

GRAĐEVINSKI FAKULTET SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

ZAVRŠNI RAD

IZ PREDMETA GRAĐEVNA STATIKA II

NA TEMU:

**TEOREM O STACIONARNOJ VRIJEDNOSTI
POTENCIJALNE ENERGIJE**

Mentor: prof.dr.sc. Krešimir Fresl

Studentica: Marina Brkić, 0082040666

Zagreb, rujan, 2011.

SADRŽAJ

1.	UVOD	3
2.	DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA RAVNOTEŽE UŽETA	4
2.1.	IZVOD JEDNADŽBE	4
2.2.	RUBNI UVJETI.....	9
2.3.	POSTAVKA RUBNOG PROBLEMA	10
3.	TEOREM O VIRTUALNOM RADU.....	12
4.	TEOREM O MINUMUMU POTENCIJALNE ENERGIJE.....	15
4.1.	FUNKCIONALI.....	15
4.2.	DERIVACIJA FUNKCIONALA.....	16
4.3.	FUNKCIONAL ENERGIJE UŽETA	17
4.4.	OPĆENITIJI OBLIK FUNKCIONALA I EULER-LAGRANGEOVA JEDNADŽBA ...	18
5.	KONSTRUKCIJE OD PLATNA.....	20
5.1.	SPECIFIČNI PROBLEMI: ODREĐIVANJE OBLIKA I ODREĐIVANJE KROJA.....	20
5.1.1.	ODREĐIVANJE OBLIKA	20
5.1.2.	ODREĐIVANJE KROJA	20
5.1.3.	OSTALI PROBLEMI.....	21
5.2.	FIZIČKI I MATEMATIČKI MODEL.....	21
5.3.	OPNA OD SAPUNICE.....	23
5.3.1.	FUNKCIONAL ENERGIJE	23
5.3.2.	FUNKCIONAL NA PROSTORU FUNKCIJA DVIJU VARIJABLI.....	24
5.4.	MINIMALNA PLOHA	25
5.5.	JEDNADŽBE KONAČNIH RAZLIKA	27
6.	PRIMJERI.....	30
6.1.	PRIMJER 1.	30
6.2.	PRIMJER 2.	31
6.3.	PRIMJER 3.	32
6.4.	PRIMJER 4.	33

6.5.	PRIMJER 5.	35
7.	NAPOMENE O MINIMALNOJ MREŽI	37
7.1.	GEODETSKA MREŽA	37
7.2.	METODA 'GUSTOĆE SILA'	38
8.	ZAKLJUČAK	40
9.	LITERATURA.....	41

1. UVOD

Uobičajene građevine od betona, čelika ili drva imaju dvije glavne karakteristike: krutost i težinu. Upravo ih te karakteristike čine stabilnima i sposobnima nositi vanjska opterećenja. Okviri prenose opterećenje pomoću krutosti i otpornosti na savijanje, dok zidovi i masivni lukovi stabilnost održavaju i svojom težinom. U svim vlačnim konstrukcijama pa tako i u prednapetim konstrukcijama od platna ili užadi, težina i krutost nisu dostatne konstrukcijske značajke kojima konstrukcija može preuzeti opterećenja te ostati stabilna i zadržati funkciju kojoj je namijenjena. Konstrukcije od platna vrlo su lagane te je njihova težina gotovo zanemariva, a materijali su fleksibilni. Takvim su konstrukcijskim sustavima za stabilnost i mehaničku otpornost potrebne druge značajke. Komponente takvog sustava zahtijevaju razmještaj u poseban geometrijski oblik - plohu (engl. *surface shape*) kad su podvrgnute prednaponskim silama. Oblik plohe koji će konstrukcija od vlačnih elemenata zauzeti nije unaprijed predodređen niti ga možemo unaprijed znati. Nakon što su određeni rubovi i ležajna mjesta konstrukcije te određena unutarnja naprezanja u neopterećenom stanju (engl. *prestress pattern*), postajat će samo jedan trodimenzionalni oblik plohe u kojem će konstrukcija biti u ravnoteži u svim svojim točkama. Upravo će tom obliku pripadati minimum potencijalne energije.

U ovom radu bavit ću se teoremom o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije, a kao primjer koji se sve češće i češće primjenjuje su i viseće konstrukcije od platna i užadi. Bavit ću se problemima nalaženja oblika konstrukcija od platna te matematičkim i fizičkim modelima potrebnima za proračun stabilnosti visećih konstrukcija od platna.



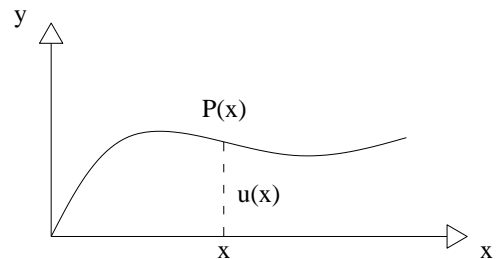
Slika 1. Canada Place, Vancouver, British Columbia

2. DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA RAVNOTEŽE UŽETA

2.1. IZVOD JEDNADŽBE

Proučavamo ravnotežni položaj užeta na koje djeluje zadana vanjska sila. Uzet ćemo da na odsječku $[0, l]$ na osi x leži nedeformirano uže. Pod utjecajem vanjske sile uže se deformira. Pretpostavit ćemo da je ta sila slaba tako da se deformirani položaj užeta malo razlikuje od segmenta $[0, l]$. Ograničit ćemo se na ravninski problem: pretpostavit ćemo da je vanjska sila paralelna ravnini xy , tako da i deformirana žica leži u ravnini xy .

Pri deformaciji točka na mjestu x nedeformirane žice prijeđe u neki položaj $P(x)$. Pomak $\overrightarrow{xP(x)}$ ima uzdužnu i poprečnu komponentu. Pretpostavit ćemo da se uzdužni pomak (pomak u smjeru osi x) može zanemariti. Poprečni pomak, progib (smjer osi y), točke x označit ćemo sa $u(x)$ (sl.1).



Slika 2. Pomak točke na mjestu x

Deformirana žica tada ima jednadžbu

$$y = u(x). \quad (1)$$

Derivaciju $u'(x)$ nazivamo deformacijom na mjestu x . Pretpostavka da je deformacija mala izražava se uvjetom

$$|u'(x)| \ll 1 \quad \text{za svako } x. \quad (2)$$

Iz jednakosti

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(\xi) d\xi \quad (3)$$

dobivamo

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_0^x u'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^x |u'(\xi)| d\xi \ll \int_0^x d\xi = x \leq l \quad (4)$$

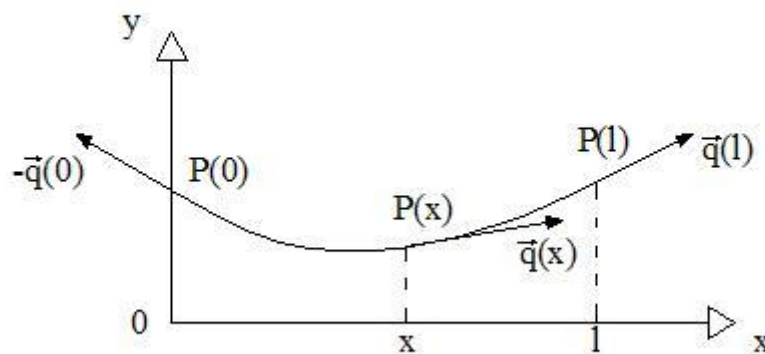
ili

$$\frac{|u(x) - u(0)|}{l} \ll 1 \quad (5)$$

Prema tome, pri maloj deformaciji relativni progib $u(x) - u(0)$ je (po apsolutnoj vrijednosti) malen u odnosu na duljinu žice.

Ako se žica pod utjecajem vanjskih sila nalazi u ravnoteži, funkcija u (ravnotežni progib) zadovoljava diferencijalnu jednadžbu koju ćemo izvesti na temelju dobro nam poznatog uvjeta ravnoteže sila: ako je tijelo u ravnoteži, zbroj svih sila koje djeluju na bilo koji dio tijela jednak je nuli. Da bismo primjenili taj uvjet moramo poznavati sile koje djeluju na proizvoljni, izdvojeni dio deformirane žice. To su unutarnja kontaktna i vanjska linijska sila.

Unutarnja kontaktna sila opisuje djelovanje jednog komada žice na drugi koji mu je susjedan. Ta je sila potpuno određena položajem kontakta, tj. ne ovisi o veličini izdvojenog komada. Silu kojom dio $P(x)P(l)$ djeluje na dio $P(0)P(x)$ označit ćemo sa $\vec{q}(x)$. Dio $P(0)P(x)$ djeluje na dio $P(x)P(l)$ silom $-\vec{q}(x)$ (sl 2.).



Slika 3. Djelovanje unutarnje kontaktne sile

Funkcija $\vec{q}(x)$ definirana je i na krajevima $x=0$ i $x=l$: $-\vec{q}(0)$ i $\vec{q}(l)$ vanjske su kontaktne sile. Ako je $x_1 < x_2$, na dio $P(x_1)P(x_2)$ djeluje rezultanta kontaktnih sila

$$\vec{q}(x_2) - \vec{q}(x_1). \quad (6)$$

Neka je $\vec{t}(x)$ jedinični tangencijalni vektor užeta u točki $P(x)$:

$$\vec{t}(x) = \frac{\vec{i} + u'(x)\vec{j}}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}. \quad (7)$$

Zbog (2) je:

$$1 + (u'(x))^2 \approx 1, \quad (8)$$

pa je

$$\vec{t}(x) = \vec{i} + u'(x)\vec{j}. \quad (9)$$

Budući da uzimamo da su flekcijska i posmična krutost užeta zanemarive, kontaktna je sila tangencijalna na užu:

$$\vec{q}(x) = a(x)\vec{t}(x), \quad (10)$$

gdje je $a(x)$ napetost žice u točki $P(x)$. Pretpostaviti ćemo da je užu napeto u svakoj točki, tj. da vrijedi

$$a(x) > 0 \text{ za svako } x \in [0, l]. \quad (11)$$

Iz (9) i (10) slijedi

$$\vec{q}(x) = a(x)\vec{i} + a(x)u'(x)\vec{j}. \quad (12)$$

Stavljajući $\vec{q}(x) = q_x(x)\vec{i} + q_y(x)\vec{j}$, iz (12) dobivamo

$$q_x(x) = a(x), \quad (13)$$

$$q_y(x) = a(x)u'(x). \quad (14)$$

Prema (13) uzdužna je kontaktna sila napetost užeta. Pretpostavka (11) posebno znači da su $q_x(l) > 0$ i $q_x(0) > 0$.

Vanjska linijska sila raspoređena je po užetu. Neka je $\vec{f}(x) = f_x(x)\vec{i} + f_y(x)\vec{j}$ linijska gustoća te sile, tj. vanjska sila po jedinici duljine užeta. Kako zbog (8) za element luka užeta imamo

$$ds = \sqrt{1 + (u')^2} dx \approx dx, \quad (15)$$

pod veličinom $\vec{f}(x)$ možemo razumijevati silu po jedinici duljine nedeformirane žice. Ukupna linijska sila koja djeluje na komad $P(x_1)P(x_2)$ za $(x_1 < x_2)$ jednaka je

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{f}(x) dx = \vec{i} \int_{x_1}^{x_2} f_x(x) dx + \vec{j} \int_{x_1}^{x_2} f_y(x) dx. \quad (16)$$

Prvi je član na desnoj strani uzdužna, a drugi poprečna linijska sila.

Sada možemo izraziti uvjet ravnoteže sile. Izdvojiti ćemo dio $P(0)P(x)$ za proizvoljan x . Na njega prema (6) i (16) djeluju rezultanta kontaktnih sila $\vec{q}(x) - \vec{q}(0)$ i linijska sila $\int_0^x \vec{f}(\xi) d\xi$. Ako je žica u ravnoteži, onda je

$$\vec{q}(x) - \vec{q}(0) + \int_0^x \vec{f}(\xi) d\xi = 0, \quad (17)$$

ili u komponentama:

$$q_x(x) - q_x(0) + \int_0^x f_x(\xi) d\xi = 0, \quad (18)$$

$$q_y(x) - q_y(0) + \int_0^x f_y(\xi) d\xi = 0, \quad (19)$$

Jednadžba (18) izražava napetost $q_x(x) = a(x)$ pomoću vanjskih uzdužnih sila:

$$a(x) = a(0) - \int_0^x \vec{f}(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Iz toga slijedi $a(l) = a(0) - \int_0^l f_x(\xi) d\xi$, ili $a(0) = a(l) - \int_0^l f_x(\xi) d\xi$. Uvrštavajući to u (20)

dobivamo drugi izraz za napetost:

$$a(x) = a(l) - \int_x^l f_x(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Prema (21) napetost u točki $P(x)$ jednaka je ukupnoj uzdužnoj vanjskoj sili koja djeluje na dio $P(x)P(l)$, a prema (20) ukupnoj uzdužnoj vanjskoj sili koja djeluje na dio

$P(0)P(x)$. Budući da vanjske sile smatramo poznatim, i napetost $a(x)$ smatrat ćemo zadanom funkcijom. Posebno, za $f_x=0$ dobivamo $a(0)=a(x)=a(l)$. Dakle, ako je uže napeto samo vanjskim kontaktnim silama, napetost je konstantna.

Jednadžba (19) opisuje poprečnu ravnotežu užeta. Uvedemo li oznake $q_y=q$, $f_y=f$, dobivamo

$$q(x) - q(0) + \int_0^x f(\xi) d\xi = 0. \quad (22)$$

Vežu poprečne kontaktne sile i poprečne deformacije daje jednadžba (14) koja se zove zakon ponašanja, a u novoj oznaci on glasi

$$q(x) = a(x)u'(x). \quad (23)$$

Uvrštavajući (23) u (22) dobivamo:

$$a(x)u'(x) - a(0)u'(0) + \int_0^x f(\xi) d\xi = 0 \quad (24)$$

To je integralni oblik zakona ravnoteže užeta ili integralna jednadžba ravnoteže užeta.

Derivirajući (24) po x dobivamo

$$(a(x)u'(x))' + f(x) = 0 \quad (25)$$

ili $-(a(x)u'(x))' = f(x)$, to jest $-q'(x) = f(x)$. (26)

Izraz (25) je diferencijalni oblik zakona ravnoteže užeta ili **diferencijalna jednadžba ravnoteže užeta**, a izraz (26) diferencijalni odnos unutarnje i vanjske sile. Naravno, iz (25) integriranjem dobimo (24) što znači da su te jednadžbe ekvivalentne.

Jednadžba ravnoteže (26) je obična linearna diferencijalna jednadžba drugog stupnja za funkciju u u kojoj je a koeficijent, a f slobodni član ili desna strana jednadžbe. Jednadžba je homogena ako je $f=0$, a nehomogena ako je $f \neq 0$. Funkcija u koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže zove se ravnotežno (stacionarno) stanje ili ravnotežni položaj (progib).

2.2. RUBNI UVJETI

Uz zadane funkcije a i f jednačba ravnoteže (26) ima opće rješenje u koje ulaze dvije proizvoljne konstante. Prema tome ona ima beskonačno mnogo rješenja. Nas zanima rješenje koje predstavlja ravnotežni progib užeta u zadanim vanjskim uvjetima. Osim podataka a i f , tim uvjetima pripadaju i poprečne sile na krajevima ili položaji krajeva. Ti se podaci opisuju rubnim uvjetima.

Ako je na kraju $x=0$ zadan progib u_0 , onda je

$$u(0)=u_0. \quad (27)$$

U tom slučaju poprečna sila na kraju nije zadana, nego se očituje kao reakcija fiksiranog položaja. Ako je $u_0=0$ kažemo da je kraj učvršćen. Ako je $u_0 \neq 0$, kažemo da je zadan prisilni pomak. Najjednostavniji način da se kraj učvrsti je onaj na glazbenim instrumentima. Ako je za kraj obješen uteg mase $M > 0$ (kojim se realizira napetost) onda je taj kraj nužno učvršćen. Naime, pretpostavka da je vanjska poprečna sila slaba znači da je ona mnogo manja od napetosti, u našem slučaju od težine utega. Zbog zakona ravnoteže ta sila ne može podići uteg.

Ako je na kraju $x=0$ zadana poprečna kontaktna sila $q_0=0$, onda je

$$q(0)=q_0. \quad (28)$$

Uzimajući u obzir (23) i (11) umjesto (28) pišemo

$$u'(0) = c = \frac{q_0}{a(0)}. \quad (29)$$

Isti tipovi rubnih uvjeta definiraju se za kraj $x=l$.

Poopćenje uvjeta (27) i (29) su rubni uvjeti

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = c, \quad (30)$$

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = d, \quad (31)$$

gdje su $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c$ i d zadani brojevi koji zadovoljavaju nejednakosti

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0, \quad (32)$$

$$\gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0. \quad (33)$$

Ako je $\alpha=0$, rubni uvjet (30) je geometrijski ili Dirichletov, a ako je $\beta=0$ on je prirodni ili Neumannov. Ako su $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$, rubni je uvjet mješoviti ili Robinov. Učvršćenom kraju odgovara Dirichletov, a slobodnom Neumannov rubni uvjet. Uvjet (30) je homogen ako je $c=0$, a nehomogen ako je $c \neq 0$.

Problem nalaženja rješenja jednadžbe (26) koje zadovoljavaju uvjete (30) i (31) zove se ravnotežni rubni problem. Očekujemo da će uvjeti (30) i (31) biti dovoljni za jednoznačno određivanje proizvoljnih konstanta u općem rješenju jednadžbe (26). Drugim riječima, očekujemo da rubni problem ima jedinstveno rješenje. No, budući da nepoznata funkcija u opisuje ravnotežni položaj užeta, za jedinstveno rješenje barem jedan rubni uvjet mora biti geometrijski.

2.3. POSTAVKA RUBNOG PROBLEMA

Budući da u našim razmatranjima upotrebljavamo postupke diferencijalnog i integralnog računa, moramo pretpostaviti da funkcije a, f, u posjeduju "dovoljnu glatkost". U tom pogledu integralni i diferencijalni oblik zakona ravnoteže nisu potpuno ekvivalentni. Diferencijalna jednadžba (26) traži da funkcija f bude neprekidna, da funkcija a ima neprekidnu prvu, a funkcija u neprekidnu drugu derivaciju. Često, međutim, funkcije f i a' imaju u konačnom broju točaka skokove. Integralna jednadžba (24) i tada ima smisla. U njoj se pojavljuje funkcija a , ali ne i a' .

Nadalje, iz te jednadžbe odmah slijedi da je funkcija au' neprekidna (jer je integral funkcije koja ima konačan broj skokova neprekidna funkcija gornje granice). Ako je a neprekidna, onda je funkcija u' nužno neprekidna. Međutim, u točki x_0 u kojoj funkcija f ima skok, funkcija $u(x)$ nema drugu derivaciju ($u''(x)$ ima skok), pa u takvoj točki nije zadovoljena diferencijalna jednadžba ravnoteže. Umjesto toga imamo samo uvjete neprekidnosti progiba i njegove derivacije:

$$u(x_0+dx)=u(x_0-dx), \quad (34)$$

$$u'(x_0+dx)=u'(x_0-dx). \quad (35)$$

Područje $[0, l]$ na kojem rješavamo diferencijalnu jednadžbu moramo stoga podijeliti na područja $[0, x_0]$ i $[x_0, l]$ i uvjete (34) i (35) uvesti kao dodatne rubne uvjete. Ako, međutim, funkcije a i u imaju neprekidnu prvu derivaciju i ako je f neprekidna, tada iz jednadžbe (29)

slijedi da au' ima neprekidnu prvu derivaciju, tj. da funkcija u ima neprekidnu drugu derivaciju i da, prema tome, zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (26). (Naime, ako je funkcija f neprekidna i ako je $g(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$, tada je $g'=f$, pa je g' neprekidna).

3. TEOREM O VIRTUALNOM RADU

Neka je u ravnotežno stanje, to jest

$$q' + f = 0, \quad q = au'. \quad (1)$$

Uzmemo li kakvu god funkciju v , pomnožimo (36) sa v i integriramo, dobivamo

$$\int_0^l q' v dx + \int_0^l f v dx = 0. \quad (2)$$

Prvi član na lijevoj strani transformirat ćemo parcijalnom integracijom:

$$\int_0^l q' v dx = \int_0^l (qv)' dx - \int_0^l qv' dx = q(l)v(l) - q(0)v(0) - \int_0^l qv' dx \quad (3)$$

Sada iz (2) dobivamo

$$q(l)v(l) - q(0)v(0) - \int_0^l qv' dx + \int_0^l f v dx = 0. \quad (4)$$

Interpretiramo li funkciju v kao polje virtualnih pomaka, pribrojnice na lijevoj strani možemo tumačiti kao rad pojedinih sila na virtualnim pomacima iz ravnotežnog položaja u : prva dva pribrojnika označuju rad vanjskih kontaktnih sila, a zadnji pribrojnik označuje rad vanjskih linijskih sila. Nazovemo li pribrojnik

$$-\int_0^l qv' dx \equiv -\int_0^l au'v' dx \quad (5)$$

radom unutarnjih sila, jednakost (4) izražava prvi dio teorema o virtualnim pomacima:

Ukupan rad vanjskih i unutarnjih sila na bilo kakvim virtualnim pomacima iz ravnotežnog stanja jednak je nuli.

Pretpostavimo sad da funkcija u osim jednadžbe ravnoteže zadovoljava i rubne uvjete. Na lijevom i desnom kraju uvjeti su geometrijski i, u našem slučaju, homogeni:

$$u(0) = u(l) = 0. \quad (6)$$

Polje virtualnih pomaka mora zadovoljiti homogene geometrijske rubne uvjete u točkama u kojima su zadani geometrijski rubni uvjeti funkcije u :

$$v(0) = v(l) = 0. \quad (7)$$

Uzimajući u obzir (6) i (7), iz (4) zaključujemo da je zadovoljen sljedeći uvjet:

$$\int_0^l (au'v') dx = \int_0^l f v dx, \quad \text{za svako } v. \quad (8)$$

Zaključujemo, ako je funkcija u rješenje rubnog problema (1) i (6), onda ona zadovoljava uvjet (8).

Zbog proizvoljnosti funkcije v vrijedi i obrat tog zaključka. Pretpostavimo da funkcija u zadovoljava uvjet (8) i geometrijske rubne uvjete (6). Prvi član ćemo transformirati parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned} \int_0^l au'v' dx &= \int_0^l (au'v)' dx - \int_0^l (au')' v dx \\ &= a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0) - \int_0^l (au')' v dx \\ &= -\int_0^l (au')' v dx, \end{aligned} \quad (9)$$

jer funkcija v mora zadovoljiti uvjete (7).

Iz (8) i (9) dobivamo

$$-\int_0^l ((au')' + f)v dx = 0, \quad \text{za svako } v. \quad (10)$$

Treba pokazati da se izraz u zagradi pod znakom intervala poništava. Pretpostavimo suprotno, tj. da je na nekom intervalu (x_1, x_2) taj izraz različit od nule, npr. pozitivan. Odabrat ćemo polje virtualnih pomaka w koje je jednako nuli svuda osim na intervalu (x_1, x_2) , gdje je pozitivno. Stavljajući da je $v=w$, dobivamo

$$\int_{x_1}^{x_2} ((au')' + f) w dx = 0. \quad (11)$$

To je kontradiktorno jer je funkcija pod znakom integracije prema pretpostavci pozitivna na cijelom području integracije. Prema tome, ne vrijedi pretpostavka da je izraz $(au')' + f$ negdje pozitivan; analogno se obara pretpostavka da je taj izraz negdje negativan. Funkcija u zadovoljava, dakle, jednadžbu ravnoteže. Budući da funkcija u zadovoljava i rubni uvjet (6), zaključujemo:

Ako dozvoljena funkcija u zadovoljava uvjet (8), ona je rješenje rubnog problema (1) i (6) čime se iskazuje drugi dio teorema o virtualnom radu.

4. TEOREM O MINIMUMU POTENCIJALNE ENERGIJE

Neka je

$F: R \rightarrow R$ primitivna funkcija neprekidne funkcije $f: R \rightarrow R$,

$$F: x \mapsto F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \text{ odnosno } F' = f. \quad (1)$$

Tada su jednačbe $f(x)=0$ i $F'(x)=0$ ekvivalentne. Stacionarne vrijednosti funkcije F su rješenja jednačbe $f(x)=0$. Ta stacionarna vrijednosti funkcije F je broj x_s za koji u točki $(x_s, F(x_s))$ graf funkcije F ima horizontalnu tangentu. U x_s funkcija F lokalno poprima najmanju ili najveću vrijednost ili je pak $(x_s, F(x_s))$ točka infleksije grafa s horizontalnom tangentom. Stacionarna vrijednost naziva se i stacionarnom točkom. Treba naglasiti da je stacionarna točka točka x_s na osi x (kao jednodimenzionalnom prostoru koji je područje definicije funkcije F), a ne točka $(x_s, F(x_s))$.

4.1. FUNKCIONALI

Funktional je funkcija koja drugoj funkciji pridružuje neki realan broj. On je za razliku od obične funkcije, koja je zadana na skupu brojeva ili n-torki brojeva (konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru), zadan na skupu funkcija.

Na primjer:

- površina 'ispod' krivulje na intervalu $[a, b]$: $A = \int_a^b f(x) dx;$

(2)

- duljina luka krivulje 'iznad' intervala $[a, b]$: $l(a, b) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx,$

(3)

jer je duljina infinitezimalnog odsječka

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (4)$$

Budući da funkcije možemo zbrajati i množiti brojem čime ponovno dobivamo funkcije, te funkcije tvore vektorski prostor funkcija ili funkcijski prostor.

Na primjer, ako su

f i g funkcije, a α i β brojevi tada je $h = \alpha f + \beta g$ funkcija, $h : x \mapsto h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

Funktional je zadan na vektorskom prostoru funkcija ili na funkcijskom prostoru. Funkcije su točke ili vektori tog prostora.

4.2. DERIVACIJA FUNKCIONALA

Funktional Ψ definiran je na funkcijskom prostoru X , $\Psi: X \rightarrow R$.

Ako su u i v dvije funkcije iz X , a ε realna varijabla, tada je $u + \varepsilon v$ funkcija iz X .

Za odabrane funkcije u i v je

$$\psi(u, v): \varepsilon \mapsto \psi(u, v)(\varepsilon) = \Psi(u + \varepsilon v) \quad (5)$$

realna funkcija realne varijable, $\psi(u, v): R \rightarrow R$.

Derivacija funkcionala Ψ u točki/funkciji u u smjeru vektora/funkcije v je broj

$$d\Psi(u) \cdot v = \left. \frac{d\psi(u, v)(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\psi(u, v)(d\varepsilon) - \psi(u, v)(0)}{d\varepsilon} = \frac{\Psi(u + d\varepsilon v) - \Psi(u)}{d\varepsilon}. \quad (6)$$

Funktional Ψ je diferencijabilan u točki $u \in X$ ako za odabranu funkciju u postoji derivacija funkcionala Ψ u smjeru svih vektora $v \in X$.

Gateauxova derivacija funkcionala Ψ u točki u je funkcional

$$d\Psi(u): X \rightarrow R, \quad d\Psi(u): v \mapsto d\Psi(u)(v) = d\Psi(u) \cdot v, \quad (7)$$

gdje ' \cdot ' označava na odgovarajući način definirani skalarni produkt.

Stacionarna točka funkcionala Ψ je funkcija $u \in X$ za koju je $d\Psi(u) \cdot v = 0$ za svaki $v \in X$.

4.3. FUNKCIONAL ENERGIJE UŽETA

Kao i u prethodnom odjeljku (o virtualnom radu), pretpostavljamo da su krajevi užeta učvršćeni, pa su geometrijski rubni uvjeti homogeni: $u(0)=0$ i $u(l)=0$. Funkcijski prostor je X_0 ; to je potprostor prostora X koji sadrže funkcije iz X koje na rubovima poprimaju vrijednost nula.

Funktional energije ima oblik

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \int_0^l q(x)u'(x)dx - \int_0^l f(x)u(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^l a(x)[u'(x)]^2 dx - \int_0^l f(x)u(x)dx. \quad (8)$$

Prvi je član potencijalna energija deformacije, dok je drugi član potencijalna energija zadane vanjske sile. Izvod izraza za potencijalnu energiju deformacije užeta analogan je izvodu izraza za potencijalnu energiju uzdužne deformacije štapa, poznatom iz Otpornosti materijala.

Derivacija funkcionala energije je

$$\begin{aligned} d\Psi(u) \cdot v &= \frac{1}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \int_0^l a(x)[u'(x) + d\varepsilon v'(x)]^2 dx - \int_0^l f(x)[u(x) + d\varepsilon v(x)] dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^l a(x)[u'(x)]^2 dx + \int_0^l f(x)u(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{d\varepsilon} \left(d\varepsilon \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \frac{1}{2} d\varepsilon^2 \int_0^l a(x)[v'(x)]^2 dx - d\varepsilon \int_0^l f(x)v(x)dx \right) \\ &= \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx - \int_0^l f(x)v(x)dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Stacionarne točke funkcionala su one za koje vrijedi

$$\int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx - \int_0^l f(x)v(x)dx = 0 \quad \text{za svaki } v \in X_0. \quad (10)$$

Prema teoremu o virtualnom radu (3.8) funkcija u zadovoljava jednadžbu ravnoteže

$$[a(x)u'(x)]' + f(x) = 0 \quad (11)$$

ako i samo ako je

$$\int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^l f(x)v(x)dx \quad \text{za svaki } v \in X_0. \quad (12)$$

Time smo dokazali **teorem o minimumu potencijalne energije sistema:**

Od svih kinematički mogućih stanja pomaka stvarni su pomaci, koji opisuju ravnotežnu konfiguraciju sistema, oni koji tvore stacionarnu točku potencijalne energije sistema izražene funkcijom pomaka (i odgovarajućih deformacijskih veličina).

Pri linearnom odnosu sila i pomaka pripadna vrijednost je minimum. (Za utvrđivanje vrste vrijednosti funkcije u stacionarnoj točki treba odrediti i drugu derivaciju funkcionala.)

4.4. OPĆENITIJI OBLIK FUNKCIONALA I EULER-LAGRANGEOVA JEDNADŽBA

Pomoću funkcije $F : R^3 \rightarrow R, F : (x_1, x_2, x_3) \mapsto F(x_1, x_2, x_3)$ (13)

definirati ćemo funkcional $\Psi : X \rightarrow R$,

$$\Psi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx \quad (14)$$

Za odabrane $u \in X$ i $v \in X_0$ funkcija $\psi(u, v) : R \rightarrow R$,

$$\psi(u, v)(\varepsilon) = \int_a^b F(x, u(x) + \varepsilon v(x), u'(x) + \varepsilon v'(x)) dx \quad (15)$$

je funkcija jedne varijable, pa je njezina derivacija po toj varijabli

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(u, v)(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{d(u + \varepsilon v)}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{d(u' + \varepsilon v')}{d\varepsilon} \right) dx \\ &= \int_a^b (\partial_2 F v + \partial_3 F v') dx \\ &= \int_a^b (\partial_2 F v + [\partial_3 F v]' + [\partial_3 F]' v) dx \\ &= \int_a^b \partial_2 F v dx + \partial_3 F v \Big|_a^b - \int_a^b [\partial_3 F]' v dx \\ &= \int_a^b (\partial_2 F - [\partial_3 F]') v dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Stacionarne točke funkcionala su one točke za koje vrijedi

$$\int_a^b (\partial_2 F - [\partial_3 F]') v dx = 0 \quad \text{za svaki } v \in X_0, \quad (17)$$

tako da Euler Lagrangeova diferencijalna jednačba ima oblik

$$\partial_u F - [\partial_{u'} F]' = 0, \quad (18)$$

a njenu primjenu na funkcional energije užeta prikazujemo ovim jednačbama:

$$\Psi(u) = \int_0^l \left(-f(x)u(x) + \frac{1}{2}a(x)[u'(x)]^2 \right) dx, \quad (19)$$

$$F(x, u(x), u'(x)) = -f(x)u(x) + \frac{1}{2}a(x)[u'(x)]^2, \quad (20)$$

$$\partial_u F = -f(x), \quad (21)$$

$$\partial_{u'} F = a(x)u'(x), \quad (22)$$

$$(\partial_{u'} F)' = [a(x)u'(x)]', \quad (23)$$

$$[a(x)u'(x)]' + f(x) = 0. \quad (24)$$

Jednačba (24) jednačba je ravnoteže užeta. Ovim smo izvodom 'preskočili' korak u kojem smo ranije morali primjeniti teorem o virtualnom radu.

5. KONSTRUKCIJE OD PLATNA

5.1. SPECIFIČNI PROBLEMI: ODREĐIVANJE OBLIKA I ODREĐIVANJE KROJA

5.1.1. ODREĐIVANJE OBLIKA

Danas je teško zamisliti projektiranje prednapetih konstrukcija od platna bez podrške računala i posebnih računalnih programa. Ponašanje ovih konstrukcija je izrazito nelinearno. Geometrijska nelinearnost je posljedica velikih pomaka, a katkad se u obzir uzima i materijalna nelinearnost.

Jedna od posebnosti proračuna prednapetih gipkih konstrukcija je nalaženje oblika (eng. *form finding*) konstrukcije opterećene prednaponskim silama, prije nanošenja korisnog opterećenja i uz zanemarivanje vlastite težine. Znači, oblik se prednapetih konstrukcija ne može unaprijed odrediti ili odabrati po volji nego se mora proračunati iz uvjeta ravnoteže, uvažavajući rubne uvjete, topologiju konstrukcije i razdiobu prednaponskih sila.

5.1.2. ODREĐIVANJE KROJA

Problem kroja postoji kod konstrukcija od tkanine zbog činjenice da se dvostruko zakrivljene krovne plohe ne mogu bez uzdužnih deformacija razmotati u ravninu, a tkanine se proizvode u ravninskom (ili razmotljivom) obliku. Unutarnjim naprezanjima, određenima za teorijski idelan oblik membrane, pribrajaju se i dodatna naprezanja kao posljedica deformacije ravnih komada tkanine u vitopernu plohu. Ta naprezanja nužno postoje i kad je tkanina optimalno skrojena, jer se i ona sastoji od ravnih komada, ali naprezanja postaju mnogo veća ako kroj znatno odstupa od optimalnog. Naprezanja zbog vitoperenja rastu kad se komadi tkanine povećavaju. Naime, što se veći dio plohe pokriva jednim komadom tkanine, potrebne su veće deformacije da poprimi projektirani oblik. Posljedica je da konstrukcija ne poprimi točan oblik minimalne plohe, koja po definiciji, u ravnotežnom stanju ima jednolika naprezanja (o minimalnoj plohi ću pisati kasnije). Upotreba premalih komada tkanine također je nepovoljna jer uzrokuje



Slika 4. Denver International Airport

prevelik broj spojeva, koji dijeluju kao ukrute na kojima je tkanina preklopljena (sašivena, zalijepljena, zakovana ili zavarena). Pri izvoru optimalne veličine tkanine treba voditi računa ne samo o dodatnim naprezanjima nego i o uvjetima izvedbe i smjerovima vlakana.

5.1.3. OSTALI PROBLEMI

Osim ovih posebnih, moraju se rješavati i "obični" problemi kakvi se pojavljuju pri modeliranju i proračunu svih ostalih konstrukcija: određivanje pomaka, deformacije i naprezanja pod vanjskim opterećenjima, dinamički proračuni itd. Zbog jako izražene geometrijske nelinearnosti prednapetih konstrukcija (jednadžbe ravnoteže, naime, treba postavljati na deformiranom obliku), i ti, inače standardni problemi, često prelaze u nestandardne. Problemi postaju još složeniji ako uz geometrijsku treba u proračun uključiti i materijalnu nelinearnost, što je neizbježno pri uporabi tkanina i užadi od prirodnih i sintetičkih materijala.

5.2. FIZIČKI I MATEMATIČKI MODELI

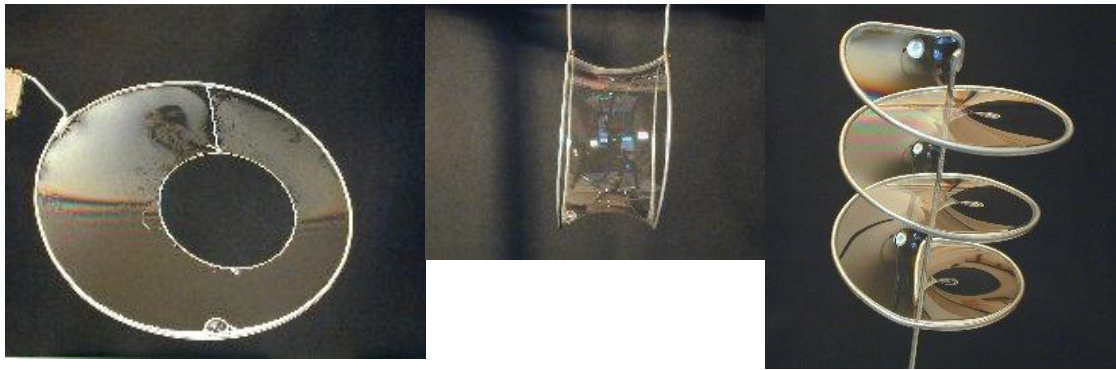
Kao konstrukcijski elementi vlačni dijelovi učinkovitiji su od tlačnih. Dok će tanki tlačni elementi imati tendenciju izvijanja pod porastom opterećenja, vlačni elementi će prilikom porasta opterećenja postati stabilniji. Naprezanje će povući svaki element u liniju te tako cijelu konstrukciju učiniti zategnutom. Vlačni elementi maksimalno iskorištavaju materijalne karakteristike, a opterećenje prenose jednoliko po ploštini poprečnog presjeka. Opterećenje će djelovati u središtu svakog pojedinog vlakna te će svaki segment nositi jednaku količinu naprezanja.

Površinski oblik vlačnih konstrukcija sadrži geometrijski red koji odražava zakone površinskih sila u ravnoteži. Pronalazak odgovarajućeg oblika zahtjeva upotrebu postupaka s kojima su građevinski inženjeri i arhitekti rijetko upoznati.

Matematički, ploha se često predstavlja mrežom presijecajućih uzdužnih sila. Ako su pravilno određene sile svih linija koje se sijeku u jednom čvoru, one se nalaze u ravnoteži s težinom konstrukcije u tom čvoru.

Osnovna sredstva za istraživanje i definiranje oblika površine vlačnih konstrukcija su prostorni fizički i računalni modeli. Istraženo je nekoliko različitih tehnika modeliranja. Jedan

od fizičkih modela koji se upotrebljava je pojava koja je svima poznata još otkada smo bili djeca. Svatko od nas igrao se s balončićima od sapunice. Opna od sapunice se razapela između žičanih okvira te puhanjem oblikovala kuglu - stanje minimuma energije u kojemu je napetost u svakoj točki i smjeru u dirnoj ravnini jednaka. No, za nalaženje oblika visećih konstrukcija fizikalni je model opna razapeta na okviru. Mjehur je model pneumatske (napuhane) konstrukcije. U ovom radu ograničavamo se na nalaženje oblika konstrukcije od platna sa čvrstim rubovima. Matematički model je u tom slučaju nelinearna parcijalna diferencijalna jednačba plohe minimalne površine, razapete zatvorenom prostornom krivuljom. Nalaženje oblika konstrukcije od platna sa čvrstim rubovima svodi se na klasičnu zadaću varijacijskog računa - na problem minimalne plohe ili Plateauov problem.



Slika 5. Opna od sapunice

Drugi način modeliranja je mreža od elastičnih vrpca koja se koristi za ne tako složene oblike.

Najbolje sredstvo za modeliranje i ilustriranje koncepcije vlačnih površina je rastezljiva tkanina. Najpovoljnija je lagana i rastezljiva tkanina u oba smjera. Modeli od ovog materijala su najrealističniji.



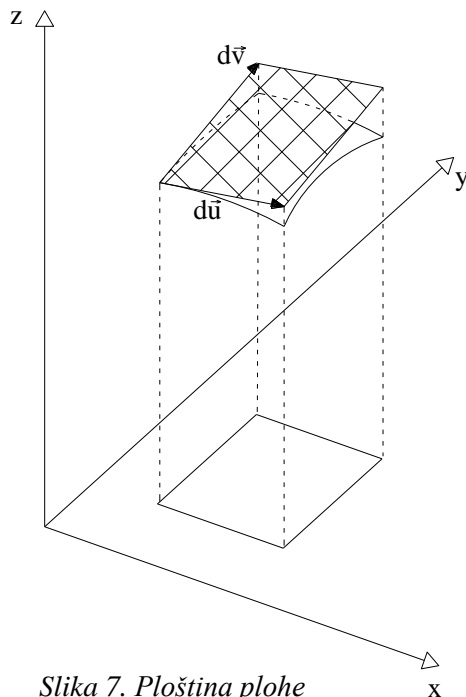
Slika 6. Modeliranje pomoću rastezljive tkanine

5.3. OPNA OD SAPUNICE

5.3.1. FUNKCIONAL ENERGIJE

Krov od tkanine opterećen samo jednolikim silama prednapona ponašat će se poput idealne membrane - opne od sapunice. Naprezanja u opni jednaka su u svakoj točki i svim smjerovima tangencijalne ravnine.

5.3.1.1. PLOŠTINA PLOHE



Slika 7. Ploština plohe

Ploštinu elementarne plohe dobiti ćemo pomoću vektora (vektori tangencijalne ravnine na plohu) $d\vec{u} = \vec{i}dx + \vec{k}\partial_x z dx$ i $d\vec{v} = \vec{j}dy + \vec{k}\partial_y z dy$.

Ploštinu elementarne plohe A dobivamo pomoću vektorskog produkta

$$dA = \|d\vec{u} \times d\vec{v}\| = \sqrt{(d\vec{u} \times d\vec{v}) \cdot (d\vec{u} \times d\vec{v})}, \quad (2)$$

$$d\vec{u} \times d\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & \partial_x z dx \\ 0 & dy & \partial_y z dy \end{vmatrix} = -\vec{i}\partial_x z dx dy - \vec{j}\partial_y z dx dy + \vec{k} dx dy. \quad (3)$$

Prema (3) i (2) dobivamo

$$\begin{aligned} (d\vec{u} \times d\vec{v}) \cdot (d\vec{u} \times d\vec{v}) &= (\partial_x z dx dy)^2 + (\partial_y z dx dy)^2 + (dx dy)^2 \\ &= \left[(\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2 + 1 \right] (dx dy)^2, \end{aligned} \quad (4)$$

te konačno za ploštinu elementarne plohe dobivamo jednadžbu

$$dA = \sqrt{1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2} dx dy. \quad (5)$$

Ploština plohe 'iznad' područja Ω ima oblik

$$\mathfrak{A}(z) = \iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2} dx dy. \quad (6)$$

Promjena elementarne ploštine $dx dy$ pri napinjanju opne na rubnu krivulju izražava se formulom

$$\left[\sqrt{1 + [\partial_x z]^2 + [\partial_y z]^2} - 1 \right] dx dy, \quad (7)$$

pa je deformacijska energija opne

$$E(u) = \iint_{\Omega} \sigma \left[\sqrt{1 + [\partial_x z(x, y)]^2 + [\partial_y z(x, y)]^2} - 1 \right] dx dy, \quad (8)$$

pri čemu je σ naprezanje u opni. To je naprezanje uz neke (kemijske) uvjete neovisno o površini plohe, pa se minimizacija energije svodi na minimizaciju ploštine plohe. Ploha koja ima najmanju ploštinu od svih ploha, koje zadovoljavaju iste rubne uvjete, naziva se minimalnom plohom.

5.3.2. FUNKCIONALI NA PROSTORU FUNKCIJA DVIJU VARIJABLI

Budući da je sada u funkcija dviju varijabli i da ima dvije parcijalne derivacije, trebat će nam funkcija pet varijabli:

$$F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}, F : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5). \quad (9)$$

Pomoću nje možemo definirati funkcional $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Psi(u) = \iint_{\Omega} F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) dx dy. \quad (10)$$

Uz odabrane $u \in X$ i $v \in X_0$ funkcija $\psi(u, v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi(u, v)(\varepsilon) = \iint_{\Omega} F(x, y, u + \varepsilon v, \partial_x u + \varepsilon \partial_x v, \partial_y u + \varepsilon \partial_y v) dx dy \quad (11)$$

funkcija je jedne varijable.

Derivacija funkcije $\psi(u, v)$ je

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(u, v)(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \iint_{\Omega} (\partial_3 F v + \partial_4 F \partial_x v + \partial_5 F \partial_y v) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\partial_3 F v + \partial_x (\partial_4 F v) - \partial_x \partial_4 F v + \partial_y (\partial_5 F v) - \partial_y \partial_5 F v) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\partial_3 F - \partial_x \partial_4 F - \partial_y \partial_5 F) v dx dy + \iint_{\Omega} (\partial_x (\partial_4 F v) + \partial_y (\partial_5 F v)) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (\partial_3 F - \partial_x \partial_4 F - \partial_y \partial_5 F) v dx dy + \oint_{\partial\Omega} v (\partial_4 F dx - \partial_5 F dy) \\ &= \iint_{\Omega} (\partial_3 F - \partial_x \partial_4 F - \partial_y \partial_5 F) v dx dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Stacionarne točke funkcionala su one točke za koje vrijedi

$$\iint_{\Omega} (\partial_3 F - \partial_x \partial_4 F - \partial_y \partial_5 F) v dx dy = 0 \quad \text{za svaki } v \in X_0, \quad (13)$$

pa je Euler-Lagrangeova diferencijalna jednačina

$$\partial_u F - \partial_x \partial_{u_x} F - \partial_y \partial_{u_y} F = 0. \quad (14)$$

5.4. MINIMALNA PLOHA

Kako su

$$F = \sqrt{1 + [\partial_x z]^2 + [\partial_y z]^2} \quad \text{i} \quad (15)$$

$$\partial_z F = 0, \quad \partial_{z_x} F = \frac{\partial_x z}{F}, \quad \partial_{z_y} F = \frac{\partial_y z}{F}, \quad (16)$$

uvrštanjem u (9) dobivamo prvi oblik diferencijalne jednačine minimalne plohe:

$$\partial_x \frac{\partial_x z}{F} + \partial_y \frac{\partial_y z}{F} = 0. \quad (17)$$

Ako sada provedemo naznačene derivacije

$$\begin{aligned}
\partial_x \partial_{z_x} F &= \partial_x \frac{\partial_x z}{F} = \frac{\partial_{xx} z F - \partial_x z \partial_x F}{F^2} \\
&= \frac{\partial_{xx} z F - \partial_x z (\partial_{z_x} F \partial_{xx} z + \partial_{z_y} F \partial_{yx} z)}{F^2} \\
&= \frac{1}{F^2} \left[\partial_{xx} z F - \partial_x z \left(\partial_{xx} z \frac{\partial_x z}{F} + \partial_{xy} z \frac{\partial_y z}{F} \right) \right], \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\partial_y \partial_{z_y} F = \partial_y \frac{\partial_y z}{F} = \frac{1}{F^2} \left[\partial_{yy} z F - \partial_y z \left(\partial_{xy} z \frac{\partial_x z}{F} + \partial_{yy} z \frac{\partial_y z}{F} \right) \right], \tag{19}$$

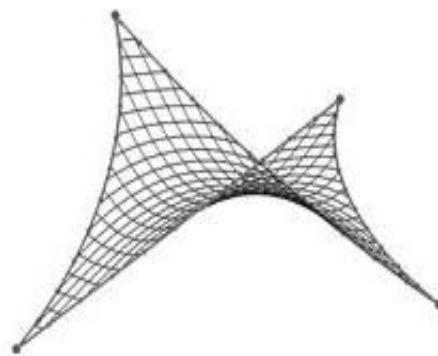
Nakon sređivanja dobivamo

$$\left[F^2 - (\partial_x z)^2 \right] \partial_{xx} z - 2 \partial_x z \partial_y z \partial_{xy} z + \left[F^2 - (\partial_y z)^2 \right] \partial_{yy} z = 0, \tag{20}$$

i na kraju, drugi, poznatiji oblik diferencijalne jednačbe, tzv. Lagrangeovu jednačbu:

$$\left[1 + (\partial_y z)^2 \right] \partial_{xx} z - 2 \partial_x z \partial_y z \partial_{xy} z + \left[1 - (\partial_x z)^2 \right] \partial_{yy} z = 0 \tag{21}$$

Minimalne plohe prednapetih konstrukcija su sedlaste - u svakoj točki imaju negativnu Gaussovu zakrivljenost. To znači da središta glavnih zakrivljenosti u nekoj točki leže na suprotnim stranama plohe. Minimalan broj učvršćenja vlačnih konstrukcija je 4, imaju tzv. *four point structure* (tri točke daju trivijalno rješenje - dio ravnine). Svaki element tkanine koji se proteže između 4 linije oslonaca čini sedlastu površinu. Linije zakrivljene prema gore (grebeni) i linije zakrivljene prema dolje nose različita opterećenja: opterećenja gravitacije, težinu konstrukcije te opterećenja od snijega i vjetra.



Slika 8. Sedlasti oblik

Između tih linija nalazi se prostor popunjen površinom koja predstavlja duplo zakrivljenu mrežu koja se sastoji od linija paralelnih s linijama oslonaca i okomitih na njih.

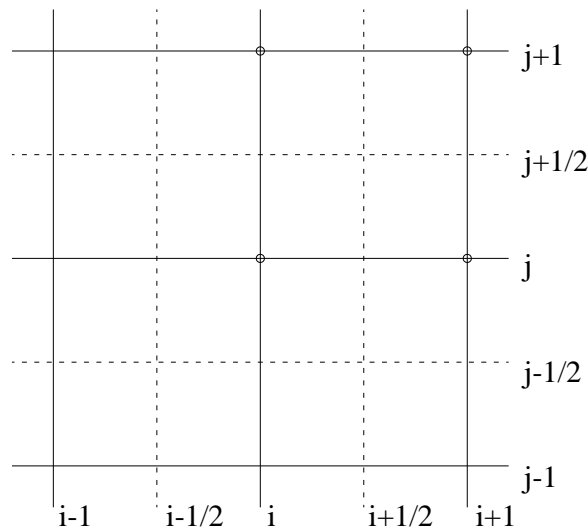
Kao konstrukcija minimalna ploha je ekonomična - utrošak materijala je po definiciji najmanji, jer je površina minimalna, a kako je naprezanje od prednaponskih sila u svim točkama i smjerovima jednako, a ni pod vanjskim opterećenjem nema izrazitih ekstrema naprezanja, nosivost tkanine posvuda je podjednako iskorištena. Znatno veća je ušteda zbog

podjednagog iskorištenja svih dijelova konstrukcije te nepostojanja momenata savijanja i problema stabilnosti, kao i zbog izrazito maloga stalnog opterećenja. Nažalost, ekonomičnost plohe narušava, a katkada i poništava potreba za komplementarnom konstrukcijom - stupovima/jarbolima i usidrenjima.

Plohe koje zadovoljavaju uvjete ravnoteže uz održavanje dovoljno velikoga vlačnog naprezanja određuju se postupcima nalaženja oblika. Važno je istaknuti da oblik deformirane plohe opterećene samo prednaponskim silama ne ovisi o svojstvima materijala ni o apsolutnom iznosu prednaponskih sila, nego samo o omjerima i razdiobi tih sila.

5.5. JEDNADŽBE KONAČNIH RAZLIKA

Plateauov problem (problem minimalne plohe) rješavamo metodom konačnih razlika.



Slika 9. Mreža

Aproksimacije parcijalnih derivacija imaju oblik

$$\partial_x u|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{h} (u_{i+1,j} - u_{i,j}), \quad (22)$$

$$\partial_x u|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\partial_x u|_{i+\frac{1}{2},j} + \partial_x u|_{i+\frac{1}{2},j+1} \right] = \frac{1}{2h} (u_{i+1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}), \quad (23)$$

$$\partial_y u|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (u_{i,j+1} - u_{i,j}), \quad (24)$$

$$\partial_y u \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\partial_y u \Big|_{i, j+\frac{1}{2}} + \partial_y u \Big|_{i+1, j+\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2h} (u_{i, j+1} - u_{i, j} + u_{i+1, j+1} - u_{i+1, j}). \quad (25)$$

Diskretizacija je funkcionala ploštine plohe

$$F_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \left[\partial_x u \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right]^2 + \left[\partial_y u \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right]^2}, \quad (26)$$

$$A(u) = h^2 \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} F_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

$$A: R^{(m-1) \times (n-1)} \rightarrow R. \quad (28)$$

Diskretizacijom Euler - Lagrangeove jednačbe dobivamo sustav algebarskih jednačbi:

$$\frac{\partial A(u)}{\partial u_{i,j}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (29)$$

$$A(\dots, u_{i,j}, \dots) = h^2 \left[F_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + F_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + F_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + F_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right]. \quad (30)$$

Općenito za derivacije vrijedi

$$\left[\sqrt{f(x)} \right]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \quad \left[f^2(x) \right]' = 2f(x)f'(x), \quad (31)$$

čime dobivamo jednakosti:

$$\frac{\partial F_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\partial u_{i,j}} = \frac{\partial_x u \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2h} \right) + \partial_y u \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2h} \right)}{F_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i,j} - u_{i+1, j+1}}{2h^2 F_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}, \quad (32)$$

$$\partial_x u \Big|_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h} (u_{i, j-1} - u_{i-1, j-1} + u_{i, j} - u_{i-1, j}), \quad (33)$$

$$\partial_y u \Big|_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h} (u_{i-1, j} - u_{i-1, j-1} + u_{i, j} - u_{i, j-1}), \quad (34)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{\partial_x u \Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2h} \right) + \partial_y u \Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2h} \right)}{F \Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j-1}}{2h^2 F \Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}, \quad (35)$$

$$\partial_x u \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h} (u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}), \quad (36)$$

$$\partial_y u \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h} (u_{i,j} - u_{i,j-1} + u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}), \quad (37)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{\partial_x u \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2h} \right) + \partial_y u \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2h} \right)}{F \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j-1}}{2h^2 F \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}, \quad (38)$$

$$\partial_x u \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h} (u_{i,j} - u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}), \quad (39)$$

$$\partial_y u \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h} (u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j}), \quad (40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\partial_x u \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2h} \right) + \partial_y u \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2h} \right)}{F \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j+1}}{2h^2 F \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}. \quad (41)$$

I na kraju dobivamo jednadžbe konačnih razlika

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j-1}}{F \Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j-1}}{F \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j+1}}{F \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} + \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j+1}}{F \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} = 0 \quad (42)$$

kada su $i = 1, 2, \dots, m-1$ i $j = 1, 2, \dots, n-1$.

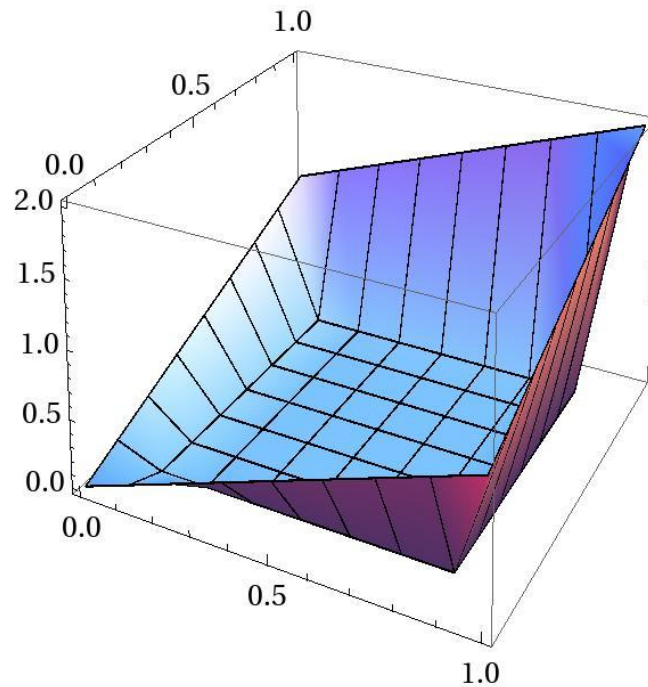
Za oblikovanje i rješavanje sustava jednadžbi (42) napisan je program u programskom jeziku *Mathematica*. Program je ograničen na pravokutna područja $[mh] \times [nh]$, gdje je h korak mreže konačnih razlika (u svim primjerima u sljedećem poglavlju područja su kvadratna).

Sustav jednadžbi rješava se Newton-Gauss-Seidelovim iteracijskim postupkom. Iteracija se prekida kada je $\|u^{\text{trenutno}} - u^{\text{prethodno}}\| < 0,001$ ili kada broj koraka prijeđe 200.

6. PRIMJERI

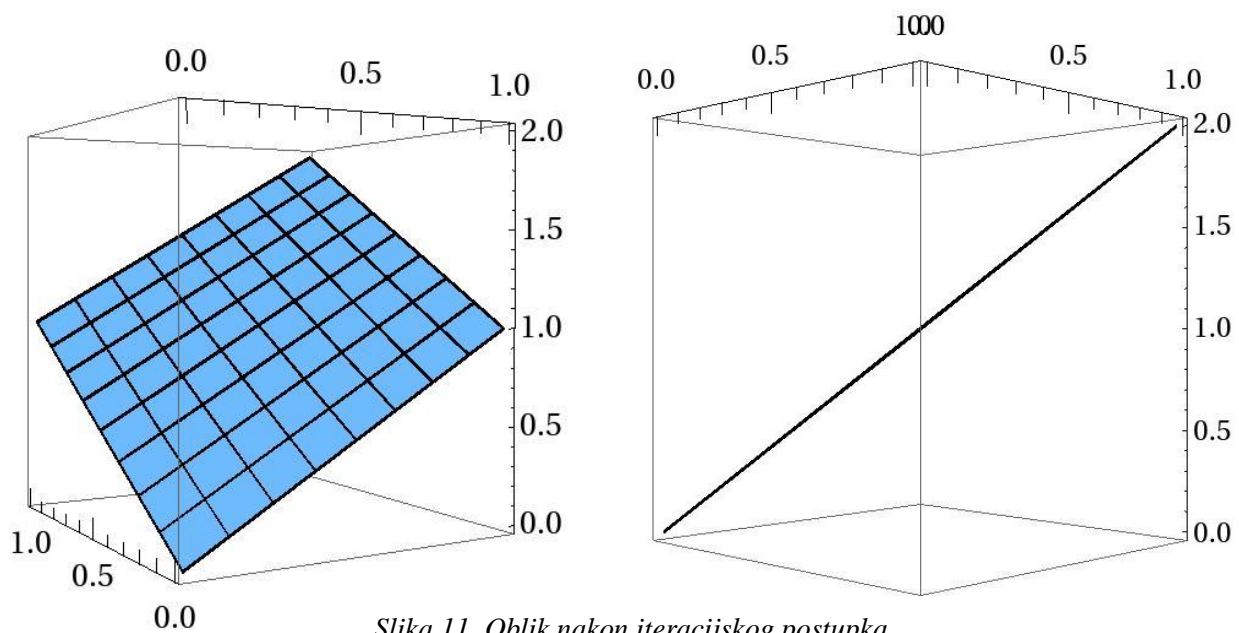
6.1. PRIMJER 1.

Tražimo minimalnu plohu nad područjem $[0,1] \times [0,1]$ pri čemu su rubni uvjeti zadani jednačbom $z(x,y)=x+y$. Mreža je 9×9 . Za početnu aproksimaciju u Newton-Gauss-Seidelovom postupku uzimamo da svi slobodni čvorovi imaju z koordinatu $z=0$.



Slika 10. Početan oblik

Nakon 31 koraka Newton-Gauss-Seidelovog iteracijskog postupka dobivena ploha ima oblik:

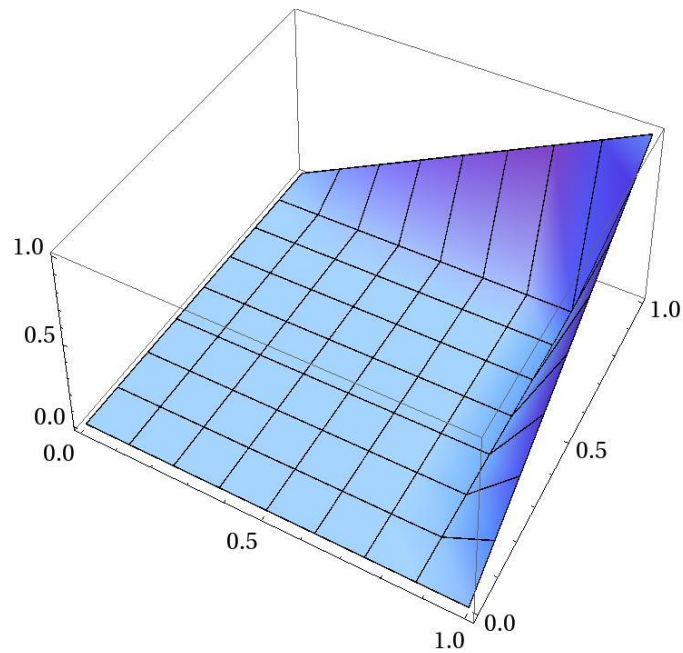


Slika 11. Oblik nakon iteracijskog postupka

Budući da zadani rubovi leže u ravnini, analitičko je rješenje dio ravnine $z(x,y)=x+y$.

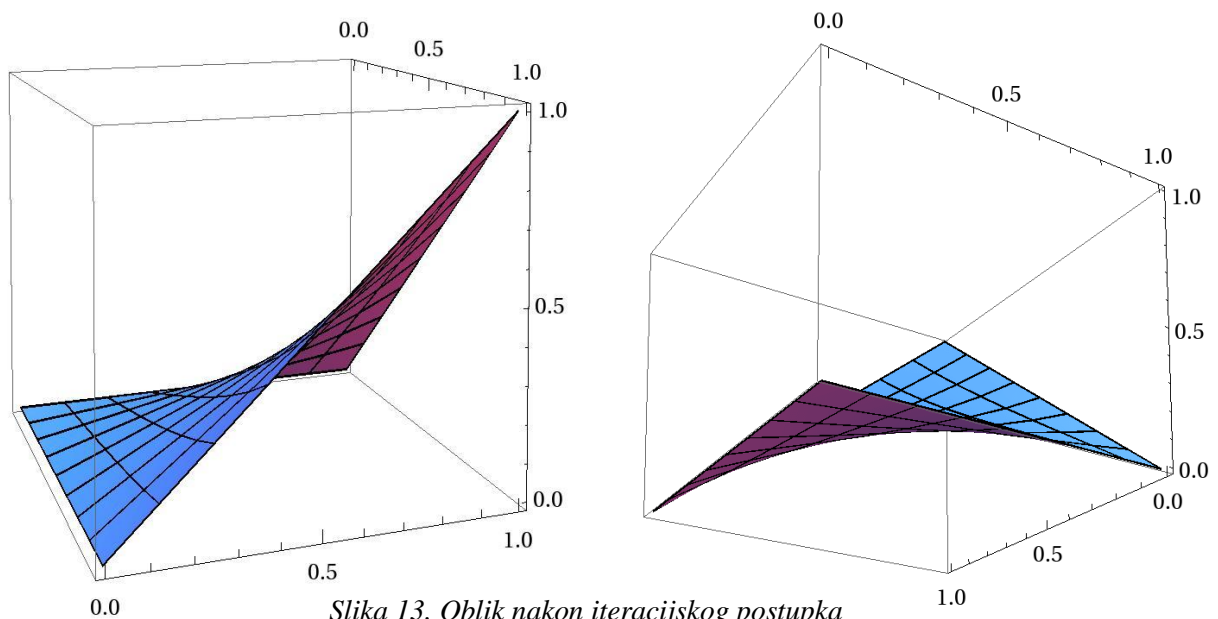
6.2. PRIMJER 2.

Drugi primjer je ploha na kojoj su zadani rubni uvjeti tako da dvije stranice leže na koordinatnim osima, a suprotan vrh je u točki $(1,1,1)$. Mreža je 9×9 .



Slika 12. Početan oblik

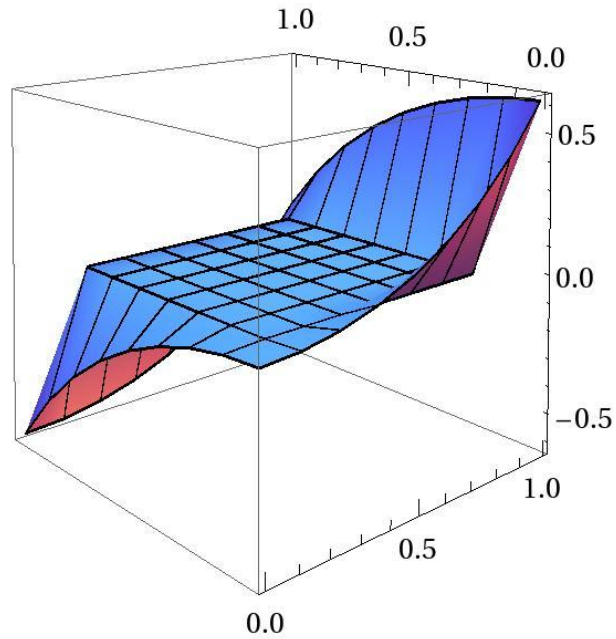
Nakon 24 koraka Newton-Gauss-Seidelovog iteracijskog postupka dobivena ploha ima oblik:



Slika 13. Oblik nakon iteracijskog postupka

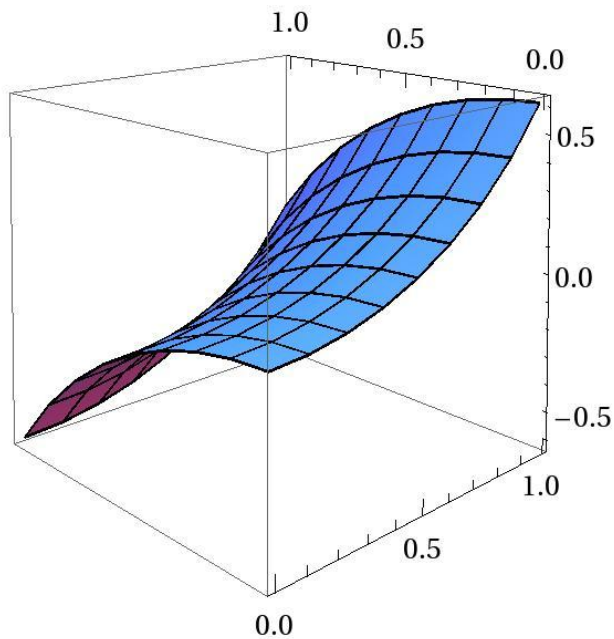
6.3. PRIMJER 3.

Rubni uvjeti plohe nad područjem $[0,1] \times [0,1]$ zadani su jednačbom $z(x,y)=\log(\cos(x)/\cos(y))$. Mreža je 9×9 .

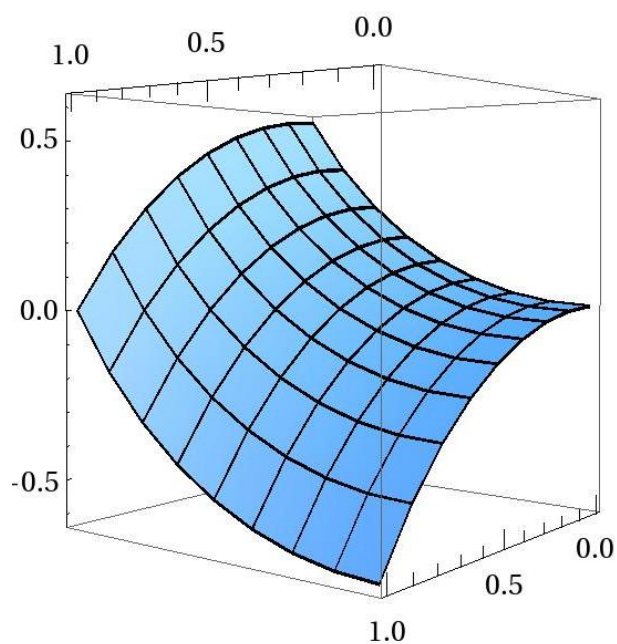


Slika 14. Početan oblik

Nakon 20 koraka Newton-Gauss-Seidelovog iteracijskog postupka dobivena ploha ima oblik:



Slika 15. Oblik nakon iteracijskog postupka(1)

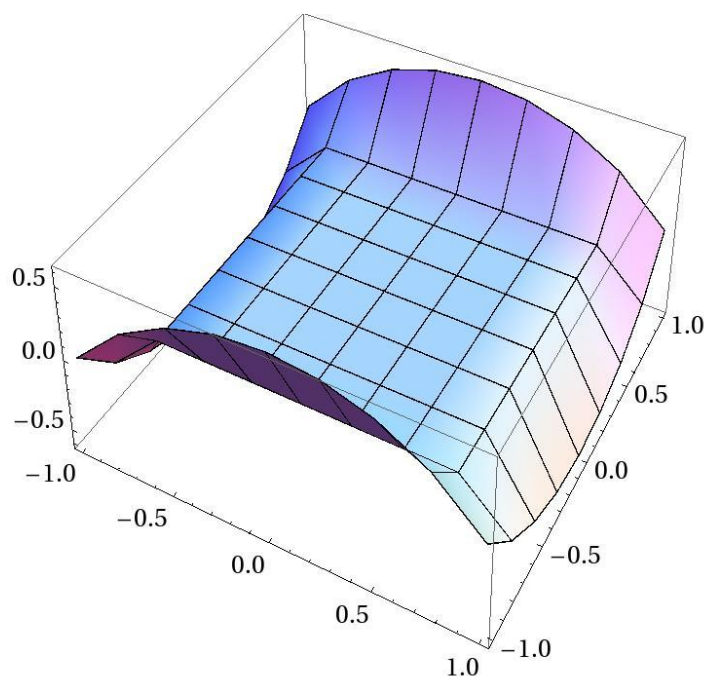


Slika 16. Oblik nakon iteracijskog postupka (2)

Analitičko je rješenje dano istom jednačbom kojom su zadani rubovi, $z(x,y)=\log(\cos(x)/\cos(y))$.

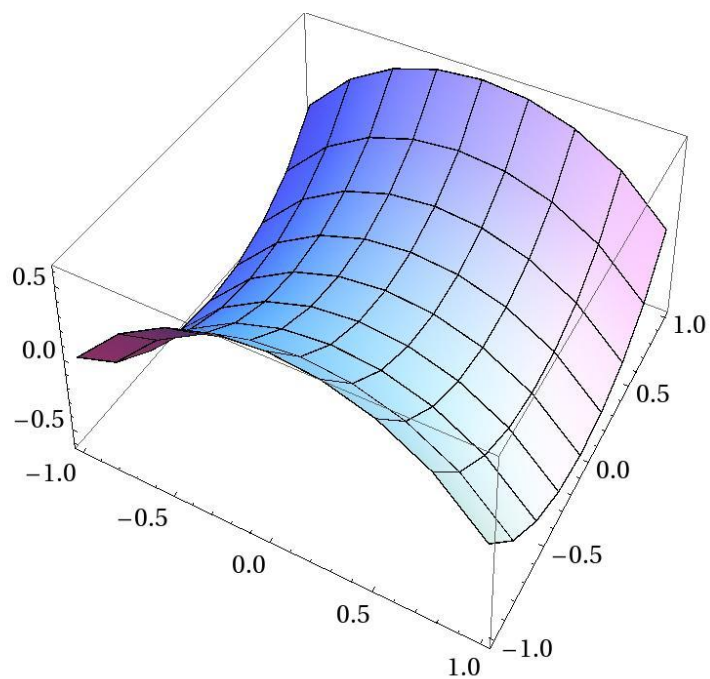
6.4. PRIMJER 4.

Rubni uvjeti plohe zadani su istim izrazom kao u prethodnom primjeru, ali je sada područje $[-1,1] \times [-1,1]$, tako da postoje dvije ravnine simetrije. Mreža je 9×9 .

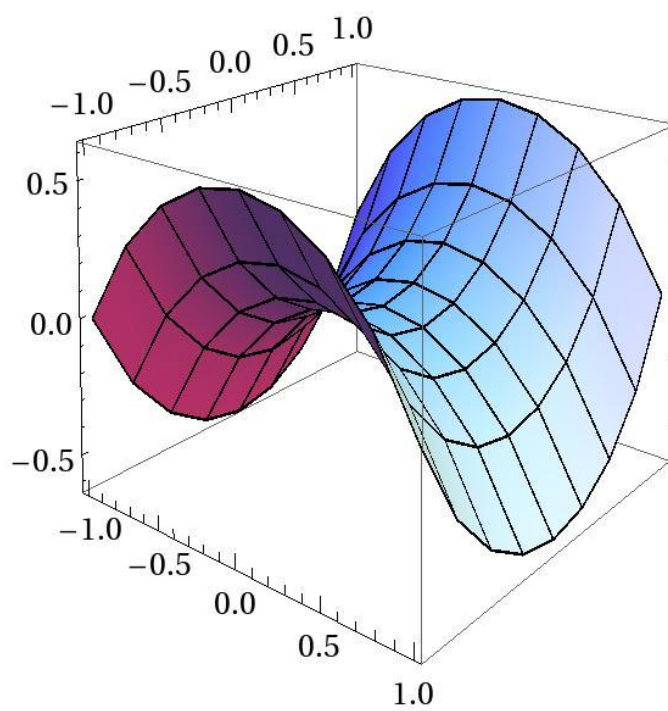


Slika 17. Početan oblik

Nakon 16 koraka Newton-Gauss-Seidelovog iteracijskog postupka dobivena ploha ima oblik:



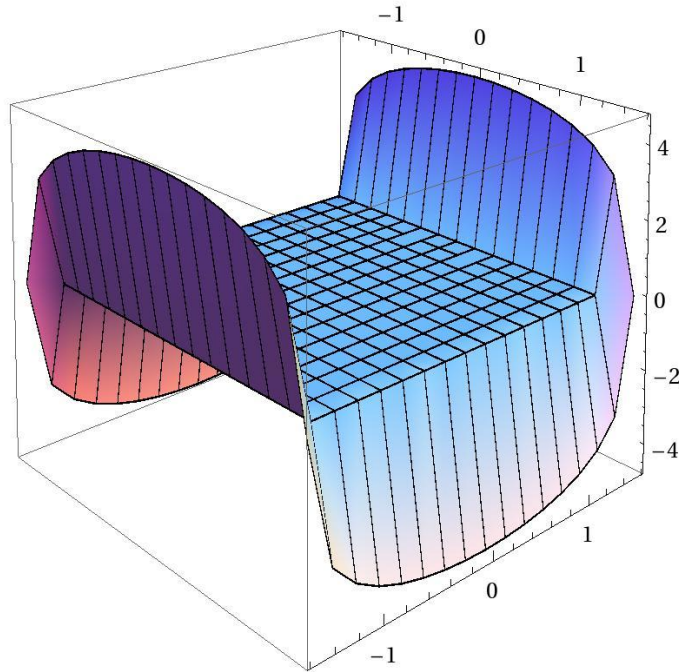
Slika 18. Oblik nakon iteracijskog postupka (1)



Slika 19. Oblik nakon iteracijskog postupka (2)

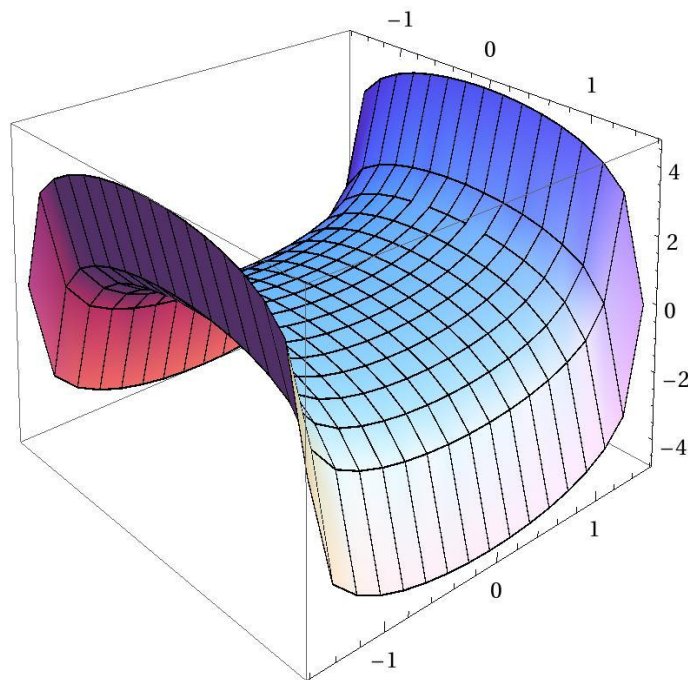
6.5. PRIMJER 5.

Rubni uvjeti zadani su istim izrazom kao i u prethodna dva primjera, ali područje je sada povećano na $[-\pi/2+0,01, +\pi/2-0,01] \times [-\pi/2+0,01, +\pi/2-0,01]$. U ravninama $x=\pm\pi/2$ i $y=\pm\pi/2$ ploha teži u $\pm\infty$ pa je mreža progušćena na 17×17 .

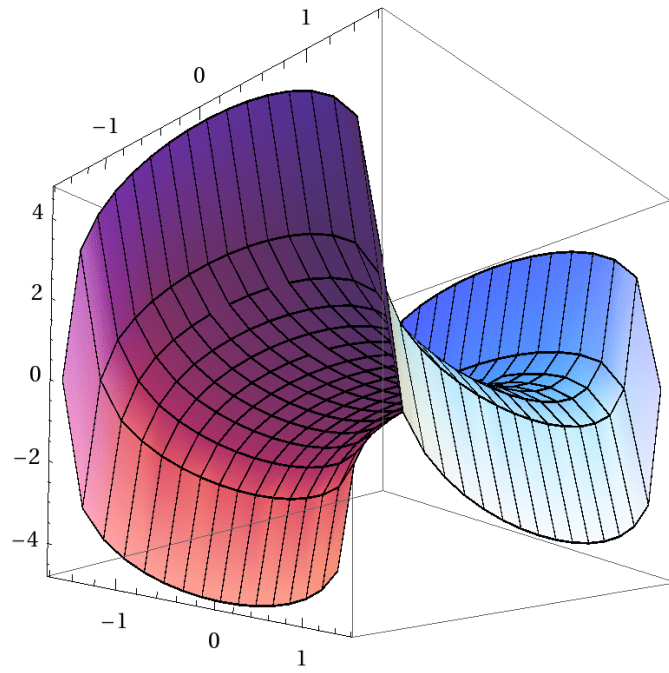


Slika 20. Početan oblik

Nakon 70 koraka Newton-Gauss-Seidelovog iteracijskog postupka dobivena ploha ima oblik:



Slika 21. Oblik nakon iteracijskog postupka (1)



Slika 22. Oblik nakon iteracijskog postupka (2)

7. NAPOMENE O MINIMALNOJ MREŽI

7.1. GEODETSKA MREŽA

Mreža užadi dolazi u prirodnu ravnotežnu konfiguraciju ako se za prednapinjanje omogući klizanje jednog užeta po drugom. Svako uže tada dolazi u položaj koji se poklapa s najkraćom spojnicom, geodetskom linijom, na krovnoj plohi između krajnjih točaka, a iznos je sile po cijeloj duljini užeta konstantan. Takva se mreža kabela zbog toga naziva 'geodetskom mrežom'. Sustav jednadžbi generiranih ovim pravilom izrazito je nelinearan.

Za određivanje oblika vrijedi: uz jednake uzdužne sile u svim kabelima, rješenje sustava jednadžbi ravnoteže ekvivalentno je minimalizaciji ukupne duljine užadi. Sila u štapu koji povezuje čvorove i i j označava se sa $S_{i,j}$, a duljina toga štapa sa $l_{i,j}$. Funkcional ukupne duljine užadi analogan je funkcionalu ploštine plohe koji postiže minimum u slučaju membrane. Deriviranjem izraza za ukupnu duljinu užadi i izjednačavanjem s nulom dobivaju se jednadžbe ravnoteže. Ukupna je duljina svih kabela jednaka zbroju duljina svih štapova:

$$\Phi = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \quad (6)$$

Funkcional Φ postiže minimum kad su derivacije izraza po svakoj od koordinata x_i, y_i, z_i jednake nuli. Deriviranjem se neposredno dobivaju jednadžbe ravnoteže uz uvjet da su sve sile $S_{i,j}$ jednake. Dobiveni sustav jednadžbi predstavlja štapnu analogiju Lagrangeove jednadžbe. Pomalo je paradoksalno da rješenje tog sustava općenito ne predstavlja dobru aproksimaciju rješenja Lagrangeove jednadžbe. To se može razumjeti ako se usporedno analiziraju dvije ranije iznesene tvrdnje:

- a) Lagrangeovom se jednadžbom minimalizira ploština plohe
- b) štapnim modelom minimalizira se duljina užadi.

Mrežu nije moguće homogeno rasporediti na svim dijelovima plohe, a užad se ne može svuda sjeći pod pravim kutom pa je očito da minimalizacija duljine užadi nije ekvivalentna minimalizaciji ploštine. Primjer za to odnosi se na točkasti ležaj koji u praksi postoji na vrhu pilona. Rub konstrukcije se sastoji od neke krivulje u ravnini i jedne izolirane točke izvan ravnine. U slučaju membrane, rješenje se - minimalna ploha sastoji od ravnine i jedne 'bodlje', npr. oštrog stošca kojem polumjer osnovice teži nuli, a šiljak mu je u izoliranoj točki. Iz uvjeta ravnoteže na kružnom presjeku oko izoliranog ležaja vidi se da ležaj ne može preuzeti konačnu silu, jer bi tada naprezanje u membrani, s približavanjem šiljku, moralo težiti u beskonačnost, što proturječi definiciji minimalne plohe, prema kojoj naprezanja u

membrani moraju biti konstantna. U praksi bi oslanjanje tkanine u točki moralo izazavati koncentraciju naprezanja i paranje tkanine. Ako se u praksi membrana oslanja na pilon, potrebno je izbjeći takvo singularno oslanjanje u točki. To se može postići izvedbom krute kape na vrhu pilona ili indirektnim oslanjanjem membrane na pilon preko pomoćne užadi.

Poopćenu geodetsku mrežu dobivamo uz različite sile u različitim kabelima, ali u svakom kabelu sila mora biti konstanta.

7.2. METODA 'GUSTOĆE SILA'

Jedan od postupaka linearizacije jednadžbi geodetske mreže je metoda gustoće sila. Zadani su omjeri između sila i duljina štapova. U jednadžbama ravnoteže

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{(x_i - x_j) S_{i,j}}{l_{i,j}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_i - y_j) S_{i,j}}{l_{i,j}} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(z_i - z_j) S_{i,j}}{l_{i,j}} = 0, \quad (3)$$

sile u štapovima i koordinate štapova unaprijed su nepoznate, pa tako i duljine štapova, ali za omjere sila i duljina $S_{i,j}/l_{i,j}$ unaprijed se odabire zadana vrijednost koja se označava sa $q_{i,j}$ i naziva se 'gustoćom sile' pa se dobiva

$$\sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} (x_i - x_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} (y_i - y_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} (z_i - z_j) = 0. \quad (4)$$

Sustav jednadžbi reducira se na tri nezavisna sustava linearnih jednadžbi sa zajedničkom matricom koja ima elemente $q_{i,j}$. Jednim se sustavom određuju sve koordinate x_i , drugim sve koordinate y_i , a trećim sve koordinate z_i .

Praktični nedostaci neposredne primjene metode gustoće sila proizlaze iz činjenice što se na izvedenoj konstrukciji mora ostvariti proračunska pretpostavka da projekcije čvorova mreže padaju u projektirane točke, te da su projekcije sila u štapovima istog užeta međusobno jednake. U dva štapa istog užeta vrijedi

$$S_i \cos \varphi_i = S_j \cos \varphi_j ; \quad (5)$$

S_i i S_j su sile u i -tom i j -tom elementu istog užeta, a φ_i i φ_j kutovi nagiba i -tog i j -tog elementa prema horizontalnoj ravnini. Ako je $\cos \varphi_i$ različito od $\cos \varphi_j$, mora biti i S_i različito od S_j da bi jednadžba bila zadovoljena. Iznosi uzdužnih sila mijenjaju se dakle od elementa do elementa duž svakog kabela. U svakom se čvoru s jednog užeta na drugo mora prenositi, osim sile u

smjeru normale na kontaktnu plohu, još i tangencijalna sila, koja omogućava klizanje između užadi i koja se ne može uravnotežiti samo trenjem.

Spojni elementi se moraju oblikovati i dimenzionirati tako da prenose razmjerno velike sile već pri prednapinjanju, prije unošenja vanjskog opterećenja. Izvedba je otežana zbog potreba preciznog međusobnog pričvršćavanja užadi u čvorovima prije prednapinjanja i prije nego što mreža kabela postigne konačan oblik. Teško je na samom objektu ispravljati geometrijske pogreške koje nastaju zbog netočnog položaja ležajeva i spojnih elemenata, netočno unjetih sila prednapinjanja, itd. Ako je ta pojava jako izražena, može nastati i estetski neostatak: zbog ekscentričnoga spajanja užadi, promjena sile u štapovima istog užeta uzrokuje izobličavanje čvorova koje može narušiti vizualnu glatkost plohe. Ti nedostaci dolaze do znatnijeg izražaja kod konstrukcija velikih raspona, jer je zbog velikih sila prednapona i velikih promjera užadi i ekscentričnost velika. Nedostaci se mogu izbjeći centriranjem čvorova i dobro izvedenim detaljima.

Pri izgradnji geodetske ili polugeodetske mreže moraju se koordinate čvorova izmjeriti i uskladiti s proračunskim vrijednostima, kako bi se kompenzirale netočnosti koje nastaju zbog razlike između izračunane i ostvarene vrijednosti sile u užetu, trenja između užadi, ekscentričnosti čvorova, gubitaka sila prednapinjanja, popuštanja spojeva, različitih pogrešaka u izvedbi,...

U tijeku izvedbe krovne konstrukcije, ali tek nakon prednapinjanja i postizanja konačne geometrije, kabele treba međusobno spojiti, čime se uvelike povećava krutost i sprječava naknadno dodatno klizanje pod djelovanjem promjenjivih opterećenja, posebno dinamičkih. Spojnice montirane nakon prednapinjanja i klizanja užadi jednih po drugima preuzimaju samo razmjerno male spojne sile prouzročene opterećenjima koja se pojavljuju nakon prednapinjanja. I montaža je jednostavnija, jer se obavlja na već oblikovanoj mreži te su potrebne samo male korekcije.

Iterativnom primjenom metode gustoće sila mogu se sile u štapovima jednog užeta (pa i u svim štapovima mreže) približno izjednačiti. Drugim riječima, iterativna primjena metode gustoće sila daje minimalnu mrežu (u okvirima tražene točnosti).

8. ZAKLJUČAK

Posljednjih godina u svijetu se intenzivno razvijaju vlačne konstrukcije od platna i užadi. Najčešće su to krovne konstrukcije, ali imaju i primjenu kod mostova, fasadnih konstrukcija, kaveza zooloških vrtova. Neki primjeri ovih konstrukcija, kao što su šatori ili pješački viseći mostovi, su vrlo stari i potječu još iz davnina, a danas su još uvijek u upotrebi. Naravno, oni se danas izrađuju od novih materijala, uz nova konstrukcijska i arhitektonska rješenja te mnogo većih raspona. Suvremeni razvoj je omogućen zbog napretka teorije konstrukcija i elektroničkih računala i programa koji omogućuju brz i precizan proračun i grafički prikaz, kao i zbog proizvodnje raznovrsnih razmjerno jeftinih sintetičkih materijala izvrsnih mehaničkih i drugih svojstava, od kojih se izrađuju i kojima se pokrivaju konstrukcije. Još jedna od prednosti laganih konstrukcija je i brza i jednostavna montaža i premještanje.

No unatoč davnim počecima, može se utvrditi da je intenzivan razvoj laganih konstrukcija tek započeo, a njihove su mogućnosti samo djelomično istražene. One će zauzimati sve veći dio u oblikovanju građevina u budućnosti. Zbog težnje svih građevina i projekata minimumu: minimumu materijala, troškova, trajanja izvedbe, potrebnih ljudi ili strojeva, možemo reći da su ove konstrukcije jedne od rijetkih koje se odlikuju i minimumom energije. Njihov oblik zadovoljava minimum potencijalne energije upravo zato jer sama građevina traži i zauzima oblik koji je najpovoljniji.

9. LITERATURA

- [1] Aganović I., Veselić K.: *Jednadžbe matematičke fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1985., str.9-71.
- [2] Berger H.: *Light structures-structures of light: the art and engineering of tensile architecture*, Birkhauser Verlag, Basel, 1996.
- [3] Dvornik J., Lazarević D.: *Viseće konstrukcije od platna i užadi*, Građevni godišnjak '97., HDGI, Zagreb, 1997., str. 239-271.
- [4] Fresl K.: *Primjena višerazinske metode u oblikovanju konstrukcija od platna*, Građevinar 49 (1997) 10, str. 537-549.
- [5] Fresl K.: *Teorem o minimumu potencijalne energije* (rukopis).