SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

PROSTORNI REŠETKASTI NOSAČI

ZAVRŠNI RAD

Student: Sanja Ostojić 0082052599
Mentor: izv. prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, rujan 2018.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Krešimiru Freslu na brojnim stručnim savjetima, strpljenju i potpori tijekom izrade ovog završnog rada.

SADRŽAJ

1. UVOD

U ovom radu ćemo se baviti mehanikom statički neodređenih geometrijski nepromjenjivih rešetkastih prostornih sistema. Prikazat ćemo detaljan izvod jednadžbi ravnoteže i kinematičkih jednadžbi koje povezuju produljenje i pomake. Izvest ćemo i objasniti programsku realizaciju određivanja nepoznatih sila u štapovima statički neodređenih rešetkastih sistema postupkom metode sila i metode pomaka na dva primjera. No, prije svega potrebno je klasificirati rešetkaste sisteme i detaljnije objasniti njezine glavne dijelove- štapove i čvorove.

Kada se postave jednadžbe ravnoteže svih slobodnih čvorova nekog rešetkastog sistema pogodno ih je zapisati u matričnom obliku. Rešetkasti sistem može biti statički određen, mehanizam ili statički neodređen te se obzirom na to odabire metoda rješavanja takvog sistema. Matrica koeficijenata jednadžbi ravnoteže svih slobodnih čvorova nekog rešetkastog sistema može biti kvadratna. Ako je takva matrica regularna, tada postoji jedinstveno rješenje i rešetka je statički određen sistem. Ako je matrica singularna, rešetkasti sistem je mehanizam. Ako je matrica pravokutna, s manjim brojem stupaca od broja redaka, sustav ima manjak štapova pa je mehanizam. Ako je matrica pravokutna, s većim brojem stupaca od broja redaka, onda sistem ima više štapova. Tada ne postoji jedinstveno rješenje i takav je sistem statički neodređen.

2. KLASIFIKACIJA REŠETKASTIH SISTEMA

Rešetkasti nosači su važne inženjerske nosive konstrukcije koje nalaze široku primjenu u građevinarstvu. Elementi rešetkastih nosača ravni su štapovi na krajevima zglobno vezani čvorovima. Vanjsko aktivno i reaktivno opterećenje rešetkasti nosači preuzimaju samo preko čvorova. Vlastita težina rešetkastih se nosača zanemaruje u proračunima ili se raspoređuje kao sile opterećenja na čvorove. Svaki štap rešetkastog nosača može biti opterećen na svakom svom kraju silom veze štapa sa čvorom. Problem statičkog proračuna rešetkastog nosača zato se svodi na određivanje sila unutarnjih veza odnosno sila veza štapova. Stoga, za rešetkaste nosače kažemo da su konstrukcije proračunske sheme sastavljene od zglobnih čvorova povezanih zglobnim štapovima, kod kojih vanjske sile djeluju u čvorovima pa u štapovima postoje samo uzdužne sile.

S geometrijskog stajališta uz masivne i plošne elemente postoje i štapni elementi koji su sastavni dio rešetkastih nosača zbog čega ih je potrebno ovdje detaljnije opisati. Najjednostavniji štapni element je konstrukcijski element kojem je jedna karakteristična dimenzija duljina, istaknuta u odnosu na druge dvije, visinu (ili debljinu) i širinu. Štapni element je ravni štap nepromjenjivoga poprečnog presjeka, izveden od jednog materijala, tako da su po cijeloj njegovoj duljini EA “ const i EI “ const. Za štapne elemente također je važno reći da su to dijelovi štapnih sistema za koje se sile i momenti na njihovim krajevima mogu razmjerno lako izraziti kao funkcije pomaka i zaokreta tih krajeva što će nam biti važno u općoj metodi pomaka.

Točke na slobodnim krajevima štapa nazivamo čvorovima, a točke u kojima se štapni elementi povezuju međusobno nazivamo slobodnim čvorovima i u njima nisu spriječeni pomaci, a točke u kojima su štapni elementi povezani s podlogom; ležajnim čvorovima u kojima su pomaci spriječeni ili zadani.

Unutarnje sile u zglobnim štapovima su uzdužne, a mogu biti vlačne ili tlačne. Posljedice djelovanja tih sila su produljenje ili skraćenje štapa. Matematički se vlačne i tlačne sile u štapovima razlikuju po predznacima, a s fizičkog stajališta tlačne se sile bitno razlikuju od vlačnih jer se vitki štap pri djelovanju velike tlačne sile može izviti.

Rešetkasti nosači odnosno rešetkaste konstrukcije mogu biti specificirane prema obliku konstrukcije i prema statičkoj određenosti.

Prema obliku se rešetkaste konstrukcije dijele na ravninske konstrukcije i prostorne rešetkaste konstrukcije.
Konstrukcija je ravninska ako osi svih elemenata leže u istoj ravnini, u odnosu na koju su uz to svi poprečni presjeci simetrični, ako su statičke i kinematičke karakteristike svih spojeva simetrične u odnosu na tu ravninu te ako su pravci djelovanja rezultanata zadanih vanjskih sila u svim ravninama poprečnih presjeka u toj ravnini, a vektori svih zadanih vanjskih momenata okomiti na nju. U tom će slučaju i sile u vezama s podlogom i rezultirajuće sile unutarnjih sila u poprečnim presjecima biti u toj ravnini, dok će vektori momenata u vezama i rezultirajućih momenata unutarnjih sila biti okomiti su na nju. Jednostavnije, ravninske rešetkaste konstrukcije su sistemi kod kojih svi štapovi ali i sve sile leže u jednoj ravnini, pa sve sile vanjske i unutarnje mogu imati samo dvije komponente u smjeru dvije osi ravnine. U tom slučaju za svaki se čvor mogu pisati samo dvije nezavisne jednadžbe ravnoteže i to dvije jednadžbe projekcija sila na dvije izabrane osi. Takve se rešetke rješavaju analitičkim ili grafičkim postupkom, odnosno određuju sile u njenim štapovima. Analitički se za sve štapove rešetke koristi metoda čvorova, a grafički poligoni sila. Također se sile u štapovima mogu odrediti metodom presjeka kroz tri njena štapa što je u analitici poznatije kao Ritterova metoda, a u grafičkom postupku kao Culmanova metoda. Stoga se zbog jednostavnosti rešetkasti nosači koji su dio prostornog nosivog sustava računaju kao ravninski rešetkasti sustavi. Prostorni sistemi su konstrukcije u kojima su osi (nekih) elemenata prostorne krivulje, konstrukcije u kojima osi, iako su ravninske krivulje, ne leže u jednoj ravnini te konstrukcije čije su osi u jednoj ravnini, ali pravci djelovanja vanjskih sila su izvan te ravnine. Kod prostornih rešetkastih konstrukcija štapovi su vezani u čvorove koji ne leže u istoj ravnini već su smješteni u prostoru. Vanjske sile opterećenja djeluju na čvorove i imaju opću orijentaciju. Te kod njih i vanjske i unutarnje sile imaju tri komponente u smjeru tri koordinatne osi koje određuju prostor. Kod takvih se konstrukcija za svaki čvor mogu pisati samo tri nezavisne jednadžbe ravnoteže, a to su jednadžbe projekcija na tri izabrane osi. Iste su metode rješavanja prostornih rešetkastih nosača kao i ravninskih, ali je povećan broj jednadžbi iz kojih se određuju sile u štapovima rešetki, no metoda rješavanja ne ovisi samo o tome.

Osim podjele po obliku rešetkaste konstrukcije mogu biti specijalizirane i po statičkoj određenosti. Metode određivanja sila u konstrukcijama bitno se razlikuju, ovisno o statičkoj određenosti odnosno statičkoj neodređenosti sustava. Statički određene rešetkaste konstrukcije su one za koje je moguće odrediti vrijednost sila u štapovima za bilo koje opterećenje konstrukcije samo pomoću jednadžbi ravnoteže statike krutog tijela, a statički neodređene rešetkaste konstrukcije su one za koje nije moguće odrediti vrijednost sila u štapovima za bilo koje opterećenje konstrukcije samo pomoću jednadžbi ravnoteže statike krutog tijela, već se uzimaju dodatne jednadžbe deformacije konstrukcija po teorijama statike deformabilnog tijela.

3. STATIČKA I KINEMATIČKA ODREĐENOST REŠETKASTIH SISTEMA

Pojmovi statičke i kinematičke određenosti od iznimne su važnosti za razumijevanje mehanike zglobnih rešetkastih sustava. Statička određenost znači da broj nepoznatih vrijednosti sila u spojevima nije veći od broja jednadžbi ravnoteže, dok kinematička određenost znači da je položaj čvora jedinstveno određen duljinama štapova.

Za sistem kažemo da je statički određen ako je broj jednadžbi ravnoteže jednak broju nepoznanica. Uzdužne sile u svim štapovima mogu se odrediti pomoću jednadžbi ravnoteže za dani skup vanjskih sila koje djeluju u čvorovima. Kod statički određenih nosača rješenja za reakcije i unutrašnje sile su jednoznačna. Statički određeni sistemi ujedno su i kinematički određeni.

Statički neodređeni sisteme možemo definirati statičkom definicijom koja govori da su to sistemi koji mogu ostati u stanju ravnoteže pri bilo kakvom opterećenju, ali je broj nepoznatih vrijednosti sila u vezama, vanjskim ili unutarnjim ili i vanjskim i unutarnjim, veći od broja neovisnih jednadžbi koje izražavaju uvjete ravnoteže pa te uvjete zadovoljava beskonačno mnogo vrijednosti sila. S kinematičkoga je gledišta statički neodređeni sistem geometrijski nepromjenjivi sistem u kojem je broj veza, vanjskih ili unutarnjih ili jednih i drugih, veći od najmanjega broja nužnog za njegovu geometrijsku nepromjenjivost. Prije samog proračuna statički neodređenih nosača potrebno je, ukoliko se ne može intuitivno zaključit, odredit koliko zadani sistem ima veza viška u odnosu na potreban broj. Taj postupak se naziva određivanje stupnja statičke neodređenosti. Stupanj statičke neodređenosti jednak je, sa statičkog stajališta, razlici broja nepoznatih vrijednosti sila i broja neovisnih uvjeta ravnoteže koje možemo postaviti za konstrukciju kao cjelinu i za pojedine njezine dijelove, promatrane izdvojeno, a kinematički, stupanj statičke neodređenosti jednak je razlici ukupnog broja veza i najmanjega broja potrebnog za geometrijsku nepromjenjivost. Odnosno, budući se radi o prekobrojnim vezama ispravnije bi u tom kontekstu bilo primjenjivati izraz- stupanj statičke preodređenosti. Ako je broj nepoznatih sila u spojevima veći od broja jednadžbi ravnoteže sistem je statički neodređen ili kinematički preodređen i takav sustav ima višak štapova (veza). I takvi sistemi mogu ostati u ravnoteži za bilo kakvo opterećenje, ali jednadžbe ravnoteže ne daju jedinstveni skup reakcija ili jedinstveni skup unutarnjih sila ili jedinstvene skupove jednih i drugih, nego treba uvesti dodatne uvjete za njegovu jednoznačnost. Broj mogućih jednadžbi ravnoteže je manji od broja nepoznatih veličina potrebnih za izračun unutarnjih sila, te zbog toga dodatne jednadžbe za određivanje nepoznatih sila treba tražiti u kinematskim uvjetima konstrukcije. Prostorne rešetkaste konstrukcije sastavljene od ravninskih nosača ili prave prostorne konstrukcije tipa Schwedlerove kupole mogu imati više štapova od minimalno potrebnog za kinematsku stabilnost tada su statički neodređene a unutarnje sile, osim metodom sila mogu se odrediti metodom pomaka. Broj viška štapova (veza) određuje stupanj statičke neodređenosti sistema. Matrica koeficijenata je pravokutna (ima više stupaca nego redaka). Ako je rang matrice koeficijenata statički neodređenog rešetkastog nosača jednak broju redaka sistem je geometrijski nepromjenjiv. Takav statički neodređen i kinematički određen sistem ima rješenje, ali ono nije jedinstveno. Kod svakog statički neodređenog nosača postoji beskonačno mnogo rješenja koja zadovoljavaju uvjete ravnoteže ali samo jedno rješenje zadovoljava stanje deformacja i pomaka. Za bolje shvaćanje statički neodređenih nosača uspoređujemo ih sa statički određenima te uočavamo razlike;

1. Kod statički neodređenih nosača postoji beskonačan skup sila koji zadovoljava neovisne uvjete ravnoteže cijele konstrukcije i njezinih dijelova ali samo jedna sila ili jedna kombinacija sila u slučaju više puta statički neodređenih sistema zadovoljava koji zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti deformacija i pomaka.

2. Sile u statički neodređenim nosačima ovise o materijalu od kojeg je nosač izgrađen i o dimenzijama poprečnog presjeka nosača. Materijal se u proračunu izražava svojim modulom elastičnosti E a dimenzije poprečnog presjeka se izražava aksijalnim momentom tromosti I i površinom poprečnog presjeka F.

3. U statički neodređenom nosaču se pri promjenama temperature uglavnom pojavljuju reakcije i unutarnje sile. Također sile sile u vezama i presjecima se mogu pojaviti zbog prisilnih pomaka poput popuštanja ležajeva i ugradnje netočno izvedenih dijelova.

4. Promjena oblika osi dijela statički neodređenog nosača izazvat će promjenu sila i u drugim njegovim dijelovima.

5. Zamjena zadanog opterećenja statički ekvivalentnim dovodi do promjena sila na cijelom na cijelom nosaču a ne samo na području djelovanja opterećenja.

6. Opterećenja koja u složenom sistemu djeluju na dio koji možemo smatrati "nosačem za sebe" uzrokuju unutarnje sile i u statički neodređenim dijelovima koji se oslanjaju na njih.

Osim navedena dva tipa iz klasifikacije po statičkoj određenosti, koji se razlikuju po svojstvima i metodama proračuna, postoje i geometrijski promjenjivi sistemi- mehanizmi. Razlog geometrijske promjenjivosti može biti nedovoljan broj veza a može biti i način na koji su veze raspoređene. Dijele se na mehanizme u užem smislu (kinematičke lance) i na mehanizme koji sadrže preodređenost. Statička definicija mehanizma u užem smislu glasi: sistemi kod kojih ravnoteža nije moguća za proizvoljno opterećenje nego samo za neka posebna opterećenja. Sve sile u spojevima se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže. Slijedi da postoje opterećenja za koje ravnoteža sistema nije moguća. Kinematička definicija mehanizma u užem smislu govori da su to sistemi koji se dodavanjem spojeva mogu pretvoriti u statički određene. Statička definicija mehanizama koji sadrže preodređenost glasi: mogu ostati u stanju ravnoteže za neka posebna opterećenja ali uvjeti ravnoteže ne daju jedinstven skup sila u spojevima . Kinematička defincija mehanizama koji sadrže preodređenost glasi: geometrijski promjenjivi sistemi koji se dodavanjem dovoljnog broja spojeva za geometrijsku nepromjenjivost mogu pretvoriti u statički određene sisteme. Mehanizam koji sadrži preodređenost dobije se na način da se tijelo u ravnini neispravno veže za podlogu odnosno da se tri veze sijeku u jednoj točki ili da su paralelne.

Kako je fokus ovog rada na prostornim rešetkastim konstrukcijama, a kao sto je ranije navedeno, kod rješavanja rešetkastih sistema cilj je odrediti sile u štapovima te rešetke stoga je važno uočiti što utječe na odabir metode rješavanja. Osnovnu razliku u metodama rješavanja takvih konstrukcija čini upravo statička i kinematička određenost. Praćenje kinematičkog stanja, kod prostornih rešetkastih konstrukcija uopće, polazi se od materijalnih točaka smještenih u čvorovima rešetke, dok štapove rešetke smatramo vezama koje ih pridržavaju. Sukladno tome, broj stupnjeva slobode n materijalnih točaka u prostoru bit će $s=3n$. Ako su točke međusobno povezane sa $š$ štapova koji se ne preklapaju, broj stupnjeva slobode takvog sustava je $s \geq 3n - š$ .Odatle izlazi da iz nužnog uvjeta kinematičke stabilnosti potreban broj štapova treba biti jednak trostrukom broju slobodnih čvorova š $\geq$3n, to nazivamo Maxwelovim pravilom. Metode proračuna statički određenih prostornih rešetkastih konstrukcija, sukladno metodama izračuna kod ravninskih rešetki, i ovdje se metode mogu podijeliti na metode čvorova i metode presjeka. U načelu je moguća i grafička i analitička primjena metoda, međutim grafička primjena zbog potrebe projiciranja u tri ortogonalne ravnine sekundarnog je značaja. Metoda čvorova polazi od pretpostavke da su isječeni svi čvorovi rešetke te uspostavljena ravnoteža vanjskih (opterećenja i reakcija) i unutrašnjih (sile u štapovima) sila. Za rešetku od n čvorova dobiva se j=3n jednadžbi ravnoteže u kojima ima š=n nepoznatih sila. Kod kinematički stabilnih i statički određenih rešetki sustav je bezuvjetno rješiv za konačna djelovanja opterećenja. Kinematička stabilnosti kod statički neodređenih rešetki dokazuje se na isti način kao kod statički određenih rešetki, uz novu činjenicu da će neki čvorovi ili sustavi međusobno biti vezani s više od minimalnog broja štapova. Upravo iz razloga što je broj mogućih jednadžbi ravnoteže manji od broja nepoznatih veličina potrebnih za izračun unutarnjih sila dodatne jednadžbe ravnoteže treba tražiti u kinematskim uvjetima konstrukcije. Metoda pomaka i metoda sila dvije su temeljne metode za izračun sila i pomaka kod statički neodređenih rešetkastih nosača kako ravninskih tako i prostornih.

4. RAVNOTEŽNE I KINEMATIČKE MATRICE RAVNINSKIH I PROSTORNIH REŠETKASTIH SISTEMA

4.1. JEDNADŽBE RAVNOTEŽE

Čvorove nekog prostornog rešetkastog sistema označit ćemo uzastopnim brojevima. Započet ćemo od 0 kako bi se prilagodili Sage-u koji će u ovom radu pokazati navedene metode rješavanja prostornih rešetkastih sistema. Stoga, čvorovi će biti označeni od 0 do n.

Prvo ćemo prebrojiti slobodne čvorove i označiti ih brojevima $0,1,\ldots,n_f$, a zatim ćemo prebrojiti sve ležajne čvorove i označiti ih brojevima $n_f+1,\ldots,n$.

Štap između čvorova *i* i *j* označit ćemo sa $\{i,j\}$. Uvijek je $i \neq j$ te $\{i,j\}$ i $\{j,i\}$ označavaju isti štap, a ukupan broj štapova označit ćemo s b. Stoga je pogodno štapove označiti i uzastopnim brojevima od 0 do b.

Uzdužna sila na kraju *i* (sila kojom čvor *i* djeluje na štap) određena je vektorom:

$$\vec{S}_{i,j} = S_{i,j}\vec{e}_{j,i}\ , \tag{1}$$

a vektor uzdužne sile na kraju *j* (sila kojom čvor *j* djeluje na štap) određena je vektorom:

$$\vec{S}_{j,i} = S_{j,i}\vec{e}_{i,j} \ .$$

Jedinični vektori na osi štapa $\{i,j\}$ su $\vec{e}_{i,j}$ i $\vec{e}_{j,i}$ pri čemu je vektor $\vec{e}_{i,j}$ orijentiran od čvora *i* prema čvoru *j*, dok je vektor $\vec{e}_{j,i}$ orijentiran od čvora *j* prema čvoru *i*, tako da je $\vec{e}_{i,j} = -\vec{e}_{j,i}$. Vanjska normala je na ravninu poprečnog presjeka na kraju *i* orijentirana kao vektor $\vec{e}_{j,i}$, a na kraju *j* kao vektor $\vec{e}_{i,j}$.

Zaključujemo, vektor uzdužne sile se računa na način da se skalarnu vrijednost $S_{i,j}$ pomnoži jediničnim vektorom koji se nalazi na osi štapa.

Ako je vrijednost skalara $S_{i,j} > 0$ sila u štapu je vlačna, a ako je vrijednost skalara $S_{i,j} < 0$ sila je tlačna.

Vrijedi da je;

$$\vec{S}_{j,i} = -\,\vec{S}_{i,j}.$$

Ako uvrstimo gornje izraze dobivamo;

$$\vec{S}_{j,i} = -\left(S_{i,j}\vec{e}_{j,i}\right) = S_{i,j}\left(-\vec{e}_{j,i}\right) = S_{i,j}\vec{e}_{i,j} \ ,$$

što znači da je $S_{j,i} = S_{i,j}$, pa možemo zapisati kao $S_{\{j,i\}} = S_{j,i} = S_{i,j}$.

Ako su (x_i , y_i, z_i) i (x_j , y_j, z_j) koordinate čvorova *i* i *j*, vektori $\vec{e}_{i,j}$ i $\vec{e}_{j,i}$ dani su izrazima:

$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}\,\vec{\imath} + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}\,\vec{\jmath} + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}}\,\vec{k} \qquad (2)$$

$$\vec{e}_{j,i} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}\,\vec{\imath} + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}\,\vec{\jmath} + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}}\,\vec{k} \qquad (3)$$

gdje je

$$l_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \qquad (4)$$

duljina štapa $\{i,j\}$.

Rezultanta vanjskih sila koja djeluje na slobodni čvor *i* označena je sa $\vec{F_i}$; njezine su skalarne komponente $F_{i,x}$, $F_{i,y}$, $F_{i,z}$. Štap $\{i,j\}$ na čvor *i* djeluje silom:

$$-\vec{S}_{i,j} = - S_{\{i,j\}}\vec{e}_{j,i} = S_{\{i,j\}}\vec{e}_{j,i} \ . \qquad (5)$$

Sada se za svaki slobodan čvor i=1,…, n_f može napisati vektorska jednadžba ravnoteže sila koja na njega djeluju:

$$\sum_{j \epsilon N_i} \left(-\vec{S}_{i,j}\right) + \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$(6)$$

$$\sum_{j \epsilon N_i} S_{\{i,j\}}\vec{e}_{j,i} + \vec{F_i} = \vec{0}$$

pri čemu je N_i skup čvorova koji su štapovima povezani sa čvorom *i.*

Zadnju jednadžbu (6) možemo raspisati s obzirom na tri koordinatne osi x, y i z :

$$\sum_{j \epsilon N_i} \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}} S_{\{i,j\}} + \vec{F}_{i,x} = 0$$

$$\sum_{j \epsilon N_i} \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}} S_{\{i,j\}} + \vec{F}_{i,y} = 0 \qquad (7)$$

$$\sum_{j \epsilon N_i} \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} S_{\{i,j\}} + \vec{F}_{i,z} = 0 \, ,$$

za i = 1, …. , n_f . , odnosno za svaki slobodni čvor. Znači da u svakom slobodnom čvoru možemo opisati 3 n_f jednadžbe ravnoteže. Broj nepoznatih vrijednosti sila u štapovima je jednak broju štapova, odnosno b.

Za provjeru uvjeta rješivosti pogodno je sustav (7) zapisati u matričnom obliku :

$$As + f = 0$$

ili

$$As = -f \tag{8}$$

Vrijednosti sila u štapovima poredane su pritom u vektor *s* prema brojčanim oznakama štapova: ako je κ brojčana oznaka štapa *{i,j}*, onda je $S_{\{i,j\}}$ komponenta κ vektora *s*, $S_\kappa = S_{\{i,j\}}$.

Koeficijenti uz $S_{\{i,j\}} = S_\kappa$ u jednadžbama ravnoteže čvora *i* komponente su matrice sustava A u sjecištima redaka 3(*i* – 1) + 1, 3(*i* – 1) + 2, 3(*i* – 1) + 3 sa stupcem κ:

$$\alpha_{3(\,i-1\,)+1,\kappa} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}\ ,\ \ \alpha_{3(\,i-1\,)+1,\kappa} = \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}\ ,\ \ \alpha_{3(\,i-1\,)+1,\kappa} = \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \tag{9}$$

Vrijednost $S_{\{i,j\}} = S\kappa$ ulazi i u jednadžbe ravnoteže čvora *j*, kojima odgovaraju redci 3(j – 1) + 1, 3(j – 1) + 2, 3(*j* – 1) + 3 matrice A, pa su, u istom stupcu,

$$\alpha_{3(\,j-1\,)+1,\kappa} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}\ ,\ \ \alpha_{3(\,j-1\,)+1,\kappa} = \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}\ ,\ \ \alpha_{3(\,j-1\,)+1,\kappa} = \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \tag{10}$$

Matrica A ima $3n_f$ redaka i b stupaca. Broj stupaca jednak je broju komponenata vektora s, dok je broj redaka jednak broju komponenata vektora f.

Komponente vektora f s indeksima 3(*i* – 1) + 1, 3(*i* – 1) + 2, 3(*i* – 1) + 3 skalarne su komponente $F_{i,x}$, $F_{i,y}$, $F_{i,z}$ vanjske sile $\vec{F_i}$ koja djeluje u čvoru *i*.

Matricu A nazivamo ravnotežnom ili statičkom matricom.

4.2. KINEMATIČKE JEDNADŽBE

Kinematičke jednadžbe rešetkastih sistema povezuju promjene duljina štapova i pomake čvorova.

Ako pomake čvorova i i j označimo vektorima $\overrightarrow{u_i}$ i $\overrightarrow{u_j}$ njihove će nove koordinate biti:

$$\overrightarrow{u_i} = \left(x_i + u_i,\ y_i + v_{i\,,}\ z_i + w_i \right)$$

$$\overrightarrow{u_j} = \left(x_j + u_j,\ y_j + v_{j\,,}\ z_j + w_j \right).$$

Promjenu duljine štapa $\{i,j\}$ označit ćemo sa $d_{\{i,j\}}$. Ako je $d_{\{i,j\}} > 0$ riječ je o produljenju, a za $d_{\{i,j\}} < 0$ o skraćenju štapa.

Nova je duljina štapa iznosi zbroj početne duljine štapa te pripadnog produljenja, odnosno skraćenja $l_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}}$.

Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$(l_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}})^2 =$$

$$\left[\left(x_j + u_j\right) - (x_i + u_i)\right]^2 + \left[\left(y_j + v_j\right) - (y_i + v_i)\right]^2 + \left[\left(z_j + w_j\right) - (z_i + w_i)\right]^2$$

Ili

$$(l_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}})^2 =$$

$$\left[\left(x_j - x_i\right) + (u_j - u_i)\right]^2 + \left[\left(y_j - y_i\right) + (v_j - v_i)\right]^2 + \left[\left(z_j - z_i\right) + (w_j - w_i)\right]^2.$$

Kvadriranjem podizraza te promjenom redoslijeda i grupiranjem pribrojnika na desnoj strani dobivamo;

$$l_{\{i,j\}}^2 + 2l_{\{i,j\}}d_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}}^2 =$$

$$\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2\right]$$

$$+2\left[(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) + (z_j - z_i)(w_j - w_i)\right]$$

$$+\left[(u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2 + (w_j - w_i)^2\right].$$

Prvi podizraz s desne strane znaka jednakosti, obuhvaćen uglatim zagradama, jednak je $l_{\{i,j\}}^2$, dok je podizraz u posljednjem redu jednak kvadratu duljine razlike pomaka $\vec{u_j}$ i $\vec{u_i}$. Budući da su pomaci mali, $d_{\{i,j\}} \ll l_{\{i,j\}}^2$, $\|\vec{u_i}\| \ll l_{\{i,j\}}$ i $\|\vec{u_j}\| \ll l_{\{i,j\}}$, mogu se $d_{\{i,j\}}^2$ i $\|\vec{u_i} - \vec{u_j}\|^2$ zanemariti u odnosu na $2l_{\{i,j\}}d_{\{i,j\}}$ (drugi pribrojnik slijeva) i na drugi podizraz s desna, pa nakon zanemarivanja malih vrijednosti ostaje:

$$2l_{\{i,j\}}d_{\{i,j\}} = 2\left[(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) + (z_j - z_i)(w_j - w_i)\right].$$

Stoga slijedi,

$$d_{\{i,j\}} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}(u_j - u_i) + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}(v_j - v_i) + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}}(w_j - w_i)$$

tj.

$$d_{\{i,j\}} = -\left(\frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}u_i + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}v_i + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}}w_i + \frac{x_i - x_j}{l_{\{i,j\}}}u_j + \frac{y_i - y_j}{l_{\{i,j\}}}j + \frac{z_i - z_j}{l_{\{i,j\}}}w_j\right) \qquad (11)$$

Promjene duljina štapova poredat ćemo u vektor d prema brojčanim oznakama štapova, dok ćemo orijentirane duljine komponenata pomaka čvorova svrstati u vektor u tako da su u_i, v_i, w_i na mjestima 3(i – 1) + 1, 3(i – 1) + 2, 3(i – 1) + 3. Odnosno, poredak promjene duljina štapova u vektoru **d** odgovara poretku vrijednosti uzdužnih sila u vektoru **s**, a poredak skalarnih komponenata pomaka čvorova u vektoru **u** poretku skalarnih komponenata vanjskih sila u vektoru f.

Sada izraze (11) za sve štapove možemo sažeto zapisati u obliku:

$$d = -B\,u\,, \tag{12}$$

gdje je B matrica komponente koje su:

$$b_{\kappa,3(i-1)+1} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}\,,\quad b_{\kappa,3(i-1)+2} = \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}\,,\quad b_{\kappa,3(i-1)+3} = \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}}$$

$$b_{\kappa,3(j-1)+1} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}}\,,\quad b_{\kappa,3(j-1)+2} = \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}}\,,\quad b_{\kappa,3(j-1)+3} = \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \tag{13}$$

Vektori **d** i **u** sadrže *b* i $3n_f$ komponenata, pa matrica **B** ima b redaka i $3n_f$ stupaca.

Usporedba izraza (13) s izrazima (9) i (10) pokazuje da je

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\,. \tag{14}$$

Matricu B nazivamo kinematičkom matricom.

5. METODA SILA ZA REŠETKASTE SISTEME

Kao što je već navedeno, ako je broj nepoznatih sila jednak broju jednadžbi ravnoteže $b = 3n_f$ i ako je matrica A regularna (ako joj je rang $3n_f$) sustav jednadžbi ravnoteže (8) ima jedinstveno rješenje za bilo koji vektor f;

$$s = -A^{-1}f.$$

Sistem je tada geometrijski nepromjenjiv i statički određen. Nepoznate sile u štapovima se mogu odrediti iz jednadžbi ravnoteže.

Ako je pak broj vrijednosti sila veći od broja jednadžbi, $b>3n_f$, i ako je rang ravnoteže matrice $3n_f$, sistem je štapova geometrijski nepromjenjiv, ali statički neodređen.

Budući da je rang matrice jednak broju redaka, slika je matrice A cijeli prostor čvorova. Za bazu prostora čvorova možemo uzeti tri vektora za svaki slobodni čvor koji su međusobno okomiti. Dakle, ukupno $3n_f$ vektora. Vektori jednog čvora su okomiti na vektore drugih čvorova. U jednadžbama ravnoteže te vektore ćemo interpretirati kao vektorske komponente sila u čvorovima, dok ćemo ih u kinematičkim jednadžbama interpretirati kao komponente pomaka čvorova.

Sustav jednadžbi ravnoteže rješiv za sve vektore koji leže u tom prostoru- dakle, za sve vektore f. Ali, kako je broj vrijednosti sila u štapovima veći od broja jednadžbi, matrica A prostor veće dimenzije preslikava u prostor manje dimenzije. Pri tom preslikavanju neki vektori prostora iščezavaju, odnosno više se vektora tog prostora preslikava u jedan vektor prostora čvorova.

Ako je s_0 neki vektor prostora redaka matrice A i ako su $\vec{s_i}$ bazni vektori njezine jezgre, tada se svi vektori

$$\mathrm{s} = \mathrm{s}_0 + \sum_i x_i \bar{s}_i \tag{16}$$

s bilo kojim koeficijentima x_i preslikavaju u isti vektor prostora čvorova. Rješenje sustava jednadžbi stoga ne može biti jedinstveno. Za izdvajanje jednog rješenja treba pored uvijeta ravnoteže primijeniti i kinematičke uvjete. Povezivanje kinematičkih i ravnotežnih uvjeta ostvaruje se uvođenjem uvjeta koje za zglobne štapove izražavaju međuovisnost vrijednosti uzdužnih sila u njima i promjena njihovih duljina.

Djeluje li u štapu uzdužna sila vrijednosti $S_{\{\mathrm{i,j}\}}$, promjena je njegove duljine:

$$d_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\}} S_{\{i,j\}} \tag{17}$$

pri čemu je

$$\delta_{\{i,j\}} = \frac{l_{\{i,j\}}}{E_{\{i,j\}} A_{\{i,j\}}} \tag{18}$$

Koeficijent (uzdužne) popustljivosti. I obratno, za promjenu duljine štapa za $d_{\{i,j\}}$ treba u nj unijeti uzdužnu silu vrijednosti

$$S_{\{i,j\}} = k_{\{i,j\}} d_{\{i,j\}}\,, \tag{19}$$

pri čemu je

$$k_{\{i,j\}} = \frac{E_{\{i,j\}}A_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}} \tag{20}$$

Izraz (16) zapisat ćemo u obliku

$$\mathrm{s} = \mathrm{s0} + \bar{S}x \tag{21}$$

gdje je $\bar{S}$ matrica stupaca kod koje su bazni vektori $\bar{s}_i$ jezgre matrice A, a vektor koji sadrži koeficijente x_i. Uzet ćemo uz to da je s_0 neko rješenje sustava jednadžbi ravnoteže (8), tako da je $As_0 = -f$. Tada je i s rješenje tog sustava:

$$As = A\,(\,s_0 + \bar{S}x\,) = As_0 + A\bar{S}x = As_0 = -f$$

treća jednakost slijedi iz činjenice da vektor $\bar{S}x$ leže u matrici A, pa je $A\bar{S}x = 0$.

Da nađemo vektor s_0 i matricu $\bar{S}$ Gaussovim ćemo eliminacijskim postupkom matricu A i vektor f provesti u $\tilde{A}\varsigma_0 = -\tilde{f}$, gdje je vektor koji na mjestima štapova određenog sistema sadrži nepoznanice, a na mjestima prekobrojnih štapova nule.

Vektore $\bar{s}_i$ odredit ćemo uvrštavanjem unazad u sustave $\tilde{A}\varsigma_0 = 0$, pri čemu su ς_i vektori koji sadrže nepoznanice na mjestima štapova statički određenog sistema, 1 na mjestu prekobrojnog štapa *i* i *0* na mjestima ostalih prekobrojnih štapova.

Fizički prihvatljivo rješenje mora pored uvjeta ravnoteže zadovoljiti i određene kinematičke uvjete: vrijednosti sila u štapovima moraju uzrokovati kompatibilne promjene njihovih duljina – sistem štapova se mora moći i sklopiti bez dodatnih promjena duljina. Uzajamna ovisnost vrijednosti uzdužne sile i promjene duljine štapa dana je i konstitucijskom relacijom (17).

Koeficijente popustljivosti $\delta_{\{i,j\}}$ definirane izrazom (18) smjestit ćemo u dijagonalnu matricu diag(δ) na isti način kao što smo koeficijente krutosti $k_{\{i,j\}}$ smjestili u matricu diag(k) : ako je K brojčana oznaka štapa $\{i,j\}$, koeficijent $\delta_{\{i,j\}}$ bit će dijagonalna komponenta $\delta_{K,K}$ matrice diag(δ).

Iz $\delta_{\{i,j\}} = \frac{1}{k_{\{i,j\}}} = k_{\{i,j\}}^{-1}$ sijedi diag(δ) $= [diag(k)]^{-1}$.

Sažeti je matrični zapis izraza (17) za sve štapove

$$d = \mathrm{diag}(\delta)s, \tag{22}$$

a uvrštavanje izraza (21) daje

$$d = \mathrm{diag}(\delta)\ (\ s_0 + \bar{S}x\ ). \tag{23}$$

Traženi je vektor kompatibilnih promjena duljine okomit je na prostor nekompatibilnih promjena duljina, koji je lijeva jezgra kinematičke matrice B. Budući da se lijeva jezgra matrice B podudara sa jezgrom matrice A, uvijet je okomitosti

$$\bar{S}^T d = 0. \tag{24}$$

Uz (23) taj uvjet zapisujemo;

$$\bar{S}^T \mathrm{diag}(\delta)(\ s_0 + \bar{S}x\ ) = 0$$

ili

$$\bar{S}^T \mathrm{diag}(\delta)\bar{S}x = -\bar{S}^T \mathrm{diag}(\delta)s_0 \tag{25}$$

Matrica

$$D = \bar{S}^T \mathrm{diag}(\delta)\bar{S} \tag{26}$$

je matrica popustljivost sistema, dok je vektor

$$d_0 = \bar{S}^T \mathrm{diag}(\delta)s_0 \tag{27}$$

vektor promjena duljina štapova izazvanih ravnotežnim silama u osnovnom sistemu, pa je izraz (25) sustav jednadžbi kompatibilnosti

$$Dx = -d_0 \tag{28}$$

poznat iz metode sila.

6. METODA POMAKA

Metode pomaka su metode proračuna štapnih sistema u kojima su temeljne nepoznanice translacijski pomaci i zaokreti čvorova. U rešetkastim sistemima štapovi su povezani čvorovima u kojima nisu spriječeni zaokreti čvorova, pa kao nepoznanice ostaju samo translacijski pomaci.

Uvrštavanjem koeficijenta uzdužne popustljivosti (18) u izraz za produljenje štapa (17), te izvlačenjem sile iz jednadžbe dobivamo sljedeći izraz:

$$S_{\{i,j\}} = k_{\{i,j\}} d_{\{i,j\}}\,, \tag{19}$$

pri čemu

$$k_{\{i,j\}} = \frac{E_{\{i,j\}} A_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}} \tag{20}$$

$k_{\{i,j\}}$ koeficijent uzdužne krutosti .

Ako usporedimo $k_{\{i,j\}}$ s izrazom za koeficijent uzdužne popustljivosti $\delta_{\{i,j\}}$ (18) koji nam predstavlja koeficijent u matrici fleksibilnosti, zaključujemo da je jednak inverzu koeficijenta uzdužne popustljivosti.

$$\delta_{\{i,j\}} = \frac{l_{\{i,j\}}}{E_{\{i,j\}} A_{\{i,j\}}}$$

$$k_{\{i,j\}} = \frac{1}{\delta_{\{i,j\}}}$$

Koeficijente uzdužne popustljivosti $k_{\{i,j\}}$ smjestit ćemo u dijagonalnu matricu diag(k) na isti način kao što smo koeficijente popustljivosti $\delta_{\{i,j\}}$ smjestili u matricu diag(δ): ako je K brojčana oznaka štapa $\{i,j\}$, koeficijent $k_{\{i,j\}}$ bit će dijagonalna komponenta $k_{K,K}$ matrice diag(k). Odnosno, koeficijent k predstavlja dijagonalni element u sjecištu retka *i* i stupca *i*.

Iz $k_{\{i,j\}} = \frac{1}{\delta_{\{i,j\}}} = \delta_{\{i,j\}}^{-1}$ neposredno slijedi diag(k) = $|\text{diag}(\delta)|^{-1}$.

Izraz (19) možemo sada zapisati u matričnom obliku:

$$s = diag(k)\ d\ . \tag{30}$$

Ako taj izraz uvrstimo u jednadžbu ravnoteže (8) znajući da je izraz za produljenje svih štapova d = -B u, dobit ćemo:

$$-A\ diag(k)\ B\ u = -f, \text{ odnosno } A\ diag(k)\ B\ u = f,$$

te uz izraz (14) konačno dobivamo;

$$A\ diag(k)\ A^T\ u = f\ . \tag{31}$$

Dobivenu matricu nazivamo matricom krutosti sistema i označavamo je s K.

$$K = A\ diag(k)\ A^T \tag{32}$$

Sada u izrazu (31) možemo prepoznati sustav jednadžbi ravnoteže čijim rješavanjem dobivamo nepoznate pomake.

$$K\ u = f \quad , \text{tj.} \tag{33}$$

$$u = K^{-1}\ f$$

7. PRIMJER 1. STATIČKI NEODREĐENI ŠTAPNI SISTEM

Program za izračunavanje sila u štapovima statički neodređenih rešetkastih sistema izveden je u programskom paketu Sage.

Sustav je zadan popisom čvorova - joints, popisom elemenata (štapova) – bars, popisom ležajnih čvorova- supports i opterećenjima – loads. Označavanje je uvijek najbolje započeti nulom.

```
joints = { 0: (-2.0, 0.0, -2.0), 1: (0.0, -2.0, -2.0), 2: (0.0, 2.0, -2.0), 3: (0.0, 0.0, 0.0), 4: (6.0, 2.0,
-2.0), 5: (6.0, -2.0, -2.0),6: (8.0, 0.0, -2.0), 7: (6.0, 0.0, 0.0) }
print 'joints:'
print_dict (joints, indent = '    ')
print

bars = { 0: (0, 3), 1: (1, 3), 2: (2, 3), 3: (3, 7), 4: (4, 7), 5: (5, 7), 6: (6, 7)}
print 'bars:'
print_dict (bars, indent = '    ')
print

supports = [0, 1, 2, 4, 5, 6]
print 'supports:', supports
print

loads = { 3: (100.0, 125.0, -25.0), 7: (125.0, 100.0, -25.0) }
print 'loads:'
print_dict (loads, indent = '    ')
```

```
    joints:
       0:    (-2.00000000000000, 0.000000000000000, -2.00000000000000)
       1:    (0.000000000000000, -2.00000000000000, -2.00000000000000)
       2:    (0.000000000000000, 2.00000000000000, -2.00000000000000)
       3:    (0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000)
       4:    (6.00000000000000, 2.00000000000000, -2.00000000000000)
       5:    (6.00000000000000, -2.00000000000000, -2.00000000000000)
       6:    (8.00000000000000, 0.000000000000000, -2.00000000000000)
       7:    (6.00000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000)

    bars:
       0:    (0, 3)
       1:    (1, 3)
       2:    (2, 3)
       3:    (3, 7)
       4:    (4, 7)
       5:    (5, 7)
       6:    (6, 7)

    supports: [0, 1, 2, 4, 5, 6]

    loads:
       3:    (100.000000000000, 125.000000000000, -25.0000000000000)
       7:    (125.000000000000, 100.000000000000, -25.0000000000000)
```

Za prikaz zadanog sistema primjenjuje se naredba plot_truss3d obzirom da se bavimo prostornim sistemima.

```
plot_truss3d (joints, bars, supports, loads)
```

Naredbom maxwell_rule pomoću Maxwellovog pravila određuje se nužan uvijet za statičku i kinematičku određenost sustava.

Naredbom free_joints na zadanom sistemu se traže slobodni čvorovi te se ispisuje lista s oznakama slobodnih čvorova.

```
maxwells_rule (joints, supports, bars)
    3 * 2 - 7  ==  -1  !=  0
```

```
free_joints = others (supports, joints)
free_joints
    [3, 7]
```

Funkcijom auqmented_equil_matrix su spojene funkcije equilibrium_matrix i load_vector kako bi se napravila proširena ravnotežna matrica koja sadrži ravnotežnu matricu i dodatni stupac koji predstavlja vektor sila u čvorovima.

```
AAf = augmented_equil_matrix (joints, bars, loads, free_joints)
show (AAf)
```

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r}
-0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -100.0 \\
0.0 & -0.707106781187 & 0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -125.0 \\
-0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 & -125.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 & -100.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & 25.0
\end{array}\right)$$

Kada smo napravili proširenu ravnotežnu matricu naredbom subdivision dijelimo matricu na dva dijela tako da se ne prikaže dodatni stupac koji predstavlja vektore sila u čvorovima nego samo ravnotežna matrica koeficijenata.

```
AA = AAf.subdivision (0, 0)
show (AA)
```

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr}
-0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & -0.707106781187 & 0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187
\end{array}\right)$$

Nakon što smo dobili ravnotežnu matricu, prevodimo je u stepeničasti oblik kako bi smo saznali koji su uporišni stupci to radimo funkcijom ref_wpp. U stepeničastom obliku matrica ima ispod uporišnih komponenata nule.

```
AAfr, pivots = ref_wpp (AAf)
show (AAfr)
```

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r}
1.0 & -0.0 & -0.0 & -1.41421356237 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 141.421356237 \\
0.0 & 1.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 176.776695297 \\
0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.707106781187 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -176.776695297 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.707106781187 & 125.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 & 0.0 & -141.421356237 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.5 & 53.033008589
\end{array}\right)$$

Uporišni stupci odgovaraju štapovima statički određenog sistema, odnosno osnovnog sistema postupka metode sila. Stupci koji nisu uporišni odgovaraju prekobrojnim štapovima. Naredbom pivots ispisujemo uporišne stupce.

```
pivots
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5]
```

METODA SILA

U postupku metode sila mora se definirati osnovni sistem koji je statički određen. Pomoću uporišnih stupaca se odabire osnovni sistem. Naredba primary_system_bars ispisuje listu štapova koji pripadaju osnovnom sistemu te listu čvorova koji pripadaju tim štapovima. Program bira osnovni sistem obzirom na redoslijed kojim su zadani elementi. redundant_bars ispisuje listu prekobrojnih štapova i pripadajuće čvorove tih štapova.

```
primary_system_bars = pivots
print primary_system_bars
print_list (list_indexed (primary_system_bars, bars), indent = '    ')
print
#
redundant_bars = others (primary_system_bars, all_indices (bars))
print redundant_bars
print_list (list_indexed (redundant_bars, bars), indent = '    ')
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5]
    (0, 3)
    (1, 3)
    (2, 3)
    (3, 7)
    (4, 7)
    (5, 7)

[6]
    (6, 7)
```

Sile u štapovima osnovnog sistema dobivamo pozivom funkcije ref_solution.

```
prim_bar_forces = ref_solution (AAfr, primary_system_bars)
prim_bar_forces
```

```
(318.1980515339464, -88.38834764831842, -265.1650429449553, 125.0,
-88.38834764831844, 53.033008588991066)
```

Kada smo dobili vrijednosti sila u svim štapovima zadanog sistema naredbom all_bar_forces pridružujemo te izračunate vrijednosti štapovima osnovnog sistema, a prekobrojnim štapovima pridružujemo nule.

```
ss0 = all_bar_forces (primary_system_bars, redundant_bars, prim_bar_forces)
ss0
```

```
(318.1980515339464, -88.38834764831842, -265.1650429449553, 125.0,
-88.38834764831844, 53.033008588991066, 0.0)
```

```
AA * ss0
```

```
(-100.0, -125.0, 24.99999999999995, -125.0, -100.0, 25.0)
```

Funkcijom dict_bar_forces sređuje se prikaz izračunatih sila u štapovima. Ta funkcija omogućava ispis sila u štapovima kad se riješi sustav jdnadžbi.

```
dict_ss0 = dict_bar_force (bars, ss0)
print_dict (dict_ss0)
```

```
0:    318.198051534
1:    -88.3883476483
2:    -265.165042945
3:    125.0
4:    -88.3883476483
5:    53.033008589
6:    0.0
```

Funkcija dict_bar_forces3d prikazuje zadani sustav kojem su pridružene izračunate sile u štapovima osnovnog sistema.

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars, supports, dict_ss0)
```

```
AAr = AAfr.subdivision (0, 0)
show (AAr)
```

$$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.0 & -0.0 & -1.41421356237 & -0.0 & -0.0 & -0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.707106781187 & -0.0 & -0.0 & -0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.707106781187 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Bazne vektore pronalazi funkcija kernel. Parametri funkcije kernel su matrica u (reduciranom) stepeničastom obliku, lista indeksa uporišnih stupaca i funkcija koja rješava sustav s jediničnom silom. Naredba matrix listu bazih vektora jezgre koje je pronašla funkcija kernel pretvara u matricu SST u kojoj je svaki redak jedan vektor. Matrica $\bar{S}$ dobiva se transportiranjem SS= SST.T.

```
SST = matrix (kernel (AAr, pivots))
SS = SST.T
show (SS)
```

$$\begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.707106781187 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Vektor rješenja osnovnog sistema

```
SS0 = SS.column(0)
```

```
SS0
```

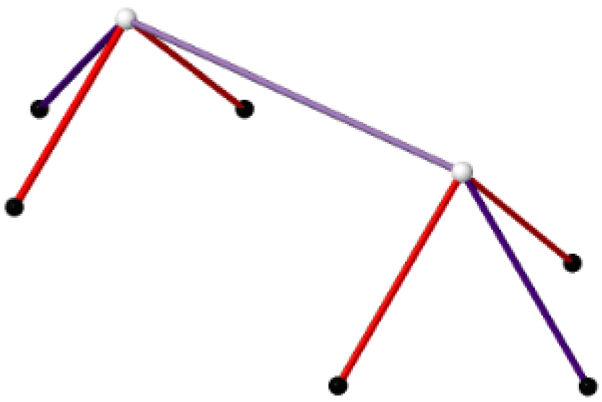
```
(1.0, -0.5, -0.5, 0.7071067811865475, -0.5, -0.5, 1.0)
```

```
dict_SS0 = dict_bar_force (bars, SS0)
print_dict (dict_SS0)
```

```
0:   1.0
1:   -0.5
2:   -0.5
3:   0.707106781187
4:   -0.5
5:   -0.5
6:   1.0
```

Radimo prikaz zadanog sustava kojemu su pridružene izračunate sile u štapovima.

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars, supports, dict_SS0)
```



Kako bi smo u svim štapovima zadržali istu površinu poprečnog presjeka štapa koristimo dict_same_value. Ta nam funkcija pojednostaljulje pridruživanje zadanih vrijednosti štapovima kako ne bi smo za svaki štap posebno zadavali površinu i modul elastičnosti.

```
E = 2.e8
Fs = dict_same_value (bars, 0.05*0.05)
print E
print
print_dict (Fs)
```

evaluate

```
2.00000000000000e8

0:   0.00250000000000000
1:   0.00250000000000000
2:   0.00250000000000000
3:   0.00250000000000000
4:   0.00250000000000000
5:   0.00250000000000000
6:   0.00250000000000000
```

Dijagonalna matrica fleksibilnosti zadaje se funkcijom diag_flex.

```
ddelta = diag_flex (bars, joints, E, Fs)
show (ddelta)
```

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
5.65685424949 \times 10^{-06} & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 5.65685424949 \times 10^{-06} & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 5.65685424949 \times 10^{-06} & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.2 \times 10^{-05} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.65685424949 \times 10^{-06} & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.65685424949 \times 10^{-06} & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.65685424949 \times 10^{-06}
\end{array}\right)$$

Računa se matrica D koja se dobiva umnoškom transportirane matrice SST = $\bar{S}^T$, dijagonalne matrice fleksibilnosti i matrice SS = $\bar{S}$.

```
DD = SST * ddelta * SS
show (DD)
```

$$\left(2.29705627485 \times 10^{-05}\right)$$

Zatim računamo vektor d_0 koji se dobiva umnoškom $\bar{S}^T$, dijagonalne matrice koeficijenata fleksibilnosti i vektora rješenja osnovnog sistema S_0.

Rješava se sustav jednadžbi koji izražavaju uvjete kompatibilnosti. Dx = -d_0 iz kojeg se dobiva nepoznanica x koju uvrštavamo u formulu za sile u štapovima s te se dobiva lista sila u štapovima.

```
dd0 = SST * ddelta * ss0
dd0
```

```
(0.003960660171779821)
```

```
xx = DD \ (-dd0)
xx
```

```
(-172.42329738057452)
```

```
ss = ss0 + SS*xx
ss
```

```
(145.77475415337187, -2.176698958031153, -178.95339425466804,
3.0783171876510806, -2.1766989580311815, 139.24465727927833,
-172.42329738057452)
```

```
AA * ss
```

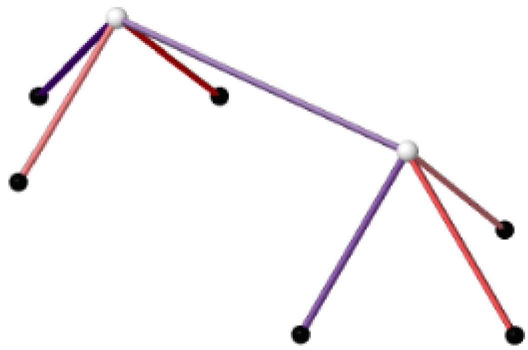
```
(-100.0, -125.0, 24.999999999999957, -125.0, -100.0, 25.000000000000014)
```

```
dict_ss = dict_bar_force (bars, ss)
print_dict (dict_ss)
```

```
0:   145.774754153
1:   -2.17669895803
2:   -178.953394255
3:   3.07831718765
4:   -2.17669895803
5:   139.244657279
6:   -172.423297381
```

Plot_truss_with_forces3d je funkcija koja daje prikaz zadanog sustava kojemu su pridružene izračunate sile u štapovima. Na prikazu sustava po bojama možemo vidjeti je li sila u štapu tlačna ili vlačna ovisno o intenzitetu boja.

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars, supports, dict_ss)
```



METODA SILA- promjena redoslijeda štapova

Promjenom redoslijeda štapova program odavire druge štapove za osnovni sistem.

```
bars3 = {  0: (0, 3), 1: (1, 3), 2: (2, 3), 3: (4, 7), 4: (6, 7), 5: (5, 7), 6: (3, 7)}
print 'bars:'
print_dict (bars3, indent = '    ')
```

```
    bars:
        0:    (0, 3)
        1:    (1, 3)
        2:    (2, 3)
        3:    (4, 7)
        4:    (6, 7)
        5:    (5, 7)
        6:    (3, 7)
```

```
A3Af = augmented_equil_matrix (joints, bars3, loads, free_joints)
show (A3Af)
```

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -100.0 \\ 0.0 & -0.707106781187 & 0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -125.0 \\ -0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 & 0.0 & -1.0 & -125.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 & 0.0 & -0.707106781187 & 0.0 & -100.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 & 25.0 \end{array}\right)$$

```
A3A = A3Af.subdivision (0, 0)
show (A3A)
```

$$\left(\begin{array}{ccccccc} -0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -0.707106781187 & 0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.707106781187 & 0.0 & -0.707106781187 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & 0.0 \end{array}\right)$$

```
A3Afr, pivots3 = ref_wpp (A3Af)
show (A3Afr)
```

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.41421356237 & 141.421356237 \\ 0.0 & 1.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 176.776695297 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.707106781187 & -176.776695297 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & -141.421356237 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.41421356237 & -176.776695297 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.707106781187 & 141.421356237 \end{array}\right)$$

```
primary_system_bars3 = pivots3
# print primary_system_bars3
print_list (list_indexed (primary_system_bars3, bars3), indent = '    ')
print
#
redundant_bars3 = others (primary_system_bars3, all_indices (bars3))
# print redundant_bars3
print_list (list_indexed (redundant_bars3, bars3), indent = '    ')
```

```
       (0, 3)
       (1, 3)
       (2, 3)
       (4, 7)
       (6, 7)
       (5, 7)

       (3, 7)
```

```
prim_bar_forces3 = ref_solution (A3Afr, primary_system_bars3)
prim_bar_forces3
```

```
    (141.4213562373095, 0.0, -176.7766952966369, 0.0, -176.7766952966369,
    141.4213562373095)
```

```
s3s0 = all_bar_forces (primary_system_bars3, redundant_bars3, prim_bar_forces3)
dict_s3s0 = dict_bar_force (bars3, s3s0)
print_dict (dict_s3s0)
```

```
    0:   141.421356237
    1:   0.0
    2:   -176.776695297
    3:   0.0
    4:   -176.776695297
    5:   141.421356237
    6:   0.0
```

```
A3A * s3s0
```

```
    (-100.0, -125.0, 25.0, -125.0, -100.0, 25.0)
```

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars3, supports, dict_s3s0) . show (figsize = 5)
```


```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars3, supports, dict_s3s0) . show (figsize = 5)
```


```
A3Ar = A3Afr.subdivision (0, 0)
show (A3Ar)
```

$$\begin{pmatrix} 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.41421356237 \\ 0.0 & 1.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.707106781187 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -1.41421356237 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.707106781187 \end{pmatrix}$$

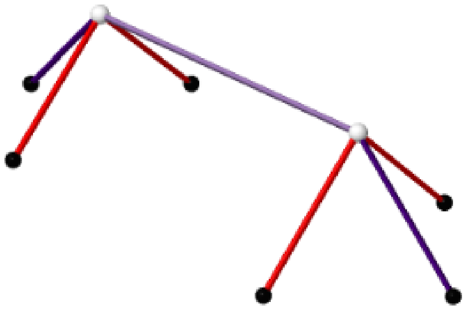
```
S3ST = matrix (kernel (A3Ar, pivots3))
S3S = S3ST.T
show (S3S)
```

$$\begin{pmatrix} 1.41421356237 \\ -0.707106781187 \\ -0.707106781187 \\ -0.707106781187 \\ 1.41421356237 \\ -0.707106781187 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

```
S3S0 = S3S.column(0)
dict_S3S0 = dict_bar_force (bars, S3S0)
print_dict (dict_S3S0)
```

```
0:   1.41421356237
1:   -0.707106781187
2:   -0.707106781187
3:   -0.707106781187
4:   1.41421356237
5:   -0.707106781187
6:   1.0
```

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars3, supports, dict_S3S0) . show (figsize = 5)
```



```
ddelta3 = diag_flex (bars3, joints, E, Fs)
show (ddelta3)
```

$$\begin{pmatrix} 5.65685424949\times10^{-06} & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 5.65685424949\times10^{-06} & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 5.65685424949\times10^{-06} & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.65685424949\times10^{-06} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.65685424949\times10^{-06} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.65685424949\times10^{-06} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.2\times10^{-05} \end{pmatrix}$$

```
D3D = S3ST * ddelta3 * S3S
show (D3D)
```

$$\begin{pmatrix} 4.5941125497\times10^{-05} \end{pmatrix}$$

```
d3d0 = S3ST * ddelta3 * s3s0
d3d0
```

```
(-0.000141421356237309)
```

```
x3x = D3D \ (-d3d0)
x3x
```

```
(3.07831718765107)
```

```
s3s = s3s0 + S3S*x3x
s3s
```

```
(145.774754153372, -2.17669895803118, -178.953394254668,
-2.17669895803118, -172.423297380575, 139.244657279278,
3.07831718765107)
```

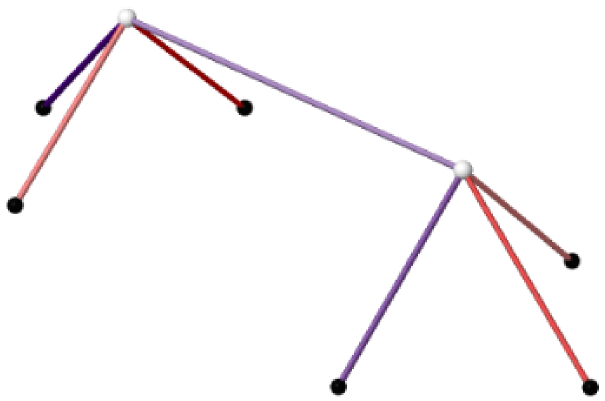
```
A3A * s3s
```

```
(-100.0, -125.0, 24.99999999999999, -125.0, -99.9999999999999, 25.0)
```

```
dict_s3s = dict_bar_force (bars3, s3s)
print_dict (dict_s3s)
```

```
0:   145.774754153
1:   -2.17669895803
2:   -178.953394255
3:   -2.17669895803
4:   -172.423297381
5:   139.244657279
6:   3.07831718765
```

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars3, supports, dict_s3s) . show (figsize = 5)
```



METODA POMAKA

Naredba load_vector sile zadane u čvorovima svrstava u vektor opterećenja.

```
ff = load_vector (loads, free_joints)
ff
```

```
(100.0, 125.0, -25.0, 125.0, 100.0, -25.0)
```

Ispisujemo dijagonalnu matricu dkk pomoću liste dijagonalnih elemenata.

```
dkk = diag_stiff (bars, joints, E, Fs)
show (dkk)
```

$$\begin{pmatrix} 176776.695297 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 176776.695297 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 176776.695297 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 83333.3333333 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 176776.695297 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 176776.695297 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 176776.695297 \end{pmatrix}$$

Iduću korak je matrica krutosti sistema, koja se, nakon što je definirana matrica AA i dijagonalna matrica dkk oblikuje prema ranije navedenom izrazu.

```
KK = AA * dkk * AA.T
show (KK)
```

$$\begin{pmatrix} 171721.680982 & 0.0 & 88388.3476483 & -83333.3333333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 176776.695297 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 88388.3476483 & 0.0 & 265165.042945 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -83333.3333333 & 0.0 & 0.0 & 171721.680982 & 0.0 & -88388.3476483 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 176776.695297 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -88388.3476483 & 0.0 & 265165.042945 \end{pmatrix}$$

Zatim slijedi računanje pomaka čvorova uu, produljenja elemenata d.d., te sila u elementima ss, a naredbom dict_ss2 pridružuju se unutarnje sile pojedinim elementima. Vidimo da smo dobili iste sile kao i metodom sila (pije nego što smo promijenili redoslijed štapova).

```
uu = KK \ ff
uu
```

```
(0.001890718406077772, 0.0007071067811865476, -0.000724520372850797,
0.0019276582123295847, 0.000565685424949238, 0.0005482718332849886)
```

```
dd = -AA.T * uu
dd
```

```
(0.0008246265375012088, -1.2313268750604252e-05, -0.0010123132687506042,
3.693980625181265e-05, -1.2313268750604306e-05, 0.0007876867312493956,
-0.0009753734624987913)
```

```
ss2 = dkk * dd
ss2
```

```
(145.7747541533719, -2.1766989580311686, -178.95339425466804,
3.078317187651055, -2.1766989580311784, 139.24465727927833,
-172.42329738057452)
```

```
dict_ss2 = dict_bar_force (bars, ss2)
print_dict (dict_ss2)
```

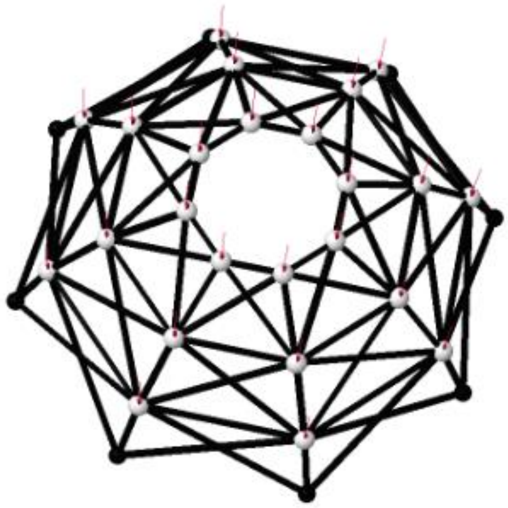
```
0:   145.774754153
1:   -2.17669895803
2:   -178.953394255
3:   3.07831718765
4:   -2.17669895803
5:   139.244657279
6:   -172.423297381
```

8. PRIMJER 2. STATIČKI NEODREĐENA „SCHWEDLEROVA“ KUPOLA

```
joints, bars, supports = schwedler_sind (15., [4.75, 8.75, 11.25, 12], 8)
```

```
load_gen = [(8, 8, (0.0, 0.0, -100.0)),
            (8, 16, (0.0, 0.0, -100.0)),
            (8, 24, (0.0, 0.0, -100.0))]
loads = make_loads (load_gen)
```

```
plot_truss3d (joints, bars, supports, loads, pull = False, load_scale = 0.05)
```



```
free_joints = others (supports, joints)
free_joints
```

```
[8,
 9,
 10,
 11,
 12,
 13,
 14,
 15,
 16,
 17,
 18,
 19,
 20,
 21,
 22,
 23,
 24,
 25,
 26,
 27,
 28,
 29,
 30,
 31]
```

```
maxwells_rule (joints, supports, bars)
```

```
3 * 24 - 96  ==  -24  !=  0
```

```
AAf = augmented_equil_matrix (joints, bars, loads, free_joints)
AAf
```

```
72 x 97 dense matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

```
AA = AAf.subdivision (0, 0)
AA
```

```
72 x 96 dense matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

```
AAfr, pivots = ref_wpp (AAf)
AAfr
```

```
72 x 97 dense matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

pivots

```
[0,
 1,
 2,
 3,
 4,
 5,
 6,
 7,
 8,
 9,
 10,
 11,
 12,
 13,
 14,
 15,
 16,
 17,
 18,
 19,
 20,
 21,
 22,
 23,
 32,
 33,
 34,
 35,
 36,
 37,
 38,
 39,
 40,
 41,
 42,
 43,
 44,
 45,
 46,
 47,
 48,
 49,
 50,
 51,
 52,
 53,
 54,
 55,
 64,
 65,
 66,
 67,
 68,
 69,
 70,
 71,
 72,
 73,
 74,
 75,
 76,
 77,
 78,
 79,
 80,
 81,
 82,
 83,
 84,
 85,
 86,
 87]
```

```
primary_system_bars = pivots
print primary_system_bars
print_list (list_indexed (primary_system_bars, bars), indent = '    ')
print
#
redundant_bars = others (primary_system_bars, all_indices (bars))
print redundant_bars
print_list (list_indexed (redundant_bars, bars), indent = '    ')
```

```
    [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
    20, 21, 22, 23, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45,
    46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71,
    72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87]


  (0, 8)
  (1, 9)
  (2, 10)
  (3, 11)
  (4, 12)
  (5, 13)
  (6, 14)
  (7, 15)
  (8, 9)
  (9, 10)
  (10, 11)
  (11, 12)
  (12, 13)
  (13, 14)
  (14, 15)
  (15, 8)
  (0, 9)
  (1, 10)
  (2, 11)
  (3, 12)
  (4, 13)
  (5, 14)
  (6, 15)
  (7, 8)
  (8, 16)
  (9, 17)
  (10, 18)
  (11, 19)
  (12, 20)
  (13, 21)
  (14, 22)
  (15, 23)
  (16, 17)
  (17, 18)
  (18, 19)
  (19, 20)
  (20, 21)
  (21, 22)
  (22, 23)
  (23, 16)
  (8, 17)
  (9, 18)
  (10, 19)
  (11, 20)
  (12, 21)
  (13, 22)
  (14, 23)
  (15, 16)
  (16, 24)
  (17, 25)
  (18, 26)
  (19, 27)
  (20, 28)
  (21, 29)
  (22, 30)
  (23, 31)
  (24, 25)
  (25, 26)
  (26, 27)
  (27, 28)
  (28, 29)
  (29, 30)
  (30, 31)
  (31, 24)
  (16, 25)
  (17, 26)
  (18, 27)
  (19, 28)
  (20, 29)
  (21, 30)
  (22, 31)
  (23, 24)
```

```
[24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 88, 89,
90, 91, 92, 93, 94, 95]
    (0, 15)
    (1, 8)
    (2, 9)
    (3, 10)
    (4, 11)
    (5, 12)
    (6, 13)
    (7, 14)
    (8, 23)
    (9, 16)
    (10, 17)
    (11, 18)
    (12, 19)
    (13, 20)
    (14, 21)
    (15, 22)
    (16, 31)
    (17, 24)
    (18, 25)
    (19, 26)
    (20, 27)
    (21, 28)
    (22, 29)
    (23, 30)
```

```
prim_bar_forces = ref_solution (AAfr, primary_system_bars)
prim_bar_forces
```

```
(-329.4882286743249, -329.48822867432494, -329.4882286743251,
-329.48822867432517, -329.48822867432506, -329.48822867432483,
-329.48822867432506, -329.4882286743252, 51.86314454869473‌4,
51.86314454869467, 51.86314454869474, 51.86314454869487,
51.86314454869484, 51.86314454869465, 51.86314454869472,
51.86314454869493, -2.1107117820499945e-14, 7.846697497318249e-14,
6.56614408775328e-14, -9.437154656823682e-14, -1.4841827457039054e-13,
1.287011046201584e-13, 1.1436499251531046e-13, -2.2737367544323206e-13,
-266.3726358122767, -266.3726358122767, -266.37263581227677,
-266.3726358122768, -266.37263581227677, -266.37263581227666,
-266.37263581227677, -266.3726358122769, 12.637876677755264,
12.637876677755198, 12.637876677755292, 12.63787667775531,
12.637876677755315, 12.637876677755186, 12.637876677755262,
12.637876677755344, -2.110711782049988e-14, 9.481532310540367e-14,
1.0397685162856059e-14, -2.676694244121959e-14, -9.624684726116723e-14,
1.1325814888658017e-13, 6.745864583242747e-14, -1.1368683772161603e-13,
-210.83527132831077, -210.83527132831074, -210.8352713283108,
-210.8352713283108, -210.83527132831077, -210.83527132831074,
-210.83527132831082, -210.83527132831088, -242.5126989171568,
-242.51269891715685, -242.51269891715683, -242.51269891715685,
-242.51269891715685, -242.5126989171569, -242.51269891715685,
-242.51269891715683, -3.527823949190682e-14, 3.527823949190683e-14, 0.0,
-7.05564789838136e-14, -7.055647898381369e-14, 7.055647898381367e-14,
7.055647898381364e-14, -9.723079544127605e-30)
```

```
ss0 = all_bar_forces (primary_system_bars, redundant_bars, prim_bar_forces)
ss0
```

```
(-329.4882286743249, -329.48822867432494, -329.4882286743251,
-329.48822867432517, -329.48822867432506, -329.48822867432483,
-329.48822867432506, -329.4882286743252, 51.86314454869473 4,
```

```
AA * ss0
```

```
(1.4210854715202004e-14, 7.105427357601002e-15, 99.99999999999999,
-3.552713678800501e-15, -7.105427357601002e-15, 100.00000000000003, 0.0,
-2.1316282072803006e-14, 100.00000000000006, 2.1316282072803006e-14,
-3.197442310920451e-14, 100.00000000000007, 3.552713678800501e-15,
7.105427357601002e-15, 100.00000000000003, 2.842170943040401e-14,
7.105427357601002e-15, 99.99999999999999, 0.0, 3.552713678800501e-15,
100.0, -1.4210854715202004e-14, 7.105427357601002e-15,
99.99999999999997, 1.7763568394002505e-15, 1.5987211554602254e-14,
100.00000000000001, -1.7763568394002505e-14, -1.4210854715202004e-14,
100.00000000000001, 0.0, 2.220446049250313e-14, 99.99999999999999,
7.105427357601002e-15, 2.3092638912203256e-14, 100.00000000000001,
1.687538997430238e-14, 3.552713678800501e-15, 100.00000000000003,
2.3092638912203256e-14, 2.1316282072803006e-14, 100.00000000000004, 0.0,
2.6645352591003757e-15, 100.0, -2.1316282072803006e-14,
1.9539925233402755e-14, 100.00000000000004, 0.0, 0.0, 99.99999999999999,
2.842170943040401e-14, 2.842170943040401e-14, 100.0,
2.842170943040401e-14, 1.4210854715202004e-14, 99.99999999999999, 0.0,
0.0, 100.00000000000001, 1.4210854715202004e-14, -5.684341886080802e-14,
100.00000000000001, -5.684341886080802e-14, -8.526512829121202e-14,
100.0, 0.0, 1.4210854715202004e-14, 99.99999999999999, 0.0, 0.0,
100.00000000000001)
```

```
dict_ss0 = dict_bar_force (bars, ss0)
print_dict (dict_ss0)
```

```
0:   -329.488228674
1:   -329.488228674
2:   -329.488228674
3:   -329.488228674
4:   -329.488228674
5:   -329.488228674
6:   -329.488228674
7:   -329.488228674
8:   51.8631445487
9:   51.8631445487
10:  51.8631445487
11:  51.8631445487
12:  51.8631445487
13:  51.8631445487
14:  51.8631445487
15:  51.8631445487
16:  -2.11071178205e-14
17:  7.84669749732e-14
18:  6.56614408775e-14
19:  -9.43715465682e-14
20:  -1.4841827457e-13
21:  1.2870110462e-13
22:  1.14364992515e-13
23:  -2.27373675443e-13
24:  0.0
25:  0.0
26:  0.0
27:  0.0
28:  0.0
29:  0.0
30:  0.0
31:  0.0
32:  -266.372635812
33:  -266.372635812
34:  -266.372635812
35:  -266.372635812
36:  -266.372635812
37:  -266.372635812
38:  -266.372635812
39:  -266.372635812
40:  12.6378766778
41:  12.6378766778
42:  12.6378766778
43:  12.6378766778
44:  12.6378766778
45:  12.6378766778
46:  12.6378766778
47:  12.6378766778
48:  -2.11071178205e-14
49:  9.48153231054e-14
50:  1.03976851629e-14
51:  -2.67669424412e-14
52:  -9.62468472612e-14
53:  1.13258148887e-13
54:  6.74586458324e-14
55:  -1.13686837722e-13
56:  0.0
57:  0.0
58:  0.0
59:  0.0
60:  0.0
61:  0.0
62:  0.0
63:  0.0
64:  -210.835271328
65:  -210.835271328
66:  -210.835271328
67:  -210.835271328
68:  -210.835271328
69:  -210.835271328
70:  -210.835271328
71:  -210.835271328
72:  -242.512698917
73:  -242.512698917
74:  -242.512698917
75:  -242.512698917
76:  -242.512698917
77:  -242.512698917
78:  -242.512698917
79:  -242.512698917
80:  -3.52782394919e-14
81:  3.52782394919e-14
82:  0.0
83:  -7.05564789838e-14
84:  -7.05564789838e-14
85:  7.05564789838e-14
86:  7.05564789838e-14
87:  -9.72307954413e-30
88:  0.0
89:  0.0
90:  0.0
91:  0.0
92:  0.0
93:  0.0
94:  0.0
95:  0.0
```

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars, supports, dict_ss0)
```

```
AAr = AAfr.subdivision (0,0)
```

```
SST = matrix (kernel (AAr, pivots))
SS= SST.T
SS
```

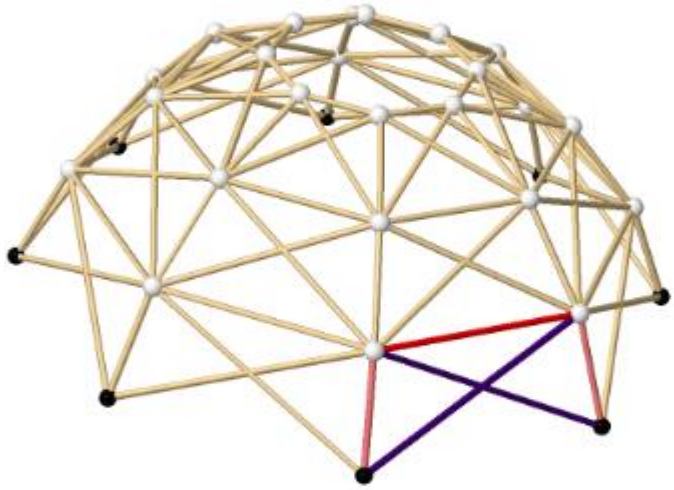
```
96 x 24 dense matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

```
SS0 = SS.column(0)
SS1 = SS.column(1)
```

```
dict_SS0 = dict_bar_force (bars, SS0)
print_dict (dict_SS0)
```

```
0:   -0.440808967842
1:   0.0
2:   0.0
3:   -6.82584213768e-18
4:   0.0
5:   1.64790406634e-17
6:   0.0
7:   -0.440808967842
8:   -7.89011210428e-18
9:   -1.90484156508e-17
10:  -1.90484156508e-17
11:  -9.72253623766e-18
12:  -9.72253623766e-18
13:  -1.11022302463e-16
14:  -1.11022302463e-16
15:  -0.970061074532
16:  0.0
17:  0.0
18:  1.54848077867e-17
19:  -0.0
20:  -3.73836329694e-17
21:  0.0
22:  -1.23259516441e-32
23:  1.0
24:  1.0
25:  0.0
26:  0.0
27:  0.0
28:  0.0
29:  0.0
30:  0.0
31:  0.0
32:  -0.0
33:  -0.0
34:  -0.0
35:  -0.0
36:  -0.0
37:  -0.0
38:  -0.0
39:  -0.0
40:  -0.0
41:  -0.0
42:  -0.0
43:  -0.0
44:  -0.0
45:  -0.0
46:  -0.0
47:  -0.0
48:  -0.0
49:  -0.0
50:  -0.0
51:  -0.0
52:  -0.0
53:  -0.0
54:  -0.0
55:  -0.0
56:  0.0
57:  0.0
58:  0.0
59:  0.0
60:  0.0
61:  0.0
62:  0.0
63:  0.0
64:  -0.0
65:  -0.0
66:  -0.0
67:  -0.0
68:  -0.0
69:  -0.0
70:  -0.0
71:  -0.0
72:  -0.0
73:  -0.0
74:  -0.0
75:  -0.0
76:  -0.0
77:  -0.0
78:  -0.0
79:  -0.0
80:  -0.0
81:  -0.0
82:  -0.0
83:  -0.0
84:  -0.0
85:  -0.0
86:  -0.0
87:  -0.0
88:  0.0
89:  0.0
90:  0.0
91:  0.0
92:  0.0
93:  0.0
94:  0.0
95:  0.0
```

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars, supports, dict_SS0)
```

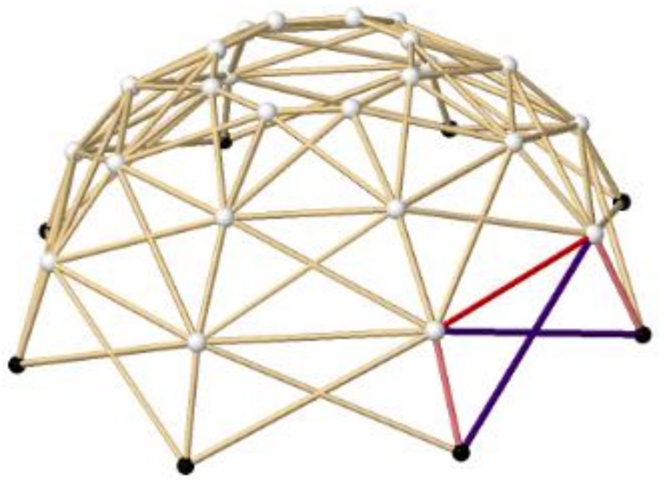


```
dict_SS1 = dict_bar_force (bars, SS1)
print_dict (dict_SS1)
```

```
0:   -0.440808967842
1:   -0.440808967842
2:   -6.59161626537e-17
3:   2.70608197183e-18
4:   -2.71669501095e-33
5:   -2.82735638805e-18
6:   1.08667800438e-32
7:   -3.29580813268e-17
8:   -0.970061074532
9:   -1.46233618361e-16
10:  -1.17598968777e-18
11:  -1.72159915174e-17
12:  -1.72159915174e-17
13:  -2.65418709306e-17
14:  -2.65418709306e-17
15:  1.11022302463e-16
16:  1.0
17:  1.49534531878e-16
18:  -6.13889954435e-18
19:  6.16297582204e-33
20:  6.41401739599e-18
21:  -2.46519032882e-32
22:  7.47672659388e-17
23:  -1.49534531878e-16
```

```
24:  0.0
25:  1.0
26:  0.0
27:  0.0
28:  0.0
29:  0.0
30:  0.0
31:  0.0
32:  -0.0
33:  -0.0
34:  -0.0
35:  -0.0
36:  -0.0
37:  -0.0
38:  -0.0
39:  -0.0
40:  -0.0
41:  -0.0
42:  -0.0
43:  -0.0
44:  -0.0
45:  -0.0
46:  -0.0
47:  -0.0
48:  -0.0
49:  -0.0
50:  -0.0
51:  -0.0
52:  -0.0
53:  -0.0
54:  -0.0
55:  -0.0
56:  0.0
57:  0.0
58:  0.0
59:  0.0
60:  0.0
61:  0.0
62:  0.0
63:  0.0
64:  -0.0
65:  -0.0
66:  -0.0
67:  -0.0
68:  -0.0
69:  -0.0
70:  -0.0
71:  -0.0
72:  -0.0
73:  -0.0
74:  -0.0
75:  -0.0
76:  -0.0
77:  -0.0
78:  -0.0
79:  -0.0
80:  -0.0
81:  -0.0
82:  -0.0
83:  -0.0
84:  -0.0
85:  -0.0
86:  -0.0
87:  -0.0
88:  0.0
89:  0.0
90:  0.0
91:  0.0
92:  0.0
93:  0.0
94:  0.0
95:  0.0
```

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars, supports, dict_SS1)
```



```
E = 2.e8
Fs = dict_same_value (bars, 0.05*0.05)
print E
print
print_dict (Fs)
```

```
2.00000000000000e8
```

0:	0.0025000000000000
1:	0.0025000000000000
2:	0.0025000000000000
3:	0.0025000000000000
4:	0.0025000000000000
5:	0.0025000000000000
6:	0.0025000000000000
7:	0.0025000000000000
8:	0.0025000000000000
9:	0.0025000000000000
10:	0.0025000000000000
11:	0.0025000000000000
12:	0.0025000000000000
13:	0.0025000000000000
14:	0.0025000000000000
15:	0.0025000000000000
16:	0.0025000000000000
17:	0.0025000000000000
18:	0.0025000000000000
19:	0.0025000000000000
20:	0.0025000000000000
21:	0.0025000000000000
22:	0.0025000000000000
23:	0.0025000000000000
24:	0.0025000000000000
25:	0.0025000000000000
26:	0.0025000000000000
27:	0.0025000000000000
28:	0.0025000000000000
29:	0.0025000000000000
30:	0.0025000000000000
31:	0.0025000000000000
32:	0.0025000000000000
33:	0.0025000000000000
34:	0.0025000000000000
35:	0.0025000000000000
36:	0.0025000000000000
37:	0.0025000000000000
38:	0.0025000000000000
39:	0.0025000000000000
40:	0.0025000000000000
41:	0.0025000000000000
42:	0.0025000000000000
43:	0.0025000000000000
44:	0.0025000000000000
45:	0.0025000000000000
46:	0.0025000000000000
47:	0.0025000000000000
48:	0.0025000000000000
49:	0.0025000000000000
50:	0.0025000000000000
51:	0.0025000000000000
52:	0.0025000000000000
53:	0.0025000000000000
54:	0.0025000000000000
55:	0.0025000000000000
56:	0.0025000000000000
57:	0.0025000000000000
58:	0.0025000000000000
59:	0.0025000000000000
60:	0.0025000000000000
61:	0.0025000000000000
62:	0.0025000000000000
63:	0.0025000000000000
64:	0.0025000000000000
65:	0.0025000000000000
66:	0.0025000000000000
67:	0.0025000000000000
68:	0.0025000000000000
69:	0.0025000000000000
70:	0.0025000000000000
71:	0.0025000000000000
72:	0.0025000000000000
73:	0.0025000000000000
74:	0.0025000000000000
75:	0.0025000000000000
76:	0.0025000000000000
77:	0.0025000000000000
78:	0.0025000000000000
79:	0.0025000000000000
80:	0.0025000000000000
81:	0.0025000000000000
82:	0.0025000000000000
83:	0.0025000000000000
84:	0.0025000000000000
85:	0.0025000000000000
86:	0.0025000000000000
87:	0.0025000000000000
88:	0.0025000000000000
89:	0.0025000000000000
90:	0.0025000000000000
91:	0.0025000000000000
92:	0.0025000000000000
93:	0.0025000000000000
94:	0.0025000000000000
95:	0.0025000000000000

```
ddelta = diag_flex (bars, joints, E, Fs)
ddelta
```

```
96 x 96 sparse matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

```
DD = SST * ddelta * SS
DD
```

```
24 x 24 dense matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

```
dd0 = SST * ddelta * ss0
dd0
```

```
(0.002041789164627902, 0.002041789164627911, 0.0020417891646279155,
0.0020417891646279155, 0.0020417891646279085, 0.0020417891646279055,
0.002041789164627916, 0.0020417891646279164, 0.0021349263560174725,
0.002134926356017478, 0.002134926356017481, 0.002134926356017479,
0.002134926356017476, 0.002134926356017473, 0.002134926356017482,
0.0021349263560174804, 0.004817359478370З, 0.004817359478370302,
0.004817359478370309, 0.004817359478370304, 0.004817359478370301,
0.004817359478370309, 0.004817359478370308, 0.004817359478370308)
```

```
xx = DD \ (-dd0)
xx
```

```
(-24.523209291275354, -24.52320929127547, -24.52320929127557,
-24.523209291275524, -24.523209291275514, -24.523209291275386,
-24.52320929127556, -24.52320929127558, -16.6542738339768,
-16.654273833976855, -16.654273833976873, -16.654273833976845,
-16.654273833976866, -16.654273833976774, -16.654273833976905,
-16.654273833976884, -76.51233556683677, -76.51233556683678,
-76.51233556683692, -76.51233556683682, -76.51233556683682,
-76.51233556683694, -76.5123355668369, -76.51233556683692)
```

```
ss = ss0 + SS*xx
ss
```

```
(-307.86812752261557, -307.86812752261545, -307.86812752261574,
-307.8681275226157, -307.8681275226158, -307.8681275226154,
-307.86812752261557, -307.8681275226159, 87.62561777589008,
87.62561777589005, 87.62561777589013, 87.62561777589015,
87.62561777589005, 87.62561777589005, 87.62561777589012,
87.62561777589009, -24.523209291275535, -24.523209291275435,
-24.523209291275524, -24.523209291275517, -24.52320929127561,
-24.523209291275414, -24.52320929127543, -24.523209291275 6,
-24.523209291275354, -24.52320929127547, -24.52320929127557,
-24.523209291275524, -24.523209291275514, -24.523209291275386,
-24.5232092912755 6, -24.5232092912755 8, -248.49557461289163,
-248.49557461289155, -248.4955746128917, -248.4955746128917,
-248.49557461289174, -248.49557461289152, -248.4955746128916,
-248.4955746128918, 66.67645434214923, 66.67645434214921,
66.67645434214927, 66.67645434214926, 66.67645434214927,
66.67645434214917, 66.67645434214926, 66.67645434214921,
-16.654273833976912, -16.65427383397675, -16.65427383397686,
-16.65427383397685, -16.654273833976916, -16.654273833976767,
-16.654273833976784, -16.654273833976916, -16.654273833976 8,
-16.654273833976855, -16.654273833976873, -16.654273833976845,
-16.654273833976866, -16.654273833976774, -16.654273833976905,
-16.654273833976884, -100.422507562713, -100.42250756271284,
-100.4225075627129, -100.422507562713, -100.42250756271288,
-100.42250756271278, -100.42250756271287, -100.42250756271302,
-167.76819921058194, -167.76819921058188, -167.76819921058197,
-167.768199210582, -167.76819921058188, -167.76819921058194,
-167.76819921058188, -167.76819921058197, -76.51233556683682,
-76.51233556683688, -76.51233556683684, -76.51233556683685,
-76.512335566837, -76.51233556683682, -76.5123355668368,
-76.51233556683678, -76.51233556683677, -76.51233556683678,
-76.51233556683692, -76.51233556683682, -76.51233556683682,
-76.51233556683694, -76.5123355668369, -76.51233556683692)
```

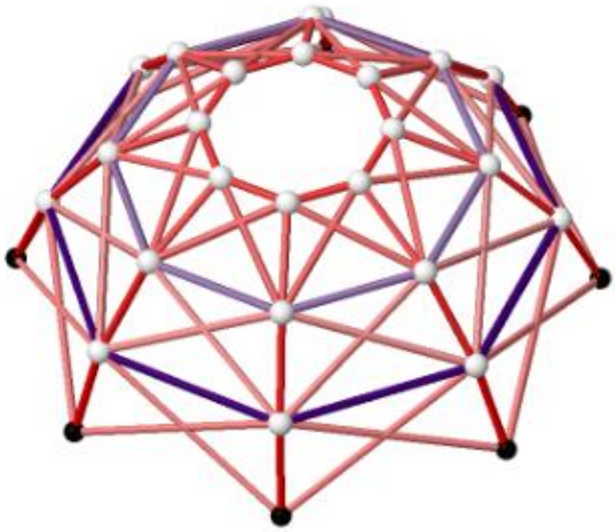
```
AA * ss
```

```
(4.618527782440651e-14, 2.842170943040401e-14, 100.0,
7.105427357601002e-15, -1.4210854715202004e-14, 100.0,
-1.4210854715202004e-14, -2.842170943040401e-14, 100.00000000000006,
0.0, -2.842170943040401e-14, 100.00000000000003,
-2.1316282072803006e-14, 0.0, 99.99999999999999, 2.842170943040401e-14,
0.0, 100.00000000000003, 1.4210854715202004e-14, 0.0, 100.0,
-2.842170943040401e-14, -7.105427357601002e-15, 99.99999999999997,
-2.4868995751603507e-14, 4.973799150320701e-14, 100.00000000000003,
-3.552713678800501e-15, -2.1316282072803006e-14, 100.0,
-7.105427357601002e-15, -2.1316282072803006e-14, 100.0,
2.1316282072803006e-14, 3.552713678800501e-15, 100.00000000000001,
5.329070518200751 4e-14, -7.105427357601002e-15, 100.00000000000003,
-2.842170943040401e-14, 1.4210854715202004e-14, 100.00000000000003,
1.4210854715202004e-14, 1.0658141036401503e-14, 99.99999999999997,
-2.842170943040401e-14, -3.552713678800501e-15, 100.00000000000006,
-3.552713678800501e-15, 0.0, 99.99999999999997, 4.263256414560601e-14,
2.842170943040401e-14, 99.99999999999999, 8.526512829121202e-14,
2.842170943040401e-14, 100.0, 0.0, -2.842170943040401e-14,
100.00000000000003, 0.0, -2.842170943040401e-14, 100.00000000000001,
0.0, -8.526512829121202e-14, 100.0, -2.842170943040401e-14,
1.0658141036401503e-14, 99.99999999999999, 0.0, -2.842170943040401e-14,
100.0)
```

```
dict_ss = dict_bar_force (bars, ss)
print_dict (dict_ss)
```

```
0:   -307.868127523
1:   -307.868127523
2:   -307.868127523
3:   -307.868127523
4:   -307.868127523
5:   -307.868127523
6:   -307.868127523
7:   -307.868127523
8:   87.6256177759
9:   87.6256177759
10:  87.6256177759
11:  87.6256177759
12:  87.6256177759
13:  87.6256177759
14:  87.6256177759
15:  87.6256177759
16:  -24.5232092913
17:  -24.5232092913
18:  -24.5232092913
19:  -24.5232092913
20:  -24.5232092913
21:  -24.5232092913
22:  -24.5232092913
23:  -24.5232092913
24:  -24.5232092913
25:  -24.5232092913
26:  -24.5232092913
27:  -24.5232092913
28:  -24.5232092913
29:  -24.5232092913
30:  -24.5232092913
31:  -24.5232092913
32:  -248.495574613
33:  -248.495574613
34:  -248.495574613
35:  -248.495574613
36:  -248.495574613
37:  -248.495574613
38:  -248.495574613
39:  -248.495574613
40:  66.6764543421
41:  66.6764543421
42:  66.6764543421
43:  66.6764543421
44:  66.6764543421
45:  66.6764543421
46:  66.6764543421
47:  66.6764543421
48:  -16.654273834
49:  -16.654273834
50:  -16.654273834
51:  -16.654273834
52:  -16.654273834
53:  -16.654273834
54:  -16.654273834
55:  -16.654273834
56:  -16.654273834
57:  -16.654273834
58:  -16.654273834
59:  -16.654273834
60:  -16.654273834
61:  -16.654273834
62:  -16.654273834
63:  -16.654273834
64:  -100.422507563
65:  -100.422507563
66:  -100.422507563
67:  -100.422507563
68:  -100.422507563
69:  -100.422507563
70:  -100.422507563
71:  -100.422507563
72:  -167.768199211
73:  -167.768199211
74:  -167.768199211
75:  -167.768199211
76:  -167.768199211
77:  -167.768199211
78:  -167.768199211
79:  -167.768199211
80:  -76.5123355668
81:  -76.5123355668
82:  -76.5123355668
83:  -76.5123355668
84:  -76.5123355668
85:  -76.5123355668
86:  -76.5123355668
87:  -76.5123355668
88:  -76.5123355668
89:  -76.5123355668
90:  -76.5123355668
91:  -76.5123355668
92:  -76.5123355668
93:  -76.5123355668
94:  -76.5123355668
95:  -76.5123355668
```

```
plot_truss_with_forces3d (joints, bars, supports, dict_ss)
```



```
ff = load_vector (loads, free_joints)
ff
```

```
(0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0,
0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0,
0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0,
0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0,
0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0,
0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, -100.0)
```

```
dkk = diag_stiff (bars, joints, E, Fs)
dkk
```

```
96 x 96 sparse matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

```
KK = AA * dkk * AA.T
KK
```

```
72 x 72 dense matrix over Real Double Field (use the '.str()' method to
see the entries)
```

```
uu = KK \ ff
uu
```

```
(0.0022507164871608336, -5.955620471748851e-18, -0.002505818902860943,
0.0015914968905997532, 0.0015914968905997586, -0.0025058189028609517,
2.0351897306860326e-19, 0.002250716487160878, -0.0025058189028609344,
-0.0015914968905997497, 0.0015914968905997532, -0.0025058189028609548,
-0.0022507164871608657, 6.6039884490003e-19, -0.0025058189028609366,
-0.00159149689059975 5, -0.0015914968905997532, -0.0025058189028609 5,
3.450144141764278e-18, -0.002250716487160852, -0.0025058189028609405,
0.0015914968905997 8, -0.0015914968905997868, -0.0025058189028609452,
0.0012433862677205907, -1.3991161344971366e-17, -0.006918330045478263,
0.0008792068615393574, 0.0008792068615393734, -0.006918330045478339,
9.848546573057456e-19, 0.0012433862677206872, -0.006918330045478216,
-0.0008792068615393494, 0.0008792068615393559, -0.006918330045478356,
-0.0012433862677206703, 4.341818056823316e-19, -0.006918330045478221,
-0.0008792068615393617, -0.0008792068615393586, -0.006918330045478341,
1.2342350485531824e-17, -0.0012433862677206 27, -0.0069183300454782 5,
0.0008792068615394151, -0.0008792068615394274, -0.006918330045478306,
-0.0015715681023973 54, -3.074437127686563e-17, -0.014375166313411679,
-0.0011112664623019542, -0.0011112664623019097, -0.014375166313412253,
2.843252796548758e-18, -0.0015715681023971 18, -0.014375166313411378,
0.0011112664623019913, -0.0011112664623019817, -0.014375166313412386,
0.0015715681023971454, -1.3291883604445831e-18, -0.014375166313411401,
0.0011112664623019438, 0.0011112664623019583, -0.014375166313412298,
3.231958433407518e-17, 0.0015715681023972762, -0.014375166313411588,
-0.00111126646230 1807, 0.0011112664623017868, -0.014375166313412022)
```

```
dd = -AA.T * uu
dd
```

```
(-0.0032122325934190836, -0.003212232593419071, -0.003212232593419094,
-0.0032122325934190715, -0.003212232593419091, -0.003212232593419069,
-0.003212232593419089, -0.0032122325934190814, 0.001722623821174801,
0.0017226238211748048, 0.0017226238211748043, 0.0017226238211748035,
0.0017226238211748028, 0.0017226238211748022, 0.0017226238211748065,
0.001722623821174806, -0.0005804557764810927, -0.0005804557764810714,
-0.0005804557764811007, -0.000580455776481075, -0.0005804557764810966,
-0.0005804557764810756, -0.0005804557764810894, -0.0005804557764810884,
-0.0005804557764810814, -0.0005804557764810781, -0.0005804557764810997,
-0.0005804557764810714, -0.0005804557764810966, -0.0005804557764810745,
-0.000580455776481095, -0.0005804557764810825, -0.002647696847892893,
-0.0026476968478928824, -0.002647696847892895, -0.002647696847892885,
-0.0026476968478928945, -0.002647696847892882, -0.002647696847892894,
-0.0026476968478928893, 0.0009516466493738394, 0.0009516466493738417,
0.0009516466493738428, 0.0009516466493738433, 0.0009516466493738421,
0.0009516466493738405, 0.0009516466493738408, 0.0009516466493738414,
-0.00033062437666932015, -0.00033062437666930974, -0.00033062437666969321,
-0.00033062437666931104, -0.0003306243766693197, -0.0003306243766693115,
-0.0003306243766693197, -0.00033062437666931527, -0.0003306243766693154,
-0.000330624376669313, -0.0003306243766693205, -0.0003306243766693102,
-0.0003306243766693197, -0.0003306243766693117, -0.0003306243766693205,
-0.0003306243766693141, -0.0010586303314726962, -0.0010586303314726936,
-0.0010586303314726988, -0.0010586303314726966, -0.0010586303314726979,
-0.0010586303314726953, -0.0010586303314726953, -0.0010586303314726979,
-0.0012028261512419193, -0.0012028261512419178, -0.0012028261512419195,
-0.0012028261512419189, -0.001202826151241918, -0.001202826151241918,
-0.0012028261512419171, -0.0012028261512419187, -0.0011117858683021731,
-0.001111785868302173, -0.0011117858683021735, -0.001111785868302173,
-0.001111785868302173, -0.0011117858683021735, -0.0011117858683021732,
-0.001111785868302173, -0.0011117858683021733, -0.0011117858683021731,
-0.0011117858683021736, -0.0011117858683021734, -0.0011117858683021736,
-0.0011117858683021735, -0.0011117858683021735, -0.0011117858683021731)
```

```
ssmp = dkk * dd
ssmp
```

```
(-307.8681275226159, -307.8681275226147, -307.86812752261693,
-307.86812752261477, -307.86812752261665, -307.8681275226145,
-307.8681275226164, -307.86812752261574, 87.62561777588999,
87.62561777589015, 87.62561777589016, 87.6256177758901,
87.62561777589006, 87.62561777589002, 87.62561777589025,
87.62561777589022, -24.52320929127579, -24.523209291274892,
-24.523209291276128, -24.523209291275045, -24.523209291275954,
-24.52320929127507, -24.523209291275652, -24.523209291275606,
-24.523209291275307, -24.523209291275176, -24.52320929127609,
-24.523209291274892, -24.523209291275954, -24.523209291275023,
-24.52320929127589, -24.52320929127536, -248.49557461289174,
-248.4955746128911, -248.49557461289226, -248.49557461289132,
-248.49557461289223, -248.49557461289103, -248.49557461289217,
-248.49557461289174, 66.67645434214904, 66.6764543421492,
66.67645434214926, 66.67645434214931, 66.67645434214923,
66.6764543421491, 66.67645434214913, 66.67645434214914,
-16.654273833977076, -16.654273833976553, -16.654273833977122,
-16.65427383397662, -16.654273833977054, -16.654273833976642,
-16.654273833977054, -16.65427383397683, -16.654273833976834,
-16.65427383397672, -16.654273833977093, -16.65427383397658,
-16.654273833977054, -16.654273833976653, -16.654273833977093,
-16.65427383397677, -100.42250756271295, -100.42250756271272,
-100.42250756271321, -100.42250756271301, -100.42250756271312,
-100.42250756271287, -100.42250756271287, -100.42250756271312,
-167.76819921058205, -167.76819921058186, -167.76819921058208,
-167.768199210582, -167.76819921058188, -167.76819921058188,
-167.7681992105817, -167.76819921058194, -76.5123355668369,
-76.51233556683674, -76.51233556683707, -76.5123355668367,
-76.51233556683694, -76.51233556683658, -76.51233556683681,
-76.51233556683694, -76.51233556683688, -76.5123355668368,
-76.51233556683692, -76.51233556683677, -76.51233556683712,
-76.5123355668367, -76.51233556683707, -76.51233556683678)
```

9. LITERATURA

[1] Fresl K.: Građevna statika 1.: bilješke i skice s predavanja , dostupno na mrežnoj stranici predmeta

[2] Fresl K.: Mehanika 1.: bilješke i skice s predavanja , dostupno na mrežnoj stranici predmeta

[3] Programski paket Sage, dostupno na adresi www.sagemath.org

[4] Tarle A. Programska realizacija metode pomaka za rešetkaste sisteme: završni rad, Građevinski fakultet, Zagreb, 2016.

[5] Panižić A. Programska realizacija metode sila za rešetkaste sisteme: završni rad, Građevinski fakultet, Zagreb, 2016.