

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Građevinski fakultet

Završni rad

PROŠIRENA METODA GUSTOĆA SILA

Romana Vrančić

Mentor: **prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.**

Zagreb, 2013.

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. Razvoj vlačnih konstrukcija od užadi	2
3. Obilježja konstrukcija od užadi	6
3.1. Svojstva užadi	6
3.2. Vrste kabela i njihova svojstva	6
3.3. Načini povezivanja kabela	7
3.4. Mreže užadi	11
3.5. Geometrijska nelinearnost	13
3.5.1 Metoda prijelazne matrice krutosti (Transient stiffnes method).....	15
4. Traženje oblika konstrukcija od užadi (Form finding)	17
4.1. Ravnoteža čvorova	18
4.2. Tvorba sustava simultanih jednadžbi	19
4.3. Kvazilaplaceovo pravilo	20
4.4. Pravilo gustoća sila	21
4.4.1 Matrična formulacije linearne metode gustoća sila	22
4.4.2 Analogija s metodom pomaka.....	26
4.5. Poopćena geodetska mreža	27
4.6. Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi	29
5. Iteracijska proširenja metode gustoća sila.....	32
5.1. Uvođenje kinematičkih ograničenja.....	33
5.2. Primjeri mreža s rubnim kabelima.....	34
6. Aproksimacija membrane mrežom užadi	44
6.1. Minimalna ploha	44
6.2. Primjeri	46
6.2.1. Prva mreža - mreža s kabelima čije su tlocrtne projekcije približno paralelne s tlocrtnim rubovima područja	46
6.2.2. Druga mreža-mreža s dijagonalnim kabelima:	50
6.2.3. Analiza rezultata	53
7. ZAKLJUČAK	56
8. Literatura.....	57

1. UVOD

Vlačne konstrukcije su svojom sposobnošću da premoste velike raspone uz istovremenu eleganciju i konstruktivnu učinkovitost oduvijek intrigirale građevinare i arhitekate.

Još u vrijeme antike, graditelji su prepoznali krivulje kao najbolja rješenja za svoje konstrukcije, preferirajući ih pred ravnim linijama koje su se u mnogim situacijama pokazale kao nedovoljno dobre. Tako su, na primjer, luk i svod bili dominantni oblici u akveduktima, mostovima i crkvama čije ostatke možemo vidjeti i danas. Najznačajnija karakteristika tih konstrukcija je smanjenje momenta savijanja i u idealnom slučaju njegovo iščezavanje, odnosno, prenošenje opterećenja "čistim tlakom".

Kao suprotnost ovakvom rješenju, nameću se konstrukcije koje prenose "čisti vlak"-vlačne konstrukcije. Njihova glavna prednost nad tlačnim konstrukcijama je što imaju znatno manju vlastitu težinu.

Unatoč tome što su vlačne konstrukcije lijepe, zanimljive i ekonomične, izgrađeno ih je razmjerno malo. Jedan od razloga je taj što svojom mogućnošću brze i jednostavne montaže te premještanja ostavljaju dojam privremenosti. No, to im, zapravo, ne možemo pripisati kao manu, jer se kao takve lakše uklapaju u starije arhitektonske ambijente nego, recimo, neki betonski objekt.

Drugi, bitniji, razlog je taj što je njihovo projektiranje bitno drugačije i složenije od onoga uobičajnih konstrukcija. Naime, pri njihovom je proračunu nužno uvažiti geometrijsku (a često i materijalnu) nelinearnost. Kod ostalih konstrukcija oblik i okvirne dimenzije su unaprijed poznati, a projektant proračunom provjerava nosivost unaprijed odabranih elemenata. Uloga arhitekta u projektiranju ovakvih konstrukcija je "samo" oblikovanje cjelokupne konstrukcije. No, projektiranje vlačnih konstrukcija zahtijeva blisku suradnju građevinara i arhitekata zbog povezanosti oblika konstrukcije i samog opterećenja.

U ovom radu proučene su vlačne konstrukcije od užadi te metoda gustoća sila koja je bila razvijena za potrebe proračuna Olimpijskog kompleksa u Münchenu. Također, u radu je dano proširenje navedene metode, te je prikazana njezina primjena u rješavanju problema koji se javljaju kod osnovne, neproširene metode.

U literaturi se katkad navodi da se membrane mogu pojednostaviti i promatrati kao mreže užadi. Time se postupak skraćuje i pojednostavljuje zbog čega i ima dugu tradiciju u praksi. No, ovakav način aproksimacije ima određene nedostatke, te nema dovoljnu točnost. Na primjerima su prikazane dvije takve mreže te njihova usporedba s minimalnom plohom.

2. RAZVOJ VLAČNIH KONSTRUKCIJA OD UŽADI

Priroda je graditeljima oduvijek bila na raspolaganju kao nepresušni izvor primjera kako premostiti neki raspon: paukova mreža kao primjer mreže užadi, svodene špilje kao svodovi....

Većina najvećih građevina izgrađenih u prošlosti temeljila se na prenošenju opterećenja tlakom ili kasnije tlakom i savijanjem. Stabilnost ovakvih građevina temeljila se na njihovoj znatnoj vlastitoj težini i krutosti. Najpoznatije takve građevine su egipatske piramide, stupovi grčkih hramova, lukovi i kupole gotičkih katedrala i sl. Iako su ove građevine svojom monumentalnošću demonstrirale snagu svojih vlasnika, one su zahtijevale ogromne količine materijala, novaca i ljudskog rada te je za njihovu izgradnju bilo potrebno mnogo vremena. Nedostatak ovih konstrukcija je to što su zdepaste. No, primjenom metala (čelika) i (ponekad) drva tlačne su konstrukcije postale vitke, ali je njihova vitkost ipak ograničena mogućnošću izvijanja.

Za razliku od tlačnih konstrukcija, vlačne konstrukcija nemaju značajniju vlastitu težinu, te su fleksibilne. Mogućnost prenošenja opterećenja kod vlačnih elemenata (užadi i tkanine) ovisi o njihovoj duljini, poprečnom presjeku te o karakteristikama materijala od kojih su izrađeni. Uz to, poznato je da je iskoristivost materijala najveća ako je podvrgnut vlačnom naprezanju.

U ovom radu razmatrane su vlačne konstrukcije od užadi. Početak primjene užadi kao konstrukcijskih elemenata seže daleko u prošlost, kada su nomadska plemena izrađivala svoje šatore od užadi učvršćene o središnji stup te sidrene u tlo, a kasnije prekrivene životinjskom kožom. Njima su ovakve konstrukcije bile najidealnije zbog njihove male težine, pa su samim time bile najpogodnije za njihov nomadski način života [1].

Prvi "viseći mostovi" javili su se kada se čovjek suočio s problemom prelaska preko neke prepreke. Ti su mostovi bili načinjeni od dva užeta između kojih bi bile postavljene daske, te eventualno dva dodatna užeta kao zaštitna ograda. U Kini su se gradili mostovi od užadi načinjene od bambusa, koji su zahvaljujući redovitom održavanju, trajali i nekoliko stoljeća [2]. Također, prvi viseći mostovi od lanaca načinjenih od kovanog željeza podrijetlom su iz Kine. I danas su kabeli i užad zaslužni za premošćivanje najvećih raspona mostova. Zanimljiva je činjenica da se među deset najduljih mostova s jednim rasponom nije našao niti jedan koji nije viseći [3]. Najveći od njih, Akashi Kaikyo, premošćuje raspon od čak 1991 m. Ukupna duljina njegovih kabela je oko 300,000 kilometara, što je dovoljno da se 7 puta omotaju oko Zemlje (!).[4]



Slika 1 Most Akashi Kaikyo

Jedna od najznačajnijih osoba za razvoj vlačnih konstrukcija namijenjenih natkrivanju prostora je Frei Otto, utemeljitelj Instituta za lagane konstrukcije Sveučilišta u Stuttgartu, na čijem je čelu bio sve do mirovine. Značajan je zbog uvođenja fizikalnog modela u proces određivanja ravnotežnog stanja, odnosno u postupak pronalaženja oblika. Njegova najpoznatija i najznačajnija djela su krov Njemačkog paviljona izloženog 1967. u Montrealu na svjetskoj izložbi Expo '67 te krov olimpijskog stadiona u Münchenu iz 1972. [5]

Iako mu je trebalo par godina da razvije sistem krova Njemačkog paviljona, samo je šest tjedana bilo potrebno da konstrukcija bude postavljena. Konstrukcijski sustav sastojao se od čelične mreže pričvršćene na osam vitkih čeličnih stupova različitih visina te tlocrtno nepravilno postavljenih. Užad čelične mreže bila je usidrena u tlo, a preko mreže bilo je postavljeno transparentno platno. Na krovu, tj. mreži, nalazilo se i par "prozora" koji su dodatno pridonjeli prozračnosti same konstrukcije. Svojim je jedinstvenim oblikom bila pozitivan odmak od uobičajnih pravokutnih konstrukcija. Pošto je bila jedinstveni projekt, bila je i prilično skupa. No, odmah je uočen njezin ogroman potencijal, budući da je krov težio samo 150 tona, što je odprilike jedna trećina ili jedna petina težine koju bi imao da je bio pokriven uobičajnim materijalima za prekrivanje [6]. Također, koncepcija šatora koja je ovdje primijenjena lako se prilagođava bilo kakvom nepravilnom terenu, što je jako velika prednost.



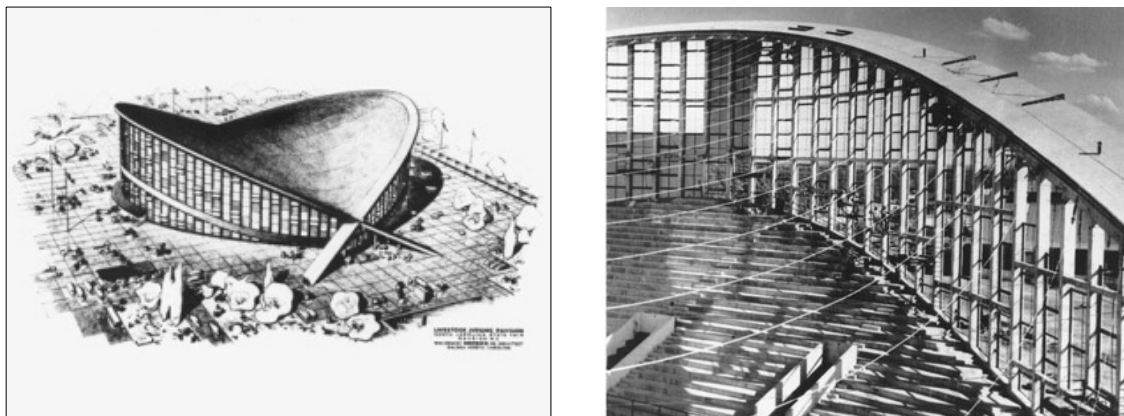
Slika 2 Njemački paviljon u Montrealu na svjetskoj izložbi Expo '67

Ponukan uspjehom na izložbi u Montrealu, Otto je u suradnji s Guntherom Behnischem istu koncepciju primijenio pri prekrivanju Olimpijskog stadiona u Münchenu. Konstrukcija se sastojala od mreže čelične užadi prekrivene akrilnim staklom. Glavna zamisao bila je imitacija Alpi te kontrast s olimpijskim igrama koje su 1936. bile održane u Berlinu za vrijeme nacističkog režima.



Slika 3 Olimpijski stadion u Münchenu iz 1972.

Raleigh Arena (Sjeverna Karolina, 1952. g.) prvi je primjer podržavanja krovnog sistema mrežom kabela. Kabeli su usidreni u dva parabolična luka koji se međusobno križaju. Teški metalni pokrov koji leži na kabelima ima oblik sedla. U Areni se danas održavaju sajmovi, koncerti te sportska natjecanja.



Slika 4 Raleigh Arena, Sjeverna Karolina, 1952.

Jedan od značajnih primjera uporabe prednapete užadi je i rashladni tornanj nuklearnog reaktora THTR-300 u Njemačkoj. Ploha reaktora ima oblik katenoida, plohe koja nastaje rotacijom lančanice oko osi. Učinkovitost dotadašnjih tornjeva od armiranobetonske ljuske u obliku hiperboličkog paraboloida dovedena je u pitanje nakon otkazivanja nekoliko rashladnih tornjeva zbog djelovanja vjetra. Nedostaci tornjeva od armiranobetonskih ljuski su i osjetljivost na diferencijalno slijeganje

oslonaca te opasnost od pojave izvijanja zbog manjih netočnosti u izvedbi. Tornjevi od mreže užadi prevladavaju sve ove nedostatke [7]. Nuklearna elektrana je 1991. godine zbog političkih i sigurnosnih razloga zatvorena, a kasnije i srušena.



Slika 5. Rashladni toranj nuklearnog reaktora THTR-300, Njemačka

3. OBILJEŽJA KONSTRUKCIJA OD UŽADI

3.1. SVOJSTVA UŽADI

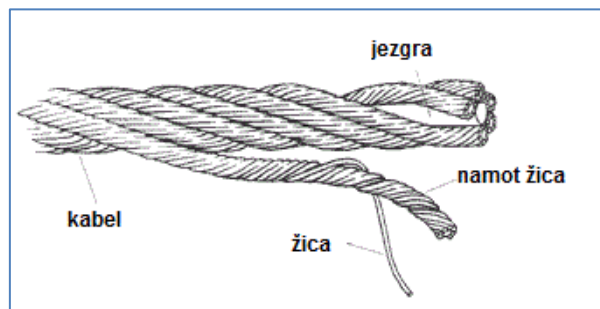
Uže je element kojem je jedna dimenzija (duljina) puno veća od ostale dvije.

Odlikuje se svojstvima male fleksijske i poprečne krutosti, pa ne može preuzeti momente savijanja niti poprečne sile; dakle, prenosi samo centričnu vlačnu silu.

Prednost užeta je što do njegovog sloma može doći samo kad vlačna naprezanja u najslabijem poprečnom presjeku prekorače vrijednost čvrstoće užeta na vlak. Posljedica toga je da uže možemo stanjiti do razine vlačne čvrstoće i time dobiti lakšu konstrukciju.

3.2. VRSTE KABELA I NJIHOVA SVOJSTVA

Osnovni element svakog užeta je čelična žica veće vlačne čvrstoće nego kod uobičajnog čelika, najčešće okruglog presjeka promjera 3-7mm.



Slika 6. Osnovni dijelovi kabela

Na tržištu postoji mnogo različitih vrsta kabela, ali ih možemo svrstati u dvije skupine [8]: spiralni snopovi i kabeli unutar krutog omotača.

- **Spiralni snopovi**

Oko jezgre od ravne čelične žice namotan je jedan sloj od šest žica istoga promjera, a svaki sljedeći sloj ima šest žica više nego prethodni.

Zbog uvijanja slojeva, kabel je sam po sebi kompaktan, pa nisu potrebna dodatna zamatanja snopova.

Vrstu snopa određuje način navijanja žica oko jezgre.

Glavne vrste su :

- snop s jednim slojem žica omotanih oko jezgre,
- snop s dva sloja žica omotanih oko jezgre,
- snop s dva sloja žica istog promjera i popunjujućim slojem (Filler),

- snop s dva sloja žica s različitim polumjerima u zadnjem vanjskom sloju (Warrington),
- snop s više slojeva (kombinirani),
- žičana užad s čeličnom jezgrom.

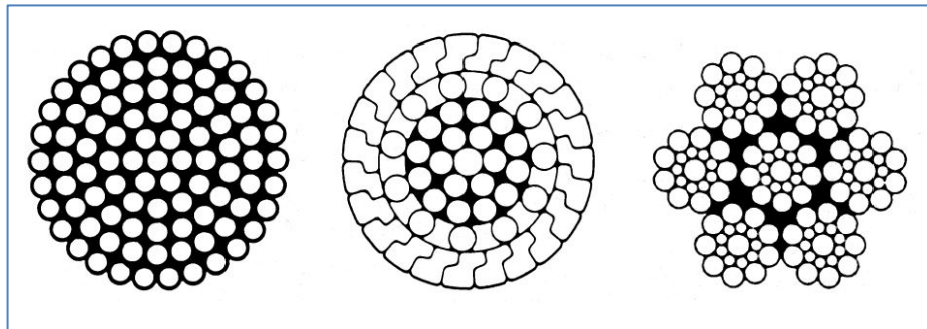
Modul elastičnosti ovakvih snopova kreće se obično oko vrijednosti $E=145-170$ GPa [8], ovisno o veličini kabla. Ova vrijednost modula elastičnosti je čak 15-20% manja od modula elastičnosti jedne žice.

Ovakvi snopovi upotrebljavaju se tamo gdje je potreban vrlo fleksibilan kabel. Moguće primjene su kao rubni kabeli membrane, ograde balkona, pješačkih staza i mostova te kao privremeni kabeli u tijeku izgradnje.

- **Kabeli unutar krutog omotača**

Ovi se kabeli sastoje se od dviju vrsta žica. U jezgri se nalaze žice kružnog poprečnog presjeka namotane u nekoliko slojeva, a vanjski sloj čine žice posebnog Z-oblika. Žice su Z-oblika kako bi se međusobno dobro povezale i kako bi kabel postao kompaktan pri njihovom namatanju, a površina ravna i bez ikakvih otvora koji bi omogućili eventualni prodor neželjenih tvari u sam kabel.

Ovu vrstu kabla također odlikuju visok modul elastičnosti ($E=160-180$ Gpa, [9]) te visoka otpornost na površinski tlak.



Slika 7. Vrste kabla: lijevo-spiralni snop, sredina-kabel unutar krutog omotača, desno-žičana užad

3.3. NAČINI POVEZIVANJA KABELA

- **Veza kabel-kabel (stezaljke)**

Ovu vrstu veze primjenjujemo kod međusobnog križanja dvaju kabla. Ona onemogućava relativne vertikalne i horizontalne pomake kabla koje spaja, ali dopušta relativni zaokret, pa je možemo usporediti s zglobnom vezom, [10].

Mreže se često projektiraju tako da se upotrebljavaju dva tanja kabla umjesto jednoga debljeg, kako bi se dobila mreža što manjih dimenzija te kako bi se postiglo što jednostavnije montiranje stezaljki.

Stezaljke možemo općenito podijeliti na dvije vrste:

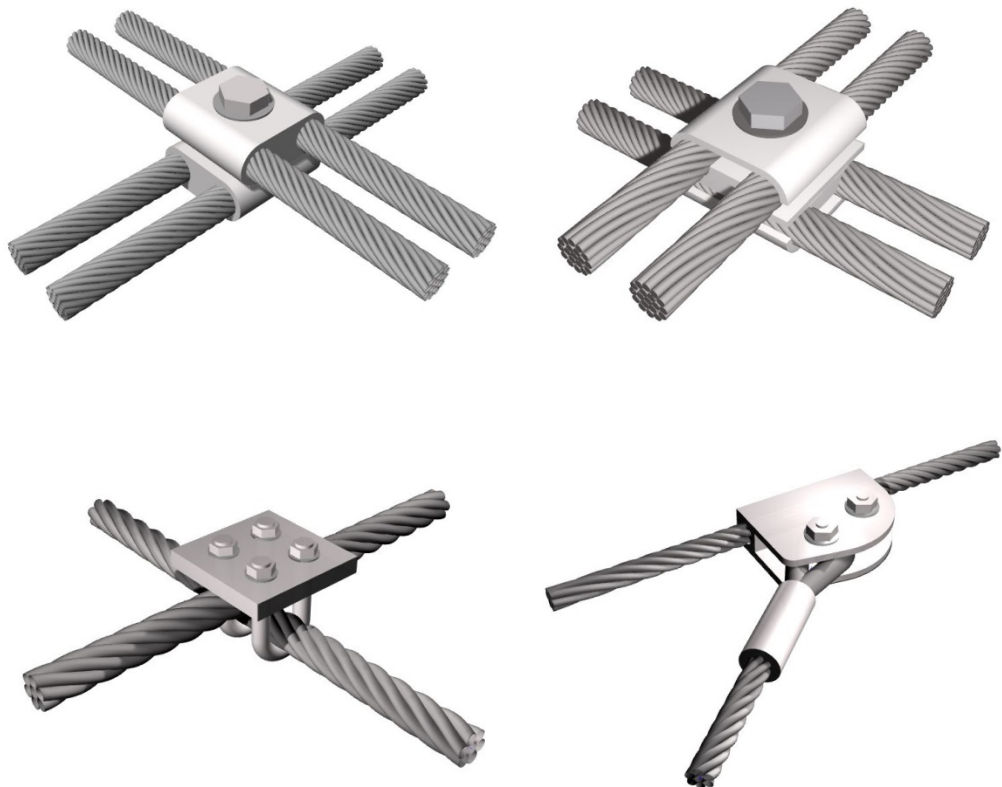
- one koje se montiraju na mjestu izvođenja,
- prefabricirane koje se na kabel pričvršćuju u tvornici.

Tip stezaljki odabiremo ovisno o tipu mreže.

Tako ćemo za mreže u kojima su duljine kabela među čvorovima unaprijed definirane i fiksne odabrati prefabricirane stezaljke koje su jednostavne za montažu.

Mana ovakvih stezaljki je u tome što će male greške nastale prilikom proizvodnje ili montaže ovakvih veza, prouzročiti probleme kod prednapinjanja kabela. Te se greške ne mogu ispravljati na samom mjestu izvedbe konstrukcije.

Jedna od mogućnosti je upotreba zatega (španera) koji nam omogućuju podešavanje duljine kabela. No, ova varijanta je dosta skuplja, pa su bolja opcija stezaljke koje se montiraju na licu mjesta.



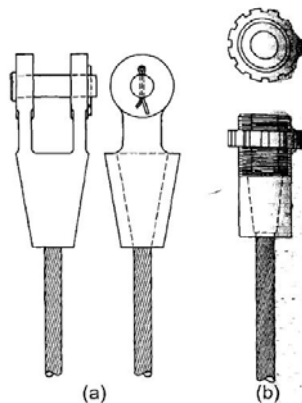
Slika 8. (gore lijevo) Stezaljke postavljene na kabele u tvornici,
(gore desno) Stezaljke koje se postavljaju na mjestu izvedbe,
(dolje lijevo) Dvostruka U stezaljka za spojeve s dva kabela,
(dolje desno) Detalj spoja s rubnim užetom, (prema [10])

- **Veza kabel-konstrukcija**

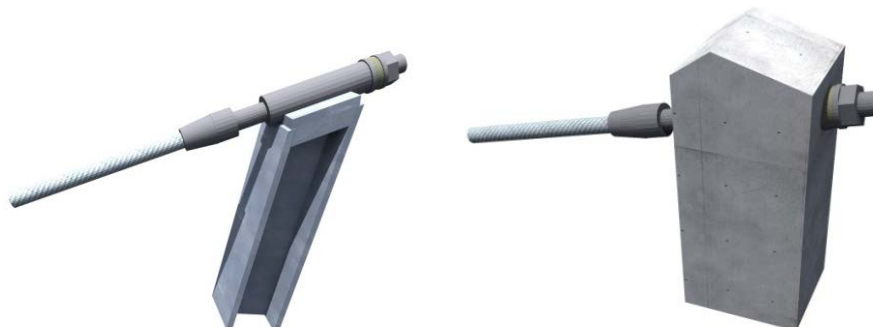
U ovu vrstu spadaju sve veze između kabela i krutog nosivog sklopa (npr. betonskog ili čeličnog) [10]. Veza se sastoji od dijela u kojem završava kabel te od samog spoja kabela i krutog okvira.

Čelični dio u kojem završava kabel (čelična čašica) nalazi se na samom kraju kabela te drži žice. Vanjski izgled može biti različit, ovisno o estetskim zahtjevima pojedine mreže, no osnovne unutarnje dimenzije čašice ovise o promjeru kabela. Načelno je duljina čašice 5,5 do 6 puta veće od promjera kabela, a promjer joj je 2 do 3 puta veći.

Spojevi kabela i krutog okvira moraju biti takvi da osiguraju traženu veličinu sile prednapinjanja u kabele. Isto tako, mora se paziti na to da kabeli ne iskliznu iz spoja. Naime, i malo isklizavanje može dovesti do gubljenja prednapona, a time i do labave konstrukcije. Kako se to ne bi dogodilo, mora postojati dovoljno velika sila trenja koja će spriječiti isklizavanje. Uz navedeno, treba voditi brigu i o tome da se spriječi prodiranje vlage u kabel na mjestu spoja.



Slika 9. Različiti detalji čeličnih čašica:
a-ukliještena, b-vijčana, (iz [10])

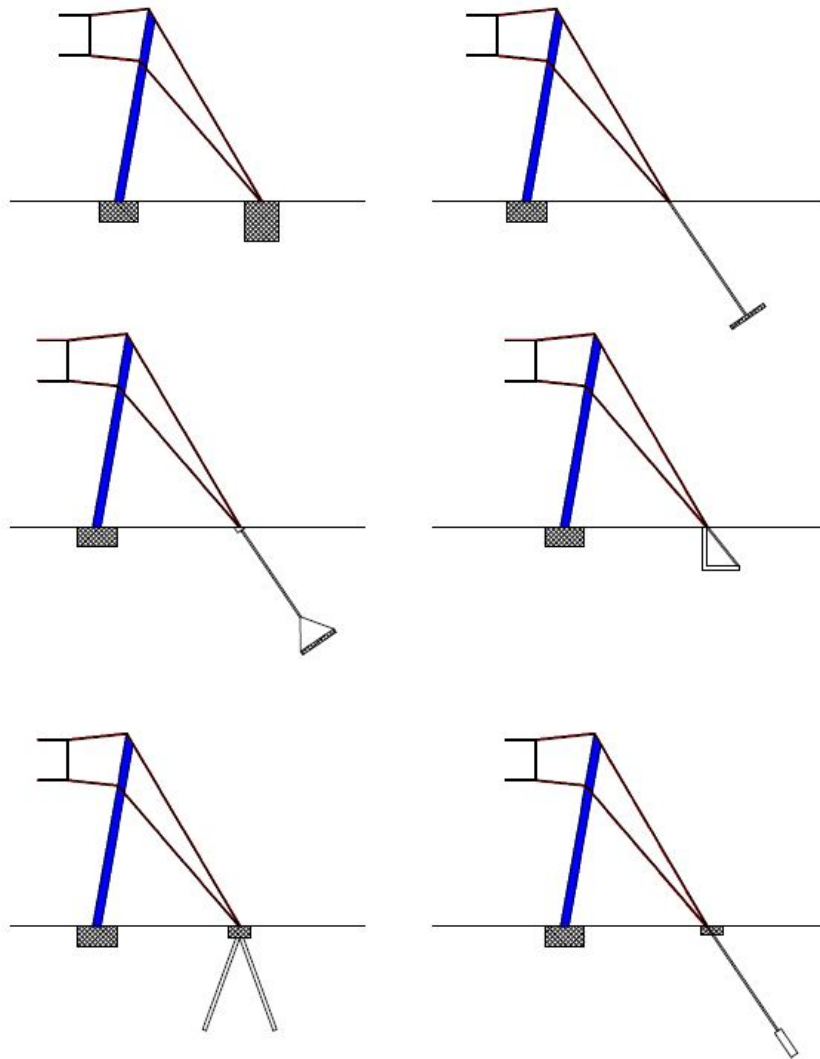


Slika 10. Priključak na čelični stup i betonski stup, (prema [10])

• **Veza kabel-podloga (sidra)**

Ove veze upotrebljavamo kada sile iz kabela treba prenijeti izravno u podlogu [10]. Postoje različiti načini sidrenja kabela, a konačan odabir ovisi o vrsti podloge (tla) u koje se sidri. Tako razlikujemo:

- **Gravitacijska sidra** koja svojom vlastitom težinom uravnotežuju vertikalnu komponentu vlačne sile iz užeta, dok horizontalnu komponentu preuzima samo tlo. Ovu vrstu sidara upotrebljavamo kod tla slabe nosivosti, kao što su na primjer pijesak ili šljunak.
- **Pločasta, gljivasta i slična sidra** koja se koriste samom težinom tla iznad njih kako bi se oduprla vlačnim silama iz kabela. Ovakvu vrstu sidra upotrebljavamo npr. u glini.



Slika 11. Vrste sidara: a-gravitacijsko ,b-pločasto, c-gljivasto, d-potporni zid, e-piloti, f-sidro

3.4. MREŽE UŽADI

Užad možemo na različite načina spajati u mreže [11].

Tako razlikujemo:

- **Pravčaste mreže**

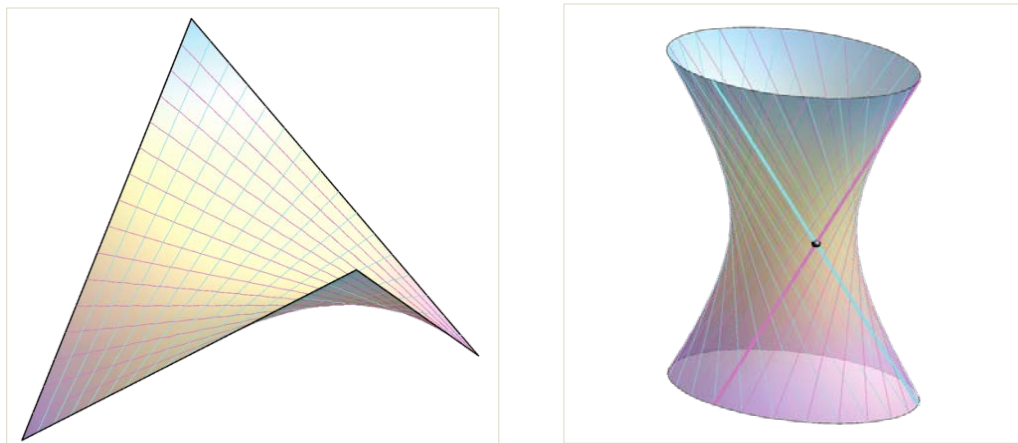
Mreže kod kojih svako uže cijelom svojom duljinom leži na pravcu (bez lomova u čvorovima). Osi užeta su izvodnice neke pravčaste plohe.

Nalaženje oblika kod ovog tipa mreža nije potrebno, jer se oblik može neposredno odrediti iz poznatih geometrijskih rubnih uvjeta.

Svako uže mreže je samo za sebe u ravnoteži (bez međudjelovanja s ostalima, iako ih neka dodiruje).

Variranjem omjera prednaponskih sila u užadi nećemo promijeniti oblik mreže. Ove mreže su ujedno i geodetske, jer svako uže leži na najkraćoj spojnici svojih krajnjih točaka.

Specifičnost ovog tipa mreže je što do gubitka prednapona može doći samo relaksacijom užadi zbog puzanja i plastičnih deformacija te zbog popuštanja ležajnih sidara, a ne djelovanjem poprečnog opterećenja. Naime, zbog djelovanja poprečnog opterećenja uže se može samo produljiti i time još više nategnuti. Eventualni gubitak prednapona bio bi moguć kada bi u smjeru osi užeta djelovala neka velika vanjska sila te tako smanjila prednapon na jednom dijelu užeta, a povećala ga na drugom.



Slika 12 Hiperboloid (lijevo) i rotacijski hiperboloid (desno)

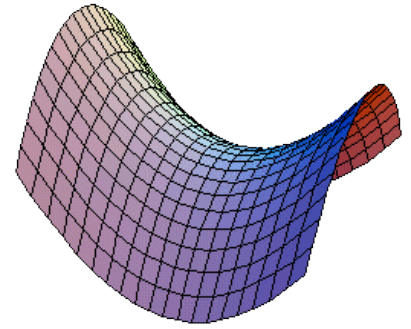
- **Regularne mreže**

Regularna mreža užadi je sustav dviju familija užadi koje se sijeku i tvore sedlastu plohu (sijeku se samo u matematičkom modelu, dok u stvarnosti prelaze jedni preko drugih).

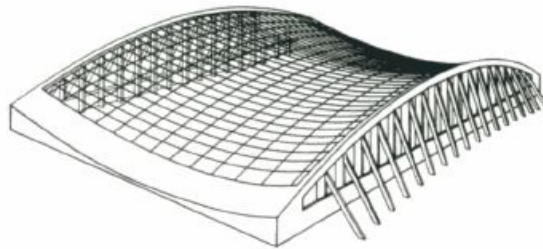
Jedna familija užadi je konkavna, a nazivamo je nosivom užadi. Druga je konveksna, a nazivamo je prednaponskom užadi. Zbog djelovanja vanjskog vertikalnog opterećenja sile u nosivoj užadi će se povećati, a sile u prednaponskoj smanjiti.

Na kontaktima užadi nastaju dvije međusobno uravnotežene sile kojima kabeli djeluju jedan na drugi.

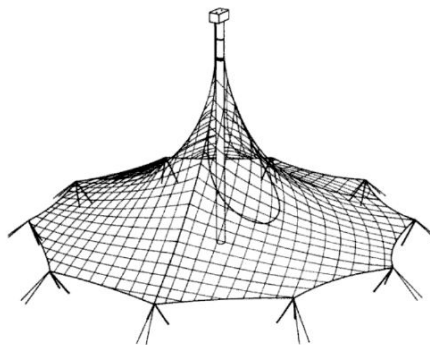
Možemo razlikovati mreže s krutim rubovima i mreže s rubnim kabelima.



Slika 13. Hiperbolički paraboloid



Slika 14. Mreža s krutim rubovima



Slika 15. Mreža s rubnim kabelima

- **Neregularne mreže**

Neregularne mreže su mreže s više od dviju familija užadi ili mreže složenijeg rasporeda užadi.

Specifično za ovaj tip mreža je da isto uže može mijenjati svoju zakrivljenost tako da je na jednom dijelu konkavno, a na drugom konveksno.

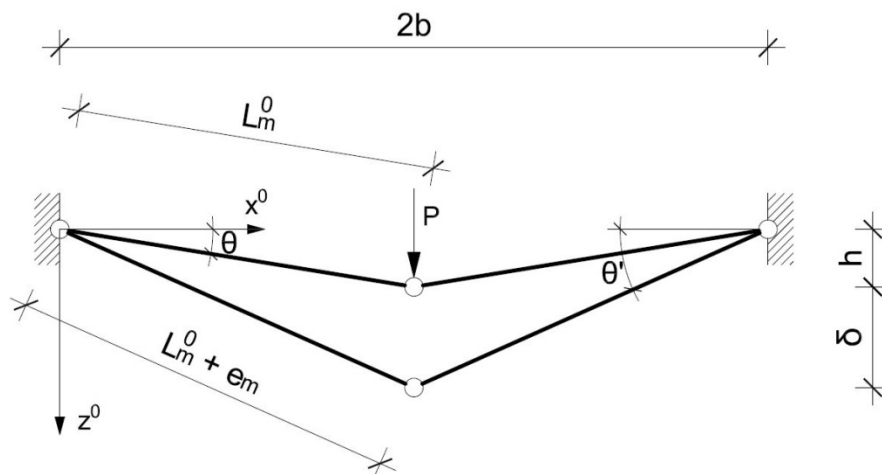
Isto tako, užad možemo prekinuti u nekom čvoru ili umetnuti krute elemente unutar mreže.

3.5. GEOMETRIJSKA NELINEARNOST

Geometrijski nelinearno ponašanje jedna je od glavnih karakteristika vlačnih konstrukcija. Čak i kada su naprezanja u granicama elastičnosti, pomaci su veliki te ih se ne smije zanemariti.

Ovakvo ponašanje nije odlika samo konstrukcija od užadi i platna. Promotrit ćemo primjer jednostavne konstrukcije kod koje također može doći do velikih pomaka zbog djelovanja opterećenja (slika16) [9].

Promatramo sustav dvaju linearno elastičnih štapova koji su zglobno spojeni u sredini i na krajevima.



Slika 16.

Iz uvjeta ravnoteže svih sila u smjeru osi z dobit ćemo

$$\begin{aligned}
 P &= 2K e_m \sin \theta' \\
 &= 2K e_m \frac{\sqrt{(L_m^0 + e_m^0)^2 - b^2}}{L_m^0 + e_m^0}, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

gdje su:

L_m^0 - početna duljina štapova,

e_m^0 - produljenje svakog štap,

$K = \frac{EA}{L_m^0}$ - elastična krutost ,

E - Youngov modul elastičnosti ,

A - površina poprečnog presjeka ,

θ' - kut koji štapovi zatvaraju s osi x nakon deformacije.

Daljnim raspisom izraza (3.1) dobit ćemo

$$\begin{aligned} P &= 2Ke_m \frac{\sqrt{(L_m^0 + e_m^0)^2 - b^2}}{L_m^0 + e_m^0} = 2K \frac{e_m}{L_m^0 + e_m^0} (\delta + h) \\ &= 2K \left(1 - \frac{L_m^0}{L_m^0 + e_m^0} \right) (\delta + h) = 2K \left(\delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^2 + b^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Vidimo da je odnos opterećenja P i pomaka δ nelinearan.

Ako raspišemo član u zagradi moći ćemo pokazati pod kojim uvjetima odnos opterećenja i pomaka postaje linearan.

$$\begin{aligned} \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^2 + b^2}} &= \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{\delta^2 + 2\delta h + h^2 + b^2}} \\ &= \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{h^2 + b^2}} \left(1 + \frac{2\delta h + \delta^2}{h^2 + b^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Razvijajući izraz u zagradama u red i uzimajući u obzir da je $(L_m^0)^2 = h^2 + b^2$, dobivamo

$$\begin{aligned} &\approx \delta + h - (\delta + h) \left(1 - \frac{1}{2(L_m^0)^2} (2\delta h + \delta^2) \dots \right) \\ &= \frac{h^2}{(L_m^0)^2} \delta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ako ovaj izraz vratimo u (3.2) dobit ćemo izraz

$$P = 2K \frac{h^2}{(L_m^0)^2} \delta \quad (3.5)$$

koji opisuje linearan odnos opterećenja i pomaka, pošto je $\frac{h^2}{(L_m^0)^2}$ konstanta.

Ovim smo primjerom pokazali da je za velike pomake odnos opterećenje-pomak nelinearan, dok je za male pomake linearan (ti pomaci moraju biti toliko mali da dozvoljavaju uzimanje u obzir samo prvih članova u razvoju u red).

Rješavanje geometrijski nelinearnog problema provodi se primjenom različitih numeričkih metoda. Jedna od njih je metoda prijelazne matrice krutosti [9].

3.5.1 METODA PRIJELAZNE MATRICE KRUTOSTI (TRANSIENT STIFFNES METHOD)

Ova je metoda nastala proširenjem metode koja se upotrebljava u teoriji malih pomaka, gdje se pretpostavlja linearna ovisnost naprezanja i deformacija.

U "standardnoj" metodi pomaka vrijedi

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{P} \quad (3.6)$$

gdje su:

\mathbf{K} - globalna matrica krutosti sustava ,

δ - vektor pomaka,

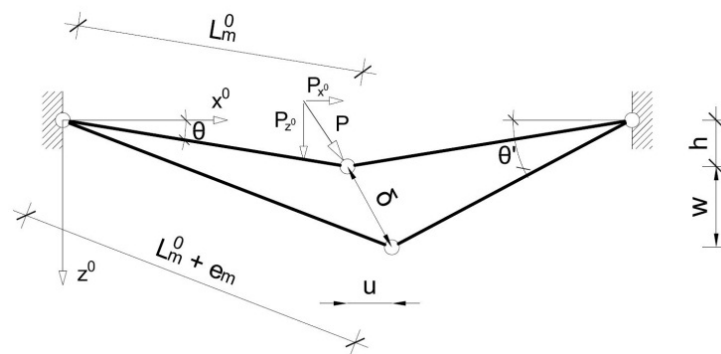
\mathbf{P} - vektor vanjskog opterećenja .

Ta jednadžba predstavlja sustav jednadžbi ravnoteže koje moraju biti zadovoljene u svakom čvoru sustava.

U nastavku dajemo primjenu ove metode na nelinearnim konstrukcijama.

Izraz (3.6) ne možemo direktno primijeniti na konstrukcije s velikim pomacima, tzv. geometrijski nelinearne konstrukcije.

Promotrimo primjer na slici 17. [9]



Slika 17.

Kad bismo progib zadane konstrukcije odredili pomoću izraza (3.6), primjenom početne matrice krutosti, dobili bismo da je

$$\delta = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} . \quad (3.7)$$

U ovom slučaju uvjeti ravnoteže očigledno ne bi bili ispunjeni. Naime, veliki pomak δ izmijenio je početnu konfiguraciju sustava, odnosno, onu konfiguraciju za koju je postavljena početna matrica krutosti. Dakle, treba izračunati novu matricu

krutosti za novu konfiguraciju sustava.

Ako s k označimo korak iteracije koji odgovara trenutnoj geometriji (konfiguraciji) sustava, X_k , za koju je određena matrica krutosti K_k , tada će vektor pomaka biti

$$\delta_{k+1} = K_k^{-1}P, \quad (3.8)$$

a nova je geometrija sustava određena s

$$X_{k+1} = X_k + \delta_{k+1}. \quad (3.9)$$

Ako su pomaci veliki, nova matrica krutosti K_{k+1} pomnožena s vektorom pomaka δ_{k+1} , dat će unutrašnje sile \tilde{P} , koja nisu u ravnoteži s P . Dakle, bit će

$$K_{k+1}\delta_{k+1} = \tilde{P}_{k+1} \quad (3.10)$$

Razlika vanjskog opterećenja i unutrašnjih sila je rezidual

$$R_{k+1} = P - \tilde{P}_{k+1} \quad (3.11)$$

Za korekciju reziduala zadajemo prirast pomaka

$$\Delta\delta_{k+1} = K_{k+1}^{-1}R_{k+1} \quad (3.12)$$

Nakon toga određuje se nova matrica krutosti i postupak se ponavlja sve dok se rezidual dovoljno ne približi nuli, odnosno, dok se približno ne dosegne stanje ravnoteže.

Inačica ovog postupka upotrijebljena je za nalaženje oblika u članku [12], jednom od prvih koji se bavio tim problemom.

4. TRAŽENJE OBLIKA KONSTRUKCIJA OD UŽADI (FORM FINDING)

Definiranje oblika jedno je od najbitnijih pitanja u postupku projektiranja vlačnih konstrukcija. One u svom napregnutom stanju zauzimaju jedinstvene oblike koji se ne mogu opisati jednostavnim matematičkim funkcijama. Taj se oblik ne može nametnuti kao npr. kod ostalih konvencionalnih, krutih konstrukcija od betona ili čelika već ga moramo "pronaći" postupkom nalaženja oblika (form finding), npr [9, 11, 13].

Općenito, trebalo bi se težiti optimalnom obliku konstrukcije, tj. obliku koji bi zadovoljio sve zahtjeve funkcionalnosti, stabilnosti i estetike uz minimalan trošak.

Nalaženje oblika može se provesti na sljedeće načine:

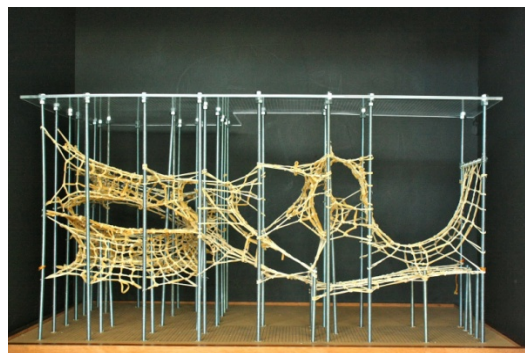
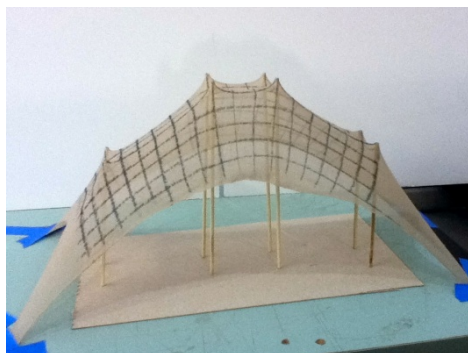
- **Fizikalni model**

Zbog složenih matematičkih modela i kompleksnih prostornih oblika, metoda pronalaska oblika fizikalnim modelima bila je prva metoda kojom se služilo kako bi se odredio početni ravnotežni položaj. Značajnu ulogu u ovom polju imao je Frei Otto koji je provodio razne eksperimente s različitim materijalima (sapunica, tkanina, žica...) [5].

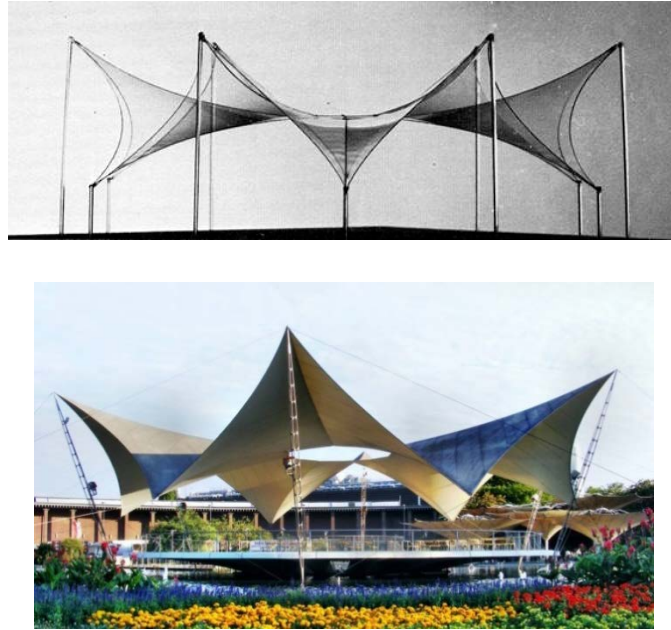
Modeli od sapunice upotrebljavaju se kod modeliranja prednapetih membrana (opna od sapunice poprima oblik minimalne površine); tkanina se primjenjuje za modeliranje membrana, a žica za modeliranje konstrukcija od užadi.

Prije računala i raznih numeričkih postupaka kojima se danas koristimo za pronalaženje oblika, fizikalni su modeli bili jedini način određivanja oblika.

Fizikalni modeli nam daju mnogo korisnih podataka o ponašanju vlačne konstrukcije. No, danas se smatra da nam ne daju dovoljno precizne rezultate, pa se koristimo numeričkim metodama, a fizikalni modeli uglavnom služe za vizualizaciju konstrukcije.



Slika 18 Fizikalni model od rastezljive tkanine (lijevo) i rastezljive niti (desno)



Slika 19. Fizikalni model od sapunice i izvedena konstrukcija

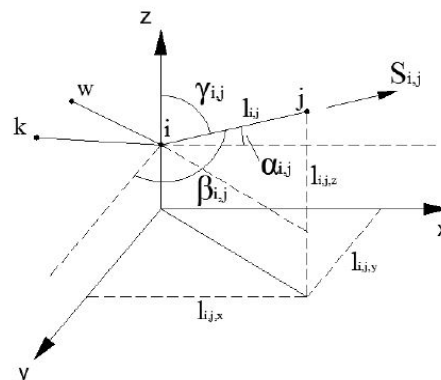
• Numerički model

Računalni model svih konstrukcija, pa i vlačnih, danas je najvažniji. Veliki dio izvedenih vlačnih konstrukcija ne bi se mogao izvesti bez primjene računala. Naime, fizikalnim modelima ne mogu se lako dobiti varijacije rješenja nekog projektog zadatka, dok se u modelu na računalu to može lako postići.

4.1. RAVNOTEŽA ČVOROVA

Pretpostavljamo da su dijelovi kabela između čvorova ravni te da su zglobno povezani jedni s drugima ili s potpornom konstrukcijom.

Osnovu postupka nalaženja oblika konstrukcija od užadi čine jednadžbe ravnoteže čvorova, pri čemu se uzima da je čvor neopterećen, tako da na njega djeluju samo sile prednapinjanja u štapovima (slika 20.).



Slika 20.

Uvjete ravnoteže i-tog čvora možemo izraziti na sljedeći način:

Zbrojevi projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenim u i-ti čvor na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} S_{ij} \cdot \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_i} S_{ij} \cdot \frac{(y_i - y_j)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_i} S_{ij} \cdot \frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdje su:

- n_i - broj užadi pričvršćenih na i-ti čvor,
- $S_{i,j}$ - sila u štapu koji povezuje čvorove i i j,
- $l_{i,j}$ - duljina štapa,
- x_i, y_i, z_i - koordinate čvora.

4.2. TVORBA SUSTAVA SIMULTANIH JEDNADŽBI

Ako je n broj čvorova, a m broj štapova, tada možemo postaviti 3 x n jednadžbi ravnoteže, s 3n + m nepoznanica (tri koordinate svakog čvora i sila u svakom štapu). Broj nepoznanica je za m veći od broja jednadžbi, pa rješenje sustava (ako postoji) nije jednoznačno.

Kada oduzmemo jedan, dva ili tri stupnja slobode ležajnim čvorovima, smanjit ćemo broj nepoznatih koordinata, ali ćemo istovremeno smanjiti i broj jednadžbi, pa ćemo uvijek imati m nepoznanica više nego jednadžbi.

Dakle, kako bismo dobili jednak broj jednadžbi i nepoznanica, trebamo dodati još m uvjeta.

Možemo odabrati jednostavna pravila kojima eliminiramo sile u štapovima kao nepoznanice:

- **Kvazilaplaceovo pravilo:**
 - Unaprijed zadajemo uravnotežene projekcije sila u svim štapovima na ravninu xy;
- **Pravilo gustoće sila:**
 - zadajemo omjer između iznosa sile i duljine svakog štapa ;

- **Poopćeno pravilo minimalne mreže:**
 - Zadajemo iznose sila u svim štapovima;
- **Poopćeno pravilo minimalne mreže s kinematičkim ograničenjima:**
 - u (većem) dijelu štapova zadajemo iznose sile, a ostalim štapovima zadajemo duljine.

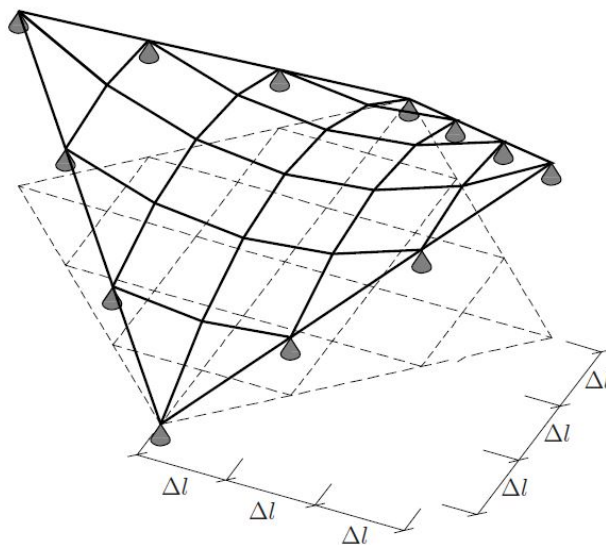
Uz to, pokazat ćemo da se iteracijskom primjenom gustoće sila može ostvariti poopćena geodetska mreža i poopćena mreža s kinematičkim ograničenjima.

U literaturi se navode još neka pravila. Tako u [12] i u [15] autori dodaju konstitucijske jednadžbe kojima je izražena veza produljenja štapova i sila u njima, tako da se dobivaju inačice nelinearne metode pomaka (opisane i u [9]). U [11] i [13] autori uz prva tri spomenuta pravila uvode i "kombinirano" pravilo kao kombinaciju poopćenog pravila minimalne mreže (u nekim štapovima) i inačice nelinearne metode pomaka (u ostalim štapovima).

4.3. KVAZILAPLACEOVO PRAVILO

Zadavanjem ograničenja vezanih uz geometriju, rubne uvjete te raspodjelu naprezanja unutar elemenata, nelinearni problem ravnoteže svodi se na linearni.

Pretpostavljamo da projekcije užadi u tlocrtu čine ekvidistantnu kvadratnu mrežu, i da su horizontalne projekcije prednaponskih sila konstantne duž svakog užeta i međusobno jednake [11,13]. Te projekcije sila ne ovise o z koordinatama čvorova.



Slika 21. Mreža užadi čija projekcija čini ekvidistantnu kvadratnu mrežu, (iz [16])

Na ovaj način su već unaprijed zadovoljene jednačbe ravnoteže horizontalnih projekcija sila

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad . \quad (4.2)$$

Potrebno je odrediti još samo z-koordinate svih čvorova kako bismo zadovoljili jednačbu

$$\sum F_z = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Ako čvorove označimo s dva indeksa i i j, jednačba za čvor i,j glasi će

$$H \frac{z_{i,j} - z_{i-1,j}}{\Delta} + H \frac{z_{i,j} - z_{i+1,j}}{\Delta} + H \frac{z_{i,j} - z_{i,j-1}}{\Delta} + H \frac{z_{i,j} - z_{i,j+1}}{\Delta} = 0 \quad , \quad (4.4)$$

gdje su:

H iznos horizontalne projekcije prednaponske sile užadi,

Δ razmak između dva paralelna užeta ("korak mreže").

Ta se jednačba može napisati u obliku:

$$4z_{i,j} - z_{i-1,j} - z_{i+1,j} - z_{i,j-1} - z_{i,j+1} = 0 \quad (4.5)$$

Ovakva se jednačba može napisati za svaki slobodni čvor, a dobiveni sustav jednačbi je linearan.

Naziv "kvazilaplaceovo pravilo" slijedi iz činjenice da je dobiveni sustav jednačbi identičan sustavu koji se dobiva kada se Laplaceova jednačba rješava metodom konačnih diferencija.

Prednost ove metoda je u tome što je dobiven sustav jednačbi linearan te zbog toga nije potrebna nikakva početna aproksimacija rješenja kao što je to slučaj kod nelinearnih sustava. Isto tako, rješenje dobiveno na ovaj način, dobra je početna aproksimacija s kojom se može krenuti u rješavanje prema drugim (nelinearnim) metodama.

4.4. PRAVILO GUSTOĆA SILA

Ova metoda razvijena je za potrebe proračuna Olimpijskog kompleksa u Münchenu [11,14,17]. Metoda ne zahtijeva nikakve pretpostavljene početne koordinate čvorova mreže, već se temelji na pretpostavci da je omjer vlačne sile u kabelu i njegove

duljine unaprijed zadan. Posljedica toga je da se sustav nelinearnih jednadžbi ravnoteže čvorova mreže transformira u sustav linearnih jednadžbi. Rješenja sustava su koordinate točaka uravnotežene mreže.

Jednadžbe ravnoteže čvora

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{S_{i,j} \cdot (x_i - x_j)}{l_{i,j}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} \frac{S_{i,j} \cdot (y_i - y_j)}{l_{i,j}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} \frac{S_{i,j} \cdot (z_i - z_j)}{l_{i,j}} = 0 \quad (4.6)$$

su, kao što znamo, nelinearne.

Sustav linearnih jednadžbi dobit ćemo ako za omjer vlačne sile i duljina užeta $S_{i,j}/l_{i,j}$ odaberemo vrijednost $q_{i,j}$ koju nazivamo "gustoća sile"

$$\sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (x_i - x_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (y_i - y_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (z_i - z_j) = 0 \quad (4.7)$$

4.4.1 MATRIČNA FORMULACIJE LINEARNE METODE GUSTOĆA SILA

Najprije se nacrtaju mreža te se numeriraju svi čvorovi (od 1 do n_s) i svi elementi (od 1 do m). Posljednji se numeriraju čvorovi koji su fiksni (ležajni čvorovi); njihov je broj n_f . Ostali čvorovi su slobodni, a njihov broj označavamo s n . Dakle, ukupni broj čvorova je $n_s = n + n_f$.

Nakon toga uz pomoć nacrtane mreže tvorimo matricu povezanosti C_s . Svaki element j ima početni čvor k i krajnji čvor l .

Elementi matrice C_s su

$$c_s(j, i) = \begin{cases} +1 & \text{za } i = k \\ -1 & \text{za } i = l \\ 0 & \text{ostali slučajevi} \end{cases} \quad (4.8)$$

Matricu povezanosti C_s možemo podijeliti na dvije matrice

$$C_s = [C \ C_f], \quad (4.9)$$

gdje su

- C matrica povezanosti slobodnih čvorova,
- C_f matrica povezanosti rubnih (fiksni) čvorova.

Projekcije duljina elemenata u smjeru osi x možemo zapisati kao:

$$\begin{Bmatrix} L_{1,x} \\ L_{2,x} \\ L_{3,x} \\ L_{4,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \\ x_5^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^0 - x_5^0 \\ x_2^0 - x_5^0 \\ x_3^0 - x_5^0 \\ x_4^0 - x_5^0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Analogno se dobije i zapis za projekcije u smjerovima osi y i z.

Skraćeno možemo pisati:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{m,x} &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{C}x + \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f, \\ \mathbf{L}_{m,y} &= \mathbf{C}_s \mathbf{y}_s = \mathbf{C}y + \mathbf{C}_f \mathbf{y}_f, \\ \mathbf{L}_{m,z} &= \mathbf{C}_s \mathbf{z}_s = \mathbf{C}z + \mathbf{C}_f \mathbf{z}_f, \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdje su

- $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ - vektori koordinata slobodnih čvorova,
- $\mathbf{x}_f, \mathbf{y}_f, \mathbf{z}_f$ - vektori koordinata fiksnih čvorova.

Komponente unutarnjih sila u kabelima $Q_{m,x}$, $Q_{m,y}$, $Q_{m,z}$ možemo izraziti preko produkta matrice gustoća sila \mathbf{Q} i projiciranih duljina elemenata

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{m,x} &= \mathbf{Q} \mathbf{L}_{m,x}, \\ \mathbf{Q}_{m,y} &= \mathbf{Q} \mathbf{L}_{m,y}, \\ \mathbf{Q}_{m,z} &= \mathbf{Q} \mathbf{L}_{m,z}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

gdje je \mathbf{Q} dijagonalna matrica

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Za svaki slobodni čvor možemo raspisati tri jednadžbe ravnoteže:

$$\sum Q_{m,x} = 0, \quad \sum Q_{m,y} = 0, \quad \sum Q_{m,z} = 0 \quad (4.14)$$

Ako u zadnji izraz uvrstimo izraze (4.11), (4.12) i (4.13), dobit ćemo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{y}_s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{z}_s &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

uz napomenu da se sumacija iz izraza (4.14) može izvesti množenjem $Q_{m,x}$, $Q_{m,y}$, $Q_{m,z}$ sa \mathbf{C}^T .

Izraz (4.15) možemo pisati i kao

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x}_s + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_s &= \mathbf{0} , \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{y}_s + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{y}_s &= \mathbf{0} , \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{z}_s + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{z}_s &= \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ako uvedemo

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} , \\ \mathbf{D}_f &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f , \end{aligned} \quad (4.17)$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{x} &= -\mathbf{D}_f \mathbf{x}_f , \\ \mathbf{D} \mathbf{y} &= -\mathbf{D}_f \mathbf{y}_f , \\ \mathbf{D} \mathbf{z} &= -\mathbf{D}_f \mathbf{z}_f . \end{aligned} \quad (4.18)$$

S obzirom na to kakva je matrica \mathbf{D} mogu se dogoditi dva slučaja:

Prvi slučaj je da je determinanta matrice \mathbf{D} različita od nule. Tada je rang matrice jednak n i oblik konstrukcije diktiran je odabranim vrijednostima gustoće sila. U slučaju prednapete mreže kabela s karakterističnom matricom povezanosti, broj mogućih ravnotežnih oblika biti će jednak ∞^{n-1} . Naime, vektori \mathbf{Q} i $a \cdot \mathbf{Q}$ za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, daju isti oblik. Dakle, za \mathbf{Q} s n komponenta, ima ∞^{n-1} mogućih ravnotežnih oblika.

Rješenje ovog sustava jednadžbi je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}_f \mathbf{x}_f , \\ \mathbf{y} &= -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}_f \mathbf{y}_f , \\ \mathbf{z} &= -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}_f \mathbf{z}_f . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Poseban slučaj na koji također treba obratiti pozornost je kada su svi rubni čvorovi komplanarni, tj. kada leže u istoj ravnini. Rješenje je tada trivijalno, tj. ravnina.

Drugi slučaj je kada je determinanta matrice \mathbf{D} jednaka nuli. Tada je matrica \mathbf{D} singularna, pa sustav nema rješenja.

Nedostatak ove metode je taj što se na izvedenoj konstrukciji mora zadovoljiti pretpostavka da čvorovi padaju točno u projektirane točke.

U nekom čvoru mora vrijediti (slika 22.a)

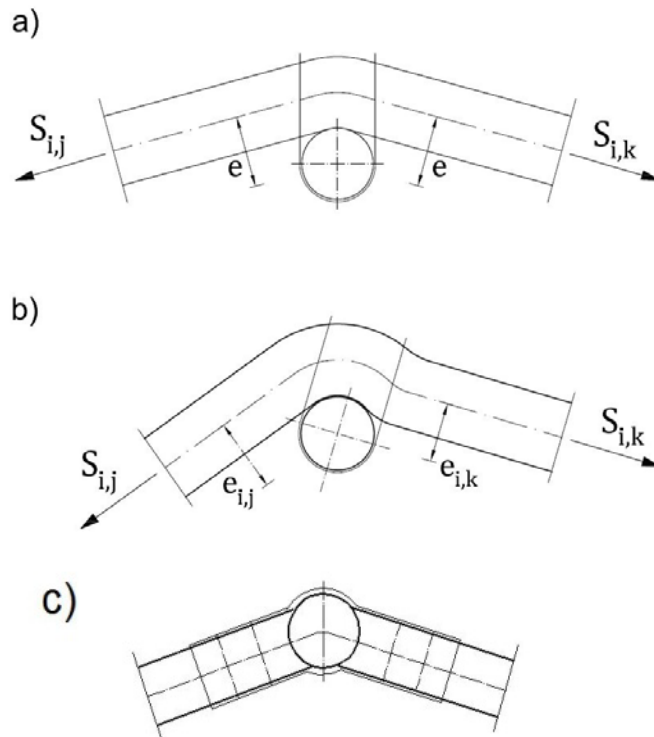
$$S_i e_i = S_k e_k \quad (4.20)$$

gdje su:

- S_i i S_k - sile u i -tom i k -tom štapu istog užeta,
- e_i i e_k - krakovi sila S_i i S_k i odnosu na središte donjeg kabela

Ako je jedna sila znatno veća od druge, doći će do izobličavanja čvora (slika 22.b). Naime, krak svake sile se povećava ili smanjuje (ovisno o veličini sile) sve dok se ne postigne ravnoteža momenata.

Problem izobličavanja čvorova može se riješiti centriranjem čvorova (slika 22.c).



Slika 22. Mimoilaženje užadi: a-ekscentricitet, b-izobličenje čvora, c- centrični spoj

4.4.2 ANALOGIJA S METODOM POMAKA

Nepoznanice u metodi pomaku su pomaci i kutovi zaokreta čvorova koje dobivamo rješavanjem sustava jednačbi ravnoteže. U metodi gustoće sila nepoznanice su koordinate čvorova. Unatoč ovoj razlici između metode pomaka i metode gustoće sila, može se pokazati da među njima postoji određena analogija [18]. Naime, matrica krutosti u metodi pomaka ima istu strukturu kao i matrica $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ koju smo ranije izveli u metodi gustoće sila.

U matrici krutosti elementi na dijagonali jednaki su zbroju koeficijenata krutosti svih elemenata povezanih u neki čvor. Elementi izvan dijagonale jednaki su odgovarajućim koeficijentima krutosti ili nuli, ovisno o tome kakav utjecaj na odgovarajuću statičku veličinu ima određeni pomak.

Elementi matrice \mathbf{D} na dijagonali su zbrojevi gustoća sila kabela koji se sijeku u nekom čvoru, a elementi izvan dijagonale negativne su vrijednosti gustoće sila u kabele između dva odgovarajuća čvora. Ako čvorovi nisu međusobno povezani, tada će odgovarajući element matrice \mathbf{D} biti nula.

Dakle, gustoća sila q analogna je koeficijentima krutosti u metodi pomaka. Isto tako, povezanost čvorova je u obje matrice definirana isti način.

Matrična formulacija metode gustoće sila koju smo prethodno izveli formalni je opis metode, no rješavanje problema na ovaj način zahtijeva više računalnog vremena te troši više memorije. Razlog tome su složene i dugotrajne matrične operacije koje zahtijeva postupak.

S druge strane, primjenom analogije s metodom pomaka, zaobilazimo te nedostatke. Naime, matrica krutosti može se sklopiti direktno, bez ikakvih predradnji ili množenja s matricom povezanosti i njezinom transponiranom matricom. Također, ne postoji potreba za nekom određenom podjelom slobodnih i rubnih (fiksni) čvorova. Uz to, sustav jednačbi možemo riješiti Gaussovom eliminacijom umjesto inverzom matrice.

4.5. POOPĆENA GEODETSKA MREŽA

Ako se za vrijeme prednapinjanja omogući klizanje jednog užeta po drugom, mreža će doći u prirodnu ravnotežnu konfiguraciju. Iznos sile bit će uzduž cijelog užeta jednak. Ukupna duljina užadi bit će minimalna.

Sustav jednadžbi dobiven ovim pravilom je nelinearan. Riječ je o jednadžbama ravnoteže navedenim u 4.1 pri čemu su zadane vrijednosti sila.

Može se pokazati da je rješenje sustava jednadžbi ravnoteže, uz uvjet da su sve sile S_{ij} međusobno jednake, ekvivalentno minimizaciji ukupne duljine kabela.

Ukupna je duljina kabela

$$L = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} . \quad (4.21)$$

Uvjeti minimuma su

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Pomnožimo li te jednadžbe sa $S = S_{ij}$,

$$S \frac{\partial L}{\partial x_i} = S \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 , \quad (4.23)$$

i analogno za y i z, neposredno dobivamo jednadžbe ravnoteže

$$\sum_{j=1}^{n_i} S \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} S \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} S \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}} = 0 . \quad (4.24)$$

Tvrđnja o minimumu duljine užadi može se poopćiti: za unaprijed zadane različite sile u užadi, ali jednake duž užeta, ravnotežno rješenje je ekvivalentno minimizaciji ukupne duljine svih štapova pomnoženih pripadnim uzdužnim silama:

$$\Phi = \sum l_{i,j} S_{i,j} . \quad (4.25)$$

Iz ovog izraza slijedi da će se neko uže mreže skratiti, a njegova zakrivljenost smanjiti, ako se poveća sila u tom užetu, a sile u ostaloj užadi ostanu nepromijenjene.

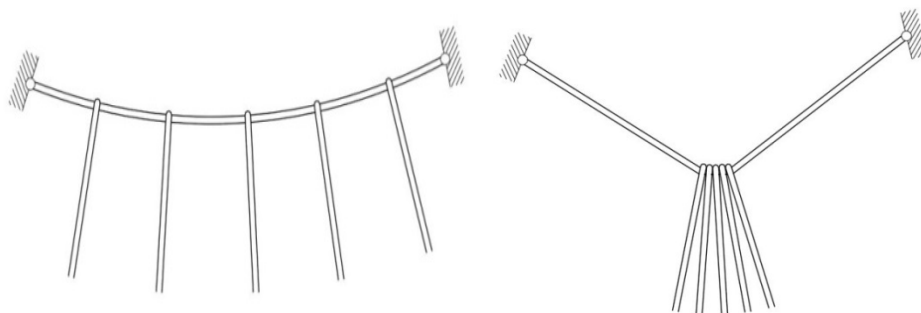
Nedostaci pravila poopćene geodetske mreže su što rješenje ne mora nužno postojati i što numerički algoritmi za rješavanje pripadnog sustava jednažbi nisu nužno konvergentni. Naime, nelinearni problemi rješavaju se iteracijskim postupcima [19]. Iako problem divergencije nije karakterističan samo za ovaj sustav jednažbi, on je najosjetljiviji.

Poznata su tri uzroka divergencije:

- **Ne postoji ravnotežno stanje**

Jednostavan primjer ovog problema je situacija kada je zadani iznos vlačne sile u nekom štapu veći od zbroja iznosa ostalih sila koje djeluju na isti čvor. Čvor tada ne može biti u ravnoteži i iteracijski postupak divergira.

Pošto tokom iteracije nastaje klizanje u modelu, problem nemogućnosti rješenja možemo prepoznati kao tendenciju međusobnog približavanja dvaju čvorova.



Slika 23 Divergencija - približavanje čvorova

Ovaj tip divergencije ne može se ukloniti poboljšanjem algoritma zato što traženo rješenje ne postoji. U nekim se slučajevima problem može riješiti sprečavanjem klizanja kabela (o čemu će još biti riječi), a u nekima je jedino rješenje promjena konstrukcije.

- **Indiferentno stanje ravnoteže**
- **Ravnotežno stanje je stabilno, ali je područje konvergencije iterativnog postupka malo**

Algoritam će dobro konvergirati samo ako započne od dovoljno dobre aproksimacije rješenja (koje se obično dobiva nekom drugom metodom rješavanja-npr. metodom gustoće sila), tj. nužan i dovoljan uvjet konvergencije je da početna aproksimacija leži unutar područja konvergencije koje ima nepravilan oblik.

Ovakvu divergenciju uklanjamo poboljšanjem postojećeg ili izborom drugog algoritma.

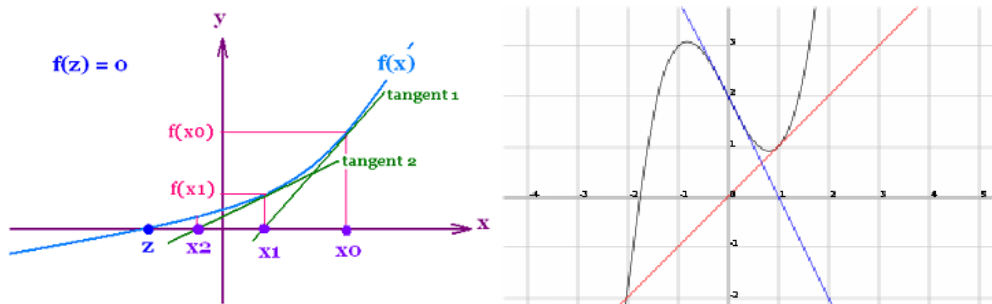
4.6. RJEŠAVANJE SUSTAVA NELINEARNIH JEDNADŽBI

Nelinearni sustavi jednadžbi rješavaju se iteracijskim postupcima [19].

Jedna od najpoznatijih metoda rješavanja je Newton-Raphsonova metoda [20]. U slučaju da početnu aproksimaciju izaberemo dovoljno blizu rješenja, metoda će vrlo brzo konvergirati prema traženom rješenju.

Zamisao metode opisat ćemo na primjeru funkcije s jednom nepoznanicom.

Tražimo nul-točku skalarne funkcije jedne varijable, tj. x za koji je $f(x) = 0$. Ako možemo izračunati vrijednost funkcije i vrijednost derivacije te funkcije, i ako znamo neki $x^{(k)}$ koji je u blizini tražene nul-točke, tada nelinearnu funkciju $f(x)$ u okolini točke $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ možemo zamijeniti pravcem najbližem toj funkciji - tangentom.



Slika 24.

Jednadžbe tangente u točki $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ je

$$\bar{f}^{(k)}(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \quad (4.26)$$

Nultočka funkcije $\bar{f}^{(k)}(x)$, tj. sjecište tangente s osi x je

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}. \quad (4.27)$$

Dobivena nul-točka tangente nova je aproksimacija tražene nul-točke zadane funkcije.

Postupak ponavljamo sve dok ne dostignemo zadovoljavajuću točnost, tj. iteraciju završavamo tek kad je

$$|f(x^{(k)})| < \tau$$

Ili

$$k > N$$

gdje su:

τ - odabrana točnost,

N - odabrani najveći broj iteracija (ako postupak divergira).

Metoda se za rješavanje sustava jednažbi poopćuje na sljedeći način:

Promatramo sustav jednažbi

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.28)$$

odnosno

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (4.29)$$

gdje su

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Linearnu aproksimaciju sustava izražavamo kao

$$\bar{\mathbf{f}}^{(k)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) \quad (4.30)$$

gdje je

$$\nabla \mathbf{f} - \text{matrica s komponentama } [\nabla \mathbf{f}]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Sada umjesto sustava () rješavamo sustav (). Nultočke tog sustava formalno su dane kao

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - |\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})|^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (4.31)$$

ali $\mathbf{x}^{(k+1)}$ izračunavamo kao rješenje linearanog sustava

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0}. \quad (4.32)$$

Kao i kod primjera s jednom jednažbom, i ovdje postupak ponavljamo sve dok ne dostignemo zadovoljavajuću točnost.

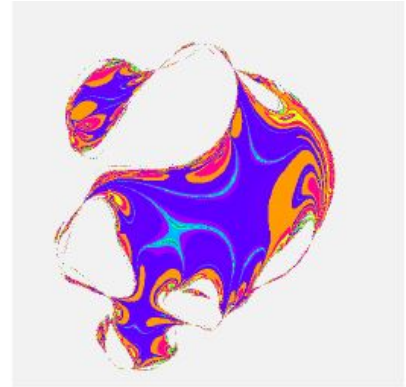
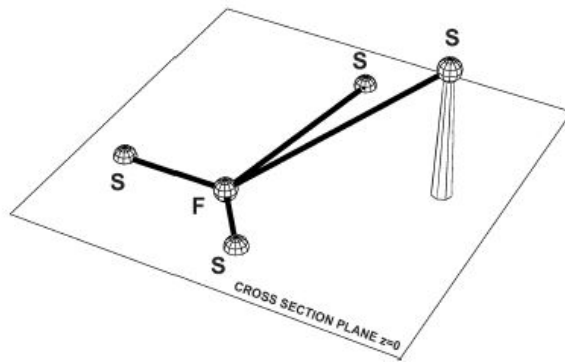
Kao što je ranije napomenuto, početna aproksimacija rješenja mora se nalaziti unutar područja konvergencije. No, to područje ima izrazito nepravilan oblik pa nekad iteracije iz prividno bolje početne aproksimacije sporije konvergiraju ka pravom rješenju. Varirajući početnu aproksimaciju možemo uočiti da je ponašanje iteracijskog postupka nepredvidivo, te pretpostavljamo da područje konvergencije ima karakteristike fraktala [21].

U člancima [22] i [23] autori srodan problem, problem minimalne plohe, rješavaju inačicom Newton-Raphsonova postupka u kojoj se i linearni sustav rješava iteracijskim, Gauss-Seidelovim postupkom s relaksacijskim koeficijentom. U našim smo primjerima upotrijebili taj postupak, sa $\omega = 1$.

Promatramo sustav užadi sastavljen od četiri užeta, četiri fiksna čvora te jednoga slobodnog (slika 25.). Na desnoj slici prikazane su zone konvergencije i divergencije.

Zamjećujemo kako je područje konvergencije nepravilnog oblika. Posljedica toga je da nekad iteracija koja je započela od neke odabrane konfiguracije, konvergira

rješenju, dok se za izmijenjenu, možda i prividno bolju konfiguraciju nije dovoljno približila rješenju ni nakon velikog broja iteracija, pa pretpostavljamo da postupak divergira.



Slika 25.

5. ITERACIJSKA PROŠIRENJA METODE GUSTOĆA SILA

U članku [24] autori uvode " iteracijsku metodu utemeljenu na metodi gustoće sila koja omogućava postizanje konstantne sile u unutarnjim štapovima mreže."

Gustoća sile u štapu (i,j) unutarnjeg kabla u k-tom koraku se računa kao:

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}}, \quad (5.1)$$

gdje su

$q_{i,j}^{(k-1)}$ - gustoća sila iz k-1 koraka,

\bar{S} - tražena vrijednost sile,

$S_{i,j}^{(k-1)}$ - vrijednost sile izračunata u k-1 koraku.

Pojašnjenje postupka je:

Pretpostavimo da je sila izračunata u $k - 1$ koraku iteracije, $S_{i,j}^{(k-1)}$, različita od tražene vrijednosti \bar{S} . Vrijednost \bar{S} dobit ćemo množenjem vrijednosti sile $S_{i,j}^{(k-1)}$ koeficijentom $s_{i,j}^k$, tj. $\bar{S} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)}$.

Vrijednost sile u k-tom koraku bit će

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k)}. \quad (5.2)$$

Ako je

$$l_{i,j}^{(k)} = l_{i,j}^{(k-1)}, \quad (5.3)$$

tj., ako se duljina štapa nije promijenila, onda će vrijediti i

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}. \quad (5.4)$$

Ako je uz to i $S_{i,j}^{(k)}$ konačna, tražena vrijednost sile onda je i

$$S_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot q_{i,j}^{(k-1)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}. \quad (5.5)$$

Ako ovaj izraz usporedimo s izrazom () dobit ćemo

$$q_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot q_{i,j}^{(k-1)}. \quad (5.6)$$

Dakle, kad se duljina štapa ne bi mijenjala, gustoća sila iz izraza (5.1) bi odmah dala traženu vrijednost sila.

No, ravnotežna konfiguracija najčešće se mijenja promjenom gustoća sila, a samim time se mijenjaju i duljine štapova. Zbog toga rješavanje zadatka zahtijeva primjenu iteracijskog proračuna kojim se postupno približavamo zahtijevanoj veličini sile u užetu.

Autori se u članku ne bave štapovima rubnih kabela, iako navode kako se u "klasičnoj" metodi gustoće sila "...konstantna vrijednost daje gustoćama sila u unutarnjim elementima, a različite vrijednosti rubnim elementima."

Mogućnošću zadavanja različitih vrijednosti kabela u različitim kabelima, znatno nam se povećava broj mogućih oblika mreža užadi. Gornji postupak lako možemo proširiti kako bi u različitim štapovima dobili različite vrijednosti sila.

Gustoću sila u štapu (i,j) u k-tom koraku možemo računati prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}}, \quad (5.7)$$

gdje je

$\bar{S}_{i,j}$ – zahtijevana vrijednost sile u štapu (i,j).

Vrijednost sile $\bar{S}_{i,j}$ ne mora biti ista kao i sile u ostalim štapovima. No, ako želimo oblikovati poopcenu minimalnu mrežu, moramo paziti da su sile u svim štapovima pojedinog kabla jednake.

Ako u gornji izraz uvrstimo odnos $\frac{q_{i,j}}{S_{i,j}} = \frac{1}{l_{i,j}}$, dobit ćemo još jedan izraz za gustoću sila

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}}. \quad (5.8)$$

5.1. UVOĐENJE KINEMATIČKIH OGRANIČENJA

Potreba za uvođenjem kinematičkih ograničenja javlja se u situacijama kada dva ili više čvorova "otkližu" u jednu točku. Najčešće će se to dogoditi na rubnim kabelima i to neovisno o silama u njima. Kinematička ograničenja uvodimo osiguravanjem zahtijevane duljine štapova.

To ćemo napraviti na sljedeći način.

Gustoću sile u štapu (i,j) koji ima zahtijevanu duljinu $\bar{l}_{i,j}$, računat ćemo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}. \quad (5.9)$$

Kako vrijedi da je, uz $S_{i,j}^{(k)} = S_{i,j}^{(k-1)}$,

$$\frac{q_{i,j}^k}{q_{i,j}^{k-1}} = \frac{l_{i,j}^{k-1}}{l_{i,j}^k}, \quad (5.10)$$

slijedi da je koeficijent kojim treba pomnožiti gustoću sile iz predhodnog koraka $\frac{l_{i,j}^{k-1}}{l_{i,j}^k}$, odnosno

$$q_{i,j}^k = q_{i,j}^{k-1} \frac{l_{i,j}^{k-1}}{l_{i,j}^k}. \quad (5.11)$$

Iz gornjeg izraza i iz izraza

$$S_{i,j} = q_{i,j} l_{i,j}, \quad (5.12)$$

dobit ćemo

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}. \quad (5.13)$$

5.2. PRIMJERI MREŽA S RUBNIM KABELIMA

5.2.1. Primjer 1 - Mreža s kabelima "paralelnim" s rubovima

Promatramo mrežu dimenzija 8x8m. Mreža se sastoji od pet kabela u približno x smjeru i pet kabela u y smjeru, te sadrži 25 čvorova.

Fiksne, ležajne točke su čvorovi 0, 4, 21 i 25. Čvorovi 0, 4 i 21 leže u jednoj ravnini (z=0), dok je čvor 4 na visini od 4m.

Funkcijom *make_nodes(nds, nd1, d)* zadajemo koordinate čvorova. Prvi argument funkcije je broj čvorova koje želimo generirati, drugi je koordinata prvog čvora, a treći predstavlja korak po osima koordinatnog sustava:

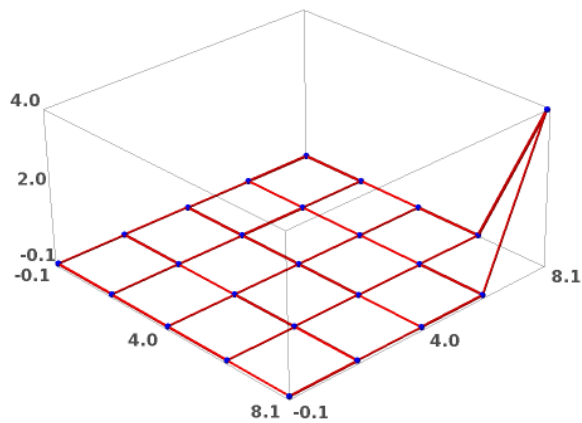
```
nds = make_nodes (5, [0., 0., 0.], [2., 0., 0.])
nds.extend (make_nodes (5, [0., 2., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (5, [0., 4., 0.], [2., 0., 0.]))...itd.
```

Nakon što smo definirali čvorove, funkcijom *cable(nd1, nds, step = 1)* ih povezujemo u kabele, a same kabele nakon toga funkcijom *make_elements_on_cables(cbls)* dijelimo na elemente omeđene s dva čvora:

```
cbls = [cable (0, 5, 1)]
cbls.append (cable (5, 5, 1))
cbls.append (cable (10, 5, 1))...itd.

els = make_elements_on_cables (cbls)
```

Mreža pretpostavljenih koordinata dana je na slici 26.



Slika 26.

Rubni čvorovi su

`supps = [0, 4, 20, 24].`

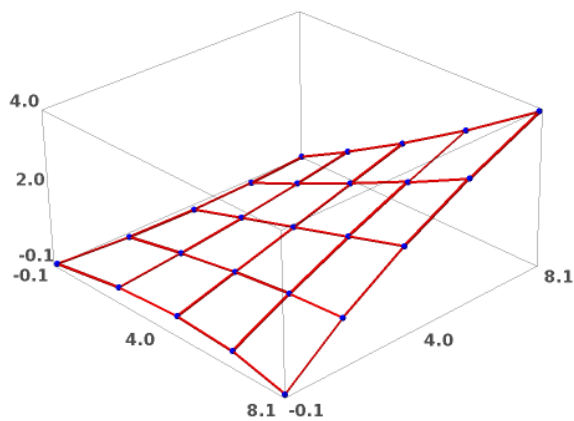
Rubni kabeli su

`bnd_cbls = [0, 4, 5, 9]`

U unutarnjim kabelima zadat ćemo jediničnu gustoću sila, a u rubnim kabelima 10:

```
qs = make_force_densities (len (els))
qs = set_value_on_elements (10., tcei[0], qs)
qs = set_value_on_elements (10., tcei[4], qs)
qs = set_value_on_elements (10., tcei[5], qs)
qs = set_value_on_elements (10., tcei[9], qs)
```

Nakon prvog koraka iteracije dobit ćemo mrežu prikazanu na slici 27.



Slika 27.

Duljine elemenata su

[2.02422151799884, 1.99726091950844, 1.99701685619016, 2.02495763206020, 1.85097479428020, 1.91036561077882, 1.90808888206519, 1.84517433881212, 1.83629254267640, 1.91427208900924, 1.91427208900924, 1.83629254267640, 1.95634043389947, 2.02330385189121, 2.03000088468678, 1.97421237815069...

Od čega su duljine rubnih kabela (ispisani su parovi broja elementa na rubnom kabeu i njegova duljina)

[(0, 2.02422151799884), (1, 1.99726091950844), (2, 1.99701685619016), (3, 2.02495763206020), (16, 2.23336348862141), (17, 2.21761027681734), (18, 2.23733568103318), (19, 2.29432319969438), (20, 2.02422151799884), (21, 1.99726091950844), (22, 1.99701685619016), (23, 2.02495763206020), (36, 2.23336348862141), (37, 2.21761027681734), (38, 2.23733568103319), (39, 2.29432319969438)]

Sile u unutarnjim kabelima su

[20.2422151799884, 19.9726091950844, 19.9701685619016, 20.2495763206020, 1.85097479428020, 1.91036561077882, 1.90808888206519, 1.84517433881212, 1.83629254267640, 1.91427208900924, 1.91427208900924, 1.83629254267640, 1.95634043389947, 2.02330385189121, 2.03000088468678, 97421237815069 ...itd.

a sile u rubnim kabelima

[20.2422151799884, 19.9726091950844, 19.9701685619016, 20.2495763206020, 22.3336348862141, 22.1761027681734, 22.3733568103318, 22.9432319969438, 20.2422151799884, 19.9726091950844, 19.9701685619016, 20.2495763206020, 22.3336348862141, 22.1761027681734, 22.3733568103319, 22.9432319969438]

Budući da sile u kabelima nisu jednake, nastavljamo s iteracijom.

Funkcijom *multistepFDM2* (*nodes*, *elems*, *supports*, *qs*, *fs*, *ls*, *steps*) pokrećemo postupak iterativnog određivanja ravnotežnog položaja.

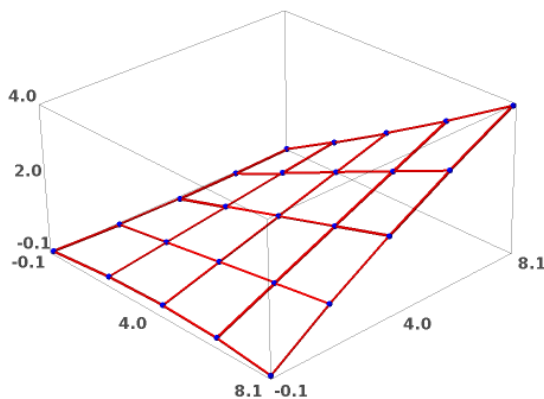
$f = \text{multistepFDM2}(\text{nds}, \text{els}, \text{supps}, \text{qs}, \text{ieifs}, \text{beils}, 10)$

gdje su

nds	koordinate čvorova mreže
els	elementi mreže
supps	ležajni čvorovi
gs	gustoća sila

ieifs	sile u unutrašnjim kabelima
beils	duljine rubnih kabela nakon prvog koraka iteracije (njih ćemo držati konstantnima kroz sve daljnje iteracije.)
10	broj koraka iteracije

Nakon deset koraka dobit ćemo sljedeću mrežu

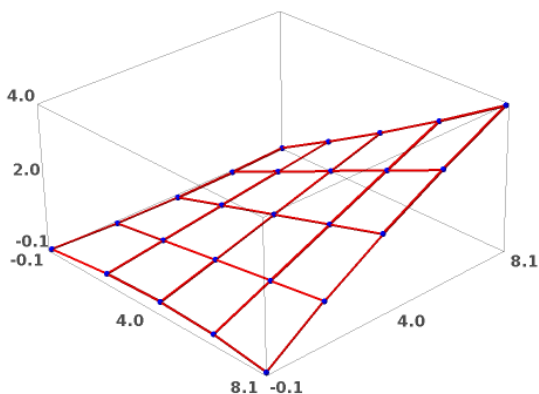


Slika 28.

Sile u kabelima su sad

[19.4551388987114, 19.4038481193728, 19.4059144205313, 19.4601492337860,
0.999245667257418, 1.00039660587223, 1.00039536639208,
0.999333325768955, 0.998955638946846, 1.00058825503463,
1.00056687017626, 0.999015212620784, 0.999324053489564,
1.00044225231459, 1.00038502243644, 0.999256090752847,....

Točnost, odnosno jednakost sila još nije dostatna pa radimo 50 iteracija.



Slika 29.

Sada će sile biti:

[16.9228525614790, 16.8650384393547, 16.8668043931134, 16.9271430050614,
0.999685769534387, 1.00001158549362, 1.00000786549159,
0.999738549591805, 0.999583167738501, 1.00001517481075,
1.00000764983098, 0.999647575956478, 0.999711695408941,
1.00002087872570, 1.00000942633227, 0.999739136001985,...

no, duljine elemenata su:

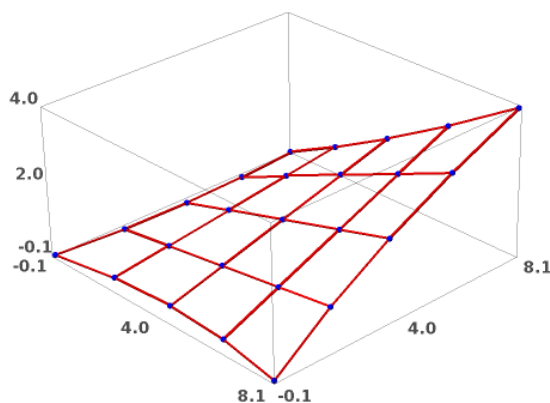
[2.02422151799884, 1.99726091950844, 1.99701685619016, 2.02495763206020,
2.23336348862141, 2.21761027681734, 2.23733568103318, 2.29432319969438,
2.02422151799884, 1.99726091950844, 1.99701685619016, 2.02495763206020,
2.23336348862141, 2.21761027681734, 2.23733568103319, 2.29432319969438]

Konačno, naredbom $f = \text{multistepFDM_wtol2}(\text{nds}, \text{els}, \text{supps}, \text{qs}, \text{ieifs}, \text{beils}, 1.e-4, 500)$ dobit ćemo broj koraka nakon kojeg je razlika vrijednosti sila manja ili jednaka od 0.0001. uz ograničenje na 500 koraka.

steps: 361

maximal relative error: 0.0000996315152235194

Konačna mreža prikazana je na slici 30.



Slika 30.

Sile u elementima su:

[11.0526287336010, 10.9628615771783, 10.9630998868734, 11.0533476969812,
0.999957000164106, 1.00000355433468, 1.00000285168576,
0.999928128623560, 0.999942074865301, 1.00000540163966,
1.00000356512853, 0.999900368484777, 0.999961122673679,
1.00000699958774, 1.00000393087220, 0.999927699646098,.....itd

Dok su duljine rubnih elemenata

[2.02422151799884, 1.99726091950844, 1.99701685619016, 2.02495763206020,
2.23336348862141, 2.21761027681734, 2.23733568103318, 2.29432319969438,
2.02422151799884, 1.99726091950844, 1.99701685619016, 2.02495763206020,
2.23336348862141, 2.21761027681734, 2.23733568103319, 2.29432319969438]

5.2.2. Primjer 2 - Mreže s dijagonalnim kabelima

Promatramo mrežu istih tlocrtnih dimenzija (8x8m), no u ovom primjeru kabeli će biti postavljeni dijagonalno.

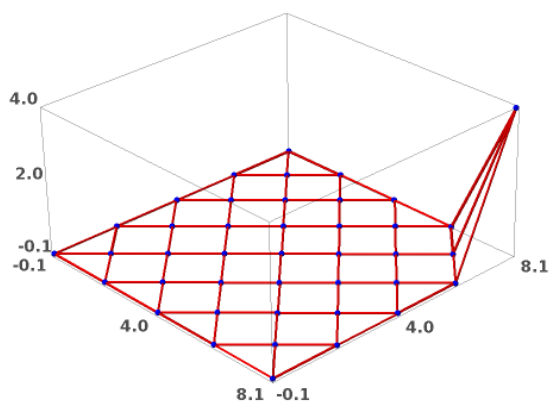
Ležajni čvorovi su čvorovi 0, 4, 36 i 40. Prva tri čvora leže u istoj ravnini (z=0), a četvrti čvor je na visini z = 4m.

Čvorove smo zadali funkcijom *make_nodes(nds, nd1, d)*, a kabele naredbom *cable(nd1, nds, step=1)*.

```
nds = make_nodes (5, [0., 0., 0.], [2., 0., 0.])
nds.extend (make_nodes (4, [1., 1., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (5, [0., 2., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (4, [1., 3., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (5, [0., 4., 0.], [2., 0., 0.]))....
```

<code>cbls = [cable (27, 3, 5)]</code>	+rubni kabeli
<code>cbls.append (cable (18, 5, 5))</code>	<code>cbls.append (cable (0, 5, 1))</code>
<code>cbls.append (cable (9, 7, 5))</code>	<code>cbls.append (cable (36, 5, 1))</code>
<code>cbls.append (cable (0, 9, 5))...</code>	<code>cbls.append (cable (0, 5, 9))</code>
	<code>cbls.append (cable (4, 5, 9))</code>

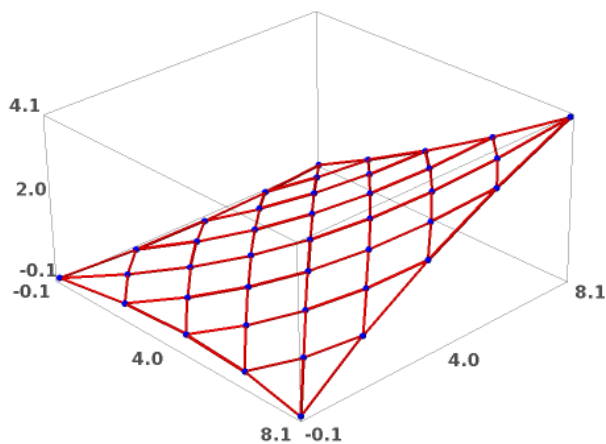
Mreža pretpostavljenih koordinata je



Slika 31.

U unutarnjim kabelima zadajemo jediničnu gustoću sila, a u rubnima deset puta veću.

Ovako zadana mreža će nakon prvog koraka iteracije izgledati kao na slici 32.



Slika 32.

Duljine elemenata kabela ovakve mreže su

[1.28679439551183, 1.33165287416639, 1.32945285433126, 1.34160967161392,
1.38322659876098, 1.45065857723343, 1.40472565314252, 1.37367436210465,
1.38001530917258, 1.42098614464600, 1.49510448062966, 1.60391576215307,
....itd

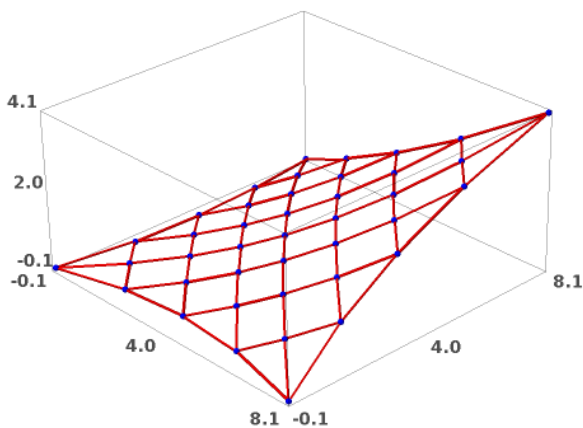
Kao i u prethodnom primjeru, vrijednosti duljine rubnih kabela koje smo dobili nakon prvog koraka iteracije, zadržat ćemo u narednim iteracijama.

Nakon 201 iteracije, greška će iznositi 0.0000979865533731195.

Sile u elementima bit će

[0.999929099898383, 0.999923231459865, 0.999992114427066,
0.999921954994081, 0.999916369863065, 0.999990493720513,
1.00002124647175, 0.999994227587988, 0.999918379701415,
0.999912998771888, 0.999992517804434, 1.00002111831489,....itd

Mreža nakon 201 iteracije prikazana je na slici



Slika 33.

Duljine elemenata rubnih kabela su

[2.08517838057810,1.90394871546531,1.93507956160844, 2.17734619997642, 2.23588112562700, 2.08574964023373, 2.18472724633928, 2.55676446799279, 2.08517838057809, 1.90394871546531, 1.93507956160844, 2.17734619997643, 2.23588112562700, 2.08574964023373, 2.18472724633928, 2.55676446799280]

Sada ćemo promotriti što će se dogoditi ako duljine elemenata rubnih kabela zadamo kao aritmetičku sredinu gore navedenih duljina elemenata (posebno za elemente svakog kabela).

le1 = mean (bels[0:4])
 le2 = mean (bels[4:8])
 le3 = mean (bels[8:12])
 le4 = mean (bels[12:16])

Ovakva će mreža postići grešku od 0.0001 nakon 208 iteracija.

Promotrit ćemo i slučaj da smo duljinu rubnih elemenata zadali kao maksimalnu vrijednost predhodno dobivenih duljina.

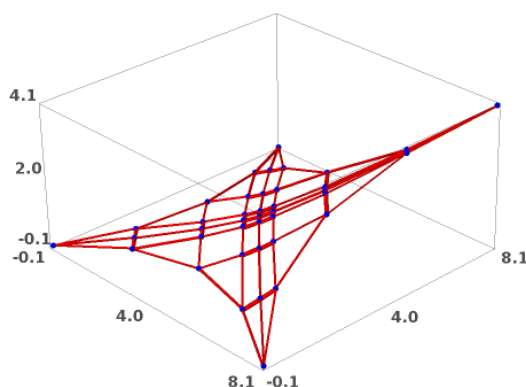
le1 = max (bels[0:4]) = 2.17734619997642
 le2 = max (bels[4:8]) = 2.55676446799279
 le3 = max (bels[8:12]) = 2.17734619997643
 le4 = max (bels[12:16]) = 2.55676446799280

Ovakva će mreža imati najveću grešku od 0.0001 nakon 224 iteracije,

No vrijednosti sila na rubnim kabelima bit će

4.15212904393938, 3.67358900308330, 3.87292567774709, 4.86954073333326, 2.56454729291002, 2.35938730326301, 2.59903772172544, 3.37102909614258, 4.15212904393931, 3.67358900308322, 3.87292567774701, 4.86954073333317, 2.56454729290998, 2.35938730326297, 2.59903772172539, 3.37102909614247]

Mreža je prikazana na slici



Slika 34.

Konačno, duljinu elemenata rubnih kabela zadat ćemo na sljedeći način. Na onim kabelima koji su horizontalni, duljine elemenata bit će 2m. Na dva kabela koji se spajaju u čvoru 40 duljinu elemenata ćemo dobiti kao četvrtinu duljine spojnice čvorova 0 i 40, odnosno 40 i 36. Na taj način uveli smo kinematičko ograničenje o kojem je prije bilo govora.

$$le1 = 2.$$

$$le2 = \sqrt{(8.0^2 + 4.0^2)} / 4.$$

$$le3 = 2.$$

$$le4 = le2$$

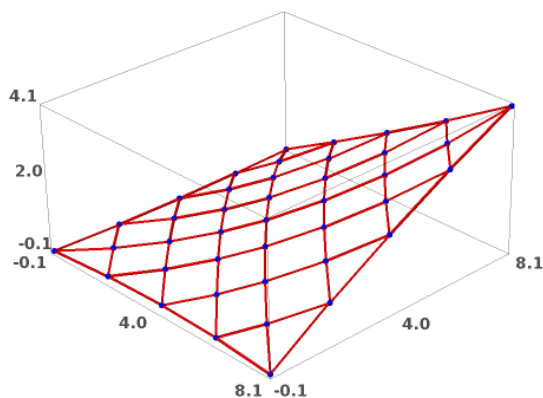
Potrebna su nam 262 koraka kako bi greška bila manja od 0.0001 (najveće greška iznosi 0.0000996618337774091).

Sile u unutrašnjim elementima su

[1.00009525990084, 1.00006445238412, 1.00002557582034, 1.00009830943936,
1.00006517169587, 1.00001720415404, 0.999971718570537, 1.00002506936934,
1.00009952161031, 1.00006518598732, 1.00001680949865, 0.999979526107642,
0.999929054460000, 0.999971087735287, 1.00002467070797,
1.00009966183378, 1.00006502200472, 1.00001653902248,...itd

a u rubnim kabelima

32.6801546435368, 32.6394488469280, 32.6819419951489, 32.8071910014383,
33.9090350170598, 33.9502082265966, 34.0658315699232, 34.2537634048499,
32.6801546435368, 32.6394488469280, 32.6819419951489, 32.8071910014383,
33.9090350170598, 33.9502082265966, 34.0658315699232, 34.2537634048498]



Slika 35.

Ako bismo zahtijevali veću točnost, na primjer 0.000001, bilo bi nam potrebno više od 2000 iteracija.

Nakon 2000 koraka, najveća bi greška sila iznosila 8.21950445395458e-6.

Sile u unutrašnjim i rubnim kabelima

[1.00000765973765, 1.00000597708426, 1.00000231385560, 1.00000779837924,
1.00000604151758, 1.00000178525141, 0.999997677014963, 1.00000228650235,
1.00000783186068, 1.00000604356566, 1.00000174834688, 0.999998132035983,
0.999993612362994, 0.999997621283756, 1.00000225647866,....itd

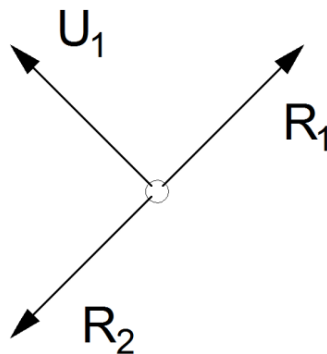
rubni

74.0349686735045, 74.0281341905517, 74.0692947992227, 74.1579334595450,
74.1018775600142, 74.1727108714119, 74.2870428643390, 74.4429925674815,
74.0349686735045, 74.0281341905517, 74.0692947992228, 74.1579334595450,
74.1018775600141, 74.1727108714118, 74.2870428643389, 74.4429925674813]

Duljine kabela tad su

[2.00046372436448, 2.00046393410719, 2.00046366743064, 2.00046292856563,
2.23657796042153, 2.23657764387534, 2.23657685012132, 2.23657559660392,
2.00046372436448, 2.00046393410719, 2.00046366743064, 2.00046292856564,
2.23657796042153, 2.23657764387534, 2.23657685012132, 2.23657559660392]

Vidimo da unatoč razmjerno velikim silama u rubnim kabelima, tražene duljine nismo ostvarili (greška je mnogo veća od greške u silama). No, to je sa statičkog stajališta i očito: tražene duljine bi značile da je konfiguracija sila u rubnim čvorovima kao na sljedećoj slici, a u takvoj je konfiguraciji ravnoteža nemoguća, (slika 36.).



Slika 36.

6. APROKSIMACIJA MEMBRANE MREŽOM UŽADI

Kao i u slučaju mreže užadi, traženje oblika prednapetih membrana dovest će nas do nelinearne jednačbe, tj. parcijalne diferencijalne jednačbe s dvije varijable. Ova jednačba za proizvoljne rubne uvjete neće imati zatvoreno rješenje. Dodamo li tome i činjenicu da je platno membrane fleksibilno te da mu se geometrija mijenja s nanošenjem opterećenja, problem postaje još složenijim.

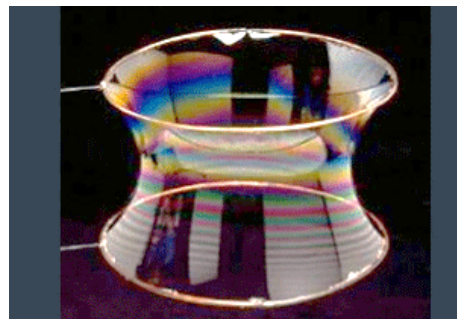
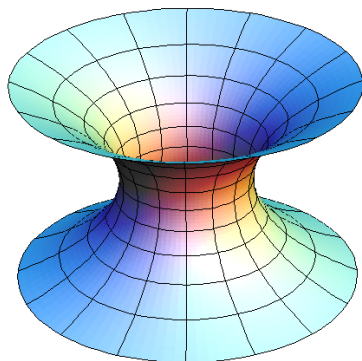
6.1. MINIMALNA PLOHA

Minimalna ploha je ona ploha koja ima najmanju ploštinu od svih ploha koje zadovoljavaju iste rubne uvjete. Ako proizvoljno razapetu zatvorenu žičanu petlju umočimo u sapunicu, sapunica će poprimiti oblik minimalne plohe za nametnute joj rubne uvjete. Minimalna ploha je ekonomičan konstrukcijski oblik zato što je utrošak materijala najmanji, a platno je svugdje podjednako iskorišteno zato što su naprezanja u svim točkama i smjerovima jednaka.

Minimalne plohe zadovoljavaju nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednačbu (Lagrangeovu jednačbu)

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (6.1)$$

Trivijano rješenje ove jednačbe je ravnina. No, ovo rješenje nije pogodno za prednapete nosive konstrukcije. Do prvog netrivialnog rješenja ove jednačbe došao je Euler i to prije nego li je Lagrange uopće formulirao općenitu jednačbu. Naime, Euler je rješavao poseban slučaj rotacijske minimalne plohe. Plohu koju je on dobio nazivamo katenoid. To je ploha koja nastaje rotacijom lančanice oko osi okomite na njezinu os.

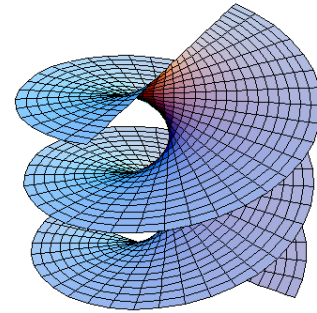


Slika 37. Katenoid (lijevo) i opna od sapunice u obliku katenoida (desno)

Do danas je analitičkim postupcima nađeno više rješenja Lagrangeove jednadžbe. Ovisno o tome kada su bili otkrivene, možemo ih podijeliti u nekoliko skupina [25]:

- **klasični primjeri:**

- ravnina (trivijalno rješenje),
- katenoid,
- helikoid;



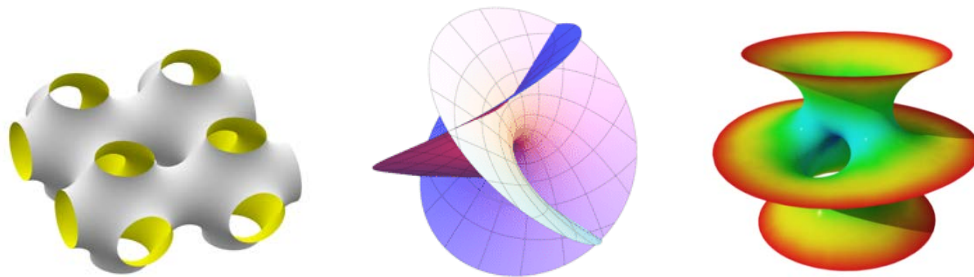
Slika 38. Helikoida

- **plohe otkrivene u 19.stoljeću:**

- Schwarzova minimalna ploha,
- Riemannova minimalna ploha,
- Enneperova ploha,
- Hannebergova ploha;

- **moderne plohe**

- gyroid,
- Scherkova ploha
($f(x, y) = \ln(\cos x / \cos y)$), koju ćemo obrađivati u primjeru aproksimacije membrane mrežom užadi
- Costina ploha.



Slika 39. Redom: Schwarzova minimalna ploha, Enneperova ploha, Costina ploha

U slučaju plitkih ploha, prve derivacije u Lagrangeovoj jednadžbi te njihovi kvadrati i produkti bit će mali, te ih se može zanemariti. Time dobivamo linearnu Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (6.2)$$

Iako su naše plohe rijetko kada dovoljno plitke da bismo Lagrangeovu jednadžbu mogli zamijeniti Laplaceovom, njezina nam rješenja daju početnu aproksimaciju rješenja koja će u većini slučajeva biti u području konvergencije određene numeričke metode kojom se Lagrangeova jednadžba rješava.

Uglavnom se danas za približno određivanje minimalnih ploha upotrebljavaju numeričke metode.

U literaturi se javlja pitanje aproksimiranja membrana mrežom kabela [11] što dovodi do pojednostavljenja cjelokupnog proračuna. Ovaj način proračuna ima dugu tradiciju u praksi, no mnogi upozoravaju na njezine nedostatke i nedovoljnu točnost [10,26].

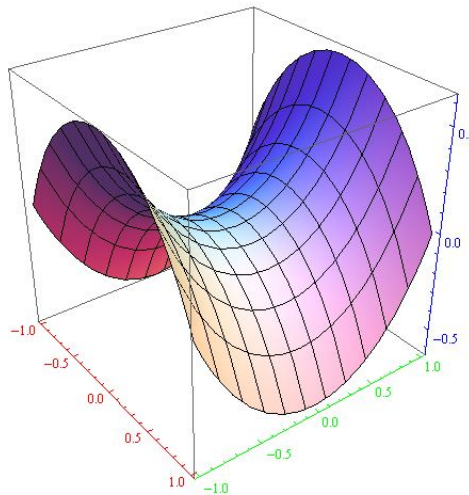
Naime, predlaže se da se prednapeta membrana zamijeni mrežom linijskih elemenata koji predstavljaju vlačno napregnute kabele [11]. Sile u štapovima koje dobijemo proračunom predstavljaju rezultantu naprezanja koja djeluju na određenoj širini dijela membrane (membrana se podijeli na vrpce određenih širina (u oba smjera) te se dobiju kvadratni elementi na čiju se širinu raspodijeli sila iz kabela koji je zamijenio taj dio membrane).

6.2. PRIMJERI

Promatramo Sherkovu minimalnu plohu $f(x,y) = \ln(\cos x / \cos y)$. Plohu ćemo aproksimirati s dvije različite mreže užadi i usporediti koordinate čvorova te utvrditi koliko odstupaju od minimalne plohe. Na temelju toga utvrdit ćemo je li aproksimacija membrane mrežom užadi korektna.

6.2.1. PRVA MREŽA - MREŽA S KABELIMA ČIJE SU TLOCRTNE PROJEKCIJE PRIBLIŽNO PARALELNE S TLOCRTNIM RUBOVIMA PODRUČJA.

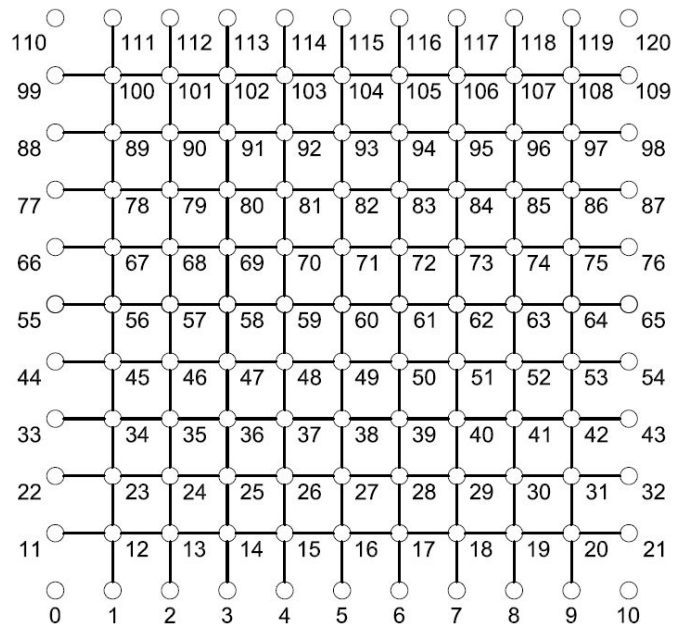
Promatramo minimalnu plohu na području $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$.



Slika 40. Ploha $f(x,y)=\ln(\cos x/\cos y)$

Mreža je dimenzija 20×20m. Sastoji se od devet kabela u x smjeru i devet kabela u y smjeru koji su na međusobnoj udaljenosti od 2,00 m te tlocrtno čine pravokutni raster. U sjecištu dvaju kabela nalazi se čvor. Ukupno ima 120 čvorova.

Rubne uvjete mreže, tj. koordinate rubnih čvorova dobit ćemo pomoću rubnih krivulja plohe na rubovima intervala.



Slika 41. Pravokutna mreža dimenzija 20x20m

Tablica 1. Rubni čvorovi

Čvorovi	Koordinate	Čvorovi	Koordinate
0, 110	0, 0, 0	6, 116	8, 0, 0.595492
1, 111	2, 0, 0.254236	7, 117	6, 0, 0.53397
2, 112	4, 0, 0.423661	8, 118	4, 0, 0.423661
3, 113	6, 0, 0.53397	9, 119	2, 0, 0.254236
4, 114	8, 0, 0.595492	10, 110	0, 0, 0
5, 115	10, 0, 0.615626		

Treba napomenuti da za primjenu metode gustoće sila ne treba zadavati koordinate unutarnjih čvorova, ali je to zbog preglednosti i određivanja povezanosti štapova i čvorova pogodno učiniti.

Koordinate čvorova zadajemo naredbom

make_nodes (nnds, nd1, dd) ,

gdje su

- nnds broj čvorova,
- nd1 koordinate prvog čvora ,
- dd korak po osima x, y ili z

```
nnds = make_nodes (11, [0., 0., 0.], [2., 0., 0.])
nnds.extend (make_nodes (11, [0., 2., 0.], [2., 0., 0.]))
nnds.extend (make_nodes (11, [0., 4., 0.], [2., 0., 0.]))
[2., 0., 0.]) ....itd.
```

Rubne čvorove zadajemo pojedinačno:

```
nds[1] = [2.,0.,2.54236]
nds[2] = [4.,0.,4.23661]
nds[3] = [6.,0.,5.33397]
nds[4] = [8.,0.,5.95492]
...itd
```

Kabele definiramo naredbom:

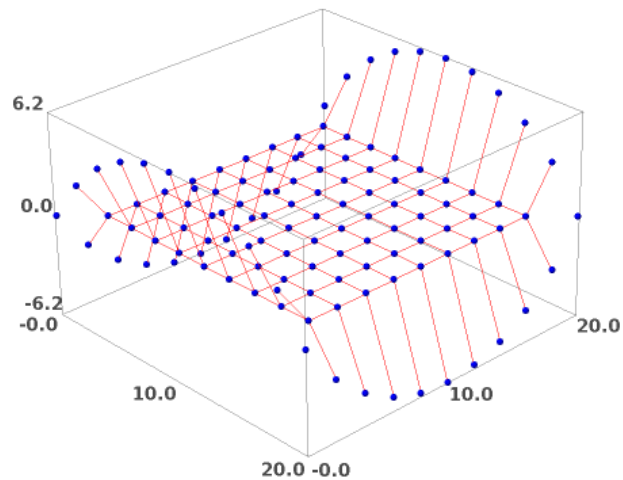
cable (početni čvor, broj elemenata, korak)

Generirano je po devet kabela u x i y smjeru te su podijeljeni na elemente između svakog para čvorova.

```
cb1s = [cable (11, 11, 1)]
cb1s.append (cable (22, 11, 1))
cb1s.append (cable (33, 11, 1))
...itd
```

els = make_elements_on_cables (cb1s)

Dobivena je mreža početnih, pretpostavljenih koordinata:



Slika 42. Zadane koordinate

Rubne (nepomične) čvorove zadali smo naredbom

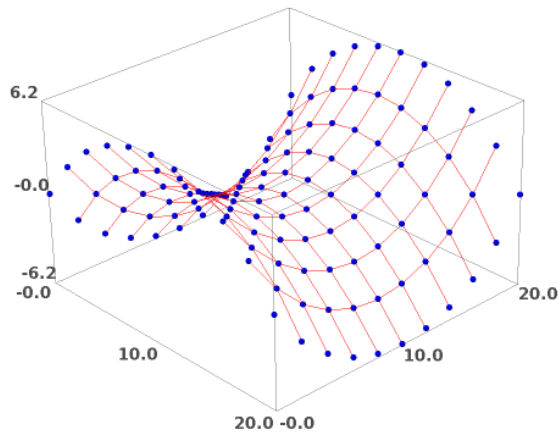
```
supps = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,21,22,32,33,43,44,54,55,65,66,76,77,87,88,98,99,
109,110,120,111,112,113,114,115,116,117,118,119]
```

Za svaki smo element zadali jediničnu gustoću sila

qs = make_force_densities (len (els))

Nakon toga slijedi prvi korak iteracije kojim smo dobili nove koordinate unutrašnjih čvorova:

$nc = FDM (nds, els, supps, qs)$



Slika 43. Mreža nakon prve iteracije

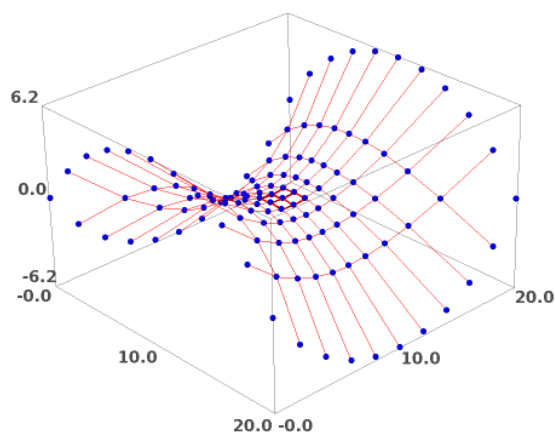
Naredbom

$list_of_element_forces (l1, qs)$

dobit ćemo sile u svakom elementu mreže:

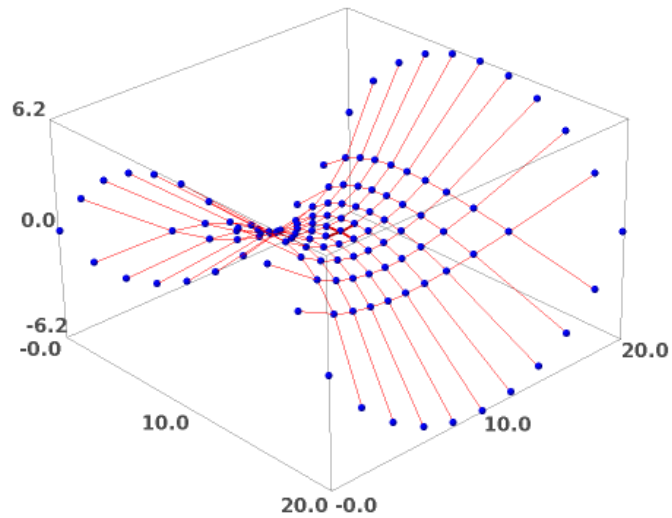
[3.23474796075367, 2.70316881574173, 2.34223260637401, 2.11954566915465,
2.01309319640836, 2.01309319640835, 2.11954566915466, 2.34223260637401, ...

Vidimo da se sile međusobno razlikuju, tako da dobivena mreža nije minimalna. Zbog toga nastavljamo s iteracijskim postupkom. Na slici xy prikazana je mreža nakon 10 koraka.



Slika 44. Mreža nakon deset iteracija

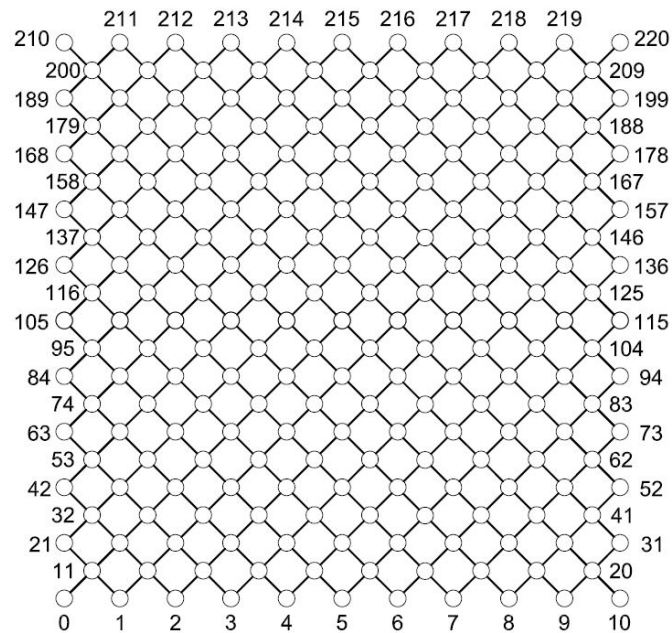
Nakon 206 koraka maksimalna greška razlike u vrijednostima sila iznosi 0.0000999915823798325, a mreža poprima oblik prikazan na slici 44.



Slika 45. Mreža nakon 206 iteracija

6.2.2. DRUGA MREŽA-MREŽA S DIJAGONALNIM KABELIMA:

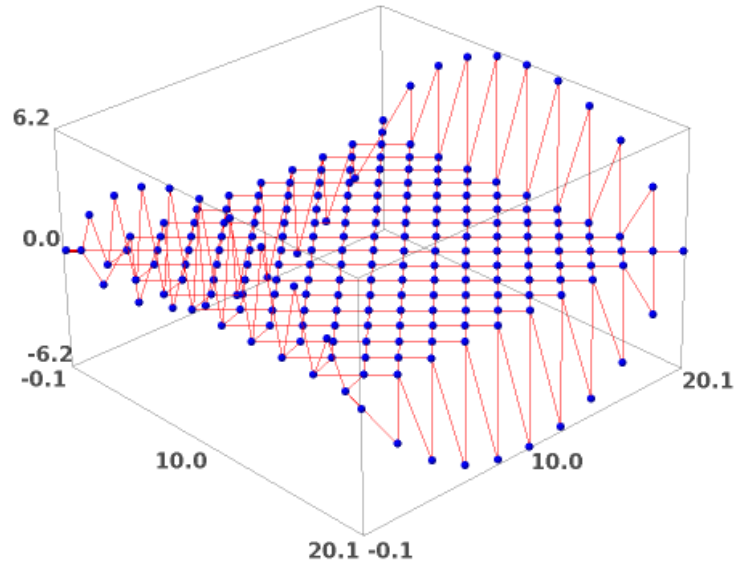
Mreža se sastoji od ukupno 38 kabela te ima 220 čvorova.



Slika 46. Mreža s dijagonalnim kablomima, dimenzija 20x20m

Čvorove i kabele definiramo na isti način kao i u prvoj mreži.

Dobivena je mreža pretpostavljenih koordinata:

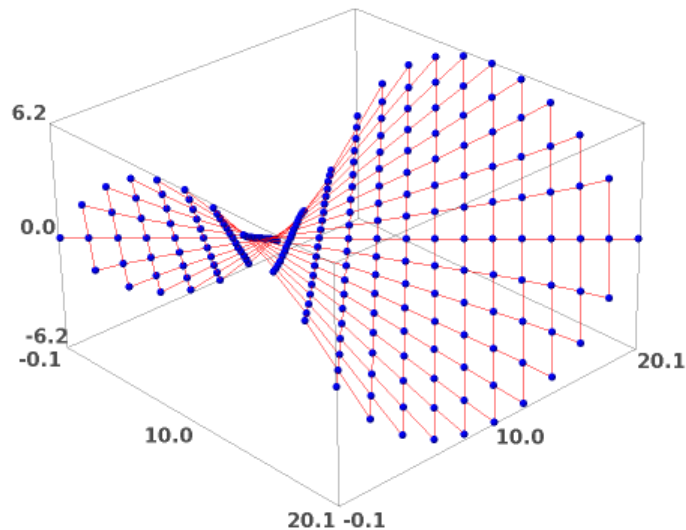


Slika 47. Zadane koordinate

Rubni su čvorovi:

$supps = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 31, 52, 73, 94, 115, 136, 157, 178, 199]$

Nakon zadavanje jediničnih gustoća sila i provedene prve iteracije, dobit ćemo sljedeću mrežu.

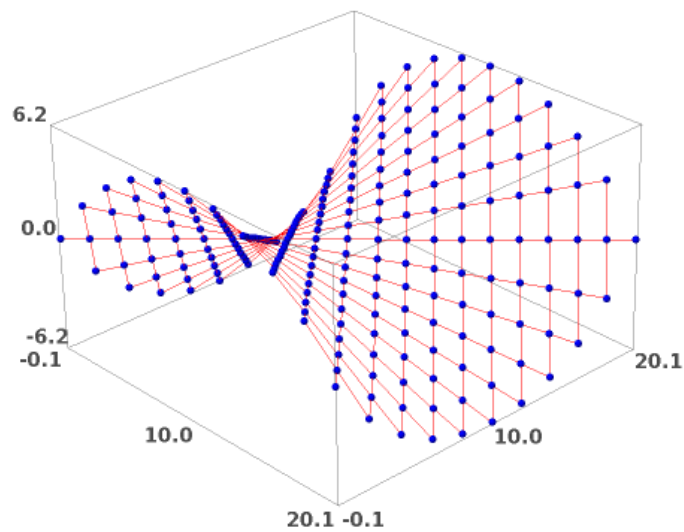


Slika 48. Mreža nakon prve iteracije

Uz sile u elementima

[2.90922573369617, 2.90922573369617, 2.52028446456230, 2.57384382833316, 2.57384382833316, 2.52028446456230, 2.23031493169481, 2.27834950983522, 2.30727378343351, 2.30727378343351, 2.27834950983522, 2.23031493169482, 2.01492393113775, 2.04408269798324, 2.06988960209417, 2.08520406286608, ...]

I sada se sile razlikuju, pa nastavljamo s iteracijskim postupkom.
Nakon 100 iteracija dobit cemo



Slika 49. Mreža nakon sto iteracija

Sile u elementima su sad

[1.00000000000000, 1.00000000000000, 0.999991837517625, 1.00000743324334,
1.00000743324334, 0.999991837517626, 1.00000337911284, 0.9999979266634695,
1.00001592518471, 1.00001592518471, 0.9999979266634692, 1.00000337911284,
1.00000496681914, 1.00000127965172,.....

Dakle, približno jednake (u okvirima zadane točnosti).

6.2.3. ANALIZA REZULTATA

U daljnjem tekstu napravljena je analiza dobivenih koordinata dviju mreža s minimalnom plohom.

Tablica 2. Prikaz koordinata minimalne plohe i mreže čije su tlocrtne projekcije kabela paralelne s tlocrtnim rubovima područja

Čvor	Pravokutna mreža kabela	Minimalna ploha
11	-2,54236	-2,54236
12	0	0.
13	0,86732	0,60447
14	1,36265	0,93226
15	1,62082	1,09848
16	1,70073	1,14923
17	1,62082	1,09848
18	1,36265	0,93226
19	0,86732	0,60450
20	0	0
21	-2,54236	-2,54236
22	-4,23661	-4,23661
23	-0,86732	-0,60450
24	0	0.
25	0,48861	0,32389
26	0,74132	0,48681
27	0,81907	0,53623
28	0,74132	0,48681
29	0,48860	0,32389
30	0	0
31	-0,86732	-0,60450
32	-4,23661	-4,23661
33	-5,33397	-5,33397
34	-1,36265	-0,93226
35	-0,48860	-0,32389
36	0	0
37	0,25163	0,16225
38	0,32878	0,21128
39	0,25163	0,16225
40	0	0

Tablica 3. Prikaz koordinata minimalne plohe i mreže s dijagonalnim kabelima

Čvor	Dijagonalni kabela	Minimalna ploha
11	0	0
12	2,22718	2,14369
13	3,66623	3,49932
14	4,53864	4,31058
21	-2,54236	-2,54236
22	0	0
23	1,92449	1,78372
24	3,11475	2,85185
25	3,76641	3,42520
32	-2,22718	-2,14369
33	0	0
34	1,63244	1,4604
35	2,58061	2,27883
42	-4,23661	-4,23661
43	-1,92449	-1,78372
44	0	0
45	1,35028	1,17024
46	2,06340	1,76775
53	-3,66623	-3,49932
54	-1,63244	-1,4604
55	0	0
56	1,07792	0,909246
63	-5,33397	-5,33397
64	-3,11475	-2,85185
65	-1,35029	-1,17024
66	0	0
67	0,81439	0,67217
74	-4,53864	-4,31058
75	-2,58061	-2,27883
76	-1,07792	-0,909246

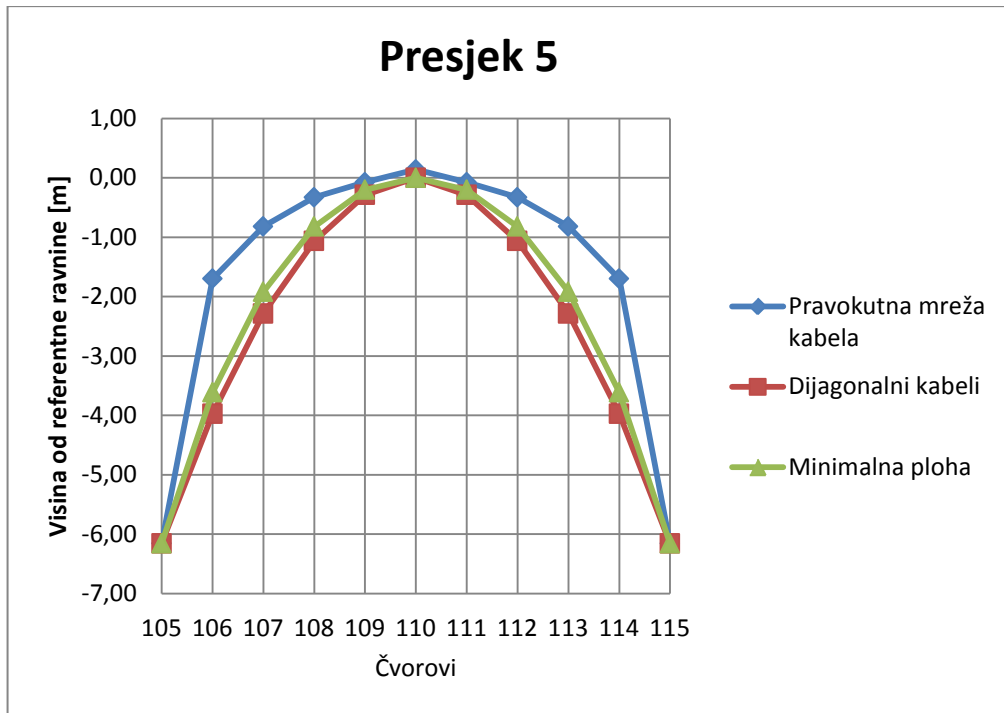
41	-0,48860	-0,32389
42	-1,36265	-0,93226
43	-5,33397	-5,33397
44	-5,95492	-5,95492
45	-1,62082	-1,09848
46	-0,74132	-0,486814
47	-0,25163	-0,16225
48	0	0
49	0,07700	0,0489305
50	0	0
51	-0,25163	-0,16225
52	-0,74132	-0,486814
53	-1,62082	-1,09848
54	-5,95492	-5,95492

77	0	0
84	-5,95492	-5,95492
85	-3,76641	-3,4252
86	-2,0634	-1,76775
87	-0,81439	-0,67216
88	0	0
95	-4,95249	-4,69211
96	-3,01622	-2,6472
97	-1,56116	-1,30569
98	-0,55515	-0,45081

Radi preglednosti usporedbe prikazan je i presjek po jednoj od ravnini simetrije plohe (njega je moguće prikazati jer u toj ravnini nije došlo do micanja kabela po x ili y smjeru).

Tablica 4. Koordinate čvorova u petoj ravnini

Čvor	Pravokutna mreža kabela	Dijagonalni kabela	Minimalna ploha
105 (55)	-6,15626	-6,15626	-6,15626
106 (56)	-1,70074	-3,97425	-3,61391
107 (57)	-0,81908	-2,28513	-1,91965
108 (58)	-0,32879	-1,06545	-0,82229
109 (59)	-0,07700	-0,28895	-0,201348
110 (60)	0,14074	0,00000	0
111 (61)	-0,07700	-0,28895	-0,201348
112 (62)	-0,32879	-1,06545	-0,82229
113 (63)	-0,81908	-2,28513	-1,91965
114 (64)	-1,70074	-3,97425	-3,61391
115 (65)	-6,15626	-6,15626	-6,15626



Slika 50.

7. ZAKLJUČAK

U radu su razrađeni primjeri primjene proširenog iteracijskog postupka utemeljenog na linearnoj metodi gustoća sila.

Na primjeru mreža užadi prikazano je kako se neki problemi koji se mogu javiti kod rješavanja klasičnom metodom gustoća sila mogu uspješno riješiti primjenom ove metode i uvođenjem kinematičkih ograničenja.

Metoda je bila primijenjena i na pokušaju aproksimacije membrane (minimalne plohe) mrežom užadi. Dana su dva primjera s dvije različite mreže užadi; mreža s kabelima čije su tlocrtne projekcije približno paralelne s tlocrtnim rubovima područja, te mreža s dijagonalnim kabelima. Pokazano je da je ovakav način aproksimacije nekorektan iako se često primjenjuje u praksi.

8. LITERATURA

- [1] Berger, H., *Light Structures, Structures of Light. The Art and Engineering of Tensile Architecture*, Birkhauser, Basel, 1996.
- [2] Berger, H., "Structural Form in Architecture", *Structure Magazine*, pp. 38-41, 2008.
- [3] (2013, travanj) [Online]. <http://www.top-ten-10.com/architecture/bridges-single-span.htm>
- [4] enggpedia.com (2013) [Online]. *Design & Construction of Megastructure Akashi Kaikyo Suspension Bridge*
- [5] W. Nerdinger, Ed., *Frei Otto, Complete Works - Lightweight Construction, Natural Design*, Birkhauser, Basel, 2005.
- [6] Westland.net. (2013) [Online]. <http://www.westland.net/expo67/map-docs/architecture.htm>
- [7] Holgate, A., *The Art of Structural Engineering: The Work of Jorg Schlaich and his Team*, Edition Axel Menges, London, 1997.
- [8] Vassilopoulou, I., "Nonlinear Dynamic Response and Design of Cable Nets," *National Technical University of Athens, Atena, Doctoral thesis*, str. 53-57, 2011.
- [9] Lewis, W. J., *Tension Structures. Form and Behaviour*, Thomas Telford, London, 2003.
- [10] Buchholdt, H. A., *An Introduction to Cable Roof Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [11] Dvornik, J. and Lazarević, D., "Viseće konstrukcije od platna i užadi", *Građevni godišnjak '97*. Zagreb: HGDI, 1997, pp. 239-297.
- [12] Agryris, J. H., Angelopoulos, T., and Bichat, B., "A general method for form finding of lightweight tension structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 3, pp. 135-149, 1974.
- [13] Dvornik, J. and Lazarević, D., "Prednapete gipke konstrukcije od platna i užadi," *Građevinar*, vol. 47, pp. 185-199, 1995.
- [14] Linkwitz, K., "About form finding of double-curved structures," *Engineering Structures*, vol. 21, pp. 709-718, 1999.
- [15] Tabrok, B. and Qin, Z., "Nonlinear analysis of tension structures," *Computers & Structures*, vol. 45, pp. 973-984, 1992.
- [16] Tibert, G., *Numerical Analysis of Cable Roof Structures*, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1999.
- [17] Schek, H. J., "The force density method for form finding and computation of general networks," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 3, pp. 115-134, 1974.
- [18] Gidak, P. and Fresl, K., "Programming the force density method," *IASS-APCS, Form spatial structures to space structures*, Seoul, South Korea, 2012, p. 197.

- [19] Kelley, C. T., *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995.
- [20] Bićanić, N. and Johnson, K. H., "Who was Raphson?," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 148-152, 1979.
- [21] Dvornik, J., Lazarevic, D., and Fresl, K., "The Fractal Nature of Form Finding Equations," *Computational mechanics in the UK - 11th Annual Conference of the Association for Computational Mechanics in Engineering*, University of Strathclyde, Glasgow, 2003, pp. 201-204.
- [22] Concus, P., "Numerical solution of the minimal surface equation," *Mathematics of Computation*, vol. 21, pp. 340-350, 1967.
- [23] Meis, T., "Zur Diskretisierung nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen," *Computing*, vol. 21, pp. 344-352, 1971.
- [24] Sanchez, J., Serna, M.A., Morer, P., "A Multi-step force-density method and surface fitting approach for the preliminary shape design of tensile structures", *Engineering Structures*, vol. 9, pp. 1966-1976, 2009.
- [25] (2013, travanj) [Online]. http://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface
- [26] Veenendaal, D., Block, P., "An Overview and comparison of structural form finding methods for general networks", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, pp. 3741-3753, 2012.