo da djelovanje jednog sistema sila ne ovisi o djelovanju drugoga sistema, tj. da vrijedi zakon superpozicije. Tako su pomak v_k' na mjestu i u smjeru sile F_k' i pomak v_j' na mjestu i u smjeru sile F_j'' nastali zbog zajedničkog djelovanja sila sistema I, dok su pomak v_j'' na mjestu i u smjeru sile F_j'' i pomak v_k'' na mjestu i u smjeru sile F_k' nastali zbog zajedničkog djelovanja svih sila sistema II.

Kada bismo na prostu gredu oba sistema sila nanosili istodobno, onda bi pomak na mjestu i u smjeru sile F_k' iznosio $v_k = v_k' + v_k''$, a na mjestu j u smjeru sile F_j'' $v_j = v_j'' + v_j'$.

Ukupan rad će u tom slučaju biti

$$R_v = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^m F_k \cdot v_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n F_j \cdot v_j.$$

Ako bismo pak na promatranu gredu prvo nanijeli sistem sila I, rad pri tome iznosi

$$R_v(I) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^m F_k' \cdot v_k'.$$

A zatim na istu gredu nanosimo sistem II, rad sila sistema II iznosi

$$R_v(II) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n F_j'' \cdot v_j''.$$

Rad koji obave sile sistema I na pomacima izazvanim silama sistema II bit će

$$R_v(I, II) = \sum_{k=1}^m F_k' \cdot v_k''.$$

Konačno, ukupan će rad u tom slučaju biti

$$R_v = R_v(I) + R_v(I, II) + R_v(II).$$

Ako zamijenimo redoslijed nanošenja sila, tako da gredu prvo opteretimo sistemom sila II, a potom sistemom I, ukupni će rad iznositi

$$R_v = R_v(II) + R_v(II, I) + R_v(I)$$

gdje je

$$R_v(II, I) = \sum_{j=1}^n F_j'' \cdot v_j'.$$

Budući da ukupan rad vanjskih sila ne ovisi o redoslijedu kojim sile nanosimo na tijelo, ove radove možemo izjednačiti, te će onda biti

$$\sum_{k=1}^m F_k' \cdot v_k'' = \sum_{j=1}^n F_j'' \cdot v_j'.$$

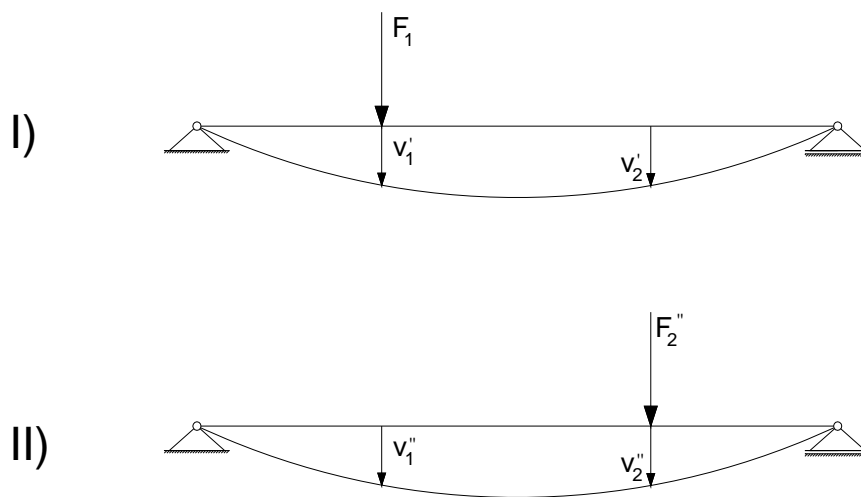
Ova jednađba predstavlja Bettijev teorem o uzajamnosti radova koji glasi:

Rad sila prvog sustava na odgovarajućim pomacima koji su izazvani silama drugog sustava, jednak je radu sila drugog sustava na odgovarajućim pomacima izazvanim silama prvog sustava.

Ovaj teorem vrijedi za materijale koji se ponašaju po Hookeovom zakonu. Iz njega proizlaze teoremi: Maxwellov teorem o uzajamnosti pomaka, teorem o uzajamnosti reakcija i teorem o uzajamnosti reakcija i pomaka.

5.2. Teorem o uzajamnosti pomaka (Maxwellov teorem)

Promatramo prostu gredu u dva različita ravnotežna stanja. Sistem I čini sila F_1 sa pripadnim ležajnim reakcijama, a sistem II sila F_2 s odgovarajućim ležajnim reakcijama.



Slika 10.

Za ova stanja opterećenja prema Bettijevom teoremu o uzajamnosti radova, dobivamo sljedeću jednađbu :

$$F_1 \cdot v_1'' = F_2 \cdot v_2'$$

Pomaci v_1'' , odnosno v_2' mogu se izraziti pomoću pomaka od jediničnih sila, jer vrijedi princip superpozicije:

$$v_1'' = F_2 \cdot \delta_{12},$$

$$v_2' = F_1 \cdot \delta_{21},$$

gdje su δ_{12} - pomak na mjestu i u smjeru sile F_1 izazvan silom $F_2 = 1$,

δ_{21} - pomak na mjestu i u smjeru sile F_2 izazvan silom $F_1 = 1$.

Uvrštavanjem ovih izraza u gornju jednadžbu o uzajamnosti radova, dobivamo izraz

$$F_1 \cdot F_2 \cdot \delta_{12} = F_2 \cdot F_1 \cdot \delta_{21},$$

odakle je $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Ova relacija predstavlja Maxwellov teorem o uzajamnosti pomaka koji glasi:

Pomak na mjestu i u smjeru prve jedinične sile uzrokovan drugom jediničnom silom, jednak je pomaku na mjestu i u smjeru druge jedinične sile izazvanom prvom jediničnom silom.

Ako su sile F_1 i F_2 jednake, slijedi da je

$$v_1'' = v_2'.$$

Za ovakav slučaj možemo Maxwellov teorem iskazati na sljedeći način:

Ako su sile prvog stanja jednake silama drugog stanja, onda je pomak na mjestu i u smjeru sile prvog stanja izazvan silom drugog stanja jednak pomaku na mjestu i u smjeru sile drugog stanja izazvanom silom prvog stanja.

3.3. Teorem o virtualnim pomacima za elastična tijela

U mehanici deformabilnih tijela virtualni su pomaci definirani kao zamišljeni dovoljno mali pomaci koji ne narušavaju neprekinutost tijela i ležajne uvjete, odnosno, koji zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti pomaka i koji su na ležajevima jednaki nuli, neovisno o mogućim zadanim prisilnim pomacima ležajeva.

Teoremom o virtualnim pomacima izražavaju se uvjeti ravnoteže deformabilnih tijela na indirektan način, uz pretpostavku da se pri virtualnim pomacima ravnotežne vrijednosti stvarnih sila ne mijenjaju i da pravci na kojima djeluju te sile ostaju paralelni s pravcima na kojima su djelovale sile prije pomicanja.

Konačno, teorem o virtualnim pomacima za elastična tijela glasi:

Ako se elastično tijelo pod zadanim sistemom sila nalazi u ravnoteži, tada je rad stvarnih vanjskih sila na virtualnim pomacima jednak radu stvarnih unutarnjih sila ili naprezanja na odgovarajućim virtualnim deformacijama.

A vrijedi i obrat:

Ako je rad stvarnih vanjskih sila na bilo kakvim virtualnim pomacima jednak radu stvarnih unutarnjih sila na odgovarajućim deformacijama, tada su vanjske i unutarnje sile u ravnoteži.

Kako se rad stvarnih sila na virtualnim pomacima naziva virtualnim radom, ovaj se teorem često naziva i teoremom o virtualnom radu.

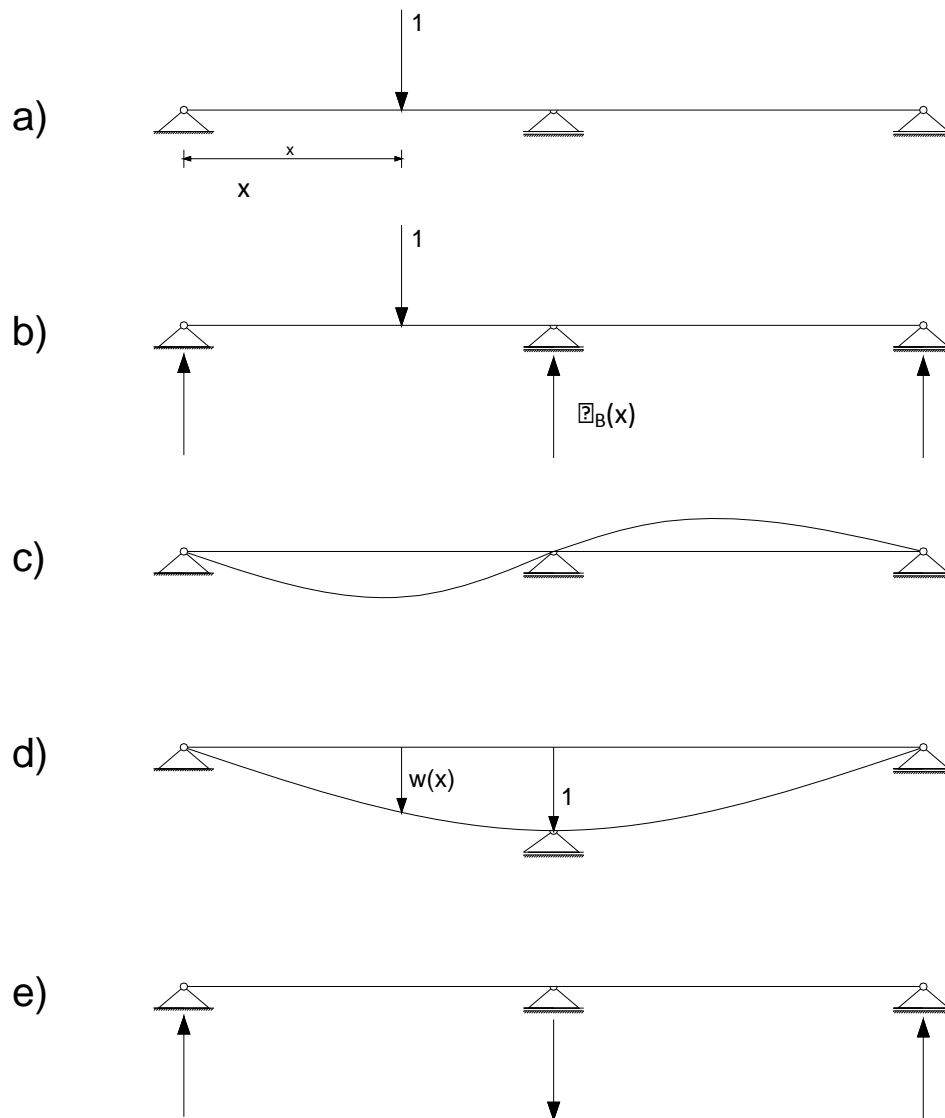
Teorem je formalna osnova za niz metoda, ponajviše numeričkih, poput klasične Galerkinove metode i metode konačnih elemenata u Galerkinovoj formulaciji.

Poopćenje teorema, u kojem virtualni pomak u odabranoj točki ne mora zadovoljavati rubne uvjete i/ili uvjete neprekidnosti, osnova je metode jediničnog pomaka koja se primjenjuje, primjerice, u određivanju utjecajnih linija/funkcija te koeficijenata krutosti u metodi pomaka.

6. Varijante dokaza teorema Müller – Breslaua

6.1. Dokaz pomoću Bettijevog teorema

Valjanost postupka Müller – Breslaua dokazat ćemo na primjeru utjecajne funkcije za reakciju B na srednjem ležaju kontinuiranog nosača preko dva raspona i pripadne utjecajne linije, uz primjenu Bettijevog teorema za uzajamnost radova u dva različita ravnotežna stanja.



Slika 11.

Na slici 11.a) prikazano je prvo stanje u kojem promatramo naš kontinuirani nosač na koji djeluje jedinična sila okomita na njegovu os u nekoj proizvoljno odabranoj točki x . Drugo je stanje prikazano na slici 11.d) u kojem je zadan prisilni jedinični pomak srednjeg ležaja po pravcu okomitom na os nosača.

Slika 11.b) prikazuje sve sile koje u prvom stanju djeluju na nosač. To su zadana jedinična sila u općem položaju te uravnotežujuće reaktivne sile. Progibna linija nosača zbog djelovanja jedinične sile skicirana je na slici 11.c).

Da bismo primijenili Bettijev teorem, zamislit ćemo da te sile rade na pomacima drugog stanja (slika 11.d). U tom se stanju krajnji ležaji ne pomiču, pa samo sila $\mathbb{B}(x)$ i jedinična sila obavljaju rad, i to na pravcima po kojima se odvijaju pomaci njihovih hvatišta, a vrijednosti tih pomaka su 1 i $w(x)$. Kako je smisao jediničnog pomaka suprotan smislu djelovanja sile $\mathbb{B}(x)$, rad je sila prvog stanja na pomacima drugog stanja

$$-\mathbb{B}(x) \cdot 1 + 1 \cdot w(x).$$

Prema Bettijevu teoremu rad je sila prvog stanja na pomacima drugog jednak radu sila drugog stanja na pomacima prvoga.

U drugom se stanju zbog prisilnog jediničnog pomaka javljaju samo reakcije (slika 11.e), a kako u prvom stanju nema pomaka ležajeva, rad je sila drugog stanja na pomacima prvog stanja jednak nuli. Stoga iz Bettijeva teorema slijedi

$$-\mathbb{B}(x) \cdot 1 + 1 \cdot w(x) = 0,$$

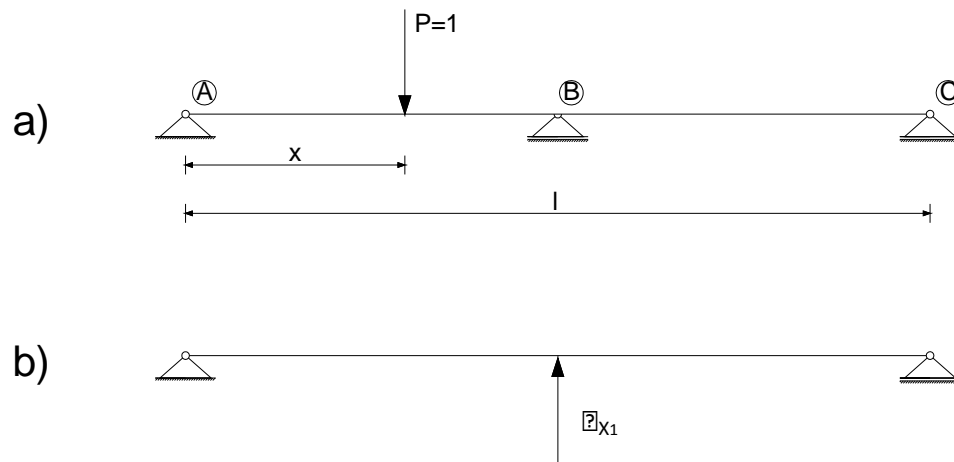
pa je

$$\mathbb{B}(x) = w(x).$$

4.2. Dokaz pomoću Maxwellovog teorema

Najprije ćemo prikazati statički postupak određivanja utjecajnih funkcija.

Na kontinuiranom nosaču tražimo utjecajnu liniju za prekobrojnu silu X_1 .



Slika 12.

Na nosač djeluje jedinična sila ($P = 1$) na udaljenosti x od ležaja A. Sila se kreće po nosaču i potrebno je odrediti prekobrojnu silu kao funkciju položaja jedinične sile.

Na slici 12.b) prikazan je osnovni sistem. Osnovna jednadžba metode sila u ovom slučaju glasi

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{1v} = 0,$$

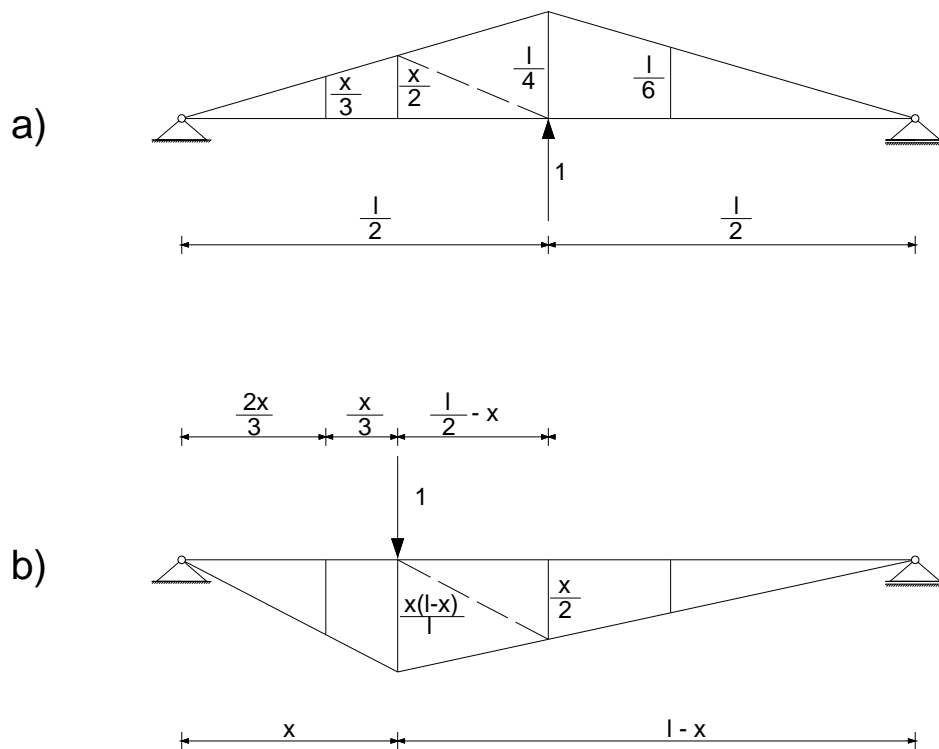
iz čega slijedi da je

$$X_1 = -\frac{\delta_{1v}}{\delta_{11}}.$$

U gornjem izrazu δ_{11} je konstantna veličina, dok je δ_{1v} promjenjiva i ovisi o položaju jedinične sile na osnovnom sistemu.

Pretpostavit ćemo prvo da jedinična sila $P = 1$ djeluje u prvom polju nosača, što znači da vrijedi $0 < x \leq l/2$.

Na slici 13. nacrtani su dijagrami na zadanom nosaču za jediničnu vrijednost prekobrojne sile i za silu $P = 1$ na proizvoljnom mjestu u prvom polju nosača.



Slika 13.

Iz gornjih dijagrama možemo naći izraze za δ_{11} i $\delta_{1v}(x)$:

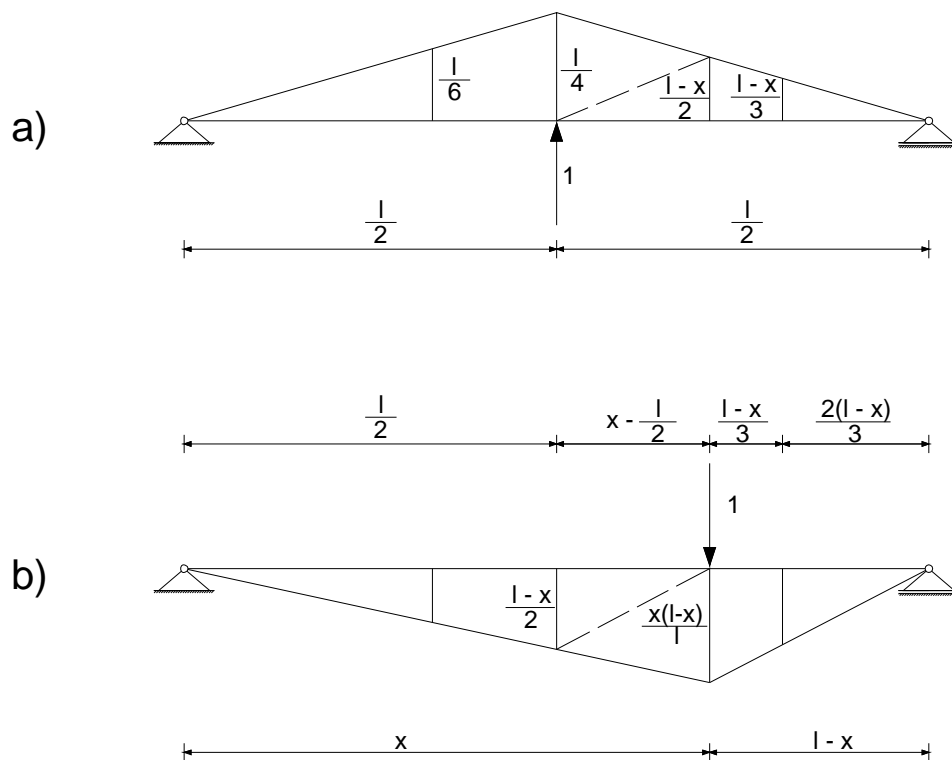
$$\delta_{11} = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right] \cdot 2 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l^3}{48EI}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1v}(x) &= - \left[\left(\frac{x(1-x)}{l} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{x}{3} + \left(\frac{x(1-x)}{l} \cdot \frac{(1-2x)}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{(1-2x)}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \right] \cdot \frac{1}{EI} \\ &= - \frac{x(3l^2 - 4x^2)}{48EI}, \end{aligned}$$

što uvršteno u izraz za x_1 daje

$$x_1(x) = \frac{x(3l^2 - 4x^2)}{l^3}.$$

Kada bi jedinična sila $P = 1$ djelovala u drugom polju nosača, momentni dijagram za jediničnu silu bio bi zrcalna slika dijagrama sa slike 13.b), što je prikazano na slici 14.b).



Slika 14.

δ_{11} je konstantan, a $\delta_{1v}(x)$ sada iznosi

$$\begin{aligned} \delta_{1v}(x) &= - \left[\left(\frac{(1-x)}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{(1-x)}{2} \cdot \frac{(2x-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1-x}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{2x-1}{2} \cdot \frac{x(1-x)}{1} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{(1-x)}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{x(1-x)}{1} \cdot (1-x) \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{(1-x)}{3} \right] \cdot \frac{1}{EI} \\ &= \frac{(1-x)(l^2 - 8lx + 4x^2)}{48EI}, \end{aligned}$$

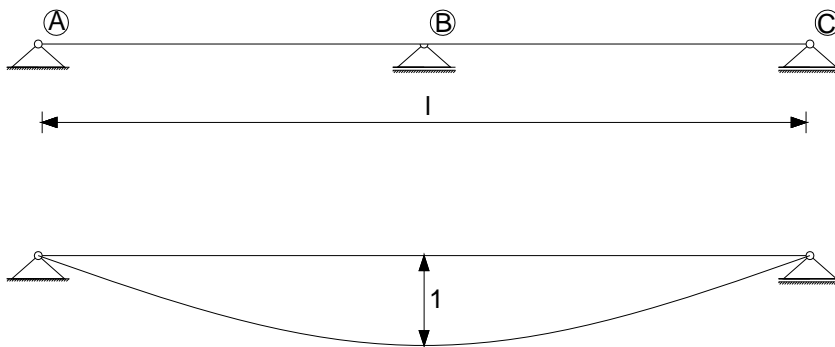
pa izraz za x_1 u ovom slučaju glasi:

$$x_1(x) = \frac{(x-1)(l^2 - 8lx + 4x^2)}{l^3}.$$

Konačno, izraz

$$x_1(x) = \begin{cases} \frac{x(3l^2 - 4x^2)}{l^3} & \text{za } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{(x-l)(l^2 - 8lx + 4x^2)}{l^3} & \text{za } \frac{l}{2} < x < l, \end{cases}$$

predstavlja jednadžbu utjecajne linije za prekobrojni silu X_1 . Na slici 15. je nacrtana ta utjecajna linija.



Slika 15.

Sada ćemo prikazati kinematički postupak određivanja utjecajnih linija koristeći teorem o uzajamnosti pomaka (Maxwellov teorem) koji za naš primjer glasi:

Pomak na mjestu, pravcu i u smjeru sile u točki (1) zbog jedinične sile koja djeluje u točki (v) jednak je pomaku na mjestu, pravcu i u smjeru sile u točki (v) zbog djelovanja jedinične sile u točki (1),

ili, iskazano jednadžbom:

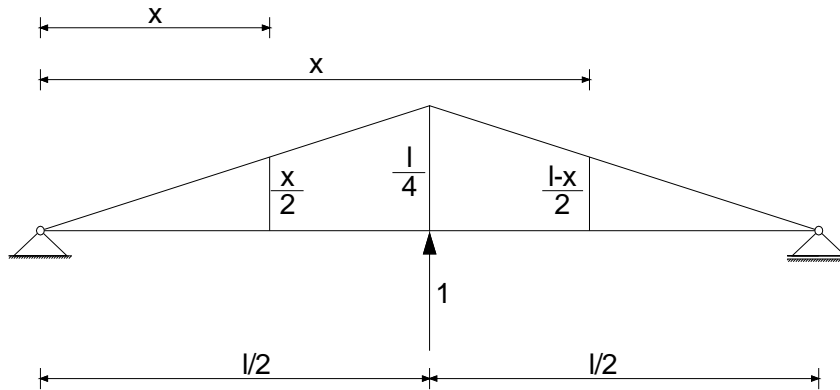
$$\delta_{1v} = \delta_{v1}.$$

Ovo znači da jednadžbu iz našeg primjera možemo napisati u sljedećem obliku

$$X_1 = -\frac{\delta_{v1}}{\delta_{11}}.$$

Kako je δ_{v1} pomak na mjestu i u smjeru vanjskog djelovanja (znači u smjeru i na mjestu jedinične sile čiji se položaj mijenja) izazvan jediničnom silom na mjestu i u smjeru prekobrojne sile X_1 , to znači da ćemo utjecajnu liniju za prekobrojni silu dobiti ako nađemo progibnu liniju zbog jedinične sile u smjeru i na mjestu prekobrojne sile X_1 i to podijelimo sa δ_{11} .

Tako smo problem nalaženja utjecajne linije sveli na traženje progibne linije, tj. linije pomaka u smjeru zadanog opterećenja.



Slika 16.

Prema slici 16. izraz za moment u presjeku bit će

$$M_x = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{za } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{l-x}{2} & \text{za } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Iz jednadžbe progibne linije imamo (za $x \leq \frac{l}{2}$):

$$w''(x) = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{x}{2EI},$$

$$EIw'(x) = -\frac{x^2}{4} + C_1,$$

$$EIw(x) = -\frac{x^3}{12} + C_1x + C_2.$$

te za $x > \frac{l}{2}$:

$$w''(x) = -\frac{M_x}{EI} = \frac{-l+x}{2EI},$$

$$EIw'(x) = -\frac{lx}{2} + \frac{x^2}{4} + C_3,$$

$$EIw(x) = -\frac{lx^2}{4} + \frac{x^3}{12} + C_3x + C_4.$$

Rubni uvjeti za naš nosač su:

$$w(x) = 0 \text{ za } x=0 \text{ i } x=l.$$

A budući da je momenti dijagram, a tako i progibna linija simetrična u odnosu na $l/2$, tangenta u $l/2$ mora biti horizontalna, pa dodatni rubni uvjet glasi:

$$w'(l/2) = 0.$$

Iz rubnog uvjeta $w(0)=0$ dobivamo izravno da je $C_2 = 0$.

Iz uvjeta $w'(l/2) = 0$ za $x \leq l/2$ dobivamo da je $C_1 = \frac{l^2}{16}$, a za $x > l/2$ da je $C_3 = \frac{3l^2}{16}$.

Na kraju iz $w(l) = 0$ dobijemo $C_4 = -\frac{l^3}{48}$.

Nakon uvrštavanja, dobivamo izraz za progib:

$$w(x) = \delta_{v1} = \begin{cases} \frac{x(3l^2 - 4x^2)}{48EI} & \text{za } 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{(x-l)(l^2 - 8lx + 4x^2)}{48EI} & \text{za } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

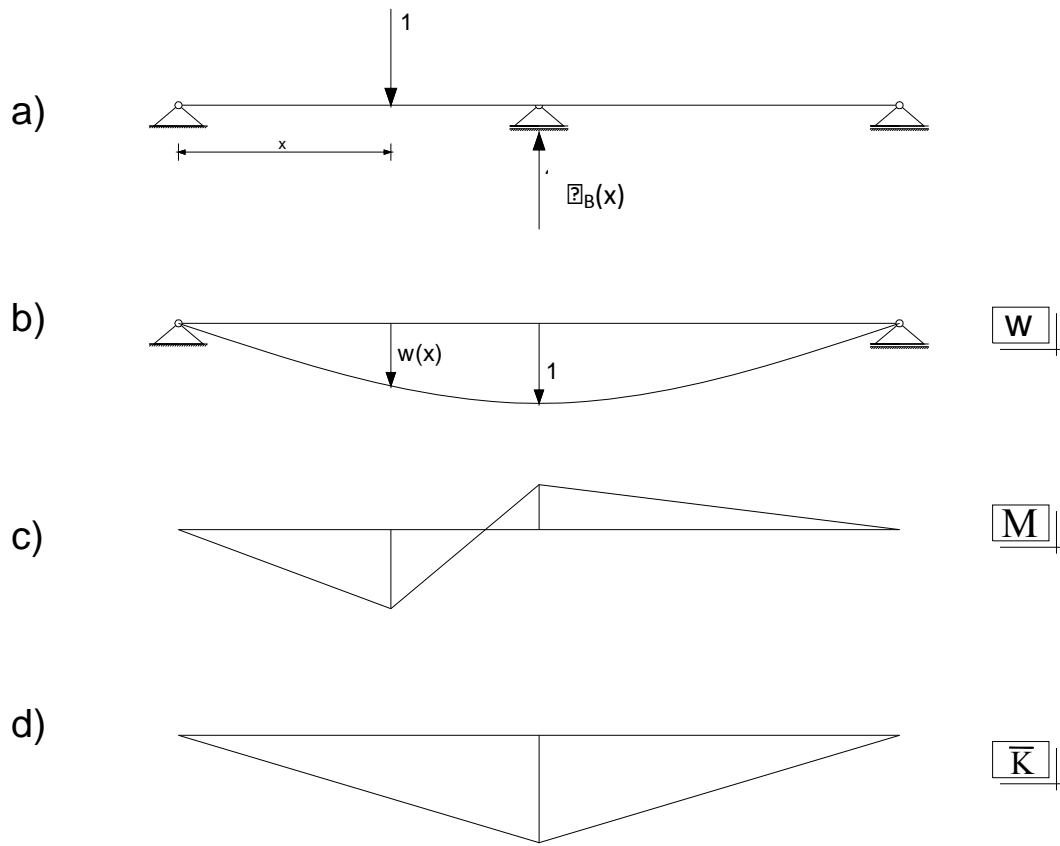
Isti smo izraz ranije dobili za δ_{1v} , samo s različitim predznakom. Predznak se mijenja jer su kod utjecajne linije ordinate pozitivne ako su suprotne djelovanju opterećenja, a kod progiba je uzeto da su pomaci pozitivni ako su prema dolje.

Prema tome, jasno je da ćemo dobiti i isti izraz na x_1 .

Iz gornjeg slijedi:

Utjecajnu liniju na statički neodređenom sistemu za neku statičku veličinu dobivamo kao reduciranu progibnu liniju izazvanu jediničnom silom na mjestu i u smjeru veličine za koju tražimo utjecajnu liniju pod uvjetom da smo raskinuli vezu koja prenosi tu silu. Dobivenu progibnu liniju treba podijeliti sa δ_{ii} . Znači da je faktor redukcije $1/\delta_{ii}$.

6.3. Dokaz pomoću virtualnog rada



Slika 17.

Promatramo kontinuirani nosač preko dva raspona na koji u presjeku x djeluje jedinična sila (slika 17.a). Polje virtualnih pomaka $w(x)$ je progibna linija nosača izazvana jediničnim pomakom srednjeg ležaja (slika 17.b).

Kao što je ranije navedeno, prema teoremu o virtualnim pomacima za sistem u ravnoteži mora rad stvarnih vanjskih sila na virtualnim pomacima biti jednak radu stvarnih unutarnjih sila na virtualnim deformacijama:

$$W_v = W_u.$$

Vanjske sile koje rade na prikazanom sustavu su jedinična sila u x i reakcija $R_B(x)$, pa je virtualni rad vanjskih sila

$$W_v = -R_B(x) \cdot 1 + 1 \cdot w(x),$$

gdje je $w(x)$ virtualni pomak hvatišta jedinične sile.

Da bi iz tog izraza dobili $R_B(x) = w(x)$, moramo dokazati da je $W_u = 0$.

Prema Bernoulli-Eulerovoj teoriji zanemarujemo utjecaj poprečnih sila, a kako u primjeru nema uzdužnih sila, jedine unutrašnje sile koje vrše rad su momenti savijanja M uzrokovani jediničnom silom u presjeku x (slika 17.c). Momenti savijanja rade na promjenama kutova zaokreta osi nosača $\kappa(x)$.

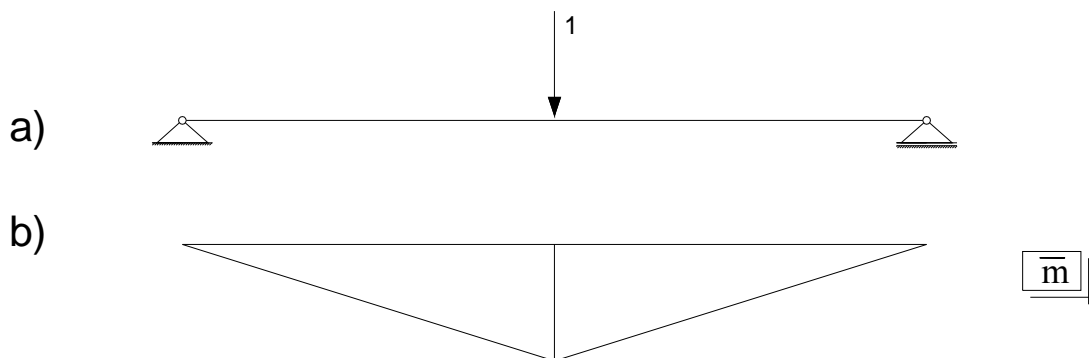
Prema tome, ukupan je virtualni rad unutarnjih sila

$$W_u = \int_0^l M(x) \bar{\kappa}(x) dx$$

gdje su $\bar{\kappa}(x)$ poopćene virtualne deformacije.

U stvarnom, ravnotežnom stanju našeg kontinuiranog nosača (slika 17.a) ležaj u kojem djeluje reakcija B je nepomičan; njegov je vertikalni pomak δ_B jednak nuli. Taj pomak možemo izračunati provodeći deformacijsku kontrolu, koja u fizikalnom smislu znači izračunavanje pomaka unaprijed poznatog iz geometrijskih rubnih uvjeta na konstrukciji.

Za osnovni sistem imamo da je:



Slika 18.

Primjenom redukcijskog stavka dobivamo izraz za δ_B :

$$\delta_B = \int_0^l \frac{M(x) \bar{m}(x)}{EI} dx,$$

gdje je $M(x)$ dijagram od vanjskog opterećenja (slika 17.c), a $\bar{m}(x)$ dijagram od jediničnog opterećenja u smjeru traženog vertikalnog pomaka, prikazan na slici 18.b).

Na slici 17.d) prikazan je dijagram $\bar{\kappa}$ koji je prema Hookeovu zakonu jednak izrazu

$$\bar{\kappa}(x) = \frac{\bar{M}(x)}{EI},$$

gdje vrijednost $\bar{M}(x)$ možemo izraziti uvođenjem nepoznanice α , $\bar{M}(x) = \alpha \cdot \bar{m}(x)$.

Sada za unutarnji virtualni rad možemo pisati

$$W_u = \int_0^1 M(x) \frac{\bar{M}(x)}{EI} dx,$$

odnosno

$$W_u = \int_0^1 M(x) \frac{\alpha \cdot \bar{m}(x)}{EI} dx.$$

Kako

$$\int_0^1 \frac{M(x)\bar{m}(x)}{EI} dx$$

predstavlja izraz za pomak δ_B , za koji znamo da je jednak nuli, dobivamo da je

$$W_u = \alpha \cdot 0 = 0,$$

što smo i trebali dokazati.

7. Primjena teorema – crtanje utjecajnih linija

Problem određivanja utjecajne funkcije svodi se na problem određivanja funkcijskog izraza za progibnu liniju. Drugim riječima, treba riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI},$$

gdje je M funkcija koja opisuje vrijednosti momenata savijanja izazvanih prisilnim jediničnim pomakom u smislu suprotnom od pozitivnog smisla djelovanja sile za koju tražimo utjecajnu funkciju.

Kako je funkcijski izraz w najčešće kompliciran i teško ga je izvesti analitičkim rješavanjem diferencijalnih jednadžbi, u našim ćemo primjerima, nakon nalaženja momentnog dijagrama, odmah preći na crtanje progibne linije postupkom utemeljenim na Mohrovoj analogiji. Tražene vrijednosti utjecajne funkcije tada očitavamo na utjecajnoj liniji, koja je, kao što smo dokazali, upravo ta progibna linija.

Za očitavanje vrijednosti moraju mjerila na crtežu biti definirana.

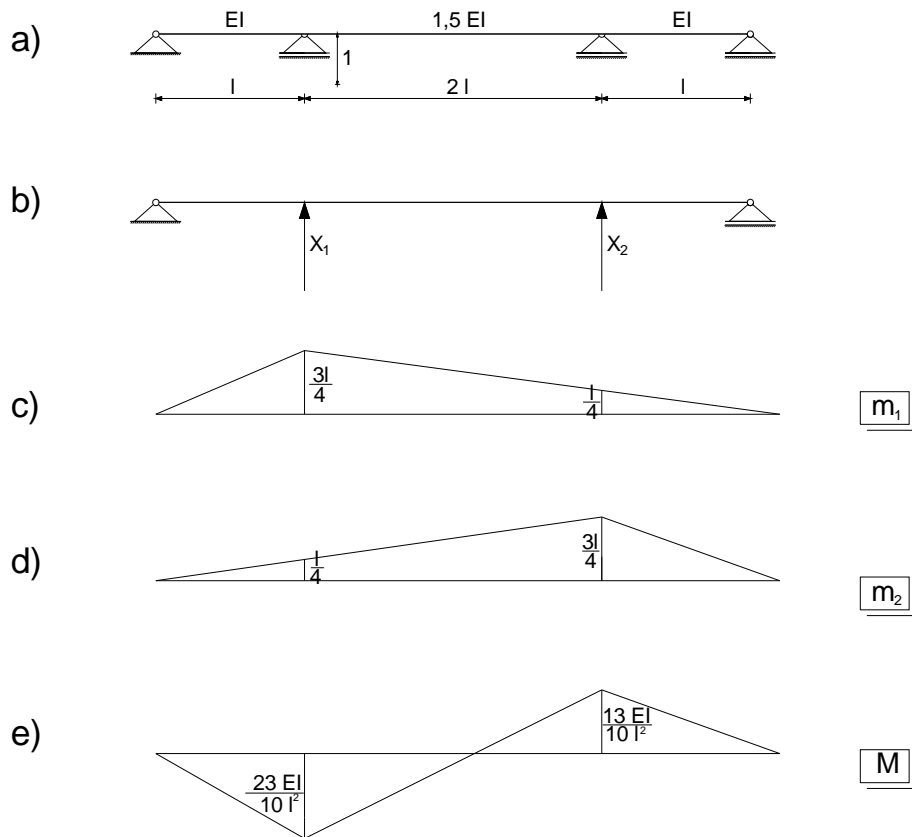
Za primjenu Mohrove analogije gredu, kojoj ležajni uvjeti ne trebaju biti definirani, „opterećujemo“ zamišljenom „distribuiranom silom“ čije su vrijednosti zadane funkcijom

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)}.$$

Zaključnu liniju određujemo zadovoljavanjem geometrijskih rubnih uvjeta na zadanom sistemu.

Primjer 1.

Tražimo utjecajnu liniju za B . Momentni dijagram odredit ćemo metodom sila.



Slika 19.

Za osnovi sistem sa slike 19.b) jednađbe su neprekinutosti

$$\delta_{1,0} + X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_{21} \cdot \delta_{1,2} = -1,$$

$$\delta_{2,0} + X_1 \cdot \delta_{1,2} + X_2 \cdot \delta_{2,2} = 0.$$

Kako na zadanom sistemu nema vanjskog opterećenja, momentni dijagram od vanjskog opterećenja je $M_0=0$, pa su $\delta_{1,0}$ i $\delta_{2,0}$ isto jednaki nuli.

Uz dijagram m_1 sa slike 19.c) dobivamo

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \int_0^{4l} \frac{m_1^2(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{4} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1,5EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{4} \cdot 2l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot 2l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) \right] \\ &= \frac{41l^3}{72EI}. \end{aligned}$$

Budući da su dijagrami m_1 i m_2 zrcalni, vrijedi $\delta_{1,1} = \delta_{2,2}$.

Još nam ostaje da odredimo $\delta_{1,2}$:

$$\begin{aligned}\delta_{1,2} &= \int_0^{4l} \frac{m_1(x)m_2(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{4} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{4} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1,5EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{4} \cdot 2l \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot 2l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{4} \right) \right] \\ &= \frac{31l^3}{72EI}.\end{aligned}$$

Kada izraze za $\delta_{1,1}$, $\delta_{1,2}$ i $\delta_{2,2}$ uvrstimo u jednačbe neprekinutosti, za nepoznanice X_1 i X_2 dobivamo

$$X_1 = -\frac{41EI}{10l^3} \quad \text{i} \quad X_2 = \frac{31EI}{10l^3}.$$

Konačni momentni dijagram je oblika $M = X_1 \cdot m_1 + X_2 \cdot m_2$, i prikazan je na slici 19.e).

Crtamo utjecajnu liniju za B

Mjerilo duljina:

$$1 \text{ [cm]} :: l/k \text{ [m]}, \quad k=2$$

$$l/k = m,$$

$$m = l/2$$

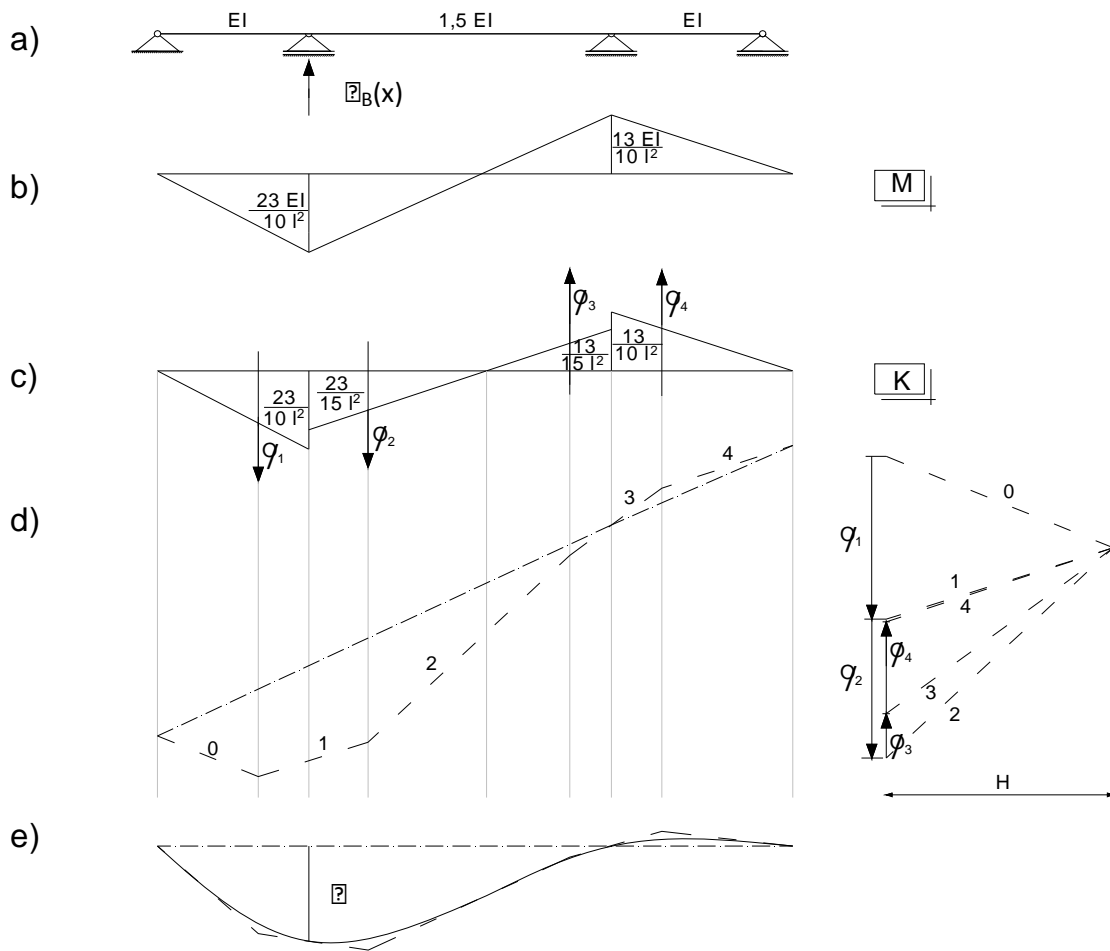
Kutovi između tangenata:

$$\Phi_1 = \frac{23}{10l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{23}{20l} [\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_2 = \frac{23}{15l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{23l}{18} = \frac{529}{540l} [\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_3 = \frac{13}{15l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13l}{18} = \frac{169}{540l} [\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_4 = \frac{13}{10l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{13}{20l} [\text{m}^\circ]$$



Slika 20.

Mjerilo kutova: $1 \text{ [cm]} :: \frac{1}{21} \text{ [m}^\circ\text{]}$

Duljine kutova u poligonu kutova na crtežu:

$$\Phi_1^* = 2,30 \text{ [cm]}$$

$$\Phi_2^* = 1,96 \text{ [cm]}$$

$$\Phi_3^* = 0,63 \text{ [cm]}$$

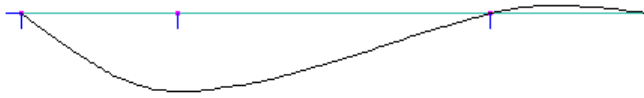
$$\Phi_4^* = 1,30 \text{ [cm]}$$

Polna udaljenost:

$$H = \frac{3}{21} \text{ [m}^\circ\text{]} \rightarrow H^* = 3 \text{ [cm]}$$

$$n = \frac{1}{H} = \frac{21}{3}, = 1$$

Progibna linija dobivena pomoću program DiM:

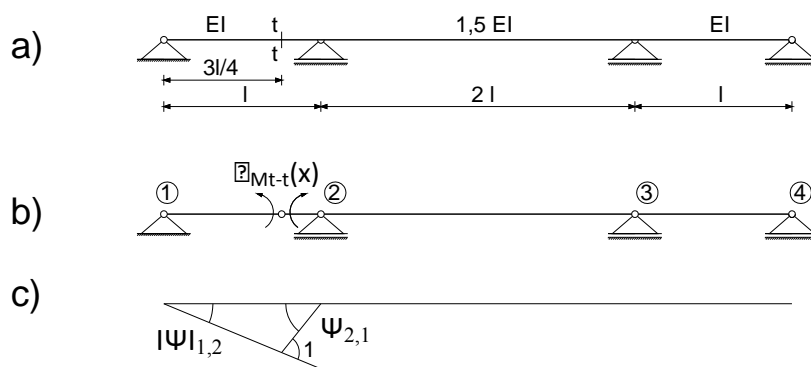


Slika 21.

Primjer 2.

Za isti ćemo nosač tražiti utjecajnu liniju za M_{t-t} .

Ovaj put ćemo momenti dijagram odrediti inženjerskom metodom pomaka i time pokazati primjenu teorema u metodi pomaka.



Slika 22.

Koeficijenti krutosti:

$$k_{12} = k_{34} = \frac{EI}{l}$$

$$k_{23} = \frac{1,5EI}{2l} = \frac{3EI}{4l}$$

Kutovi zaokreta:

$$\psi_{12} = -\frac{1/4}{1} = -\frac{1}{4}$$

$$\psi_{21} = \frac{3/4}{1} = \frac{3}{4}$$

Momenti upetosti:

$$\overline{M}_{21} = -3 \cdot k_{12} \cdot \psi_{21} = -3 \cdot \frac{EI}{1} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9EI}{4}$$

$$\overline{M}_{23} = \overline{M}_{32} = \overline{M}_{34} = 0$$

Izrazi za momente na krajevima štapova:

$$M_{21} = 3 \cdot k_{12} \cdot \varphi_2 + \overline{M}_{21} = 3 \cdot \frac{EI}{1} \cdot \varphi_2 - \frac{9EI}{4}$$

$$M_{23} = 4 \cdot k_{23} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot k_{23} \cdot \varphi_3 = 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3$$

$$M_{32} = 2 \cdot k_{23} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot k_{23} \cdot \varphi_3 = 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3$$

$$M_{34} = 3 \cdot k_{34} \cdot \varphi_3 = 3 \cdot \frac{EI}{1} \cdot \varphi_3$$

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru 2:

$$-M_{21} - M_{23} = 0 \quad \text{tj.} \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$3 \cdot \frac{EI}{1} \cdot \varphi_2 - \frac{9EI}{4} + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3 = 0$$

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru 3:

$$M_{32} + M_{34} = 0$$

$$2 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_3 + 3 \cdot \frac{EI}{1} \varphi_3 = 0$$

Iz ravnoteže čvora 2 i 3 dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice :

$$\frac{6EI}{1} \cdot \varphi_2 - \frac{9EI}{4} + \frac{3EI}{2l} \varphi_3 = 0$$

$$\frac{3EI}{2l} \cdot \varphi_2 + \frac{6EI}{1} \cdot \varphi_3 = 0$$

Rješavanjem sustava dobivamo da je

$$\varphi_2 = 0,4, \quad \varphi_3 = -0,1.$$

Dobivamo konačne vrijednosti momenata:

$$M_{21} = -1,05 \cdot \frac{EI}{l}$$

$$M_{23} = 1,05 \cdot \frac{EI}{l}$$

$$M_{32} = 0,30 \cdot \frac{EI}{l}$$

$$M_{34} = -0,30 \cdot \frac{EI}{l}$$

Crtanje utjecajne linije za M_{t-t}

Mjerilo duljina:

$$1 \text{ [cm]} :: l/k \text{ [m]}, \quad k=2$$

$$l/k = m,$$

$$m = l/2$$

Kutovi između tangenata:

$$\Phi_0 = 1[m^\circ]$$

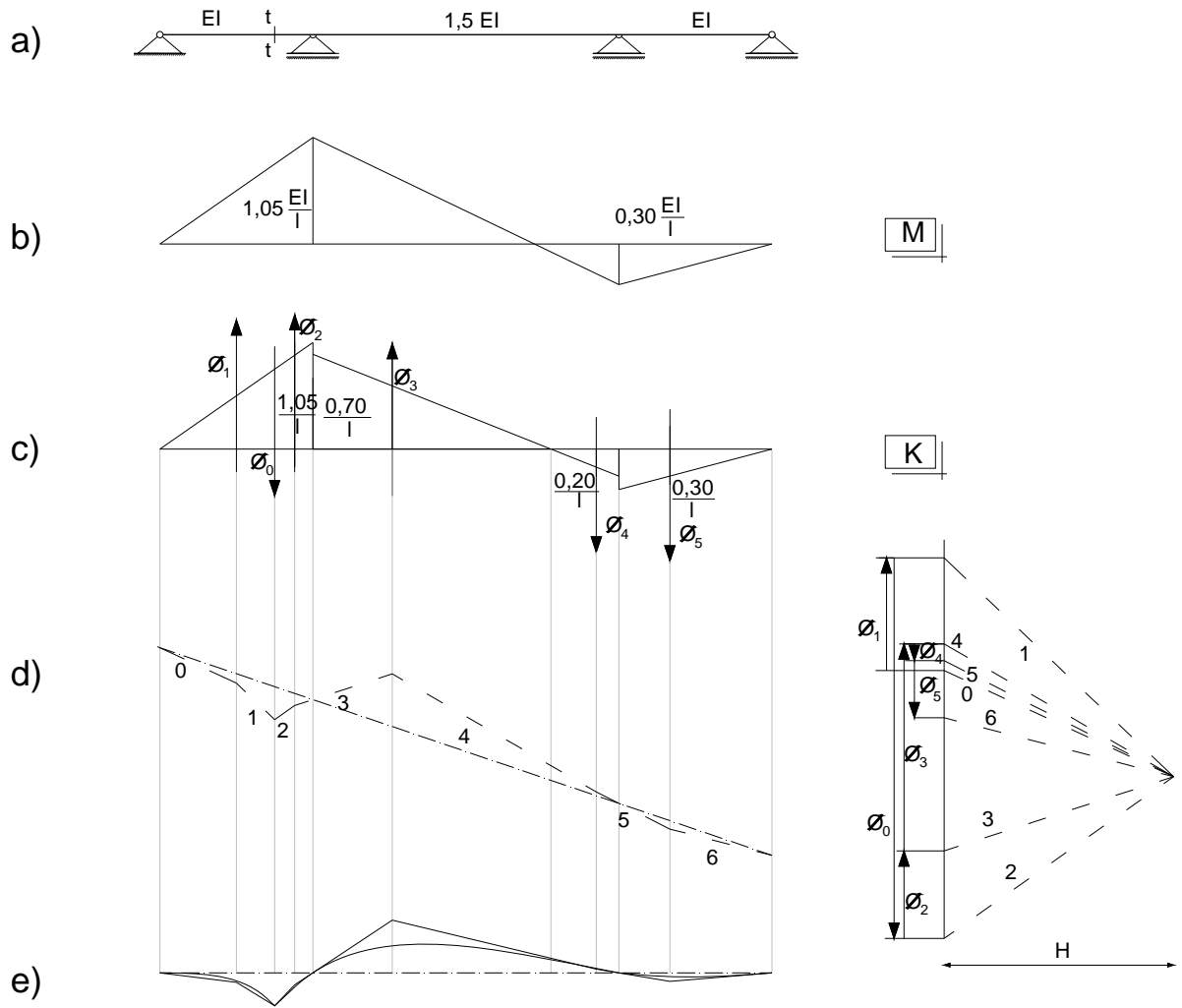
$$\Phi_1 = \frac{0,788}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{4} = 0,295[m^\circ]$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{0,788}{1} + \frac{1,05}{1} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0,229[m^\circ]$$

$$\Phi_3 = \frac{1,4}{0,9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,70}{1} = 0,544[m^\circ]$$

$$\Phi_4 = \frac{0,4}{0,9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,2}{1} = 0,044[m^\circ]$$

$$\Phi_5 = \frac{0,30}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,15[m^\circ]$$



Slika 23.

Mjerilo kutova: $1 \text{ [cm]} :: 0,20 \text{ [m]}^\circ$

$$\Phi_0^* = 5 \text{ [cm]}$$

$$\Phi_1^* = 1,48 \text{ [cm]}$$

$$\Phi_2^* = 1,15 \text{ [cm]}$$

$$\Phi_3^* = 2,72 \text{ [cm]}$$

$$\Phi_4^* = 0,22 \text{ [cm]}$$

$$\Phi_5^* = 0,75 \text{ [cm]}$$

polna udaljenost:

$$H = 0,6 [\quad] \rightarrow \quad = 3 [cm]$$

- -

-

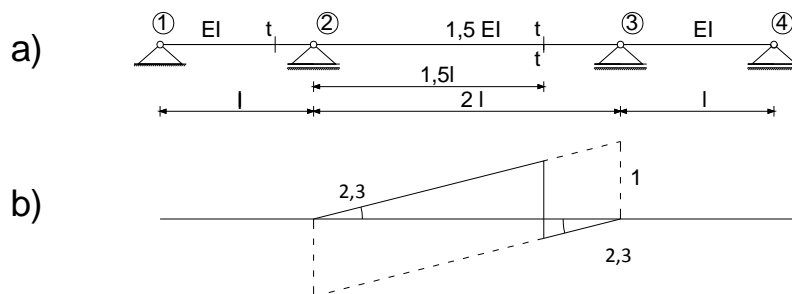
Progibna linija dobivena pomoću programa Dim:



Slika 24.

Primjer 3.

Sad ćemo za naš nosač naći utjecajnu liniju za . Momentni dijagram ćemo odrediti inženjerskom metodom pomaka.



Slika 25.

Kinematički postupak: -

Koeficijenti krutosti:

$$k_{12} = k_{34} = \frac{EI}{l}$$

$$k_{23} = \frac{1,5EI}{2l} = \frac{3EI}{4l}$$

Momenti upetosti:

$$\overline{M}_{23} = \overline{M}_{32} = -6 \cdot k_{23} \cdot \psi_{23} = -6 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \frac{1}{2l} = -\frac{9EI}{4l^2}$$

Izrazi za momente na krajevima štapova:

$$M_{21} = 3 \cdot k_{12} \cdot \varphi_2 = 3 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2$$

$$M_{23} = 4 \cdot k_{23} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot k_{23} \cdot \varphi_3 + \overline{M}_{23} = 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3 - \frac{9EI}{4l^2}$$

$$M_{32} = 2 \cdot k_{23} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot k_{23} \cdot \varphi_3 + \overline{M}_{32} = 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3 - \frac{9EI}{4l^2}$$

$$M_{34} = 3 \cdot k_{34} \cdot \varphi_3 = 3 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_3$$

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru 2:

$$-M_{21} - M_{23} = 0 \quad \text{tj.} \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$3 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3 - \frac{9EI}{4l^2} = 0$$

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru 3:

$$M_{32} + M_{34} = 0$$

$$2 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_3 - \frac{9EI}{4l^2} + 3 \cdot \frac{EI}{l} \varphi_3 = 0$$

Iz ravnoteže čvora 2 i 3 dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice :

$$\frac{6EI}{l} \cdot \varphi_2 + \frac{3EI}{2l} \varphi_3 - \frac{9EI}{l^2} = 0$$

$$\frac{3EI}{2l} \cdot \varphi_2 + \frac{6EI}{l} \cdot \varphi_3 - \frac{9EI}{l^2} = 0$$

Rješavanjem sustava dobivamo da je

$$\varphi_2 = 0,3/l, \quad \varphi_3 = 0,3/l.$$

Dobivamo konačne vrijednosti momenata:

$$M_{21} = 0,9 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$M_{23} = -0,9 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$M_{32} = -0,9 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$M_{34} = 0,9 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

Crtamo utjecajnu liniju za T_{t-t}

Mjerilo duljina:

$$1 \text{ [cm]} :: l/k \text{ [m]}, \quad k=2$$

$$l/k = m,$$

$$m = l/2$$

Kutovi između tangenata:

$$\Phi_1 = \frac{0,9}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{0,45}{1} [\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_2 = \frac{0,6}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{0,30}{1} [\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_3 = \frac{0,3}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5l = \frac{0,075}{1} [\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_4 = \frac{0,3 + 0,6}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5l = \frac{0,225}{1} [\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_5 = \frac{0,9}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{0,45}{1} [\text{m}^\circ]$$

Mjerilo kutova: $1 \text{ [cm]} :: 0,20/l \text{ [m}^\circ]$

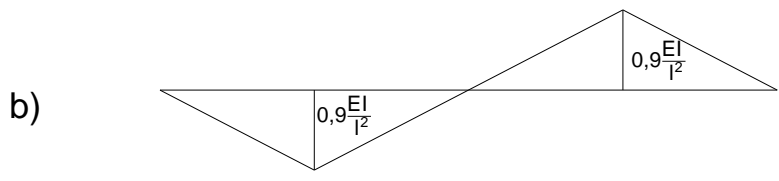
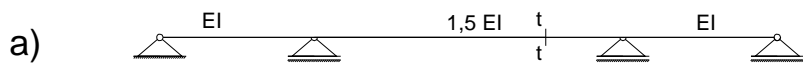
$$\Phi_1^* = 2,25 [\text{cm}]$$

$$\Phi_2^* = 1,5 [\text{cm}]$$

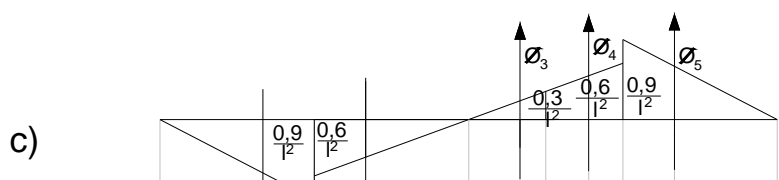
$$\Phi_3^* = 0,375 [\text{cm}]$$

$$\Phi_4^* = 1,125 [\text{cm}]$$

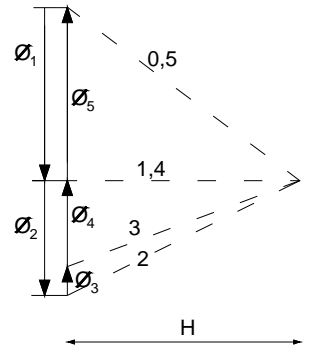
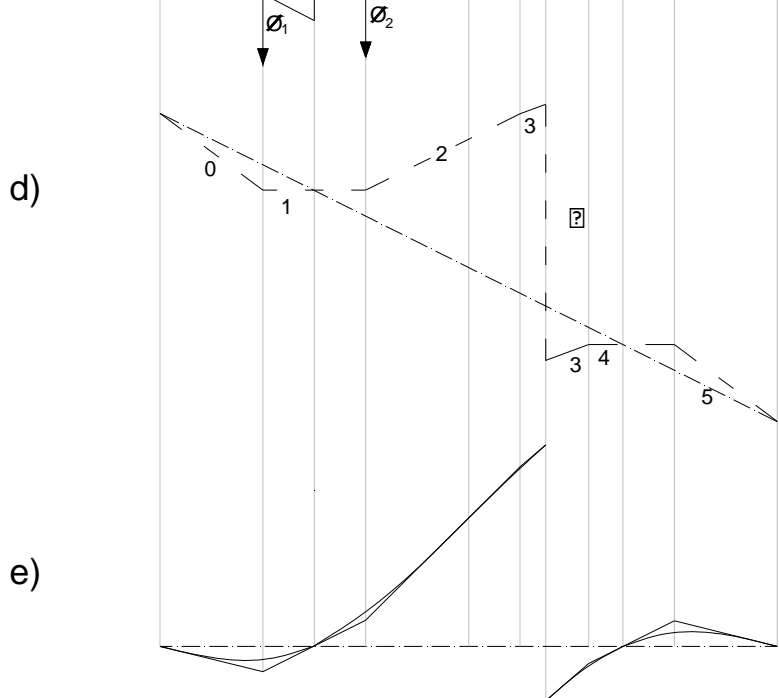
$$\Phi_5^* = 2,25 [\text{cm}]$$



M



K



Slika 26.

polna udaljenost:

$$H = 0,6/l \text{ [m}^\circ] \rightarrow H^* = 3 \text{ [cm]}$$

$$n = \frac{1}{H} = \frac{5l}{3}$$

$$= \frac{m}{n} \cdot *$$

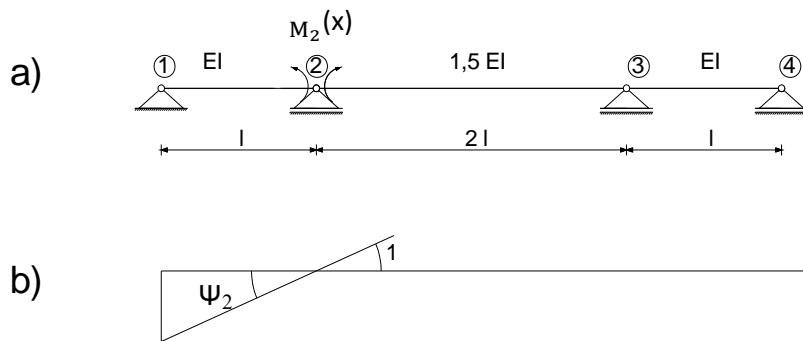
$$* = \frac{m}{n}$$

$$* = \frac{n}{m}$$

$$* = 3,33 \text{ cm}$$

Primjer 4.

I na kraju ćemo za naš nosač utjecajnu liniju za M_2 nad drugim ležajem. Za određivanje momentnog dijagrama koristimo se inženjerskom metodom pomaka.



Slika 27.

Kutovi zaokreta:

$$\psi_2 = 1$$

Momenti upetosti:

$$\overline{M}_{21} = -3 \cdot k_{23} \cdot \psi_2 = -3 \cdot \frac{EI}{l} \cdot 1 = -\frac{3EI}{l}$$

$$\overline{M}_{23} = \overline{M}_{32} = \overline{M}_{34} = 0$$

Izrazi za momente na krajevima štapova:

$$M_{21} = 3 \cdot k_{12} \cdot \varphi_2 + \overline{M}_{21} = 3 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2 - \frac{3EI}{l}$$

$$M_{23} = 4 \cdot k_{23} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot k_{23} \cdot \varphi_3 = 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3$$

$$M_{32} = 2 \cdot k_{23} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot k_{23} \cdot \varphi_3 = 2 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \varphi_3$$

$$M_{34} = 3 \cdot k_{34} \cdot \varphi_3 = 3 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_3$$

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru 2:

$$-M_{21} - M_{23} = 0 \quad \text{tj.} \quad M_{21} + M_{23} = 0$$

$$3 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2 - \frac{3EI}{l} + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 2 \frac{3EI}{4l} \varphi_3 = 0$$

Jednadžba ravnoteže momenata u čvoru 3:

$$M_{32} + M_{34} = 0$$

$$2 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{3EI}{4l} \cdot \varphi_3 + 3 \frac{EI}{l} \varphi_3 = 0$$

Iz ravnoteže čvora 2 i 3 dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice :

$$\frac{6EI}{l} \cdot \varphi_2 - \frac{3EI}{l} + \frac{3EI}{2l} \varphi_3 = 0$$

$$\frac{3EI}{2l} \cdot \varphi_2 + \frac{6EI}{l} \cdot \varphi_3 = 0$$

Rješavanjem sustava dobijemo da je

$$\varphi_2 = 0,53, \quad \varphi_3 = -0,13.$$

Dobivamo konačne vrijednosti momenata:

$$M_{21} = -1,40 \cdot \frac{EI}{l}$$

$$M_{23} = 1,40 \cdot \frac{EI}{l}$$

$$M_{32} = 0,40 \cdot \frac{EI}{l}$$

$$M_{34} = -0,40 \cdot \frac{EI}{l}$$

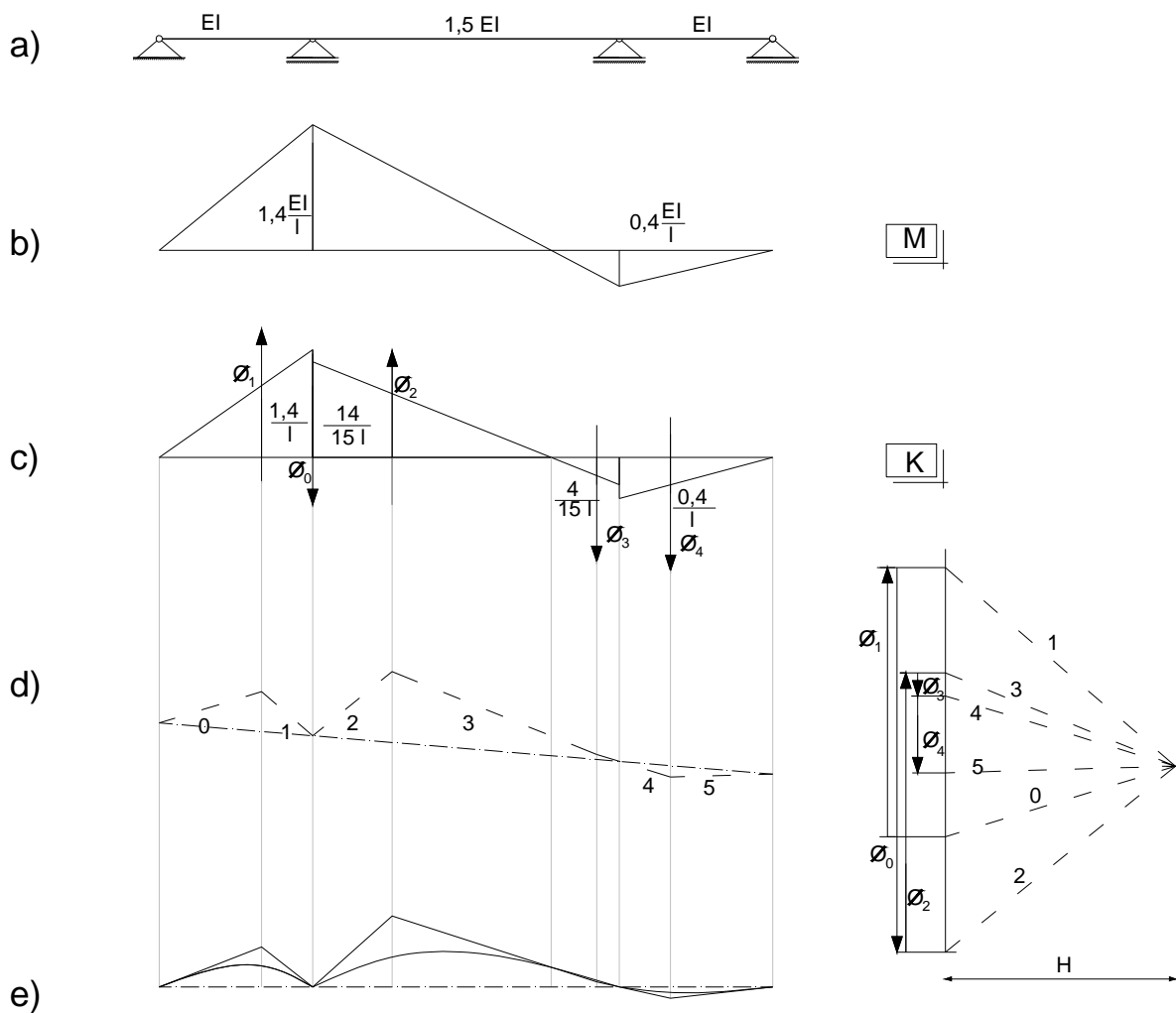
Crtamo utjecajnu liniju za M_2

Mjerilo duljina:

$$1 \text{ [cm]} :: l/k \text{ [m]}, \quad k=2$$

$$l/k = m,$$

$$m = l/2$$



Slika 28.

Kutovi između tangenata:

$$\Phi_0 = 1[\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_1 = \frac{1,4}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,70[\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_2 = \frac{1,4}{0,9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{15l} = 0,726[\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_3 = \frac{0,4}{0,9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15l} = 0,059[\text{m}^\circ]$$

$$\Phi_4 = \frac{0,40}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,20[\text{m}^\circ]$$

Mjerilo kutova: 1 [cm] :: 0,20 [m°]

$$\Phi_0^* = 5[\text{cm}]$$

$$\Phi_1^* = 3,50[\text{cm}]$$

$$\Phi_2^* = 3,63[\text{cm}]$$

$$\Phi_3^* = 0,30 [\text{cm}]$$

$$\Phi_4^* = 1[\text{cm}]$$

polna udaljenost:

$$H = 0,6 [\text{m}^\circ] \rightarrow H^* = 3 [\text{cm}]$$

$$n = \frac{1}{H} = \frac{5}{3}$$

$$= \frac{m}{n} \cdot *$$

Progibna linija na sistemu sa zglobom iznad drugog ležaja, opterećenim parom momenata, dobivena pomoću program DiM:



Slika 29.

8. Zaključak

Tema ovog rada je teorem Heinricha Müller-Breslaua, koji je temelj za kinematički postupak određivanja utjecajnih linija za statičke veličine na statički neodređenim sistemima. U radu smo iskazali teorem i njegovu valjanost dokazali pomoću Bettijeva teorema o uzajamnosti radova, pomoću Maxwellovog teorema o uzajamnosti pomaka te pomoću teorema o virtualnim pomacima za elastična tijela. Na kraju smo riješili nekoliko primjera primjenom metode sila i metode pomaka te nacrtali utjecajne linije.

Literatura

- [1] V. Šimić : *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [2] K. Fresl: *Građevna statika 1.: bilješke i skice s predavanja*,
<http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj1/index.html>
- [3] K. Fresl: *Građevna statika 2.: bilješke i skice s predavanja*,
<http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj2/index.html>