

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

**PRIMJENA POOPĆENIH MINIMALNIH
MREŽA U OBLIKOVANJU
KONSTRUKCIJA OD UŽADI**

ZAVRŠNI RAD IZ PREDMETA GRAĐEVNA STATIKA II.

Studentica: Maja Žužić, 0082047529

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, studeni 2015.

Sadržaj

1. Uvod	3
2. Karakteristike konstrukcija od užadi	5
2.1. Svojstva i primjena užadi	5
2.2. Vrste užadi.....	5
2.3. Mreže od užadi	9
2.4. Geometrijska nelinearnost.....	12
3. Faze projektiranja	15
3.1. Postupak projektiranja konstrukcija od užadi.....	15
3.2. Odabir željenog oblika	15
3.3. Postupak nalaženja oblika	16
3.4. Statička i dinamička analiza	16
3.5. Minimalno prednapinjanje i geometrijska krutost.....	16
3.6. Odabir elemenata i materijala.....	17
3.7. Određivanje duljine užeta.....	18
3.8. Spojevi.....	18
3.9. Gradnja vlačne konstrukcije	20
4. Nalaženje oblika	21
4.1. Fizikalni i numerički modeli	21
4.2. Ravnoteža slobodnog čvora.....	23
4.3. Sustav simultanih jednadžbi	25
5. Minimalne i poopćene minimalne mreže	26
6. Metoda gustoća sila	28
7. Iteracijska primjena metode	29
7.1. Iteracijska primjena metode gustoća sila na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža	29
7.2. Uvođenje kinematičkih ograničenja	30
8. Primjena metode gustoće sila.....	32
8.1. Utjecaj opterećenja u svim slobodnim čvorovima	41
9. Zaključak.....	45
10. Literatura.....	46

1. Uvod

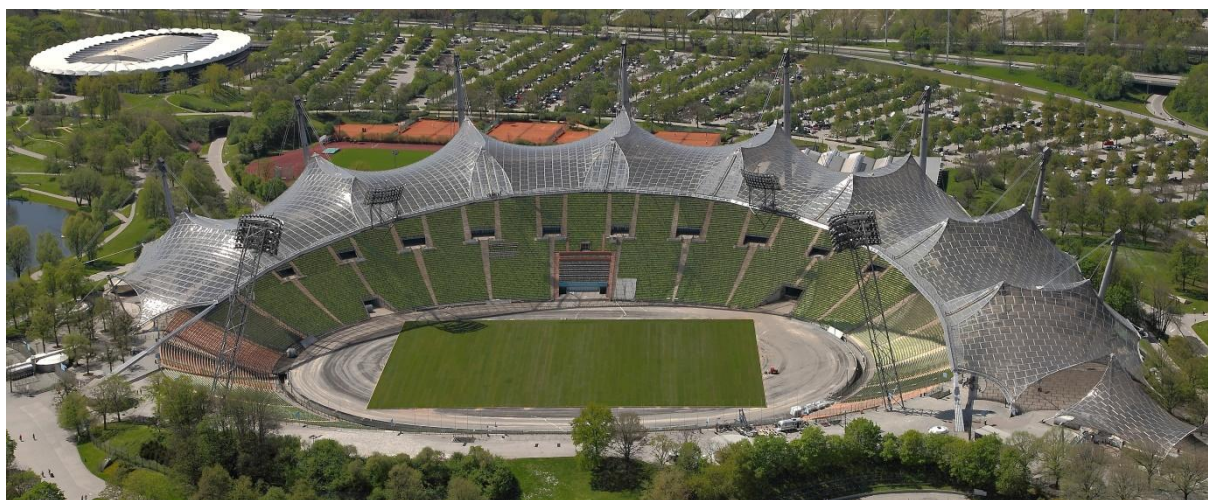
Povijesna upotreba užadi kao graditeljskog materijala dovela je do razvoja konstrukcija od užadi. Od davnina, nomadski narodi upotrebljavali su užad kako bi izgradili nastambe te su uočili prednost njihove jednostavne izgradnje. Također, užad je primjenjivana i za izgradnju jednostavnih mostova za premošćivanje rijeka, potoka i slično. Geometrijski oblik konstrukcija od užadi određuju strogi zakoni statike.



Slika 1. Nomadska nastamba

Uže je konstrukcijski element karakteriziran razlikom u svojim dimenzijama: duljina užeta znatno je veća od druge dvije dimenzije. Poznato je da uže ne može preuzeti tlačna opterećenja, a njegova je glavna prednost nad tlačnim konstrukcijama je izrazito mala vlastita težina. Pod djelovanjem opterećenja, zbog male fleksijske krutosti i nemogućnosti preuzimanja momenata savijanja, uže mijenja oblik te se u njemu razvijaju uravnotežujuće vlačne sile. Kod projektiranja se upotrebljava prednapeta užad koja mrežama od užadi daje geometrijsku krutost. Glavna karakteristika takvih konstrukcija je međuovisnost njihova oblika i unutarnjih sila.

Prije nanošenja korisnog opterećenja treba pronaći optimalan oblik konstrukcije od užadi koji ovisi o silama prednapinjanja dok se vlastita težina može zanemariti. Tijekom razvoja prednapetih konstrukcija upotrebljavani su fizikalni modeli po kojima je najznačajniji njemački arhitekt Frei Paul Otto. Projektiranjem laganih konstrukcija određene čvrstoće i membranske strukture doprinio je razvoju matematike konstrukcija i građevinarstva, a njegovo najpoznatije djelo je krov Olimpijskog stadiona u Münchenu iz 1972. Budući da su fizikalni modeli imali velik broj nedostataka, došlo je do razvoja računalnih modela i metoda.



Slika 2. Krov Olimpijskog stadiona u Münchenu, 1972.

Prve metode svodile su se na nelinearan proračun nalaženja oblika kod kojeg je postojala mogućnost pojave tlačnih sila u pojedinim dijelovima užadi. Početkom sedamdesetih godina, H. J. Sheck i K. Linkwitz nelinearnosti su problem sveli na linearan i razvili metodu gustoće sila kojom su se koristili za potrebe proračuna Olimpijskog kompleksa u Münchenu.

U ovom radu naglasak je na karakteristikama samih konstrukcija od užadi, fazama projektiranja i postupku nalaženja oblika konstrukcija te primjeni poopćenih minimalnih mreža u projektiranju istih. Također, obrađena je metoda gustoće sila te iteracijska primjena te metode popraćena primjerom.

2. Karakteristike konstrukcija od užadi

2.1. Svojstva i primjena užadi

Uže je gipki element koji se odlikuje znatnom razlikom u dimenzijama: duljina užeta je puno veća od njegove ostale dvije dimenzije. Ono je okarakterizirano malom fleksijskom i poprečnom krutosti zbog čega nema sposobnost preuzimanja većih sila okomitih na svoju os, tlačnih sila niti momenata savijanja. Zbog promjene oblika pod djelovanjem opterećenja, po ploštini poprečnog presjeka postiže se jednolika raspodjela vlačnih naprezanja. Do sloma užeta može doći samo u slučaju kada vlačna naprezanja prekorače vrijednost vlačne čvrstoće u njegovom najslabijem poprečnom presjeku. Elementi se mogu opterećivati do granice tečenja, a posljedica toga je potpuna iskorištenost poprečnog presjeka i materijala.

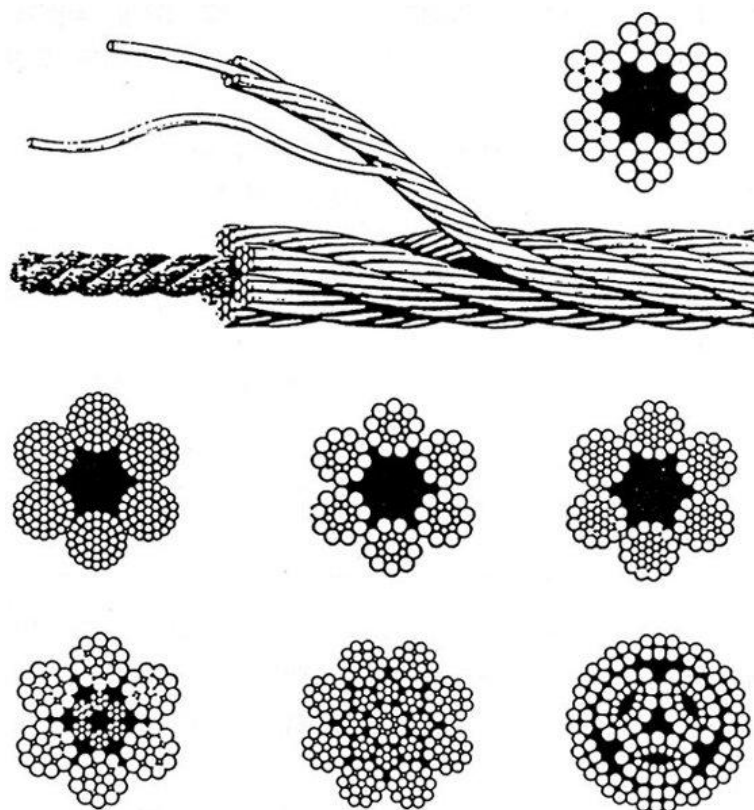
Prednost užadi je mala masa i velika čvrstoća što je vrlo povoljno za konstruiranje mostova velikih raspona, pa je zato sastavni element ovješanih i visećih mostova. Također, upotrebljava se za natkrivanje velikih površina, pri čemu rasponi vlačne konstrukcije nisu prekinuti pojedinim elementima. Primjeri takvih konstrukcija su razni stadioni, sportske dvorane, izložbeni paviljoni i slično. Takve konstrukcije su po prirodi okarakterizirane mobilnošću te jednostavnom i brzom montažom i demontažom. Užad poslagana u mrežu, tvoreći sedlastu (antiklasičnu) plohu, primjenjuje se i kao nosivi element raznih tornjeva.

2.2. Vrste užadi

Temeljni element svakog užeta čini čelična žica promjera 3-8 mm veće vlačne čvrstoće nego kod uobičajenog čelika te pretežito okruglog poprečnog presjeka.

Užad je podijeljena u tri temeljne skupine:

- Spiralni snopovi
- Kabeli unutar krutog omotača
- Žičana užad



Slika 3. Užad različitih poprečnih presjeka

1) Spiralni snopovi

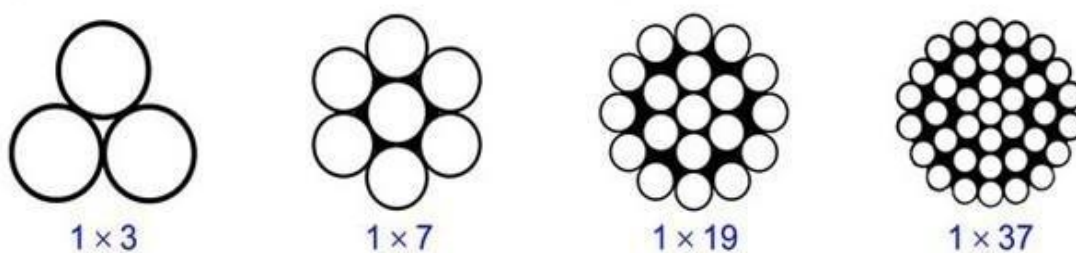
Karakterizirani su jednostavnim slaganjem žica u jednom ili više slojeva. Jezgru snopa čini ravna čelična žica oko koje je složen jedan sloj od šest žica istog promjera. Svaki sljedeći sloj ima šest žica više od prethodnog, a način navijanja žica oko jezgre definira vrste snopova. Moduli elastičnosti ovise o veličini užeta i kreću se između 145 GPa i 170 GPa. Ove vrste snopova upotrebljavaju se na mjestima na kojima su potrebni vrlo fleksibilni kabeli.



Slika 4. Dijelovi spiralnog snopa

Glavne vrste snopova su:

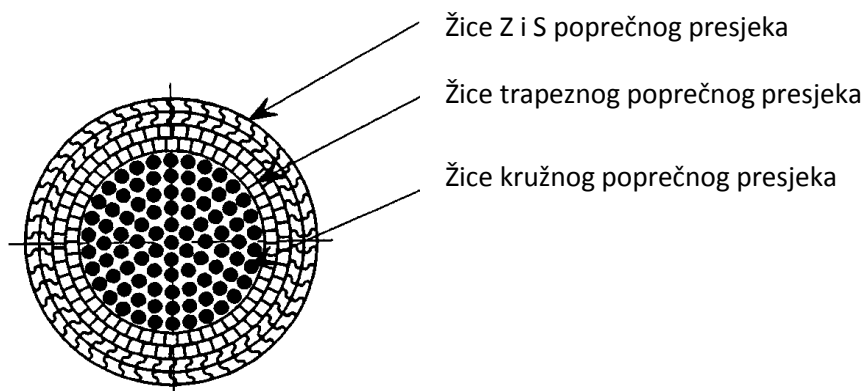
- Snop s jednim slojem žica namotanih oko jezgre
- Snop s dva sloja žica omotanih oko jezgre
- Snop s dva sloja žica istog promjera i popunjujućim slojem (Filler)
- Snop sa dva sloja žica s različitim polumjerima u zadnjem vanjskom sloju (Warrington)
- Snop s više slojeva (kombiniran)
- Žičana užad s čeličnom jezgrom.



Slika 5. Vrste snopova

2) Kabeli unutar krutog omotača

Ova vrsta kabela sastavljena je od dvije vrste žice: jezgra je izvedena od žice kružnog poprečnog presjeka dok je okolni sloj sačinjen od žice posebno dizajniranih trapeznih i Z-oblika.

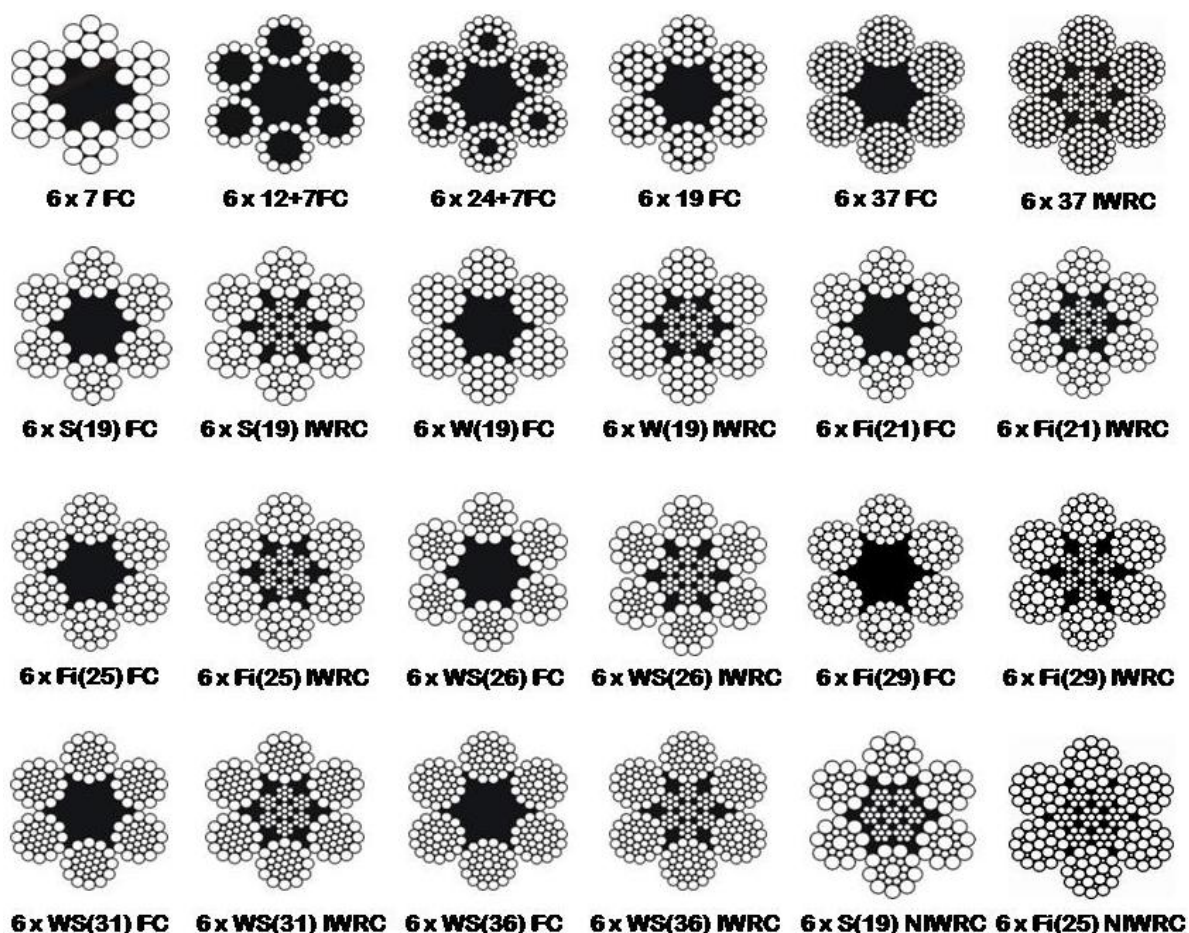


Slika 6. Presjek kabela unutar krutog omotača

Zbog svog specifičnog oblika, žice vanjskog sloja se međusobno mogu bolje povezati te tvore glatku površinu koja onemogućava prodor štetnih stvari u sam kabel. Također, kabel je okarakteriziran povećanom trajnosti, dobrom antikorozivnom zaštitom i otpornošću na površinski tlak te posjeduje velik modul elastičnosti koji se kreće između 160 GPa i 180 GPa.

3) Žičana užad

U odnosu na prethodno navedene dvije vrste užadi, žičana užad ima niži modul elastičnosti koji iznosi 100 GPa, ima manju sposobnost antikorozivne zaštite te je podložnija oštećenjima. Promjer se kreće između 20 mm i 124 mm. Primjenjuje se kod vlačnih membrana.



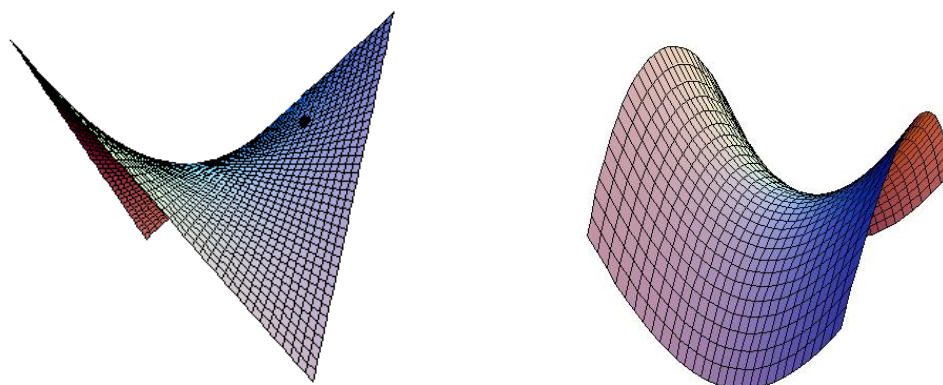
Slika 7. Tipovi žičane užadi

2.3. Mreže od užadi

Razlikujemo nekoliko oblika spajanja užadi u mreže:

PRAVČASTE MREŽE

Tip mreže kod koje uže cijelom svojom duljinom leži na pravcu i nema lomova u čvorovima pa nije potrebno provoditi postupak nalaženja oblika jer se on određuje neposredno geometrijski iz rubnih uvjeta. Svako uže mreže je neovisno i u ravnoteži. Kod ovih mreža, gubitak prednapona može se pojaviti samo zbog relaksacije užadi zbog plastičnih deformacija, puzanja ili popuštanja ležajnih sidara, dok za djelovanje poprečnog opterećenja taj gubitak ne postoji. U tom se slučaju uže može samo produljiti, što izaziva još veće nategnuće. Primjeri ovakvih mreža su rotacijski paraboloid i hipar.



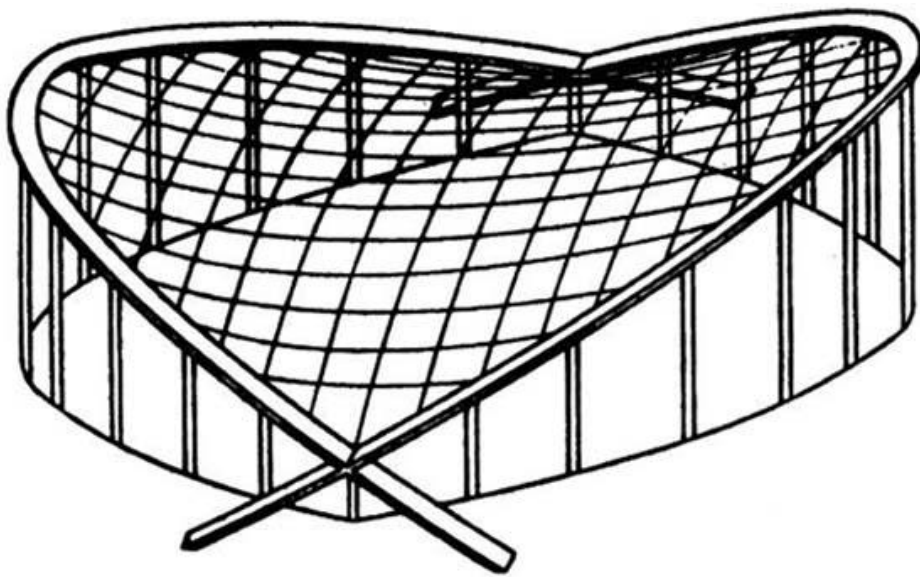
Slika 8. Hipar i rotacijski paraboloid



Slika 9. Primjena – Lijevo: Gateshead Millennium Bridge, Engleska
Desno: Toranj nuklearnog reaktora THTR-300, Njemačka

REGULARNE MREŽE

Sastoje se od dvije familije užadi koje tvore sedlasti oblik i u međusobnom su odnosu. Kod djelovanja vertikalnog opterećenja sile u konkavnoj užadi se povećavaju (nosiva) dok se u konveksnoj užadi smanjuju (prednaponska). Zbog djelovanja opterećenja suprotnog smjera užad mijenja uloge. Na kontaktima užadi nastaju dvije međusobno uravnotežene sile kao posljedica međudjelovanja užadi. Razlikujemo mreže s krutim krajevima i mreže s rubnim kabelima.



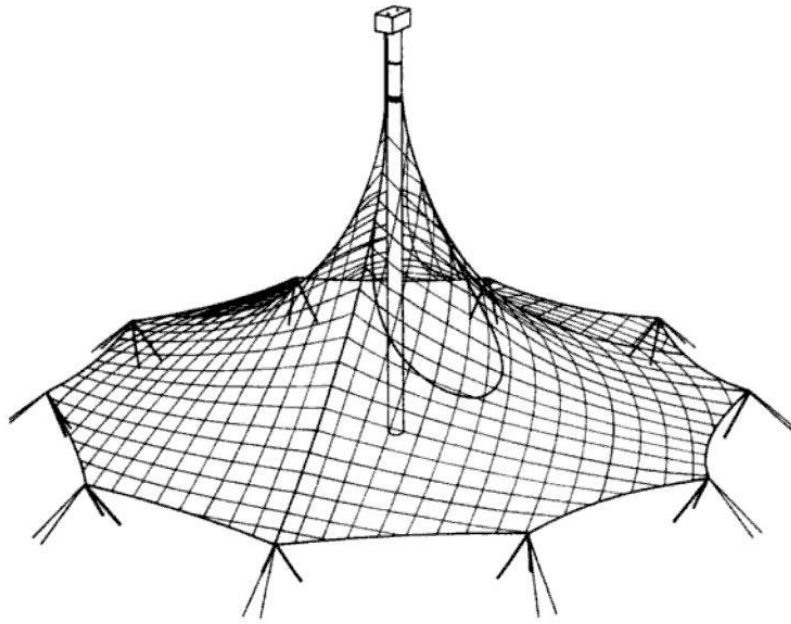
Slika 10. Model J.S. Doroton arene



Slika 10. J. S. Dorton Arena, Raleigh, Sjeverna Karolina, 1952.

NEREGULARNE MREŽE

Ovaj tip mreža sastoji se od više familija užadi ili složenijeg rasporeda užadi. Karakteristika ovog tipa mreže je da uže na jednom djelu može biti konkavno, a na drugom konveksno. Također, uže može biti prekinuto u nekom čvoru ili mogu biti umetnuti kruti elementi unutar mreže.



Slika 10. Neregularna mreža od užadi: Institut za lagane konstrukcije, Stuttgart, Njemačka



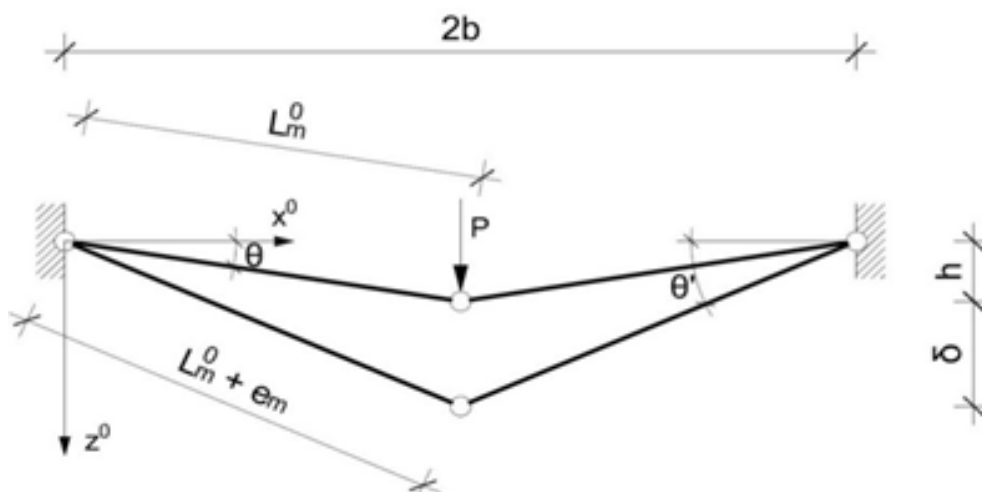
Slika 11. The United States Pavilion, Expo '74 sajam, Spokane, Washington, SAD

2.4. Geometrijska nelinearnost

Jedna od glavnih karakteristika konstrukcija od užadi je nelinearno ponašanje. Kod njih su pomaci veliki čak i pri naprezanjima u granicama elastičnosti, te ih se ne smije zanemariti.

Geometrijska nelinearnost nije samo obilježje konstrukcija od platna ili užadi. U nastavku je primjer jednostavne konstrukcije kod koje isto tako može doći do znatnih pomaka zbog djelovanja opterećenja.

Konstrukcija se sastoji od dvaju linearno elastičnih štapova zglobno spojenih u sredini i na krajevima.



Iz uvjeta ravnoteže svih sila u smjeru osi z proizlazi

$$P = 2Ke_m \sin\theta' = 2Ke_m \frac{\sqrt{(L_m^0 + e_m^0)^2 - b^2}}{L_m^0 + e_m^0}$$

gdje su:

L_m^0 - početna duljina štapova,

e_m^0 - produljenje svakog štapa,

$K = \frac{EA}{L_m^0}$ - elastična krutost,

- E - Youngov modul elastičnosti,
 A - površina poprečnog presjeka,
 θ' - kut koji štapovi zatvaraju s osi x nakon deformacije.

Raspisivanjem prethodnog izraza, dobit ćemo

$$\begin{aligned}
 P &= 2Ke_m \frac{\sqrt{(L_m^0 + e_m^0)^2 - b^2}}{L_m^0 + e_m^0} = 2K \frac{e_m}{L_m^0 + e_m^0} (\delta + h) = 2K \left(1 - \frac{L_m^0}{L_m^0 + e_m^0} \right) (\delta + h) \\
 &= 2K \left(\delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^2 + b^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Slijedi da je odnos opterećenja P i pomaka δ nelinearan.

Ako član iz zagrade raspišemo, možemo pokazati pod kojim uvjetima odnos pomaka i opterećenja postaje linearan.

$$\begin{aligned}
 \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^2 + b^2}} &= \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{\delta^2 + 2\delta h + h^2 + b^2}} \\
 &= \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{h^2 + b^2}} \left(1 + \frac{2\delta h + \delta^2}{h^2 + b^2} \right)
 \end{aligned}$$

Razvijanjem izraza u zagradama u red te uzimanja u obzir da je $(L_m^0)^2 = h^2 + b^2$, slijedi

$$\approx \delta + h - (\delta + h) \left(1 - \frac{1}{2(L_m^0)^2} (2\delta h + \delta^2) \dots \right) = \frac{h^2}{(L_m^0)^2} \delta$$

Vraćajući izraz u izraz x dobit ćemo

$$P = 2K \frac{h^2}{(L_m^0)^2} \delta$$

što opisuje linearan odnos opterećenja i pomaka, pošto je $\frac{h^2}{(L_m^0)^2}$ konstanta.

Ovim primjerom je pokazano da je za velike pomake odnos opterećenja i pomaka nelinearan dok je za male pomake linearan (ti pomaci moraju biti toliko malo da dozvole uzimanje u obzir samo prvih članova u razvoju u red).

Rješavanje geometrijski nelinearnog problema provodi se primjenom raznih numeričkih modela a jedna od njih je metoda prijelazne matrice krutosti.

3. Faze projektiranja

3.1. Postupak projektiranja konstrukcija od užadi

Za razliku od projektiranja konstrukcija od čelika, betona ili drveta, projektiranje i oblikovanje konstrukcija od užadi znatno se razlikuje po svojoj složenosti. Ono zahtijeva dobro poznavanje ponašanja užadi kao i konstrukcija od njih, te je također važno poznavati računalni program koji se upotrebljava kod projektiranja. Budući da se vlačne konstrukcije konstruiraju na temelju nelinearnog proračuna, metode elementarne mehanike se ne mogu rabiti.

Projektiranje se može raščlaniti na slijedećih osam postupaka:

- 1) Odabir željenog oblika
- 2) Postupak nalaženja oblika
- 3) Statička i dinamička analiza
- 4) Minimalno prednapinjanje i geometrijska krutost
- 5) Odabir elemenata i materijala
- 6) Određivanje duljine užeta
- 7) Spojevi
- 8) Gradnja vlačne konstrukcija

3.2. Odabir željenog oblika

U fazi odabira željenog oblika potrebno je definirati željenu geometriju koja mora zadovoljavati zahtjeve funkcionalnosti, ekonomičnosti i estetike. Budući da je užad pogodna za konstrukcije velikih raspona, postoje sistemi koju su pogodniji za pojedine arhitektonske oblike i zahtjeve. Znatna utjecaj imaju karakteristike užeta koje ovise o fizikalnim svojstvima materijala te rasponu za koji se upotrebljava. Za postizanje stalnog oblika, užad se slaže u mreže.

3.3. Postupak nalaženja oblika

Kako okvirne dimenzije konstrukcija od užadi nisu poznate, zahtijevaju postupak nalaženja oblika što nije slučaj kod tradicionalnih konstrukcija pošto su njihov oblik i okvirne dimenzije unaprijed poznate.

Nalaženje oblika (eng. *form-finding*) smatra se jednom od najvažnijih točaka kod projektiranja vlačnih konstrukcija, a definirano je kao postupak određivanja ravnotežnog oblika koji zadovoljava potrebe arhitekata i inženjera u smislu funkcionalnosti, stabilnosti i estetike.

3.4. Statička i dinamička analiza

Na temelju ulaznih podataka o ravnotežnom stanju konstrukcije, pomoću računalnih programa provodi se statička i dinamička analiza konstrukcije za djelovanje stalnih, promjenjivih i izvandrednih djelovanja.

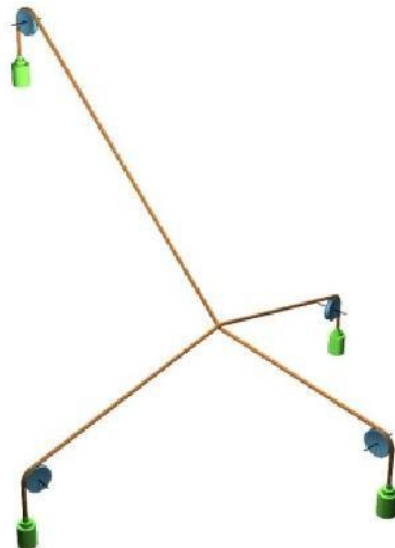
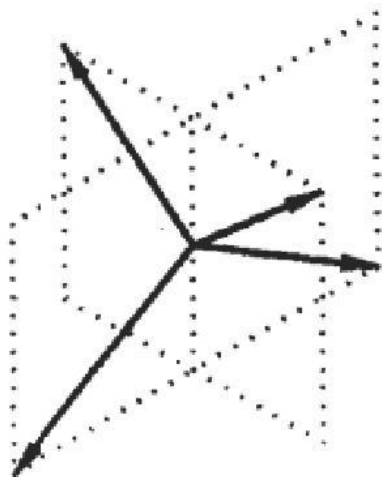
Djelovanja na mreže užadi jednaka su onima kod konvencionalnih građevina, no ipak je raspodjelu opterećenja potrebno odrediti s većom točnom. Razlog tome je osjetljivost mreža užadi na nejednoliku raspodjelu opterećenja, a određivanje djelovanja otežava složena geometrija mreže, njezina mala težina te veliki rasponi.

3.5. Minimalno prednapinjanje i geometrijska krutost

Kod izbora sile prednapinjanja potrebno je uzeti što manji iznos sile kako bismo dobili manje dimenzije užadi, jednostavnije detalje sidrenja i spajanja te manje sile na komplementarnu konstrukciju. Također, odabrana sila treba biti takva da kod djelovanja najvećeg opterećenja ne dođe do labavosti užeta.

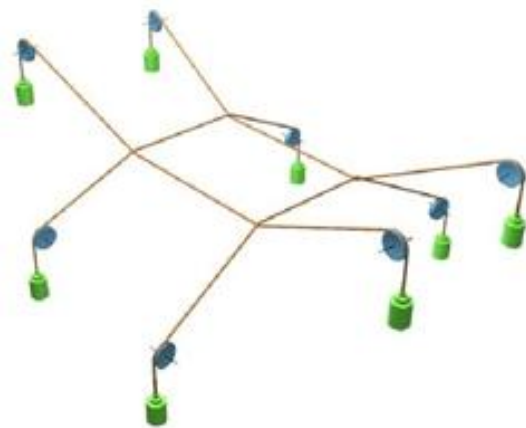
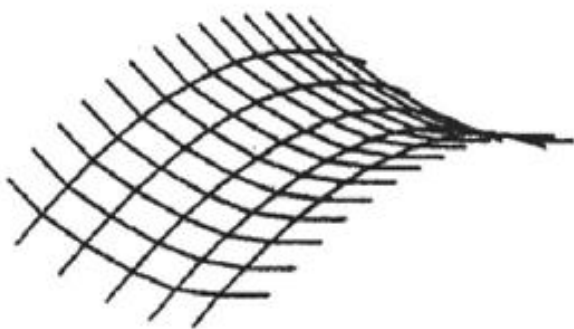
Labava užad izaziva nestabilnost konstrukcije te može uzrokovati oštećenje pokrova i izazvati vitoperenje labavih dijelova užadi pod djelovanjem opterećenja vjetrom, što se ne može tolerirati.

Između dvije točke ovješeno uže preuzet će opterećenje promjenom svog oblika te će dva užeta koja se sijeku stabilizirati svoju zajedničku točku.



Slika 12. Dva kabela koji se sijeku stabiliziraju zajedničku točku

Antiklastična mreža užadi suprotstavlja se vanjskom opterećenju zahvaljujući negativnoj zakrivljenosti i prednaponu.



Slika 13. Antiklastične mreže

3.6. Odabir elemenata i materijala

Za projektiranje konstrukcija od užadi, potreban je odabir odgovarajućih tipova užadi ovisno o potrebnoj površini poprečnog presjeka, čvrstoći i krutosti te odabir odgovarajućeg materijala pokrova. Osnovne vrste užadi prikazane su u poglavlju 2.

3.7. Određivanje duljine užeta

Zbog pojave puzanja, užad se mora rezati kraće za otprilike $\varepsilon = 0,35\%$, što je iskustvena vrijednost, pa je za konstrukcije osjetljivije geometrije potrebno ispitati ponašanje zbog točne deformacije od puzanja. Budući da se deformacije od puzanja pojavljuju tek nakon nekog vremena, postoji vjerojatnost da će biti potrebna primjena većih sila prednapinjanja u fazi montaže konstrukcije. Vrijeme puzanja ovisi o veličini i količini opterećenja te temperaturi.

3.8. Spojevi

Postoji nekoliko vrsta povezivanja kabela:

- a) Veza kabel – kabel (stezaljke)
 - b) Veza kabel – konstrukcija
 - c) Veza kabel – podloga (sidra)
- Veza kabel – kabel (stezaljke)

Primjenjuje se kod međusobnog križanja dvaju kabela. Zadaća ove veze je sprječavanje relativnih horizontalnih i vertikalnih pomaka, ali dopuštanje relativnih zaokreta.

Stezaljke možemo podijeliti na dvije vrste, a odabiremo ih ovisno o tipu mreže:

- Montiranje na mjestu izvođenja
- Tvorničke; priključuju se na kabel u tvornici



Slika 14. Stezaljke – Lijevo: Postavljene na kabele u tvornici; Desno: Postavljene na mjestu izvedbe



Slika 15. Lijevo: Dvostruka U stezaljka za spojeve s dva kabela; Desno: Detalj spoja s rubnim užetom

- Veza kabel – konstrukcija

Ovdje spadaju sve veze između kabela i nekog krutog nosivog sklopa, a veza se sastoji od spoja kabela i krutog okvira koji moraju biti takvi da osiguraju traženu veličinu sile prednapinjanja u kabelu. Također, treba voditi računa o tome da kabel ne ispadne iz spoja.



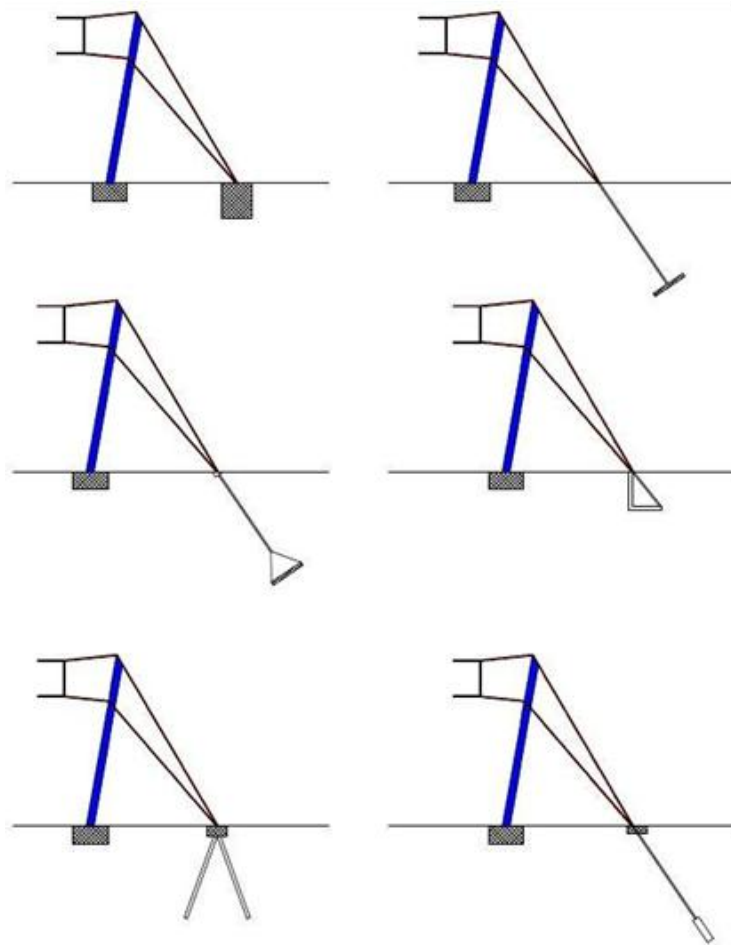
Slika 16. Lijevo: Priključak na čelični i betonski stup

- Veza kabel – podloga (sidra)

Ovakva veza upotrebljava se kada sile iz kabela treba prenijeti izravno u podlogu. Različiti su načini sidrenja kabela i konačan oblik ovisi o vrsti podloge, to jest tla u koje se sidri.

Razlikujemo dvije skupine:

- Gravitacijska sidra: vlastitom težinom uravnotežuju vertikalnu komponentu vlačne sile iz užeta, a horizontalnu preuzima tlo. Upotrebljava se kod tla slabe nosivosti (pijesak, šljunak).
- Pločasta, gljivasta i slična sidra: odupiru se vlačnim silama iz kabela koristeći se težinom tla iznad njih. Upotrebljava se kod gline.



Slika 17. Vrste sidara: gravitacijski (1), pločasto (2), gljivasto (3), potporni zid (4), piloti (5), sidro (6)

3.9. Gradnja vlačne konstrukcije

U prethodnim procesima je opisana konstrukcija, sada je na redu slaganje užadi u mrežu i njezino prednapinjanje. Problem prednapinjanju predstavlja međuovisnost užadi: napinjanje jednog užeta može izazvati vlačna naprezanja u nekom drugom. Zbog toga kod analize treba pronaći optimalan redoslijed, tako da se na kraju ne bi javile prevelike prednaponske sile u mreži.

4. Nalaženje oblika

Postoji nekoliko numeričkih metoda nalaženja oblika, a neke od njih su: metoda gustoće sila, metoda dinamičke relaksacije, metoda prijelazne matrice krutosti i metoda konačnih elemenata.

Također, oblik konstrukcija od užadi možemo pronaći fizikalnim modelima.

4.1. Fizikalni i numerički modeli

- **Fizikalni model**

Njemački arhitekt Frei Paul Otto dao je velik značaj primjeni fizikalnih modela u nalaženju oblika konstrukcija. Sedamdesetih godina je to bio jedini način za određivanje početnog ravnotežnog položaja, pa se većina istraživanja Instituta za lagane konstrukcije u Stuttgartu temeljila upravo takvim modelima, posebno na modelu opne od sapunice.

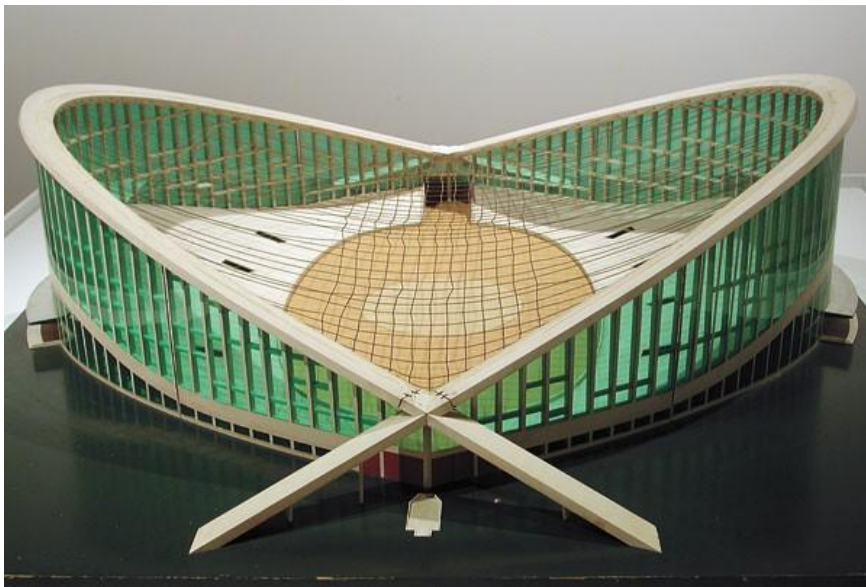


Slika 18. Fizikalni model Olimpijskog stadiona u Münchenu

Opna od sapunice je primjer stabilne minimalne plohe. Zauzima ravnotežni položaj između zadanih rubnih uvjeta, te u tom položaju ima minimalnu potencijalnu energiju. Osim sapunice, upotrebljavani su i drugi materijali, kao što je tkanina, žica, spajalice i sl.

Iako su fizički modeli pružali dobar uvid u ponašanje vlačnih konstrukcija, bilo je teško točno odrediti koordinate pojedinih točaka, a isto tako i odrediti vrijednosti sila i napreznja u užadi. Iz tog razloga, počeli su se razvijati razni računalni modeli i metode.

Danas se fizikalni modeli upotrebljavaju za bolju vizualizaciju konstrukcija od užadi te kontrolu rezultata dobivenih računalnim proračunima.



Slika 19. Fizikalni model J.S. Doroton Arene

- **Numerički model**

Pedesetih godina prošlog stoljeća započeo je razvoj kompjutorskih programa koji su unaprijedili postupak određivanja oblika i potrebnih prednaponskih sila.



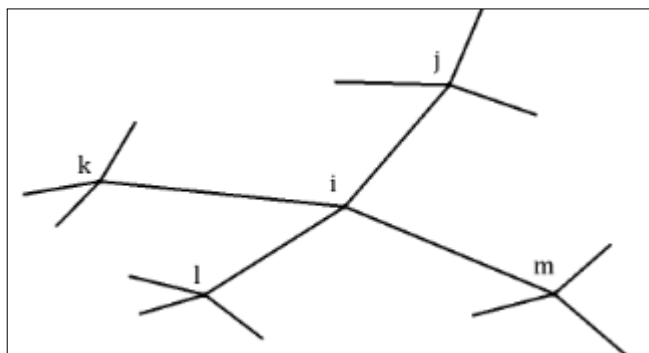
Slika 20. Numerički model Olimpijskog stadiona u Münchenu

Za potrebe izgradnje Olimpijskog stadiona u 1972. godine razvijen je prvi računalni program. Metodom najmanjih kvadrata određivana je duljina kabela. Danas vrlo jednostavna procedura, u to je vrijeme upotrebljavala svu kompjutorsku memoriju. Dugogodišnji razvoj numeričkih modela i računalnih programa omogućio nam je projektiranje sve složenijih i nevjerovatnijih oblika.

4.2. Ravnoteža slobodnog čvora

Jednadžbe ravnoteže čvorova opterećenih samo silama prednapinjanja u priključnim štapovima, čine osnovu nalaženja oblika konstrukcija od užadi. Jednadžbe ravnoteže čvorova osnova su nalaženja oblika konstrukcija od užadi. Kod formiranja sustava jednadžbi, uvode se sljedeće pretpostavke:

- elementi između čvorova su ravni i međusobno su zglobno spojeni,
- elementi preuzimaju samo vlak,
- zanemaruje se vlastita težina kabela,
- nema vanjskog opterećenja,
- topologija mreže nam je unaprijed poznata.



Slika 21. Čvor i sa susjednim čvorovima i priključenim štapovima

Za svaki slobodni čvor i možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže koje glase: zbrojevi projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenima u i -ti čvor na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži.

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \beta_{i,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \gamma_{i,j} = 0, \quad (1)$$

gdje su: - $S_{i,j}$ vrijednosti sila u štapu i,j , s pozitivnim smislom djelovanja od čvora i prema čvoru j ,

- $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ i $\gamma_{i,j}$ kutovi između koordinatnih osi i osi štapa

$$\cos \alpha_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}}, \quad \cos \beta_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}}, \quad \cos \gamma_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}}, \quad (2)$$

gdje je:

$$l_{i,j} = l(x_i, x_j, y_i, y_j, z_i, z_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3)$$

duljina štapa (i,j).

Uvrstimo li (2) i (3) u (1) dobit ćemo sustav nelinearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Dobiveni sustav jednadžbi sastoji se od tri jednadžbe ravnoteže svakog čvora mreže. Čvorove mreže možemo podijeliti na ležajne i slobodne čvorove. Koordinate ležajnih čvorova u analizu ulaze kao ulazni podaci, dok su koordinate slobodnih čvorova rješenja sustava.

Nelinearne jednadžbe sustava (4) ne sadrže koeficijente kojima je izražena konstitucijska veza vrijednosti sila u kabelima i njihova produljenja, što znači da ravnotežna konfiguracija mreže ne ovisi o modulima elastičnosti kabela i površinama njihovih poprečnih presjeka.

Zaključujemo da je nalaženje oblika statički problem, dok je njegovo rješenje „čisti nematerijalizirani ravnotežni oblik“.

4.3. Sustav simultanih jednadžbi

Ako je n broj čvorova, a m broj štapova, tada možemo postaviti $3n$ jednadžbi ravnoteže, s $3n + m$ nepoznanica. Broj nepoznanica je za m veći od broja jednadžbi, pa rješenje sustava (ako postoji) nije jednoznačno. Kako bismo dobili jednak broj jednadžbi i nepoznanica, trebamo dodati još uvjeta pomoću kojih ćemo eliminirati sile u štapovima kao nepoznanice.

Postoje četiri pravila kojima se koristimo:

- **kvazilaplaceovo pravilo:**
unaprijed zadajemo uravnotežene projekcije sile u svim štapovima na ravninu x - y ;
- **pravilo gustoće sile:**
zadajemo omjer između iznosa sile i duljine svakog štapa;
- **poopćeno pravilo minimalne mreže:**
zadajemo iznose sile u svim štapovima;
- **poopćeno pravilo minimalne mreže s kinematičkim ograničenjima:**
većem dijelu štapova zadajemo iznose sile, a ostalim štapovima zadajemo duljine.

5. Minimalne i poopćene minimalne mreže

Ukupna duljina kabela L definirana je kao

$$L = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Izjednačimo li njezine derivacije po koordinatama slobodnih čvorova s nulom dobivamo sustav od $3n$ jednadžbi sa $3n$ nepoznanica:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

Pomnožimo li sustav sa $S = S_{i,j}$, dobit ćemo:

$$S \frac{\partial L}{\partial x_i} = S \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$S \frac{\partial L}{\partial y_i} = S \sum_{j=1}^n \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$S \frac{\partial L}{\partial z_i} = S \sum_{j=1}^n \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

Uz uvjet da su sile u svim kabelima jednake, rješavanjem gornjih jednadžbi dobit ćemo oblik mreže kod kojeg je zbroj duljina kabela manji od zbroja duljina kabela u bilo kojem drugom položaju. Takve mreže nazivamo *minimalnim ili geodetskim mrežama*.

Ako bismo pri rješavanju sustava zadali da su sile u kabelima različite, ali jednake duž pojedinog kabela, dobili bismo *poopćenu minimalnu mrežu kabela*.

Budući da je sustav jednačbi nelinearan, morat ćemo primijeniti neku od iteracijskih metoda rješavanja. U ovom radu detaljnije će biti opisana metoda gustoće sila te iteracijska primjena te metode.

6. Metoda gustoća sila

Za potrebe računalnog modeliranja krova Olimpijskog stadiona u Münchenu, razvijena je metoda gustoće sila. Zbog zahtjevnosti konstrukcije i izračunavanja njezinog opsega, do tada upotrebljavani fizikalni modeli nisu bili dovoljno točni. S vremenom je razvijen računalni program koji se temelji na metodi gustoće sila. Primjenom te metode dobivaju su oblici vlačnih konstrukcija koji su u statičkoj ravnoteži.

Osnovna ideja metode gustoće sila je linearizacija jednadžbi ravnoteže što se postiže uvođenjem omjera sile u štapu i njegove duljine

$$\frac{s_{i,j}}{l_{i,j}} = q_{i,j}.$$

Jednadžbe ravnoteže prelaze u

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (x_i - x_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (y_i - y_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (z_i - z_j) = 0$$

čime se dobivaju tri neovisna sustava jednostavnog postupka pronalaženja rješenja ako se kao početna pretpostavka uzme da je q_{ij} konstanta. Jednim sustavom određuju se koordinate x_i , drugim y_i i trećim sve koordinate z_i .

U nekim primjerima, dobivena rješenja ne zadovoljavaju, pa se u tom slučaju iz dobivenih vrijednosti računaju nove q_{ij} . Taj postupak se može ponavljati u više iteracija što će dati sve više zadovoljavajuće i primjerenije rezultate.

7. Iteracijska primjena metode

7.1. Iteracijska primjena metode gustoća sila na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža

U k -tom koraku iteracije gustoću sila u štapu (i, j) računamo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}},$$

gdje su:

- $q_{i,j}^{(k-1)}$ gustoća sila u prethodnom koraku,
- $S_{i,j}^{(k-1)}$ vrijednost sila izračunate u prethodnom koraku,
- \bar{S} tražena vrijednost sila.

Na sljedeći se način to može bolje objasniti: Ako se pretpostavi da je sila $S_{i,j}^{(k-1)}$, sila izračunata u $(k-1)$ -om koraku iteracije, različita od tražene vrijednosti \bar{S} , tada će se vrijednost sila \bar{S} dobiti množenjem sila $S_{i,j}^{(k-1)}$ s koeficijentom, $s_{i,j}^{(k)}$ odnosno $\bar{S} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)}$.

Nakon što su u k -tom koraku izračunate koordinate čvorova i duljinu $l_{i,j}^{(k)}$, vrijednost sila bit će

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k)}.$$

Ako se duljina štapova nije promijenila, tj. ako vrijedi

$$l_{i,j}^{(k)} = l_{i,j}^{(k-1)},$$

vrijediti će i

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}.$$

Ako je k tome $S_{i,j}^{(k)}$, tražena vrijednost sila onda je i

$$S_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^k \cdot S_{i,j}^{(k-1)} = s_{i,j}^k \cdot q_{i,j}^{(k-1)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}.$$

Usporedbom s izrazom dobivamo da je:

$$q_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^k \cdot q_{i,j}^{(k-1)}.$$

Prema tome, ako se duljina štapova ne mijenja, gustoća sile iz izraza odmah daje traženu vrijednost sile. No, promjenom gustoća sila mijenja se i ravnotežna konfiguracija, a samim time mijenju se i duljine štapova. Prema tome, potreban je iteracijski postupak kojim ćemo se postupno približavati traženoj vrijednosti sile.

Opisani postupak možemo i dodatno proširiti: zadavanjem različitih sila u različitim štapovima povećavamo broj mogućih oblika mreže užadi, a gustoću sile u štapu (i, j) u k -tom koraku iteracije računamo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}},$$

pri čemu je $\bar{S}_{i,j}$ zahtijevana vrijednost sile u tom štapu, koja se može razlikovati od vrijednosti sila u drugim štapovima. No, želimo li oblikovati prirodnu poopcenu minimalnu mrežu, moramo zadati jednake sile u svim štapovima pojedinog kabela.

Ako u gornji izraz uvrstimo $q_{i,j}/S_{i,j} = 1/l_{i,j}$, dobit ćemo još jedan izraz za gustoću sile:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}}.$$

7.2. Uvođenje kinematičkih ograničenja

U situacijama kada dva ili više čvorova „otkližu“ u jednu točku, tj. u situacijama u kojima se javlja preveliko klizanje kabela, uvodimo kinematička ograničenja. To se najčešće događa u rubnim kabelima, neovisno o silama u njima. Kinematičkim ograničenjima osiguravamo zahtijevane duljine štapova.

To ćemo ostvariti na sljedeći način:

Propisanu duljinu $\bar{l}_{i,j}$ štapa (i, j) osigurat ćemo tako da gustoću sile u njemu računamo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}}.$$

Uz uvjet da su sile nepromijenjene, $S_{i,j}^{(k)} = S_{i,j}^{(k-1)}$, i da je gustoća sile obrnuto proporcionalna duljini štapova dobivamo $q_{i,j}^{(k)} / q_{i,j}^{(k-1)} = l_{i,j}^{(k-1)} / l_{i,j}^{(k)}$. Iz toga slijedi da je koeficijent kojim trebamo pomnožiti gustoću sile iz prethodnog koraka $l_{i,j}^{(k-1)} / l_{i,j}^{(k)}$, te iz

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}}$$

i $S_{i,j} = q_{i,j} \cdot l_{i,j}$ dobivamo izraz.

Opisana iteracijska primjena metode gustoća sile ima brojne prednosti. Jedna od njih je da ne treba pretpostavljati početnu aproksimaciju rješenja, jer su sustavi jednačbi linearni, pa se mogu rješavati direktnim postupcima. Postupak je vrlo brz, te je dobivena mreža u svakom koraku ove metode u ravnoteži, što nije slučaj kod ostalih iteracijskih metoda kod kojih je samo konačno rješenje uravnoteženo.

8. Primjena metode gustoće sila

Postupci nalaženja oblika provedeni su u simboličkom programskom paketu *Sage*.

Promatrana je osmerokutna mreža koja se sastoji od 80 čvorova i 23 kabela. Unutarnji kabela međusobno su okomiti i postavljeni na razmaku od 2,0 m. Mreža ima 13 ležajnih čvorova, od kojih 8 leže u istoj ravnini, a 5 izvan nje. Elementi (štapovi) su definirani presjecištima čvorova i ima ih 151.

Funkcijom *make_nodes* (*nnds*, *ndl*, *d*) zadaju se koordinate čvorova. Prvi član u zagradi predstavlja broj čvorova koje želimo generirati, drugi koordinate prvog čvora, a treći član korak po osima koordinatnog sustava.

```
nds = make_nodes (5, [3., 0., 0.], [2., 0., 0.])
nds.extend (make_nodes (6, [2., 1., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (7, [1., 2., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0., 3., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (7, [1., 4., 0.], [2., 0., 0.]))...

nds[1] = [5., 0., 3.]
nds[3] = [9., 0., 3.]

nds[46] = [11., 6., 5.]
nds[44] = [7., 6., 10.]
nds[42] = [3., 6., 5.]
```

Nakon definiranja čvorova, funkcijom *cable* (*ndl*, *nnds*, *step=1*) povezuju se u kabele, a kabele se nakon toga dijele na elemente pomoću funkcije *make_elements_on_cables* (*cbls*).

```
cbls.append ([18, 26, 34, 42, 50, 58, 65, 71, 76, 80])
cbls.append ([11, 19, 27, 35, 43, 51, 59, 66, 72, 77])
cbls.append ([5, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 67, 73])
cbls.append ([0, 6, 13, 21, 29, 37, 45, 53, 61, 68])...
# rubni kabele:
```



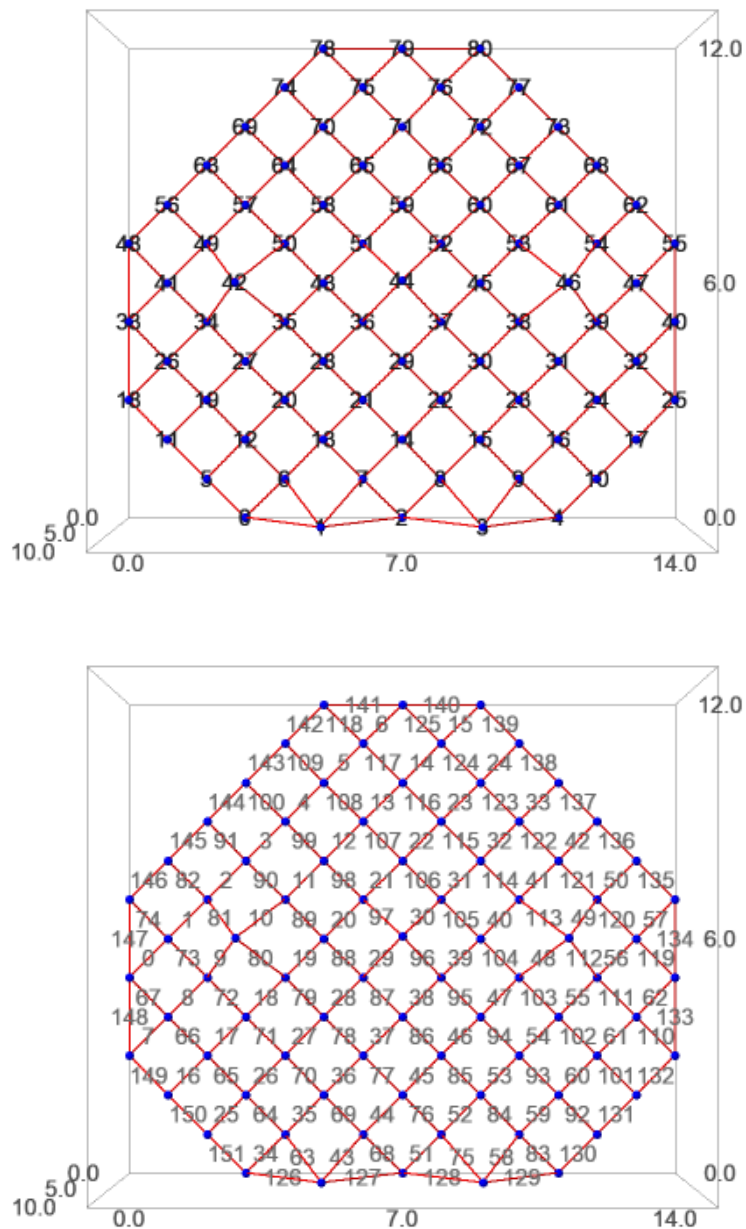
```

cbls.append (cable (0, 5, 1))
cbls.append ([4, 10, 17, 25])
cbls.append ([25, 40, 55])
cbls.append ([55, 62, 68, 73, 77, 80])...

print_indexed (cbls)

```

Na slici je prikazana mreža s označenim čvorovima i štapovima.



Slika 22. Mreža sa označenim čvorovima i štapovima

Ležajni čvorovi su $supps = [0, 1, 3, 4, 25, 55, 80, 78, 48, 18, 42, 46, 44]$, štapove na kabelima definiramo funkcijom $tcei = table_of_cable_element_incidences (cbls)$, dok su rubni kabeli $bnd_cbls = [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]$, a unutarnje određujemo funkcijom $int_cbls = other_cables (bnd_cbls, len (cbls))$.

Štapovi na rubnim kabelima određeni su funkcijom $beis = select_elements_on_cables (bnd_cbls, tcei)$.

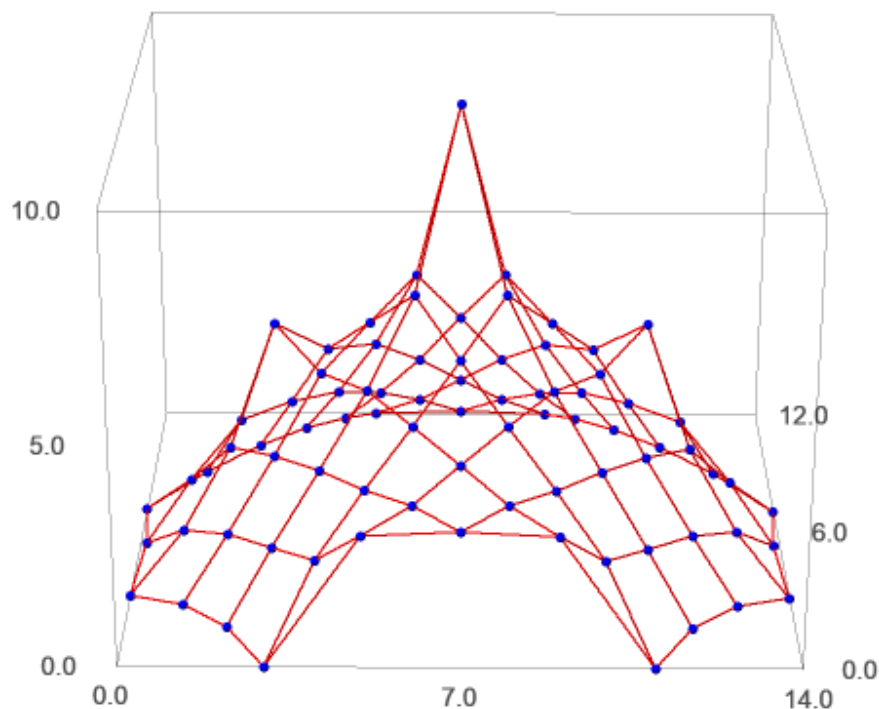
```
[126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137,
 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149,
 150, 151]
```

Štapovi na unutarnjim kabelima definirani su sa $ieis = select_elements_on_cables (int_cbls, tcei)$.

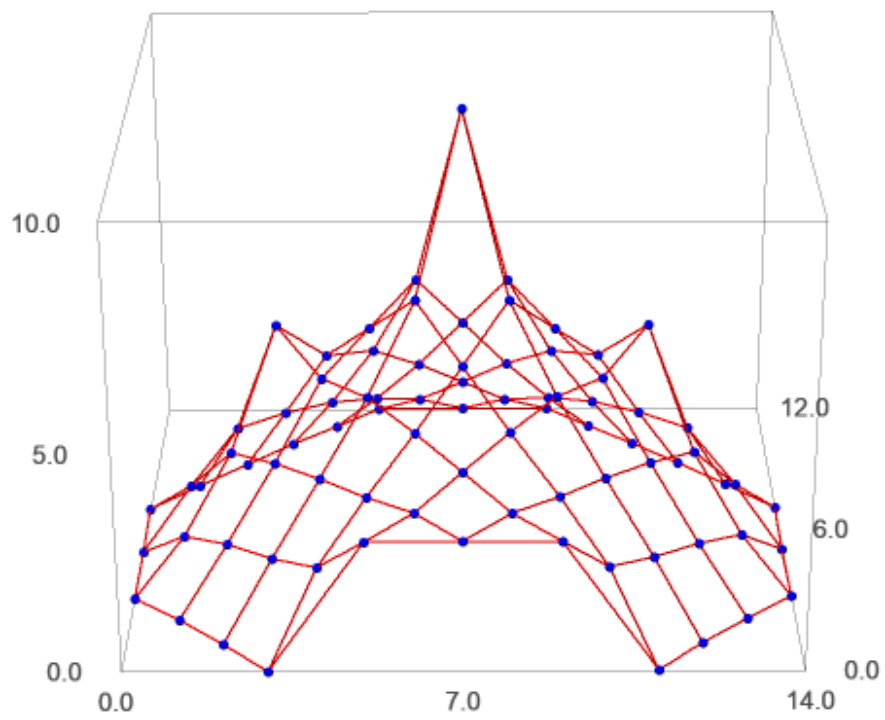
Funkcijom $qs = make_force_densities (len (els))$ i $qs = set_value_on_cables (5., bnd_cbls, tcei, qs)$ na unutarnjim i na rubnim kabelima zadaju se različite vrijednosti gustoća sila. Proračun metodom gustoće sila $nc = FDM (nds, els, supps, qs)$.

Na sljedećim slikama a) , b), c), d) prikazani su različiti oblici mreža ovisno o zadanim gustoćama sila u unutarnjim i rubnim kabelima:

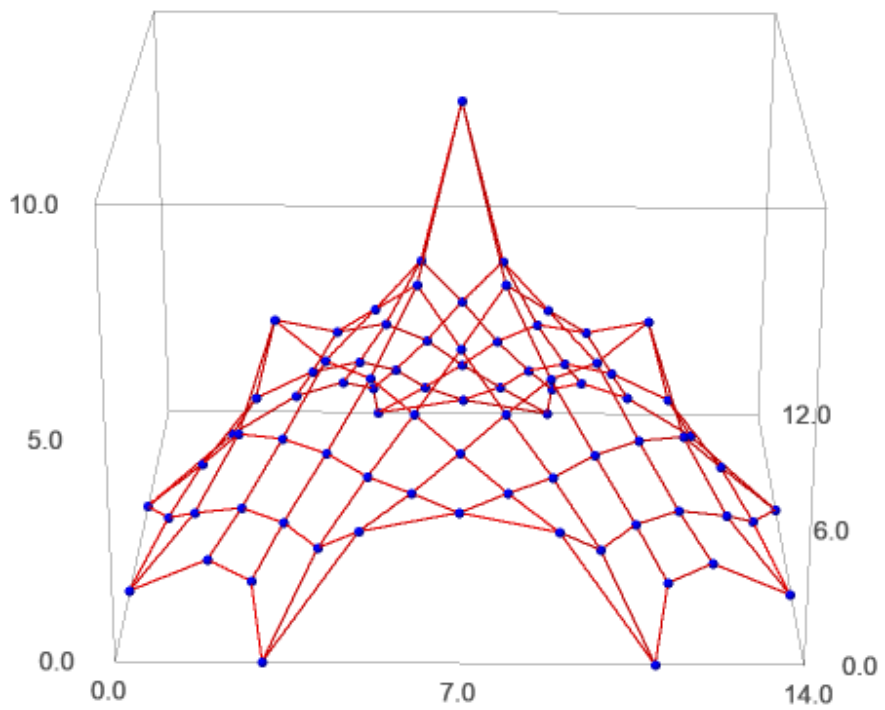
a) gustoća sila u unutarnjim = 1 i rubnim kabelima = 5



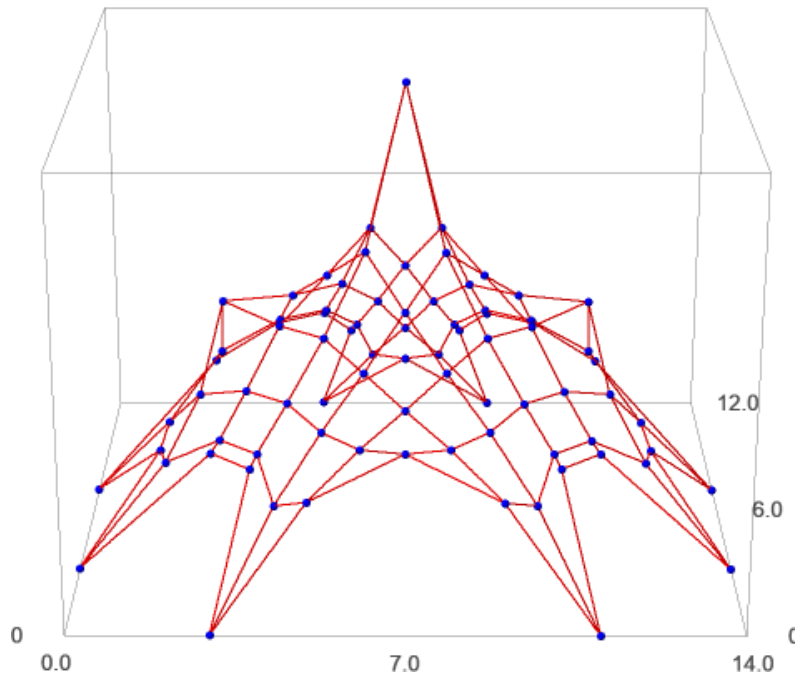
b) gustoća sila u unutarnjim = 1 i rubnim kabelima = 40



c) gustoća sila u unutarnjim = 1 i rubnim kabelima = 1



d) gustoća sila u unutarnjim = 1 i rubnim kabelima = 0,1



Slika 23.

Iz priloženog se vidi da će se mreža d) „skupiti“, a mreže a) i b) „proširiti“ u odnosu na mrežu c) gdje je iznos gustoća sila u unutarnjim i rubnim kabelima jednak i iznosi 1.

Nakon što je zadana gustoća sila u unutarnjim i rubnim kabelima, a) gustoća sila u unutarnjim= 1 rubnim kabelima = 5, funkcijom $nc = FDM(nds, els, supps, qs)$ provodi se proračun. Iz poznatih koordinata čvorova dobivaju se duljine štapova, a iz izraza $f=ql$ sile u štapovima.

```
l = list_of_element_lengths (els, nc)
f = list_of_element_forces (l, qs)
```

Vrijednosti svih sila u štapovima

```
[1.70251399403074, 1.73032682069687, 1.40396553750158,
1.41408210078462, 1.48450638282571, 1.55479700170535,
1.55096741631364, 1.81550476422769, 2.03082805102282,
2.83229449526495, 1.72459140871086, 1.42831429871213,
1.59947125380055, 1.68801369819989, 1.70466695066296,
1.79900908934900, 1.74678867421926, 1.92118169901970,
2.02987521625904, 1.57785703001412, 1.56022558938110,
1.97873559863713, 1.96406219845056, 1.81956595996596,
1.64806080662234, 1.87791483302353, 1.88253112001070,
1.95876432923386, 2.25462678868215, 4.14243158213463,
4.43932059456189, 2.44969385686922, 2.00699825300524,
```

```

1.70676935111067, 2.39989544834185, 1.78748824568107,
1.71120800951507, 1.74923821311010, 1.74566352132319,
1.72385676031520, 1.68158940476531, 2.08468301033409,
1.82955897600434, 1.47430897061536, 1.45754367069644,
1.45210099837686, 1.43470385903027, 1.39797965870717,
1.60743595095938, 2.95756742527955, 2.06894568958107,
1.33884364169110, 1.39129722538980, 1.39570405559405,
1.40434919344931, 1.42242254292630, 1.85807620570741,
1.96504624046254, 1.78911548550653, ... 1.87791483302353,
1.88253112001070, 1.95876432923385, 2.25462678868215,
4.14243158213463, 4.43932059456189, 2.44969385686921,
2.00699825300523, 1.70676935111067, 1.74678867421927,
1.92118169901970, 2.02987521625904, 1.57785703001412,
1.56022558938110, 1.97873559863713, 1.96406219845056,
1.81956595996596, 1.64806080662234, 1.81550476422770,
2.03082805102281, 2.83229449526495, 1.72459140871086,
1.42831429871213, 1.59947125380054, 1.68801369819989,
1.70466695066296, 1.79900908934900, 1.70251399403075,
1.73032682069687, 1.40396553750158, 1.41408210078462,
1.48450638282571, 1.55479700170534, 1.55096741631364,
18.0277563773199, 10.0402060805103, 10.0402060805103,
18.0277563773199, 7.29525574779777, 7.06711586614849,
7.30756452008890, 10.0788140655099, 10.0945427602338,
8.00092439925150, 7.25399636257998, 7.05902888899465,
7.30872129220929, 7.91129106802164, 10.0742756056618,
10.0742756056618, 7.91129106802164, 7.30872129220929,
7.05902888899464, 7.25399636258000, 8.00092439925151,
10.0945427602338, 10.0788140655099, 7.30756452008890,
7.06711586614850, 7.29525574779776]

```

Najveće i najmanje sile u štapovima unutarnjih kabela :

```

max (f_int), min (f_int)
(4.43932059456189, 1.33884364169110)

```

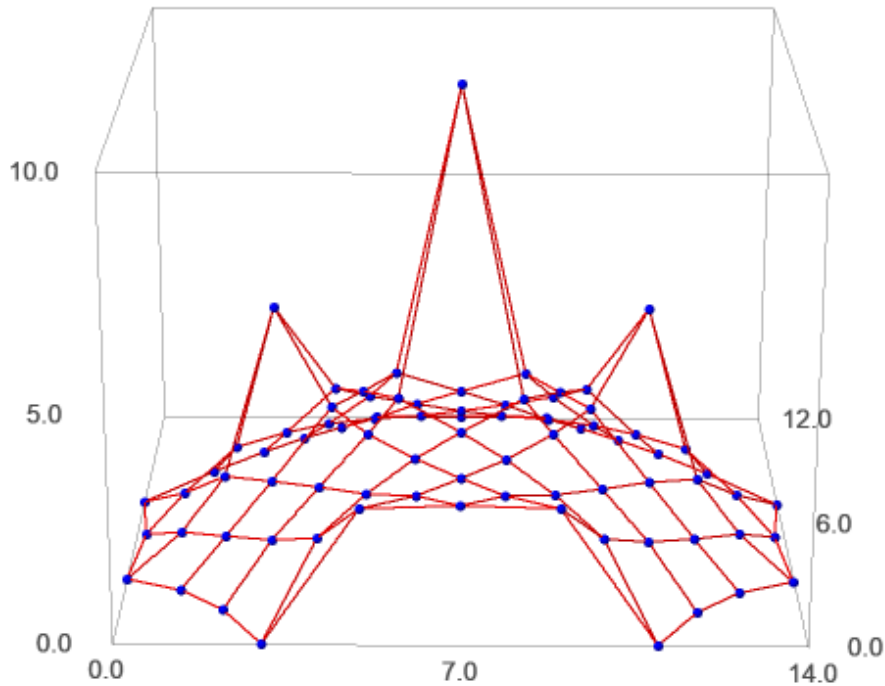
Najveće i najmanje sile u štapovima rubnih kabela:

```

max (f_bnd), min (f_bnd)
(18.0277563773199, 7.05902888899464)

```

Nakon zadavanja sila u unutarnjim $iefs = [1. \text{ for } i \text{ in } ieis]$ i rubnim $befs = [5. \text{ for } i \text{ in } beis]$ štapovima, proračun metodom gustoća sila ponavlja se 5 puta s izjednačavanjem sila u štapovima. Pomoću funkcije $nc2, f = multistepFDM(nds, els, supps, qs, eifs, [], 5)$ provodi se iteracijski postupak određivanja ravnotežnog položaja, te se dobiva:



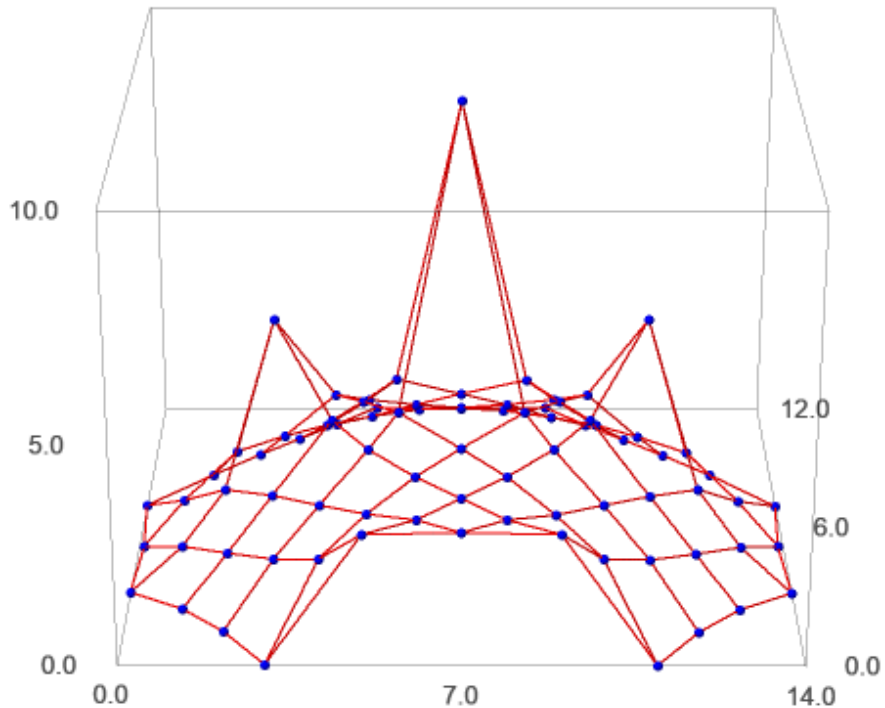
Slika 24.

```
max (f_int), min (f_int)
(1.04494732981846, 0.892646382520510)
max (f_bnd), min (f_bnd)
(5.15405482075230, 4.85543426954072)
```

Na rubnim kabelima zadaju se duljine štapova:

```
[3.60555127546399, 2.01841834935576, 2.01841834935576,
3.60555127546399, 1.47108086278689, 1.32242136593534,
1.50807287017641, 1.96004749997622, 2.07728645354912,
1.74962553868715, 1.32134143532607, 1.21106452498366,
1.33921940319875, 1.71965219042125, 2.01989212621529,
2.01989212621529, 1.71965219042125, 1.33921940319874,
1.21106452498366, 1.32134143532608, 1.74962553868715,
2.07728645354911, 1.96004749997622, 1.50807287017641,
1.32242136593535, 1.47108086278688]
```

i proračun se ponavlja 5 puta sa zadanim silama u unutarnjim štapovima i duljinama rubnih štapova: $nc3, f = multistepFDM(nds, els, supps, qs, ieifs, beils, 5)$.



Slika 25.

`max (f_int), min (f_int)`

`(1.04326053571157, 0.894480327549889)`

`max (f_bnd), min (f_bnd)`

`(18.0277563773199, 6.86429905890467)`

Zadaje se željena tolerancija u iznosima sila i nerastegnutih duljina elemenata, odnosno razlika u tim vrijednostima, uz ograničenje na određeni broj koraka tj. na 1000 koraka .

Proračun se ponavlja do zadovoljenja zadanih točnosti:

1×10^{-3} sile, 1×10^{-4} duljine

`nc, f = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, ieifs, beils, 1×10^{-3} , 1×10^{-4} , 1000)`

Željene tolerancije u silama i duljinama su postignute. Program je stao nakon 360 koraka te dao slijedeće rezultate pogreške:

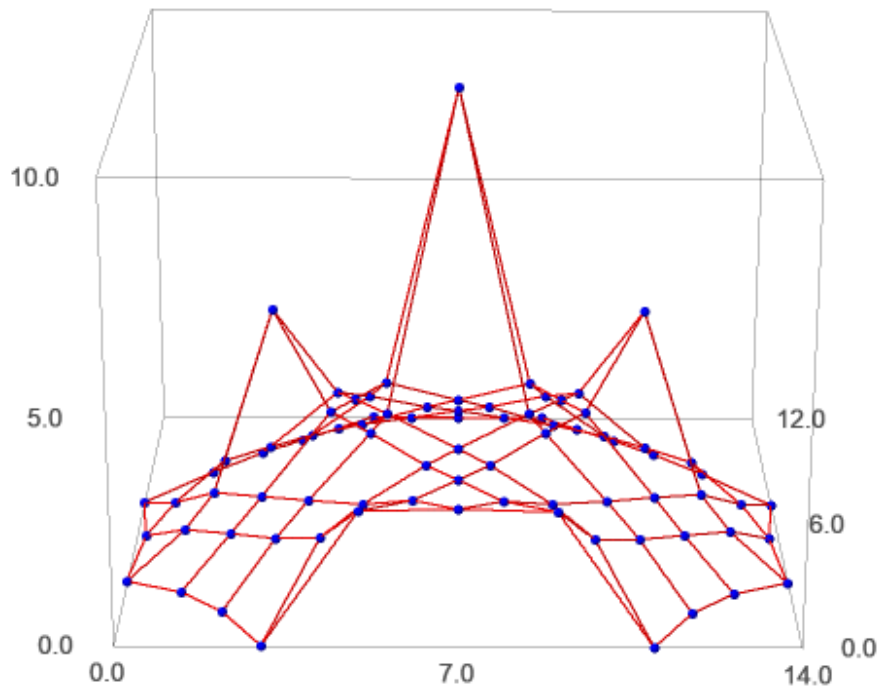
`maximal force error: 0.0000340307513533311`
`maximal length error: 0.0000992391738114939`

$\max (f_{\text{int}}), \min (f_{\text{int}})$

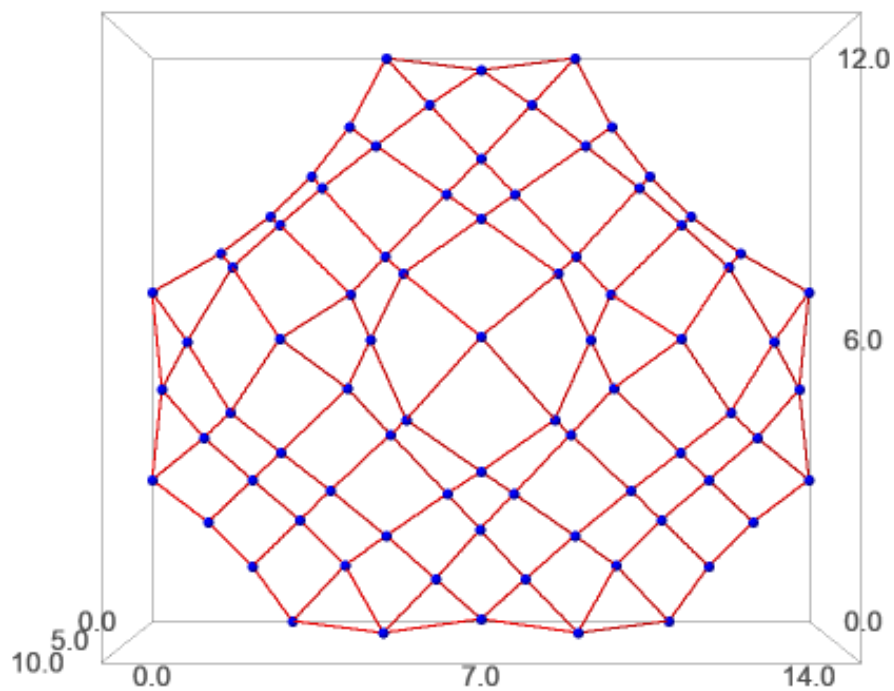
(1.00009962846524, 0.999978304847030)

$\max (f_{\text{bnd}}), \min (f_{\text{bnd}})$

(18.0277563773199, 4.37120577467893)



Slika 26.



Slika 27. X-Y pogled

Nakon 360 iteracija dobivena je mreža prikazana na slici 27., na kojoj se vidi da je užad otklizala. Primjer je rađen sa sprječavanjem klizanja po rubnim kabelima. Ono što bi trebalo napraviti, metodom pokušaja i pogreške, jest zadati duljine nekih unutarnjih kabela i to upravo onih po kojima je klizanje najveće, a u ostalima zadati sile, pa pokušati dobiti što manje promjene sila između odsječaka istog kabela uz što manje nepovoljno klizanje.

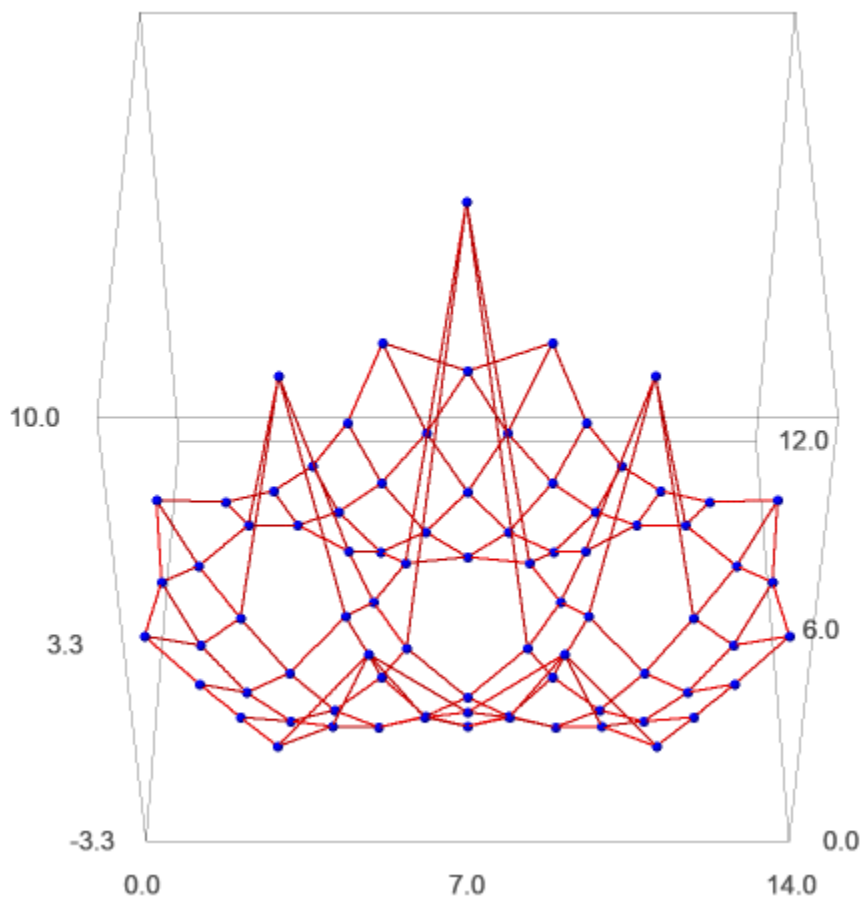
8.1. Utjecaj opterećenja u svim slobodnim čvorovima

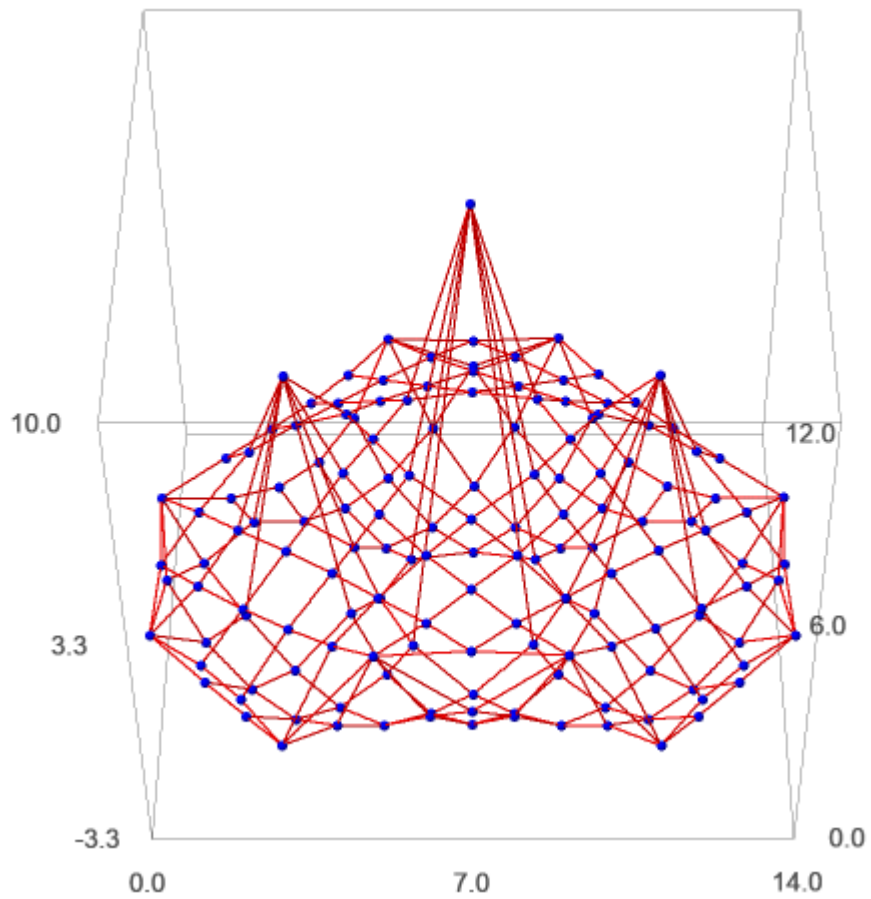
Funkcijom $free_nodes = other_nodes(supps, len(nds))$ definiraju se slobodni čvorovi i pomoću $ext_fs3 = zip(free_nodes, [(0., 0., -1.)]*len(free_nodes))$ zadaje se opterećenje po cijeloj mreži.

U ovom primjeru zadana su tri opterećenja različitog intenziteta: 1.0, 0.2 i 0.01 te su dobiveni oblici mreža uspoređeni s mrežom u ravnotežnom položaju.

a) Opterećenje $f = 1.0$

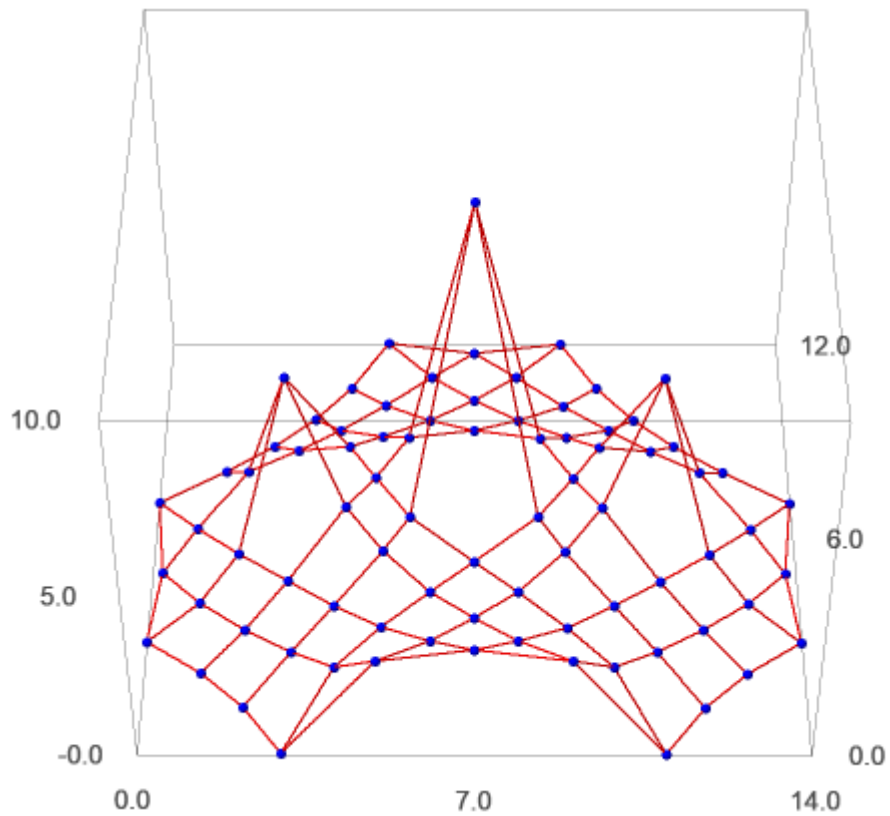
Prikaz kontura mreža bez opterećenja i s opterećenjem

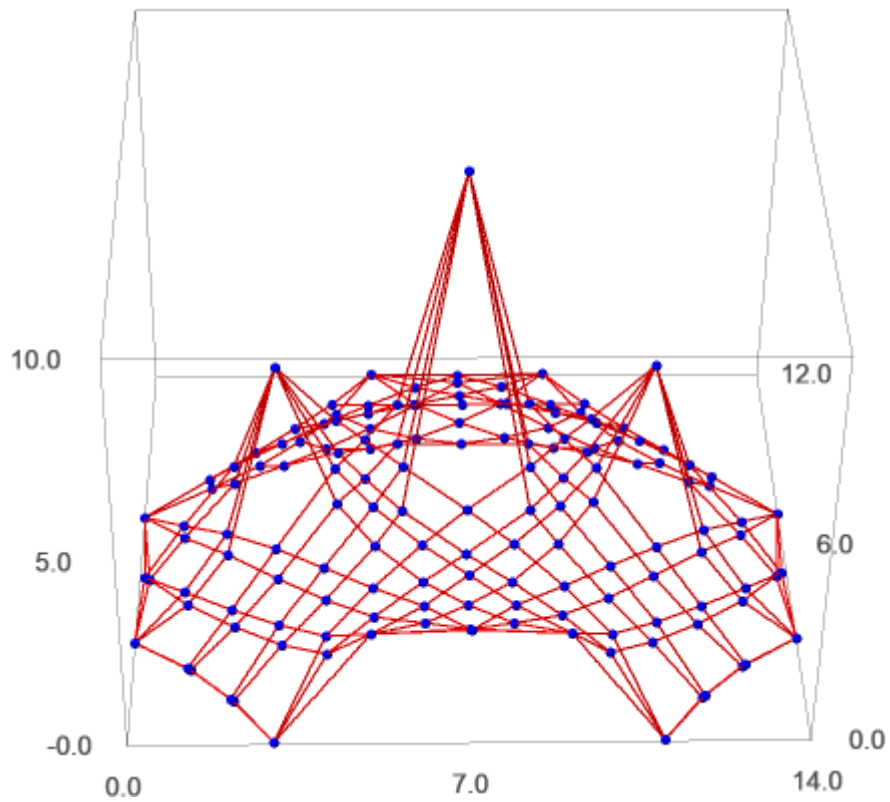




b) Opterećenje $f = 0.2$

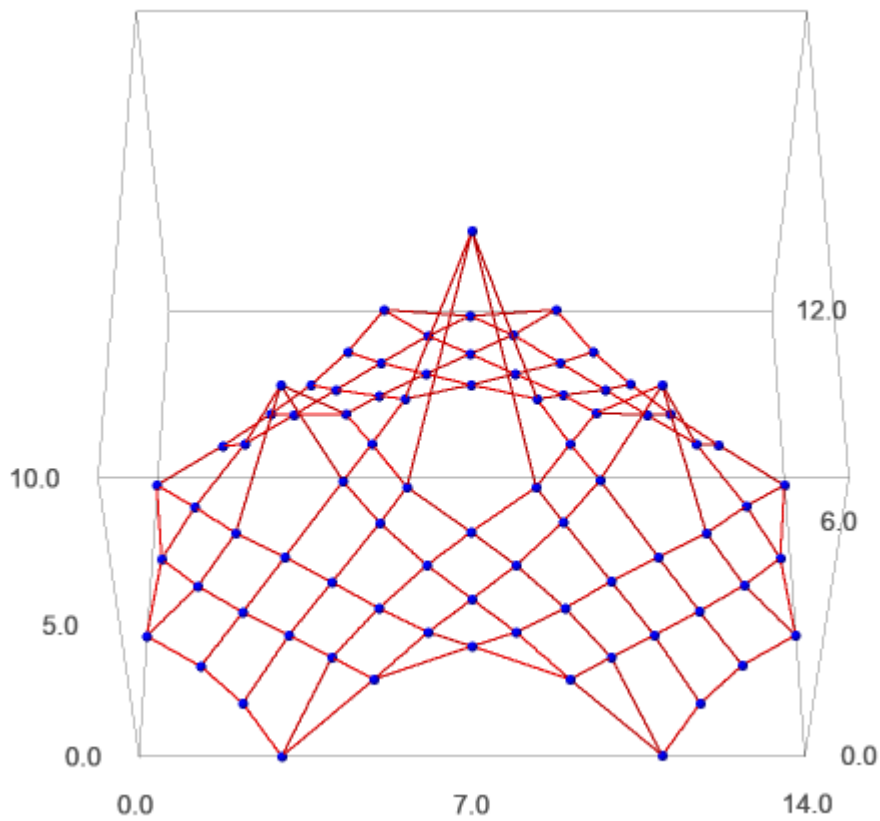
Prikaz kontura mreža bez opterećenja i s opterećenjem

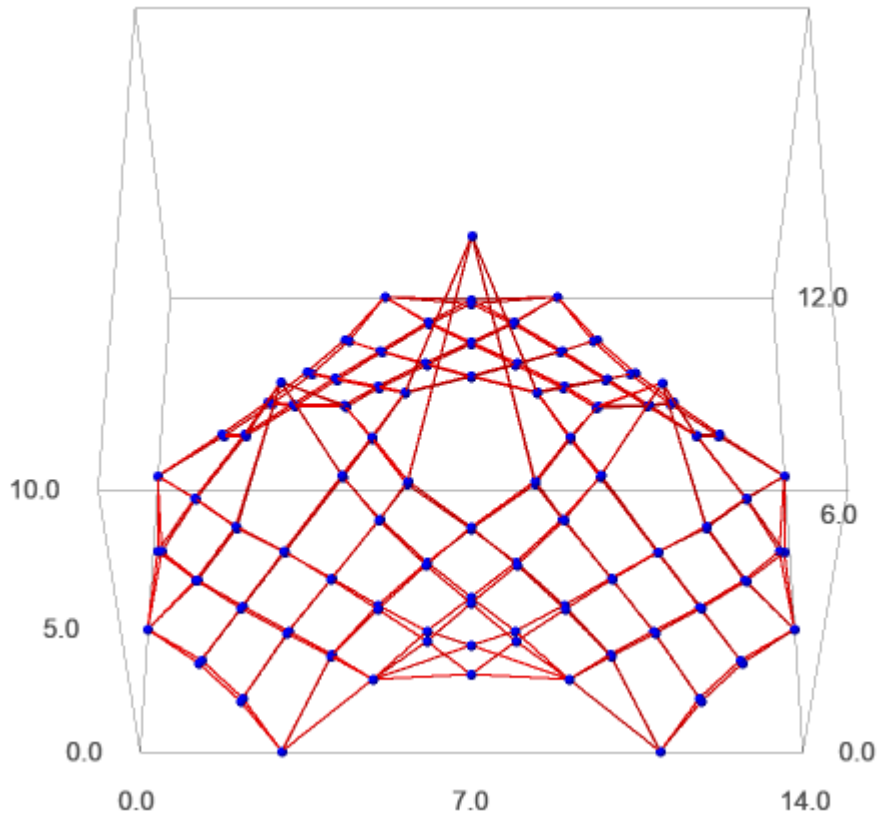




c) Opterećenje $f = 0.01$

Prikaz kontura mreža bez opterećenja i s opterećenjem





Slika 28. Prikaz mreža sa i bez opterećenja

Iz priloženog se može vidjeti da najveće odstupanje od ravnotežnog položaja ima mreža na koju djeluje vanjsko opterećenje iznosa 1,0, a najmanje ima mreža na koju djeluje vanjsko opterećenje iznosa 0,01. Zaključak je da vanjske sile, čija je vrijednost puno manja od vrijednosti sila prednapona u štapovima, neće imati znatniji utjecaj na progib mreže niti na njezin konačni oblik.

9. Zaključak

Uočavanjem prednosti upotrebe konstrukcija od užadi te razvojem informatičke tehnologije i teorije konstrukcija došlo je do intenzivnog razvoja i primjene konstrukcija od užadi posljednjih godina. Vlačne konstrukcije danas se mogu oblikovati na razne načine i imaju prednost nad masivnim konstrukcijama zbog svoje lakoće i zbog boljšega vizualnog uklapanja u prostor.

U ovom su radu opisane osnovne karakteristike konstrukcija od užadi i faze projektiranja takvih konstrukcija. Također, opisan je razvoj metoda nalaženja oblika te je u radu obrađena iteracijska primjena metode gustoće sila.

Programiranje je provedeno u računalnom programu *Sage*. Iteracijski proračun metodom gustoća sila provodi se pomoću prethodno zadanih uvjeta i rezultata prethodnih koraka proračuna. Ova metoda omogućava zadavanje kinematičkih ograničenja kako bi se spriječilo klizanje u rubnim kabelima te time osigurale zahtijevane duljine štapova.

Posljednji dio proračuna sveo se na provjeru utjecaja vanjskog opterećenja na oblik mreže. Rezultati su pokazali da vanjsko opterećenje koje djeluje kao koncentrirana sila nema znatan utjecaj na promjenu oblika mreže ako uzmemo u obzir da su prednaponske sile puno veće od sila vanjskog opterećenja.

10. Literatura

- [1] K. Fresl, P. Gidak, R. Vrančić: *Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi*, Građevinar 65(2013)8, str. 707-720
- [2] J. Dvornik, D. Lazarević: *Prednapete gipke konstrukcije od užadi i tkanine*, Građevinar 47(1995)4, str. 185-199.
- [3] R. Vrančić: *Iteracijska primjena metode gustoća sila u oblikovanju konstrukcija od užadi*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014, rad nagrađen Nagradom Rektora Sveučilišta u Zagrebu
- [4] S. Šajn: *Prednapete konstrukcije od užadi*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2013., završni rad
- [5] N. Smokrović *Metoda gustoće sila*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011., završni rad
- [6] J. Dvornik, D. Lazarević: *Viseće konstrukcije od platna i užadi*, Građevinski godišnjak (1997), Hrvatsko društvo građevinskih inženjera, Zagreb.
- [7] D. Dujmović: *Separat 4: Viseće konstrukcije ; Metalne konstrukcije 3*, Građevinski fakultet u Zagrebu, 2015.)
- [8] K. Gabrić: *Konstrukcije od užadi*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014., završni rad
- [9] J. Jolić: *Nalaženje oblika konstrukcija od užadi*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2012., završni rad
- [10] R. Vrančić: *Proširena metoda gustoća sila*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2013., završni rad
- [11] I. Grgić: *Konstrukcije od užadi*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2015., završni rad