Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

**Marko Rihtarić**

# CREMONIN PLAN SILA

**(ZAVRŠNI RAD)**

Zagreb, 2010.

# Sadržaj

# 1. Uvod

U ovom radu ćemo se pozabaviti Cremoninim planom sila. Prvo ćemo pojasniti plan sila u ravnini kroz dva primjera, zatim slijedi pojašnjenje plana sila u prostoru. Pojasnit ćemo općenita svojstva prostornih sustava te njihovo slaganje u prostoru. Sve navedeno oprimjerit ćemo na kupoli.

## 2. Biografija

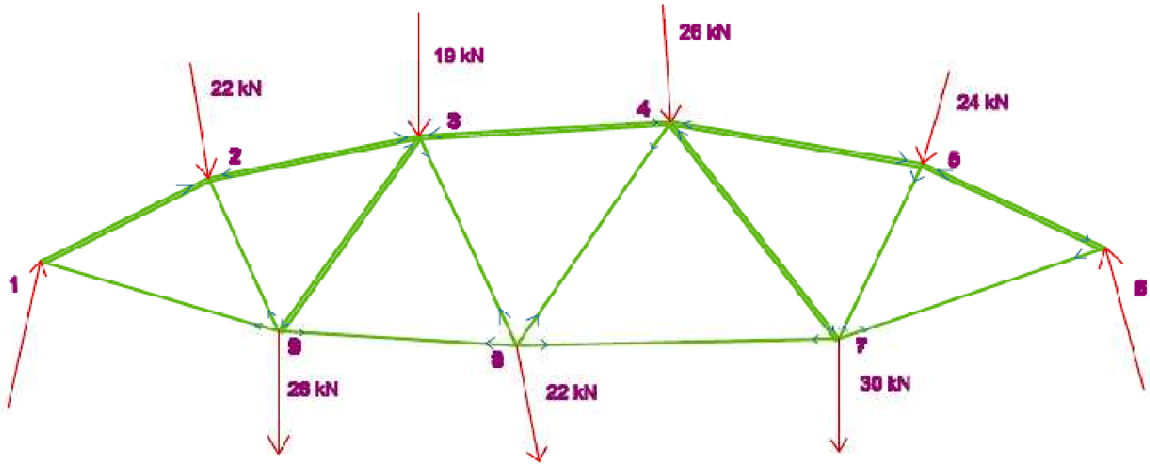
Antonio Luigi Gaudenzio Cremona
(Pavija, 07.12.1830. – Rim, 10.06.1903.)

Nakon što je završio obrazovanje u rodnom gradu 1848. godine, Cremona se pridružio Bataljonu za slobodnu Italiju u borbi protiv austrijskih vlasti i sudjelovao u obrani Venecije, koja je završila kapitulacijom 24. kolovoza 1849. Iste je godine započeo studij građevinarstva na Sveučilištu u Paviji. Diplomirao je sa doktorskim stupnjem 1860. godine. Nakon niza nastavničkih zaposlenja u Paviji, Cremoni i Milanu, Cremona je postao profesor Sveučilišta u Bolonji 1860. godine. Nakon toga bio je nastavnik više geometrije na milanskoj politehnici (1867.-1873.). U tom je razdoblju razvio matematičke osnove svoje grafičke statike utemeljene na Maxwellovu načelu dualnosti. Cremonina je grafička statika ubrzo prihvaćena u nastavi teorije konstrukcije i u inženjerskoj praksi. Zajedno sa Culmannom i Maxwellom, Cremona je utemeljitelj grafičke statike obogaćene projektivnom geometrijom. Godine 1873. ministar Sella je imenovao Cremonu rektorom-osnivačem novoutemeljenoga Sveučilišta u Rimu, gdje je predavao grafostatiku do 1877. godine. Potom je bio profesor matematike na Sveučilištu u Rimu do smrti. Pridružio se Senatu 1879. godine te je bio jedan od najpoštovanijih članova Sveučilišta u Berlinu, Stockholmu i Oxfordu, među ostalima, počastili su ga počasnim doktorom za pionirski rad u geometriji.

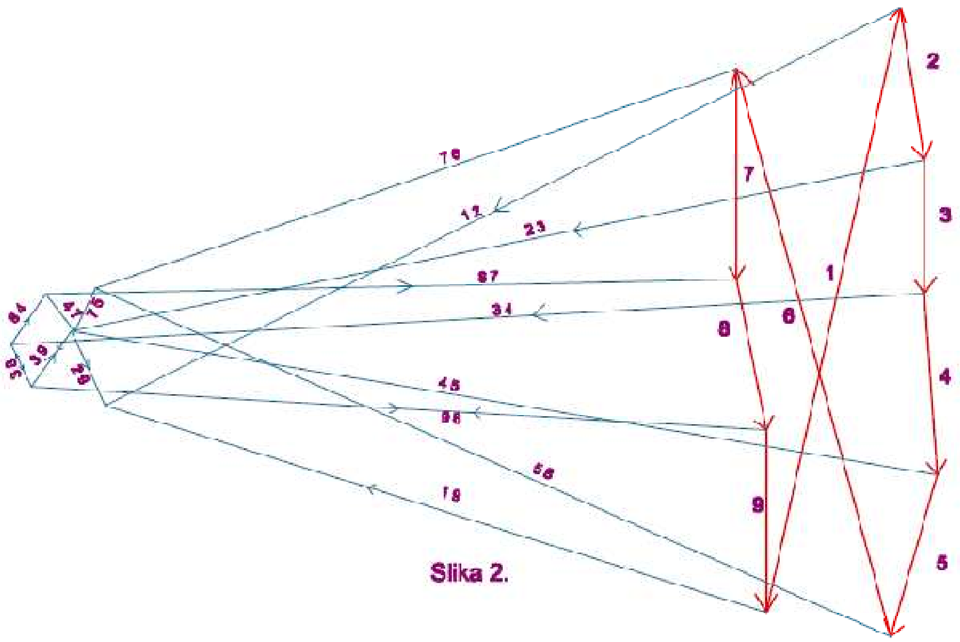
# 3. Cremonin plan sila

## 3.1. Cremonin plan sila u ravnini

Postoje tri metode određivanja unutarnjih sila. Prva se temelji na zanimljivim istraživanjima prof. L. Cremona u njegovom djelu ,, Le figure reciproche nella Statica Grafica" i zbog toga se naziva Cremonin postupak. Bilo koja građevina čiji se proračun vrši pomoću Cremonine metode i pripadajući plan sila gleda se kao projekcija dvaju poliedara, čiji bridovi odgovaraju međusobno kao dva recipročna elementa nulsistema. Metoda koja proizlazi iz tog promatranja je toliko jednostavna, da se bez znanja od kuda je izvedena može shvatiti i primijeniti. Prvo se iz zadanih sila dobiju sve vanjske, uravnotežene sile poligona i to tako da se slažu jedna do druge kako slijede opseg tog sistema. Zatim se iz njih, pomoću daljnjeg rastavljanja sila, dobiju sile u štapovima. Pri tome se uvijek počinje u jednom dijelu sistema ili točnije u čvoru, u kojem se osi štapa sijeku i tako tvore za svaki čvor zatvoreni poligon, čije strane, koje se dodiruju u toj točci predstavljaju te sile koje su se prije izračunale. Ti planovi sila su najjasniji i najjednostavniji kada se kod izrade pazi da svaka zatezna sila prolazi kroz točku razdvajanja dvaju vanjskih sila, koje se vežu na kraj zateznog štapa. U tom slučaju svakom trokutnom polju odgovara jedna točka u planu sila, kroz koji prolaze te tri dotične sile, ili svakom čvoru sistema pripada zatvoreni poligon, u planu sila koji se sastoji od sila koje se sudaraju u tom čvoru. Ako se poštuje to pravilo svaka sila se u planu sila pojavljuje samo jednom i paralelno je pomicanje sila nepotrebno. To se pravilo samo primjenjuje kada se građevina sastoji od poredanih trokuta. Ako taj uvjet nije ispunjen, gubi se recipročna veza između dviju figura, te je potrebno paralelno pomicanje sila u planu sila, to jest, treba dvaput prikazati silu kako bi se dobili uravnoteženi poligoni. Iz smjera vanjskih sila može se odrediti smjer unutarnjih sila. U tu se svrhu promatra svaka vanjska sila kao rezultirajuća sila onih sila koje izlaze iz čvora ili se, što je preglednije, nacrtaju strelice tako da u svakom čvoru nastane uravnotežen sustav. Te sile štapa nemaju određeni smjer nego djeluju u suprotnim smjerovima, ovisno koju se završnu točku gleda kao točka slaganja sila. Stoga, u planu sila, svaka unutarnja sila dobiva dvije strelice. Prenesu li se te strelice u mrežu plana toga sustava, i to u blizinu dotičnog čvora, tada se štapovi čije strelice su suprotno orijentirane u odnosu na završnu točku štapa, zovu vlačno opterećeni štapovi, a štapovi, čije su strelice orijentirane tako da djeluju prema završnoj točki štapa, zovu se tlačno opterećeni štapovi. Slika br. 1 prikazuje sustav, a slika br. 2 prikazuje Cremonin plan sila. U slici 2 prikazane su vanjske sile označene brojevima 1 do 9 koje čine Cremonin poligon sila. Taj poligon mora biti zatvoren zato jer su vanjske sila uvijek u ravnoteži. Započevši u točki 1, sila jedan se dijeli na smjerove 1,2 i 1,9. Pritom se pazi da sila 1 2, u planu sila, prolazi kroz točku rastavljanja sile 1 i sile 2, a sila 1 9 prolazi kroz sjecište sila 1 i sile 9. Time se sudarujuće sile u čvoru 2 dovode u ravnotežu. Budući da silu 1 2 i silu 2 već znamo, povlačenjem dviju paralela ka dotičnim usmjerenim štapovima, saznajemo vrijednosti sila 2 3 i 2 9. Povlačenjem paralelnih linija u čvor 9 saznajemo vrijednosti sila 9 3 i 9 8. Na taj način, krećući se od čvora do čvora, saznaju se uz, malo napora, vrijednosti svih sila.



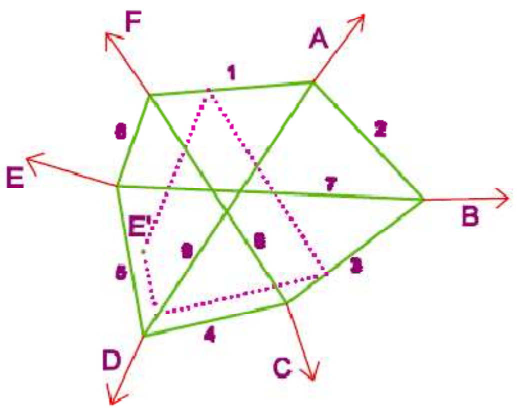

**Slika 1.**



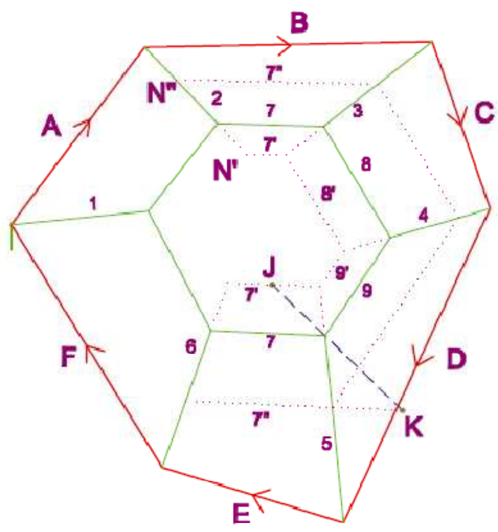

Slika 2.

Kako bi se odredio smjer tih sila, u nastali se poligon (slika br. 2) stavljaju strelice koje se prenose u sliku 1. Kad se to napravi za čvorove 3, 8 i 9, prepoznajemo da su štapovi 2 3, 3 4 i 3 9 tlačni, a štapovi 1 9 i 2 9, kao i svi štapovi koji se susreću u čvoru br. 8 vlačni. Svi štapovi, koji su nacrtani  s dvije crte, su tlačni. Kod netipičnih sustava ovdje opisani postupak ne može se primijeniti, zato što postoje čvorovi u kojima se susreću više od dvije nepoznatih sila u štapovima. U tom slučaju, zaobilaznim putem možemo doći do cilja i to tako, ako uspijemo jednu od sila u štapovima odrediti time da se dovede u ravnotežu s ostalim silama u nadolazećem čvorištu. Može se dogoditi da u cijelom sistemu ne postoji čvor u kojem se susreću samo dva štapa. U tom slučaju se koristi indirektni način. Prvo se izabere bilo koja od tih sila u štapovima, i pomoću Cremaninog postupka odrede se susjedne sile, dok ne naletimo na proturječnost. Tada primijenimo tu silu u štapu tako da ta proturječnost nestane. Kako se plan sila ovdje linearno mijenja do pravih vrijednosti dolazimo tako da ponavljamo postupak dva puta  uz male pomoćne konstrukcije. Najjednostavniji primjer takvog rješavanja problema prikazuje slika br. 3. Ima samo čvorove s tri štapa. Ta slika br. 3 je statički određena zato jer ima 6 čvorova i 9 štapova.

Slika 3.

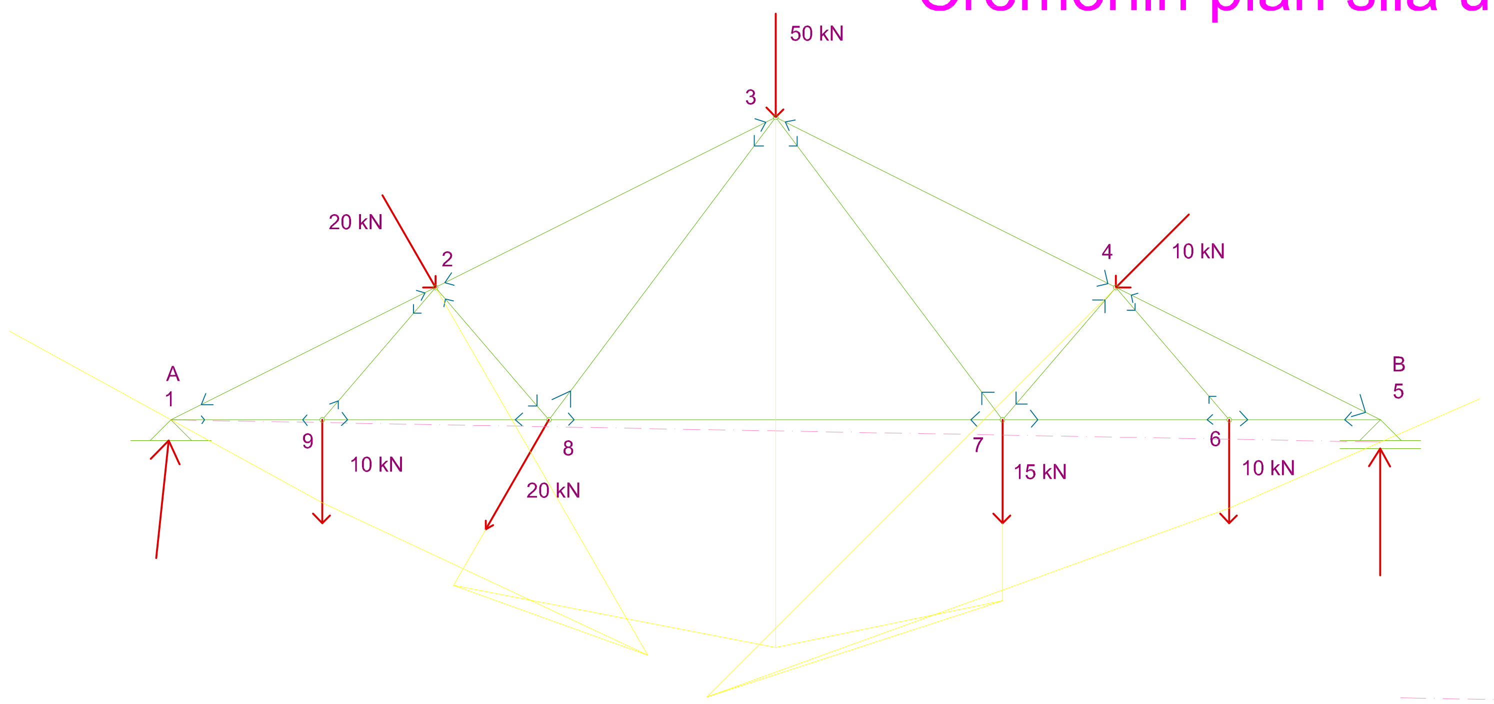


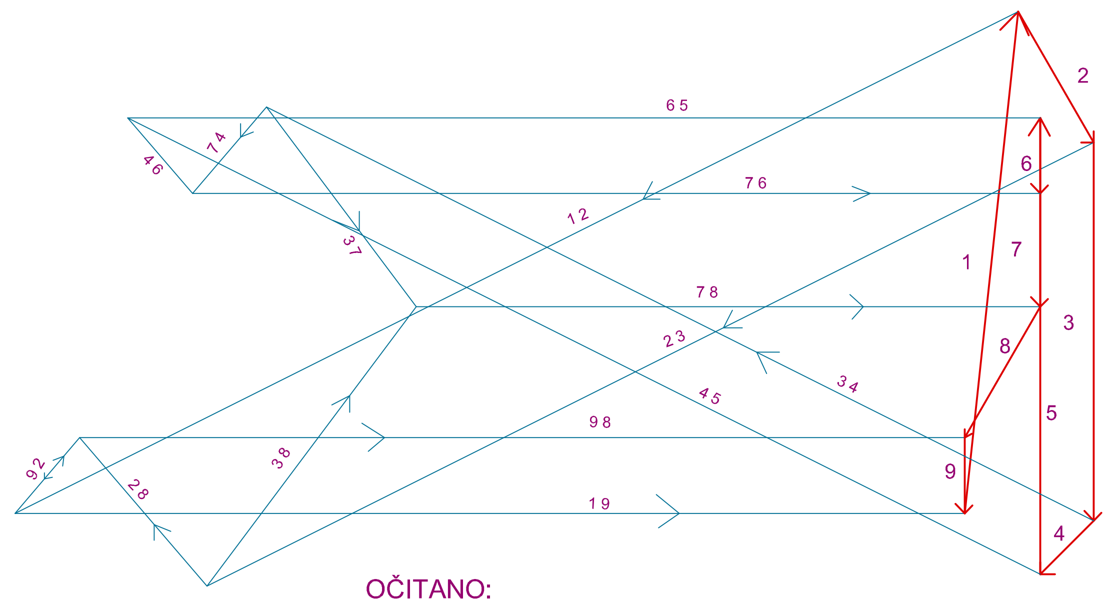

Slika 4.



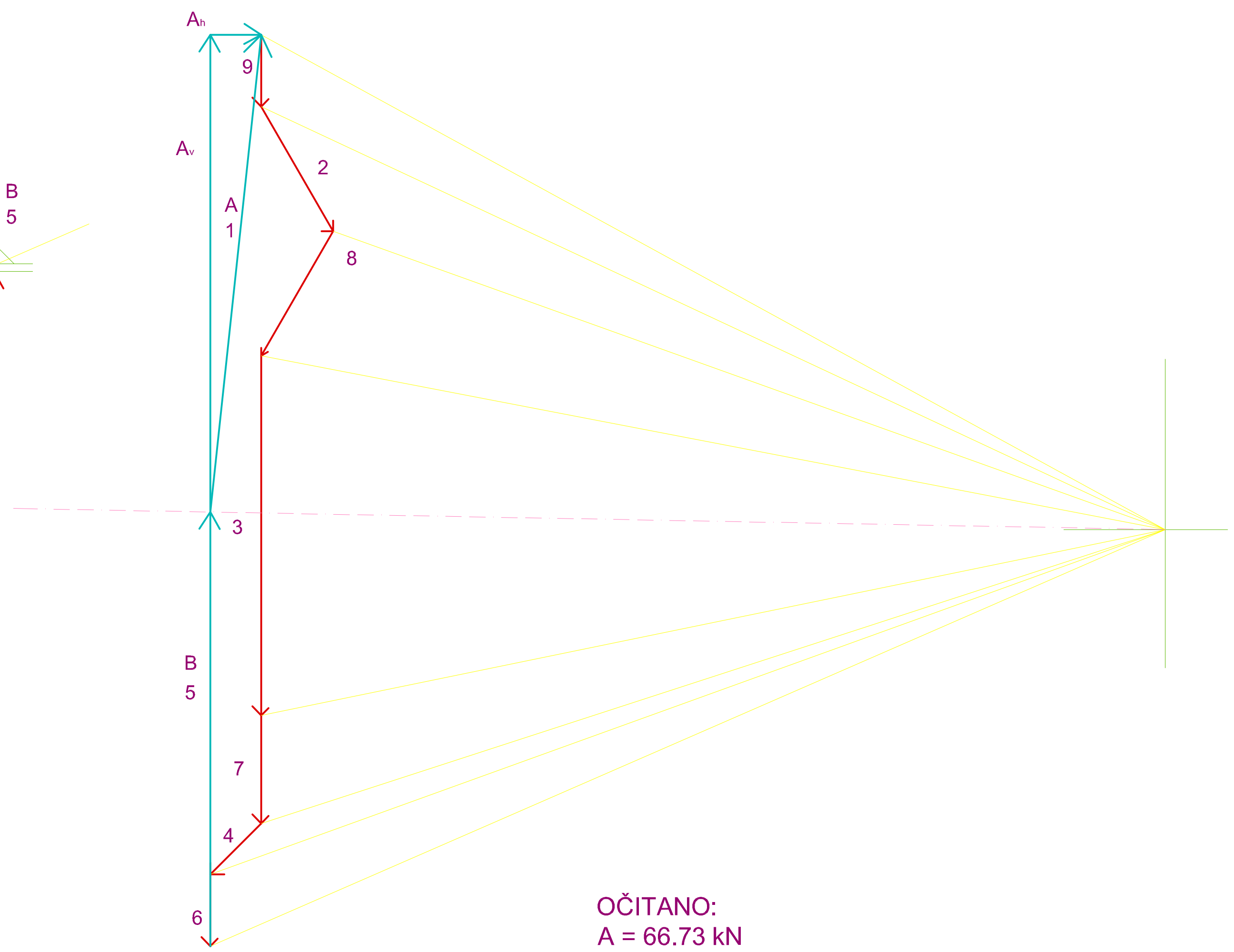
Uzmimo da su dane sile koje djeluju A do F i sada trebamo naći sile u štapovima, tako da između danih sila vlada ravnoteža. Tada uzmemo na primjer silu u štapu 2 (MN') slika br. 4., dodamo je sili B i rastavimo rezultirajuću silu prema smjerovima štapova 3 i 7'. Nakon toga spojimo 3 sa C i rastavimo prema smjerovima 4 i 8'. Na isti način dobijemo iz 4 i D sile 5 i 9' i iz 5 i E sile 6 i 7'. Sada dolazimo do proturječnosti, zato što su oba načina dovela do različitih sila 7'. Tako mijenjamo početnu silu 2 (MN'') i ponovimo isti postupak; čime dobijemo opet dvije različite sile 7''. Sada sile 7' i 7'' leže na odgovarajućim smjerovima, a kako su omeđene ravnim linijama mijenjaju se linearno. Spoje li se nađene točke J i K ravnom linijom, dobivamo pravu silu 7. Određivanje je ostalih sila dalje jednostavno (određivanje ostalih sila je pokazano na slici br. 4.). Rješavanje tog zadatka je neodređeno kada dužina JK na slici br. 4 pada u isti pravac kao i sila 5. Tada mogu sile u štapovima na mnogo načina držati ravnotežu sa silama koje djeluju na sustav. Koji je od tih načina točan može se samo odrediti ako se u obzir uzme elastična promjena oblika. Ako se dužina JK proteže tako da je paralelna sa silom 5 nema zadovoljavajućeg rješenja za taj zadatak. U tom slučaju građevina više nije geometrijski nepromjenjiva, nego se ponaša kao deformabilno tijelo, te može vanjske sile preuzeti tek kada se malo deformira. Taj posebni slučaj se može prepoznati pomoću čvorova koji se nalaze na presjeku stošca. Do toga slučaja dolazi kada se obje sile 7 kod promjene sile 2 isto promjene ili, što je isto, kada izostavimo sile B, C, D, E iz sile $P_2$ dobijemo iste dvije sile $P_7$. U tom se slučaju može dokazati, da sjecišta linijskih parova 2,8; 7,4; 6,9 moraju ležati na pravcu. Tada ta linija nije ništa drugo nego li Pascalov pravac šesterokuta koji je upisan u presjek stošca. Brže je odrediti taj rezultat pomoću kinematičkih razmatranja. Promatraju li se štapovi 1, 2, 3, 8 kao trapez i fiksira li se štap 1, tada se kod neprimjetno male promjene oblika štap 3 okreće oko sjecišta 2 i 8; vrh B se kreće okomito na smjer štapa 2, a vrh C se kreće okomito na smjer štapa 8. Sjecište štapova 2 i 8 tada tvori privremeni pol okretanja štapa 3. Promatraju li se štapovi 3, 4, 5, 7 kao trapez tada se štap 5, ako fiksiramo štap 3, vrti oko sjecišta štapova 4 i 7. Ujedine li se ta dva gibanja tada se štap 5 u odnosu na štap 1 vrti oko jedne točke koja leži na pravcu (2, 8), (4, 7), (6, 9). Štapovi 1 i 5 su međusobno povezani štapovima 6 i 9; slobodni pomaci se mogu ostvariti samo ako točke (2, 8), (4, 7), (6, 9) leže na pravcu. Iz tih se opažanja može zaključiti da postoje građevine koje posjeduju potreban broj štapova, a nisu nepomične već mogu imati određeni pomak. Takve se građevine ne mogu upotrebljavati u praksi. Sada slijede dva primjera rješavanja ravninskih sustava pomoću Cremonina plana sila.

# PRIMJER 1
## Cremonin plan sila u ravnini



PLAN SILA




OČITANO:
A = 66.73 kN
B = 60.36 kN
$A_h$ = 7.07 kN
$A_v$ = 66.35 kN

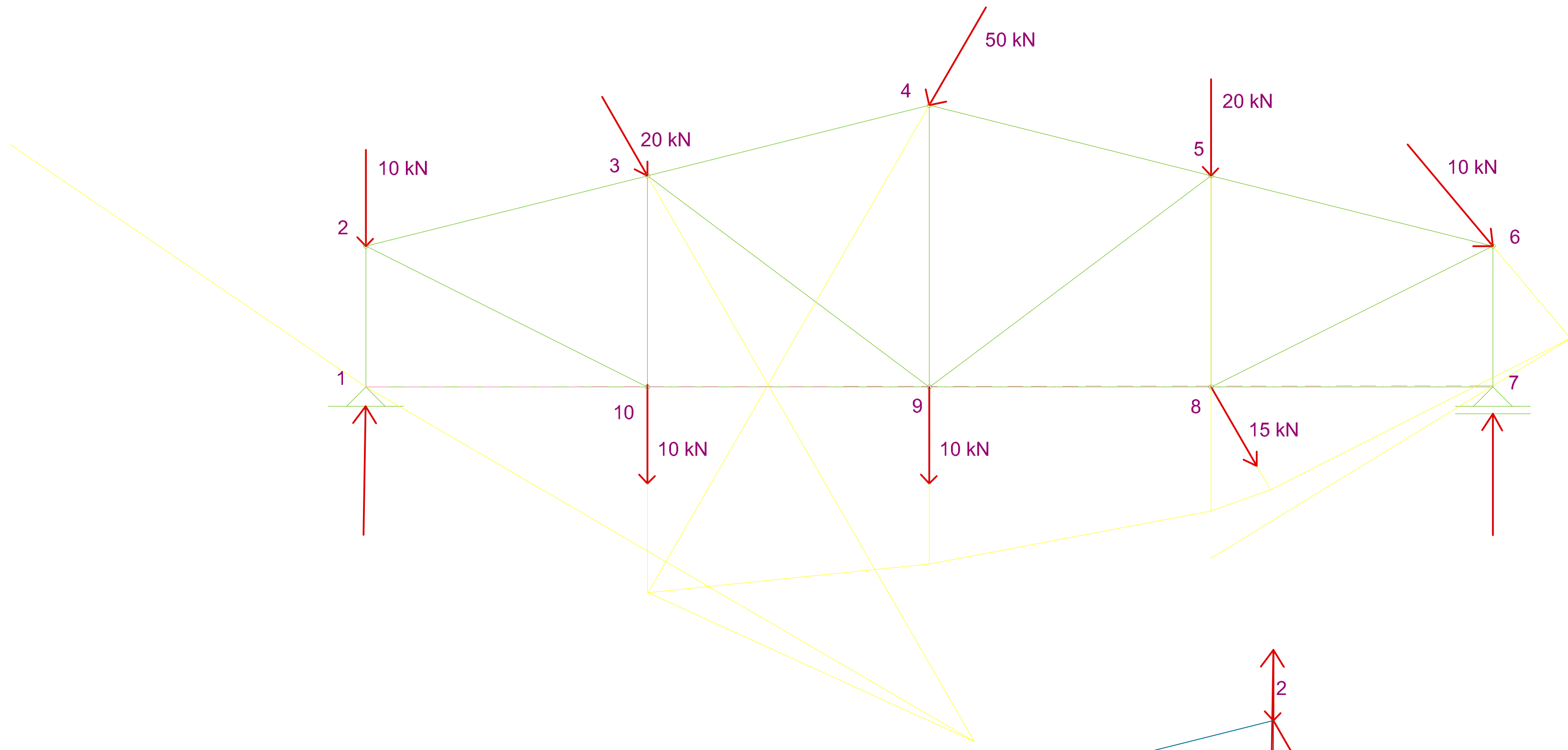
OČITANO:

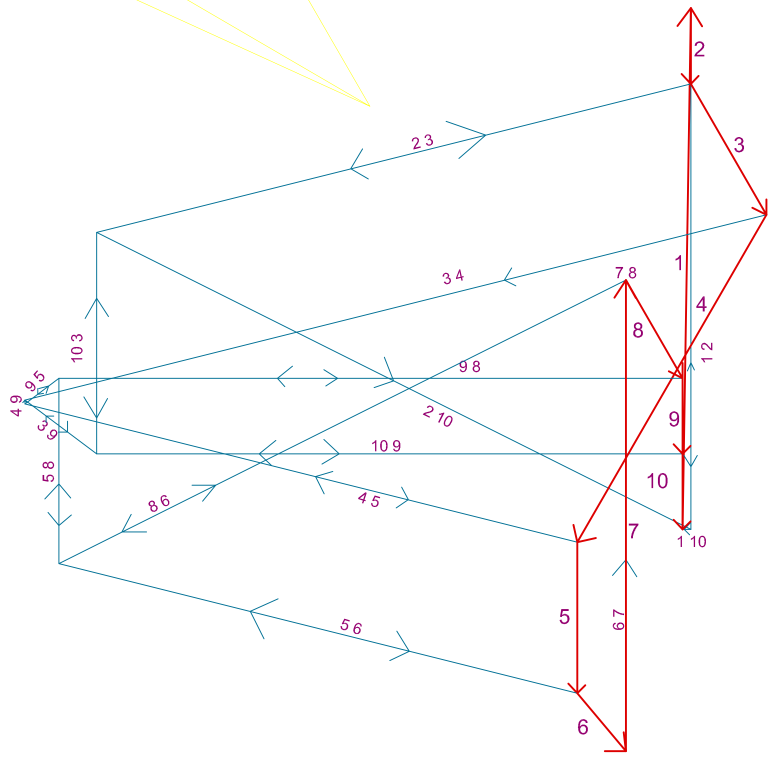
| štapovi | | sile |
|---|---|---|
| 1-2 | = | - 148.37 kN |
| 1-9 | = | +125.64 kN |
| 2-3 | = | - 131.16 kN |
| 2-9 | = | + 13.17 kN |
| 2-8 | = | - 25.85 kN |
| 3-4 | = | - 122.34 kN |
| 3-7 | = | + 33.03 kN |
| 3-8 | = | + 46.18 kN |
| 4-5 | = | - 134.97 kN |
| 4-6 | = | + 13.17 kN |
| 4-7 | = | - 15.05 kN |
| 5-6 | = | + 120.72 kN |
| 6-7 | = | + 112.15 kN |
| 7-8 | = | + 82.53 kN |
| 8-9 | = | + 117.06 kN |

MARKO RIHTARIĆ

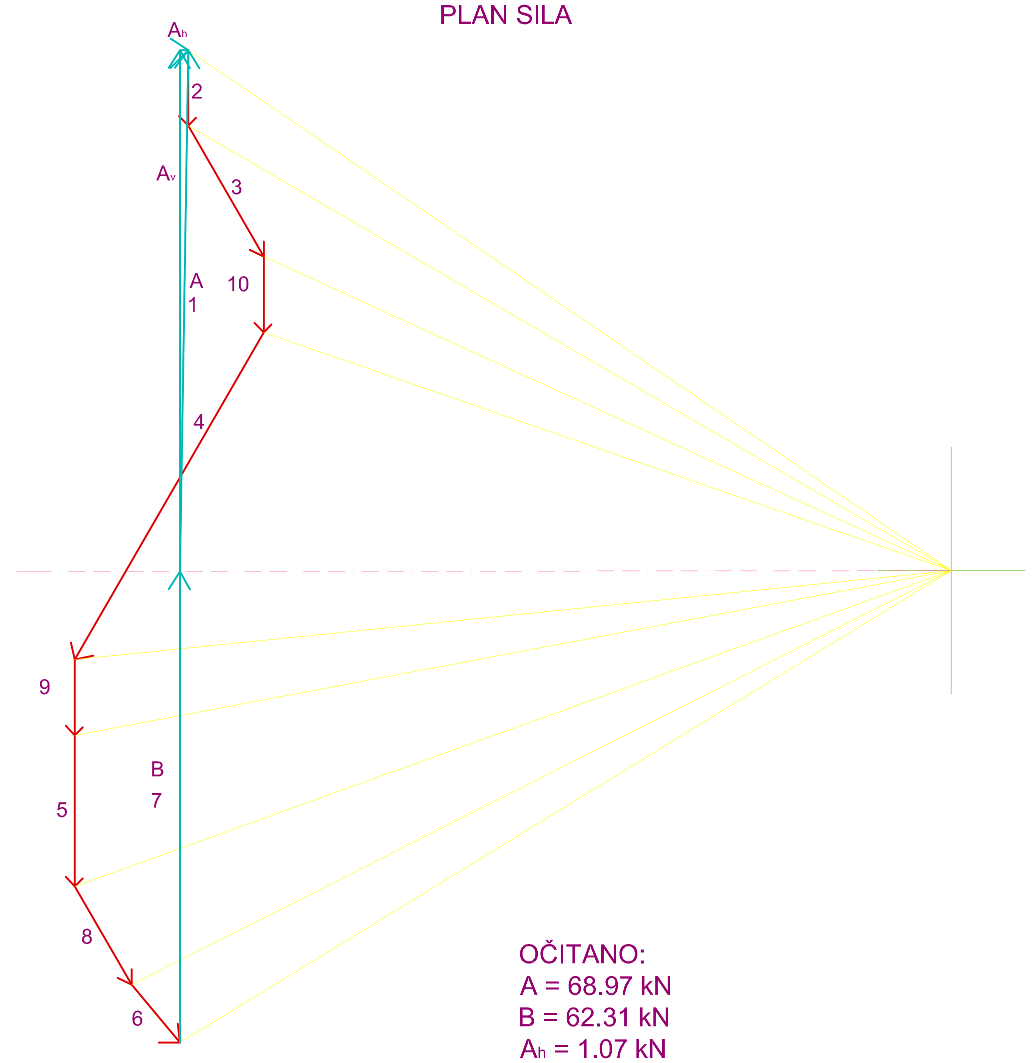
# PRIMJER 2

## Cremonin plan sila u ravnini



PLAN SILA




OČITANO:
A = 68.97 kN
B = 62.31 kN
$A_h$ = 1.07 kN
$A_v$ = 68.94 kN

OČITANO:

| štapovi | | sile |
|---|---|---|
| 1-2 | = | - 68.96 kN |
| 1-10 | = | - 1.07 kN |
| 2-3 | = | - 81.03 kN |
| 2-10 | = | + 87.89 kN |
| 3-10 | = | - 29.31 kN |
| 3-4 | = | - 101.12 kN |
| 3-9 | = | + 11.86 kN |
| 4-5 | = | - 75.35 kN |
| 4-9 | = | - 0.5 kN |
| 5-6 | = | - 70.69 kN |
| 5-9 | = | + 5.64 kN |
| 5-8 | = | - 24.52 kN |
| 6-7 | = | - 62.31 kN |
| 6-8 | = | + 83.87 kN |
| 7-8 | = | 0.00 kN |
| 8-9 | = | + 82.51 kN |
| 9-10 | = | + 77.54 kN |

10.

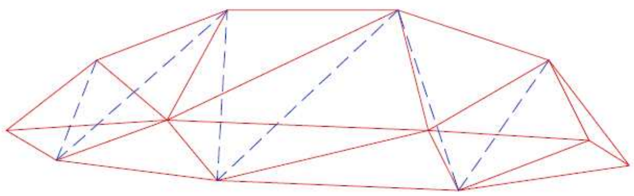
MARKO RIHTARIĆ

## 3.2. Cremonin plan sila u prostoru

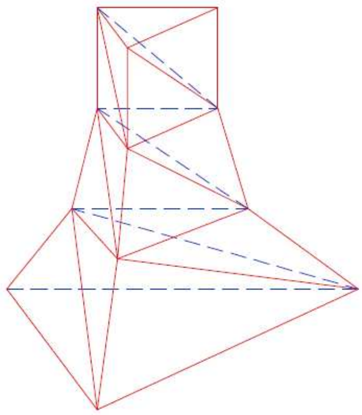
### 3.2.1. Općenita svojstva prostornih sustava

Kao što je trokut element sistema u ravnini, tako je tetraedar element sistema u prostoru, i kako nizanjem trokuta dobivamo ravninski sistem, nadodavanjem tetraedara dobivamo sistem u prostoru. Tetraedar koji je izrađen pomoću štapova ima 4 čvora i 6 štapova; svaka nova točka koju dodajemo kako bi stvorili krutu i nepomičnu tj. nedeformabilnu građevinu mora biti povezana sa 3 štapa na već postojeće štapove; tako dobijemo 5 čvorova i 9 štapova, 6 čvorova i 12 štapova itd. Iz toga proizlazi formula $s = 3k - 6$ kod koje je k broj točaka (čvorova), a s broj štapova. Djeluju li u vrhovima trokuta koje je izgrađen od štapova sile koje se nalaze u istoj ravnini i koje su uravnotežene možemo odrediti sile u štapovima sa trokuta. Na isti način možemo odrediti sile u štapovima tetraedra ako na vrhove tetraedra djeluju sile koje su međusobno uravnotežene; jer se svaka sila koja djeluje na jedan čvor može rastaviti na smjerove tri štapa, ali samo pod uvjetom da se ti štapovi ne nalaze u istoj ravnini. Na primjer, ako trebamo silu P rastaviti na tri sile koje djeluju na pravcima a, b, c, tada se kroz P i a postavlja ravnina koja siječe ravninu postavljenu kroz b i c u pravcima a'. Tada silu P rastavimo na dvije sile koje djeluju na pravcima a i a', a nakon toga sila a' na sile na pravcima b i c. Okrenemo li smjer djelovanja tako određenih sila, tada su te sile uravnotežene. Ako se na taj način napravi sistem u prostoru i ako na čvorove toga sistema djeluju sile koje su međusobno uravnotežene, unutarnje sile tada možemo odrediti tako da idemo od točke do točke i uspostavljamo ravnotežu između unutarnjih i vanjskih sila koje djeluju u toj točki. Taj način je sličan Cremoninu načinu proračuna sistema u ravnini. Ako možemo napraviti presjek sistema u prostoru koji ne siječe više od 6 štapova, tada možemo odrediti sile u štapovima tako da se vanjske sile izvan tog presjeka zbroje i njihova se rezultanta podijeli na smjerove štapova u presjeku. Taj zadatak se može riješiti samo ako najviše 3 od 6 štapova ne prolaze kroz jednu točku i ne leže tj. ne nalaze se u istoj ravnini. Slika 5. i 6. su crteži sistema koji su nastali nadodavanjem tetraedara i kroz cijelu svoju dužinu imaju presjeke koji sijeku samo 6 štapova.

Slika 5.

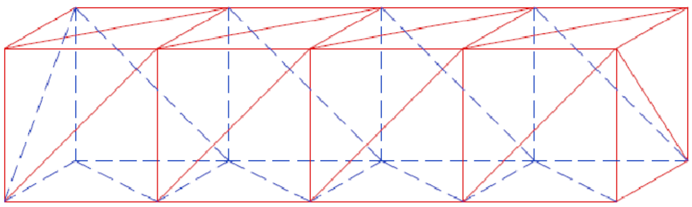


Slika 6.

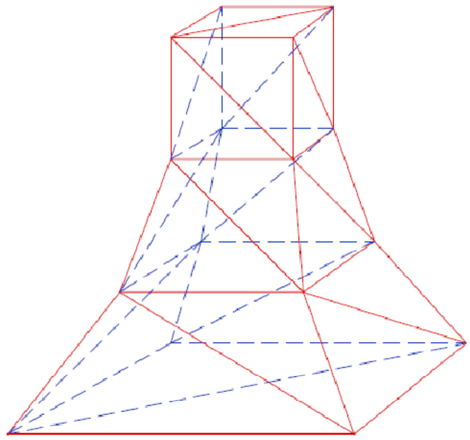


Svaki sistem ima 12 čvorova i 30 štapova te je uvjet $s = 3k - 6$ ispunjen. Dok kod uobičajenih sistema u ravnini postoje dvije pojasnice između kojih se nalazi neprekinut niz ukruta, kod uobičajenih sistema u prostoru postoje 3 pojasnice i 3 niza ukruta koje povezuju čvorove pojasnica. Nažalost takvi se jednostavni prostorni sistemi rijetko nalaze u praksi. Štoviše većina ih je, iz praktičnih razloga, drugačije oblikovana. Broj pojasnica u pravilu iznosi 4 ili više, i nizanje štapova iznimno dopušta dijeljenje u tetraedre. Dva su primjera slika 7. i 8.

Slika 7.



Slika 8.

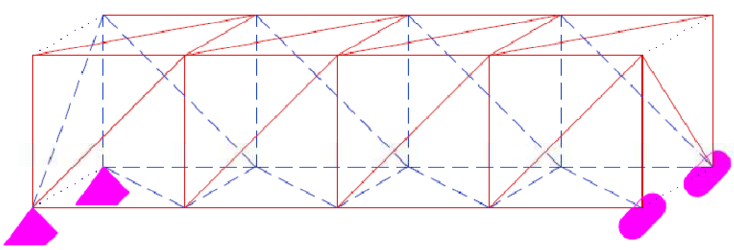


U slici 7. postoji 20 čvorova i 54 štapova, a u slici 8 postoji 16 čvorova i 42 štapa. U oba je primjera po tome uvijet $s = 3k - 6$ ispunjen. Presjeci u oba sustava sijeku najmanje 8 štapova. U tom se slučaju sile u štapovima ne mogu odrediti metodom presjeka kao prije sa 6 štapova, k tome ne uzimajući u obzir da je rastavljanje jedne sile u 6 sila, koje je ovdje potrebno, previše posla. Većinom kod sistema u prostoru ne preostaje ništa drugo, već pomoću Cremonina načina, ići od točke do točke i kod svake uspostaviti ravnotežu između unutrašnjih i vanjskih sila. I taj način rješavanja isto ima prepreke. Možemo naići na čvorove iz kojih djeluju više od 3 nepoznate sile. Ako se samo jedna sila nalazi u ravnini tada ju možemo odrediti, ako to nije slučaj možemo upotrijebiti simetriju, ako niti taj način ne pomaže tada moramo pretpostaviti jednu silu u štapu i ako se pojave odstupanja moramo promijeniti našu pretpostavku o sili. Proračunavanje statike prostornog sustava bilo je i ostat će težak zadatak. Kako način presjeka ne možemo ovdje koristiti, tako se ne smije ni izvoditi sve opće zakone u vezi opterećenja. Jedini način na koji se to može riješiti je tako da opteretimo različita čvorove i da vidimo kako to opterećenje djeluje na štapove. Srećom su ti odnosi tako jednostavni da se može pronaći odgovor samo ako se malo bolje promisli. Kod svih tih promatranja se podrazumijeva da je sustav statički određen i da se štapovi podudaraju s osima materijalnih štapova. U praksi se nailazi na sustave s više ukruta nego li je potrebno za statičke proračune. Samo ako se radi o glavnim ukrutama i njima suprotnim glavnim ukrutama koje se, ovisno o opterećenju međusobno zamjenjuju tada statička određenost nije narušena. Poraste li broj štapova na kojih djeluje sila istovremeno preko potrebnog broja za određivanje silu u štapovima, tada sile u štapovima možemo odrediti samo ako u obzir uzmemo elastičnu promjenu oblika. U suprotnom se moramo okoristiti zakonom virtualnog rada. A isto si možemo pomoći ako uzmemo u obzir promjenu oblika zasebnih grupa štapova. Drugi preduvjet je da se sile u štapovima poravnavaju s osima štapova, taj se preduvjet može samo ostvariti ako u čvorove ugradimo univerzalne zglobove što nikad nije izvedivo u praksi. Zato je obavezno da za sisteme u prostoru odredimo dodatna opterećenja koja proizlaze iz nepomičnih čvorova kako je rečeno za sustave u ravnini. Taj zadatak nije nerješiv ali je jako težak i oduzima puno vremena.

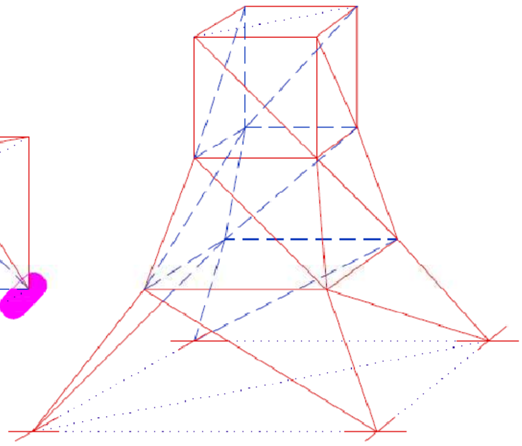
### 3.2.2. Slaganje prostornih sustava

Sustav u prostoru je geometrijski nepromjenjiv kada je 6 njegovih čvorova povezano za ležajeve, tako da se u ravnini pomičnih ležaja mogu kretati bez otpora u svim smjerovima, a ne mogu napustiti taj položaj. Na primjer to si možemo zamisliti kao stolac na čije su noge pričvršćene pomične kugle koje se pomiču u suprotnim smjerovima. Reaktivni je pritisak time prisiljen uvijek djelovati okomito, a kako se sistem sila u prostoru može prevesti u 6 sila koje leže u 6 ravnina, tako je dovoljno samo 6 pomičnih ležajeva da podupre taj sistem kod bilo kakvog opterećenja. Samo se moramo pobrinuti da najviše 3 reaktivne sile prolaze kroz jednu točku i da najviše 3 leže u istoj ravnini. Ako taj sistem ima više od 6 pomičnih ležajeva tada je statički neodređen, ali se može uz određene uvijte statički odrediti tako da odstranimo određene štapove. Uvjet za statičku određenost sistema $s = 3k - a$ kod kojeg je k broj štapova, a a broj ležajeva. U praksi nikad nemamo samo jedan pomični ležaj već 3 ili 4 koji su spojeni. Spojimo li dva ležaja u jedan tada se taj čvor treba kretati po pravcu; pritisak koji taj sustav vrši u toj točki na taj ležaj mora ležati okomito na tu liniju, iako može biti usmjeren po volji. U praksi je za to dvostruko ležište dovoljna jedna kugla. Ujedinjenjem 3 ležišta koja se sijeku dobivamo točku koja se ne može pomaknuti ni u kojem smjeru, koja može podnijeti taj pritisak ili opterećenja iz svih smjerova. Time postaje jasno da sustav u prostoru može biti postavljen na različite načine, ali moramo paziti jer jednostruka, dvostruka i trostruka postolja, ne možemo nasumično odabrati. Isto kao što kod sustava u ravnini s jednim nepomičnim i pomičnim ležajem, okomica pomičnog ležaja ne smije prolaziti kroz točku nepomičnog ležaja, tako i kod sustava u prostoru okomica jednog ležaja ne smije prolaziti kroz čvrsti čvor (trostrukog ležaja). Jako malo je vjerojatno: da će postojati jednostruka i dvostruka ležišta kada normala jednostrukog prolazi kroz čvor dvostrukog i kada je okomito na ravninu dvostrukog ležišta; dva dvostruka ležišta kada se njihove ravnine na koje djeluje pritisak poklapaju; dvostruki i trostruki ležaj kada ravnina prve sadrži čvorište druge; dva trostruka ležaja i konačno jedan jednostruk ležaj, jedan dupli i jedan trostruki ležaj kod kojih normala ravnine prvo siječe liniju koja spaja čvorišta drugih ležaja. U svim tim navedenim slučajevima više od 3 reaktivne sile djeluju u jednoj ravnini ili više od 3 prolaza kroz jednu točku što je nedopušteno ako sistem treba izdržati nasumična opterećenja. Samo kad sistem posjeduje manje štapova nego li $3k - 6$ čim je potrebno više od 6 ležajeva mogu se dozvoliti iznimke pod određenim uvjetima. Kod sistema u prostoru u kojima se pojavljuje jednostruki, dvostruki i trostruki ležaj, ako izuzmemo gore navedeni i nedopušteni sustav ta postolja mogu izdržati sva moguća opterećenja. Čvor A je vezan za jednostavan ležaj, B za dvostruki, a C za trostruki ležaj. Nazovimo li okomicu na prvo postolje α, nazovimo li ravninu drugog  postolja β, 3 sile koje tražimo A, B, C i vanjsku silu P koju ćemo podijeliti u 3 zasebne sile. Tada kroz C povlačimo ravninu koja siječe silu P i α i odredimo probodište B' sa ravninom β. Tada je BB' smjer reakcije sile B; jer dužina (paralela) CB' siječe sve 4 sile, kako i mora biti, kako bi se međusobno držale u ravnoteži. Tada projiciramo točku C i sile P i B na normalu ravnine okomito na ravninu α. Zatim projekcije sila moraju imati isti statički moment kao i projekcije sila C; iz toga možemo odrediti veličinu sile B. Projiciranjem na normalu ravnine okomitu na B i B' na isti način dođemo do sile A. Napokon je sila C poligona određena tako da je suma te tri sile A, B, C jednaka sili P. Ta, sveopća metoda se rijetko primjenjuje zato što je položaj točaka na ležištu i sile opterećenja tako jednostavan da se gravitacijske sile mogu odrediti kratkim promišljanjem. Na upravo opisan način možemo napraviti trostrani postavljen stup.

Slika 9.



Slika 10.



Većinu ležajeva sistema u prostoru odstupaju od toga načina. Čelični sistemi, kao sistemi u prostoru, imaju u pravilu dva čvrsta i dva pokretna postolja, dakle strogo gledano 10 ležajeva. Dakle imamo 4 ležajeva previše koje možemo odstraniti ili možemo odstraniti 4 štapa, a da sistem ostane stabilan. Na primjer slika 9. ima 20 čvorova, 50 štapova i 10 ležajeva, čime je sistem statički određen. Usporedba sa slikom 7. pokazuje da su 4 zadnja poprečna štapa izostavljena. Znamo da se sile u štapovima kod proizvoljnog vanjskog opterećenja mogu odrediti. Na slici 10. je četvrtasti stup koji naspram slici 8. ima manje štapova ali zato 4 nepomična ležaja. Ovdje je s = 36, k = 16, a = 12, dakle uvjet je ispunjen $s = 3k - a$. Na taj način možemo postaviti petero ili višestrane stupove ii poligonalne kupole. Kupolasti sistem na slici 6 posjeduje 40 čvorova, 96 stupova i 8 ležajnih čvorova, dakle 24 pokretna ležaja; uvjet $s + a = 3k$ je time ispunjen.

# 4. Plan sila kupole

Kako bi se pokazao način određivanja unutarnjih sila kod složenijih, ali statički određenih prostornih sustava izrađen je primjer plana sile čelične kupole promjera 10 m (slika 6.). Postupak se temelji na metodama inženjera A. Foeppla koje su objavljene u švicarskim novinama za građevinare 1883.-1885. Na slici 6. prikazana je kupola sa 8 rebara i 3 kata plus svjetionik. Ta kupola ima 40 čvorova, 96 štapa i 24 ležajeva; time je uvjet $s = 3 \cdot k - x$ ispunjen. Pretpostavimo da svako polje ima dvije ukrižene dijagonale, ali brojimo samo one u kojima djeluje vlak. Najbolje je odijeliti opterećenja i pozabaviti se svakim zasebno. Tako svaki od tih prstena kupole predstavlja pravilni poligon, pa je rješavanje vertikalnog opterećenja vrlo jednostavno. Napetost u jednom prstenu je konstantna i dvije sile u prstenu koje se susreću prelaze u horizontalnu rezultantu koja prolazi kroz os kupole. Iz toga slijedi da sve sile koje djeluju na jedno rebro leže u istoj vertikalnih ravnini. Ako znamo opterećenja koja djeluju na čvorove tada možemo pomoću jednostavnog djelovanja sila doći do cilja.

### 4.1. Vlastita težina

Vlastita težina koja djeluje na čvor je kod kupolaste površine proporcionalna visini. Visina prvog kata iznosi 2,2 m, drugog 1,75 m, tada na donji prsten (13-16) površine $(\pi \cdot 10)\frac{2,2+1,75}{2} = 62,1m^2$, $\frac{1}{8} \cdot 62,1 \cdot 120 = 931\ kg$. Na sličan način su opterećenja čvorišta ostalih prstena izračunata u slici 3. dodane poligonu sila 4, 8, 12, 16. Kada smo rebra 4-20 zaokrenuli za $22,5°$ na slici 1. mogli smo započeti s rastavljanjem sila. U štapu 4-8 djeluje teret 4. Taj se teret pribraja sa teretu 8 i njihova se rezultanta rastavlja u dvije sile, jedna paralelna sa štapom 8 12, a druga je samo horizontalna. Sila paralelna sa štapom 8 12 se zbraja sa silom 12, a njihova se suma rastavlja u dvije sile, jedna paralelna sa 12 16, a druga sa 12 11. Tada spojimo silu 12 16 sa silom 16 te se njihova suma dijeli na vodoravnu i paralelnu silu 16 20. Kako bismo dobili sile koje djeluju na rebrima moramo povući paralele kroz točke poligona sila ka određenim stupovima. Zatim na tlocrtu štapove 19 20 i 20 20' zaokrenemo za $22,5°$ u iscrtkani položaj i horizontalne sile na slici 3. rastavljamo na dva dobivena smjera. Time su sile koje djeluju na štapovima prstena određene. Svi rezultati su na slici 2.; + znači vlak, a – znači tlak.

### 4.2. Opterećenje snijegom

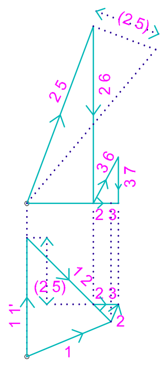
Na sličan način rješavamo problem snijega. Ali moramo tim proračunima tereta u čvorovima priložiti horizontalne projekcije odgovarajuće površine. Iz slike 2. iščitavamo radijuse prstena $r_1 = 1{,}0\ m$, $r_2 = 3{,}06\ m$, $r_3 = 4{,}49\ m$, $r_4 = 5{,}0\ m$; iz tog slijede radijusi krugova $r_1 = 1{,}0\ m$, $r_2 = 2{,}03\ m$, $r_3 = 3{,}775\ m$, $r_4 = 4{,}745\ m$, nadalje osnovne površine $3{,}1\ m^2$, $12{,}9\ m^2$, $44{,}8\ m^2$, $70{,}8\ m^2$. Razlike tih površina podijelimo sa 8 i pomnožimo sa 80 kg, daju sile 31 kg, 98 kg, 319 kg i 260kg. One tvore poligon sila na slici 4.. Određivanje sile u štapovima je isti kao i kod vlastite težine. Rezultati su upisani lijevo u tlocrt kupole. Na prsten 5-8 kod vlastite težine i kod težine snijega djeluje tlak, na prsten 13-16 pod istim uvjetima djeluje vlak, dok na srednji prsten 9-12 kod vlastite težine djeluje vlak, a kod snijega djeluje tlak.

### 4.3. Pritisak vjetra

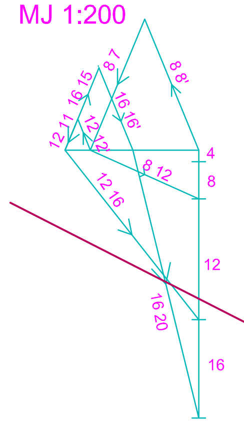
Utjecaj vjetra je puno teže izračunati. Kako bi prvo odredili sile koje djeluju, za svako smo čvorište, koje je relevantno, izmjerili površinu na koju djeluje vjetar. Na primjer točka 9 ima površinu 1,35 m visine i 2,16 m širine. Pritisak vjetra kod normalnog djelovanja izračunamo tako $150 \cdot 1{,}35 \cdot 2{,}16 = 437\ kg$. Tu silu moramo podijeliti normalno i tangencijalno naspram površine kupole. U tu smo svrhu na tlocrtu polumjer M9 premjestili u horizontalnu ravninu pa smo dobili M$9^{*}$, iz točke $9^{*}$ se nanosi sila horizontalno, njezin smjer je određen smjerom $M9^{*}$. Okomitom linijom kroz 9' smo odredili početak sile 9 u tlocrtu i nacrtu. Na isti način određujemo sile 10, 13, 14. Isto tako odredimo sile 1, 2, 5, 6; samo ovdje nismo morali premještati (prevaljivati) radijus. <u>Sada slijedi konstrukcija sile u štapovima.</u> Zbog simetrije se možemo koncentrirati samo na polovicu tlocrta; dijagonale vertikalne ravnine okomitih polja (1 5', 5 9') su rasterećene. Počnemo sa najvišom etažom, svjetionikom (slika 5.). Prvo sile koje djeluju, sila 1 i sila 2 se zbrajaju u tlocrtu i nacrtu i tada silu 1 rastavljamo na silu 1 1' i 1 2. Tu je dovoljan samo tlocrt. Sada spojimo silu 1 2 sa silom 2 i njihovu rezultantu rastavljamo na sile 2 5, 2 6, 2 3, k tome smo u tlocrtu odredili gdje se sile 2 5 i 2 6 preklapaju, najprije sila 2 3, nakon toga u nacrtu dvije ostale sile. Konačno smo silu 2 3 u nacrtu rastavili na sile 3 6 i 3 7. Štap 1 5 i štapovi desno od štapa 3 7 ostaju neopterećeni. Slika 6 prikazuje plan sila za treći kat. Mjerilo sila je ovdje upolo manje. Prvo smo nanijeli silu 5 u tlocrt i nacrt, nakon toga smo nanijeli silu koja djeluje iz gornje etaže, a to je sila 2 5 koja je označena sa (5), tada smo nanijeli silu 6 i na kraju rezultantu od 2 6 i 3 6 kao i silu 3 7 označili kao (6) i (7). Sile (5), (6) i (7) su preuzete sa slike 5, ali zbog promijenjenog mjerila sila nanijeli smo samo pola veličine. Kod sljedećeg se rastavljanja moralo riješiti pitanje koja je od dijagonala druge zone vlačno opterećena. Nakon nekoliko pokušaja došlo se je do zaključka da su štapovi 5 10, 7 10 i 8 11 vlačno opterećeni. Zbog toga je rastavljanje moralo početi u točki 6, gdje se sudaraju samo 3 nepoznate sile u štapovima. Rezultantu sila 6 i (6) smo prvo u nacrtu podijelili u horizontalnu i paralelnu silu sa silom 6 10. Time se pomoću prenašanje iz nacrta u tlocrt dobila sila 6 10 u tlocrtu i tada se mogla ta sila rastaviti na 6 5 i 6 7. Tri nove sile smo složili jedna do druge u tlocrtu i nacrtu redoslijedom 6 5, 6 10, 6 7. Prelazeći na točku broj 5 zbrojili smo sile 5, (5) i 6 5 i njihovu sumu podijelili na 5 9 i 5 10 na nacrtu. Time smo te dvije sile odredili i na tlocrtu, ali silu 5 10 zbog njene okomitosti tek smo približno odredili. Kako bismo bili sigurni koristili smo ovaj način. Na slici 1 i 2 smo odredili točku u kojoj rezultanta sila 5 i (5) dodiruje ravninu prstena 9-12, kroz tu smo točku i štap 5 5' postavili pomoćnu ravninu koja siječe ravninu 9 5 10. Tada smo na tloctru rezultantu rastavili na 5 5' i na presječnicu tih dviju ravnina i zadnju silu na 5 9 i 5 10. U čvoru 7 smo primijenili isti način. Kroz točku u kojoj rezultanta od 6 7 i (7) siječe ravninu prstena 9-12 i kroz štap 7 8 postavili smo jednu ravninu koja siječe ravninu 10 7 11 i rezultantu rastavili na 7 8 i na sjecište tih dviju ravnina. Drugu smo silu rastavili na sile 7 10 i 7 11 čime smo odredili tri nove sile u štapovima 7 10, 7 11, 7 8. Napokon smo rastavili silu 7 8 na sile 8 11 i 8 12. Slike 7 i 8 u kojima smo odredili sile u štapovima dvije donje zone ne trebaju daljnja objašnjenja. U prvoj, gdje su sile 9, (9), 10, (10), (11) i (12) složene jedna do druge, brojke u zagradama su sile koje djeluju iz gornje zone, preuzete sa slike 6. Tako je (9) jednaka sili u štapu 5 9, (10) rezultanta od 5 10, 6 10, 7 10, (11) rezultanta od 7 11 i 8 11 i (12) je sila 8 12. S rastavljanjem smo počeli u točki 10, zatim su slijedili čvorovi 9 i 12 i na kraju 11. Osim u zadnjoj točki nismo trebali određivati sjecište danih sila s ravninom donjeg prstena. Na slici 8 se sila (16) nije mogla jasno rastaviti zbog njene male veličine. U ostalom ta se slika ponaša kao i prethodna. Da iz projekcija nađenih sila dobijemo njihovu pravu veličinu mora se okomita visina jedne projekcije nadodati pod pravim kutom na drugu i izmjeriti hipotenuzu, kako je na slici 5 prikazano za silu 2 5.

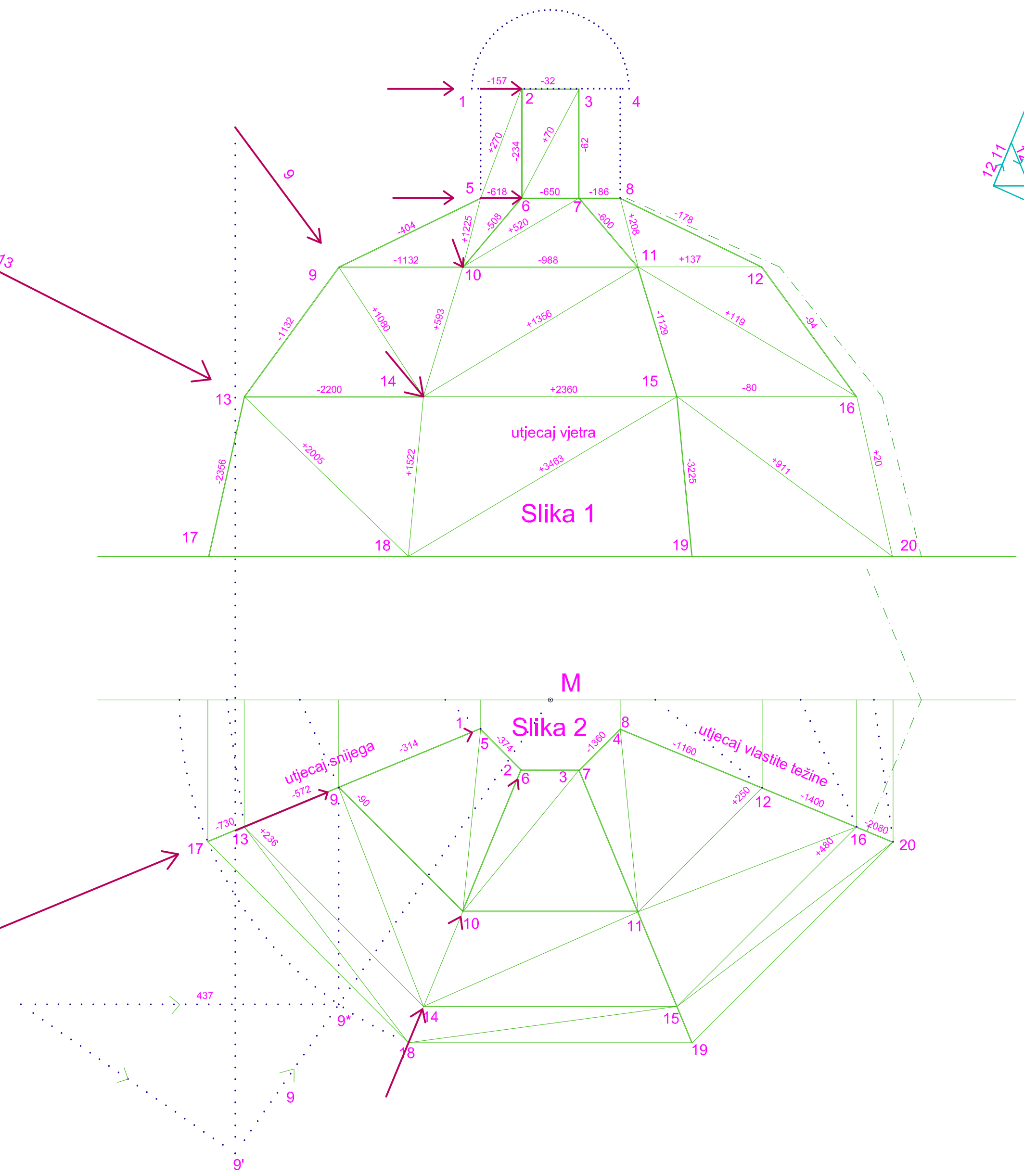
# PLAN SILA KUPOLE

Slika 5.
Utjecaj vjetra - najviša etaža
MJ 1:100

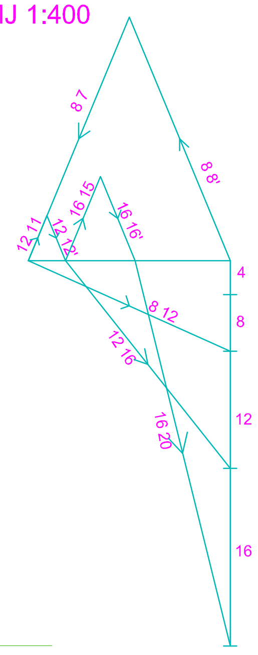


Slika 4.
Utjecaj snijega
MJ 1:200

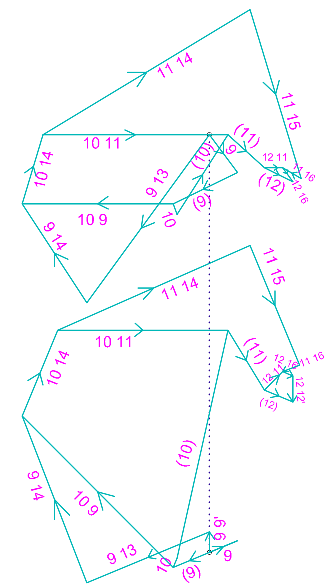




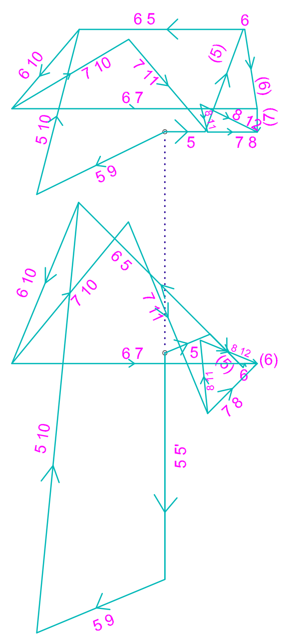

Slika 3.
Vlastita težina
MJ 1:400



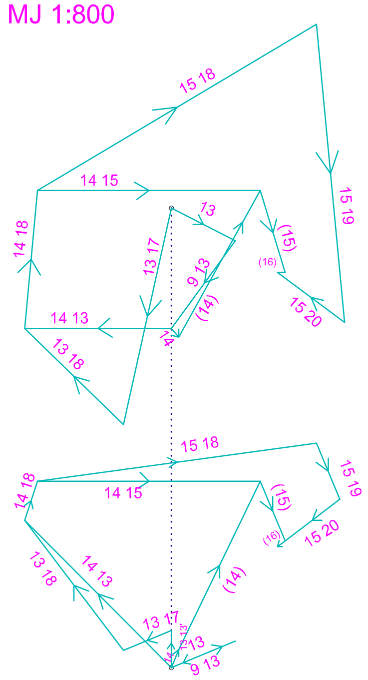
Slika 7.
Utjecaj vjetra - druga etaža
MJ 1:400



Slika 6.
Utjecaj vjetra - treća etaža
MJ 1:200



Slika 8.
Utjecaj vjetra - najniža etaža
MJ 1:800





MARKO RIHTARIĆ

## 5. Sistemi više nego dovoljno štapova

Zakoni ravnoteže kod jednostavnih nosivih sustava dopuštaju određivanje unutarnjih sila samo ako je uvjet $2k - 3$ ispunjen; kod svakog štapa viška moramo se poslužiti zakonima elastičnosti; kod n viška štapova moramo iz tih zakona izvesti n uvjeta, kako bismo mogli odrediti unutarnje sile. Kao prvo izostavi se toliki broj štapova koliko je potrebno da sistem postane statički određen. Tim izostavljanjem štapova ne smijemo destabilizirati sistem. Tada za svaki taj štap nacrtamo dijagram sila kod kojeg pretpostavimo vrijednost jedne sile i pomoću nje odredimo ostale sile. Može se dogoditi da se jedan dijagram proteže kroz sve štapove statički određenog sustava; u ostalim slučajevima će se protezati kroz dio statički određenog sustava. Sada crtamo plan sila za dana opterećenja, kod čega je nevažno da li crtamo za sve štapove sistema ili samo za izostavljene štapove (to se odnosi na određivanje sila). Jedno i drugo može imati svoje prednosti; ali se radi samo o tome, da tražimo sile u štapovima koje su sa vanjskim silama u ravnoteži. Te sile ćemo nazvati S'. Pomnožimo li sile jednog dijagrama s proizvoljnim faktorom i dodamo taj umnožak silama S', tada je ravnoteža između vanjskih i unutarnjih sila sačuvana, jer su sile jednog dijagrama međusobno u ravnoteži. Isto tako možemo sile ostalih dijagrama pomnožiti s proizvoljnim faktorom i dodati ih silama S'. Ako sile različitih dijagrama označimo sa K', K'', K'''…., tada dobijemo sile u štapovima $S = S' + \propto' \cdot K' + \alpha'' \cdot K'' + \alpha''' \cdot K''' + \ldots$, koje su s vanjskim silama u ravnoteži. Faktori $\propto', \propto'', \propto'''\ldots$ su dobiveni pomoću virtualnog rada za svaki dijagram. Upotrebljavamo jednadžbu $\sum(K \cdot \Delta S) = \sum\left(\frac{K \cdot S \cdot s}{F \cdot E}\right) = 0$. Pomoću toga dobijemo toliko jednadžbi koliko imamo viška štapova. Jednadžbe omogućuju određivanje vrijednosti neodređenih faktora $\propto$. Ako smo to napravili, tada možemo dobiti prave sile u štapovima S pomoću gore napisane jednadžbe. Slično moramo računati kada moramo uzeti u obzir nejednako zagrijavanje.

## 6. Zaključak

U ovom samo radu iznijeli primjenu Cremoninoga plana sila na ravninske i prostorne sustave. Moglo se jasno vidjeti da se pomoću Cremoninog plana sila razmjerno jednostavno dolazi do rješenja sustava. Može se vidjeti da je primjena Cremoninog plana sila puno jednostavnija na ravninskim sustavima nego na prostornim sustavima. Jedina prednost Cremoninog plana sila je ta što se sile nanose samo jedanput tj. crtamo ih samo jednom.

## 7. Literatura

[1] W. Ritter, C. Culmann: Anwendungen der graphischen Statik, Verlag von Albert Raustein, Zürich, 1890.