



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET
UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ZAVRŠNI RAD

KONSTRUKCIJE OD UŽADI

Student: **Domagoj Stamać**

Mentor: **prof. dr. sc. Krešimir Fresl**

Zagreb, 2018.

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Općenito o konstrukcijama od užadi	3
2.1. Klasifikacija i karakteristike prednapetih konstrukcija od užadi	3
2.2. Vrste užadi	5
2.3. Tkanine za membrane	6
2.4. Detalji povezivanja	9
3. Nalaženje oblika	11
3.1. Načela nalaženja oblika mreža i ideja iz prirode	11
3.2. Ravnoteža slobodnog čvora u prostoru	13
3.3. Minimalne mreže kabela	14
3.4. Poopćene minimalne mreže kabela	16
4. Newton – Raphsonov postupak	17
4.1. Načela postupka	17
4.2. Sustavi nelinearnih jednadžbi	20
4.3. Newtonova metoda u nalaženju oblika mreža	23
4.3.1. Primjer 1. Problem Steinerovog stabla	23
4.3.2. Primjer 2. Krug	24
4.3.3. Primjer 3. Krnji stožac	26
5. Metoda gustoća sila	33
5.1. Načela postupka	33
5.2. Primjena metode gustoća sila na numeričkom primjeru	34
5.3. Matrična formulacija metode gustoća sila	35
5.4. Iteracijska primjena metode gustoća sila	37
5.5. Primjeri nalaženja oblika mreža	38
5.5.1. Primjer 1.	38
5.5.2. Primjer 2.	64
6. Zaključak završnog rada	79
7. Literatura	80
8. Izvori na internetu	80
9. Reference	81

1. Uvod

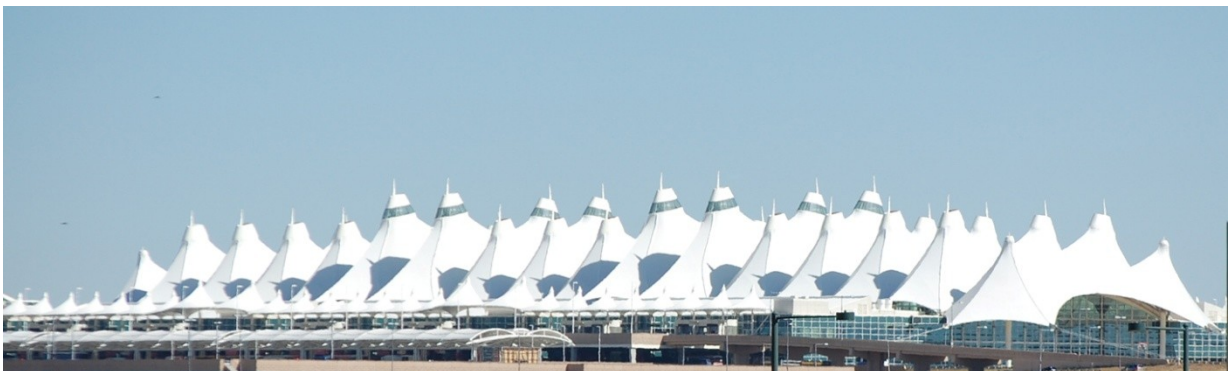
Gipke vlačne konstrukcije pamte povijesnu i raznoliku uporabu. Povijest njihove uporabe seže još od pradavnih vremena kada su pretpovijesni nomadski lovci razapinjali životinjsku kožu preko životinjskih kosti te tako pravili konstrukcije koje su ih štitile od vanjskih prirodnih utjecaja. Prema arheološkim nalazištima koja to potvrđuju, takvi oblici konstrukcija su vrlo vjerojatno bili i prvi ljudski graditeljski pothvati. Kroz povijesni razvoj upotrebe ovakvih konstrukcija valja spomenuti i konusno oblikovane tipije u indijanskim plemenima na području Sj. Amerike, koji su bili prave funkcionalne konstrukcije “projektirane” na način da se u njima može ložiti vatra, a da se istovremeno dim odvodi kroz vrh konstrukcije. Nimalo manje funkcionalne su konstrukcije “crnih šatora” koje su izrađivali pustinjski nomadski narodi na području Afrike. Svojom izvedbom omogućavaju strujanje zraka, a pokrov od kože im daje svojstvo vodonepropusnosti. Dovoljno je spomenuti da su u upotrebi dan-danas. Pored navedenih, postoje još različiti oblici jurti i šatora koji su se izrađivali tijekom povijesti. Osim za stanovanje, vlačne konstrukcije koristile su se od davnina za svladavanje različitih prepreka u vidu vodotoka, kanjona i slično pomoću mostova te su bile jedino moguće rješenje za premošćavanje većih raspona. U sljedećim godinama kroz povijest nove ere došlo je do razvoja vlačnih elemenata i na drugim područjima, pa se tako našla primjena na prekoceanskim brodovima i jedrima te različitim neuspjelim pokušajima dizajniranja prvih letjelica. Valjalo bi ovdje spomenuti i Fausta Vrančića sa svojim prvim skokom padobranom, prvom uspjelom takvom konstrukcijom. U XIX. je stoljeću u građevinarstvu, a posebice u mostogradnji, došlo do velikog napredka u razvoju konstrukcija od užadi. Otkriće kovanog željeza i čelika omogućavalo je projektiranje i izvedbu mostova do tada nezamislivih raspona. Pojavljuju se viseći i ovješeni mostovi velikih raspona, a za izvedbu navedenih koristili su se vlačni elementi u vidu konstrukcija od užadi. Najveća prepreka u ostvarivanju konstrukcija od užadi kao elemenata građevina tada je bila još nedovoljna čvrstoća materijala i nemogućnost ispitivanja istih, ali i nepoznate metode nalaženja oblika te proračunavanja unutarnjih sila. U drugoj polovici XX. stoljeća počinje intenzivan razvoj vlačnih konstrukcija. Godine 1953. arhitekt odnosno inženjer, Matthew Nowicki i Fred Severud, osmislili su krovnu konstrukciju Arene Dorton na način da se sastoji od čeličnih užeta koji tvore sedlastu plohu, a koja je prekrivena čeličnim limovima. To je bila prva takva konstrukcija. Konstrukcije od užadi i platna bile su zanimanjem njemačkog inženjera po imenu Frei Otto, osnivača Instituta za lagane konstrukcije Sveučilišta u Stuttgartu. Poznati njemački inženjer Horst Berger opisao je rad Frei Ottoa na jednostavan način: *”Od početaka, Otto je shvatio temeljna načela ove vrste konstrukcija: da su konstrukcija i arhitektonski oblik nerazdvojni, da je gipkost snaga, a ne slabost i da gradivo na površini mora biti podatnije od elemenata koji ga nose”*¹. Frei je svoje ideje o konstrukcijama crpio iz prirode. Proučavao je modele od sapunice, njihovo grananje i formiranje mreža u uzorcima mjehura koje tvori sapunica, minimalističko načelo formiranja mreža minimalnih udaljenosti i to primjenjivao na svojim konstrukcijama. Njegov prvi veliki

¹ H. Berger: Light Structures, Structures of Light. The Art and Engineering of Tensile Architecture, Birkhäuser, Basel, 1996.

projekt bio je Njemački paviljon za Montreal Expo 1967. godine. Bila je to konstrukcija međusobno povezanih kablova koji su nosili ovješenu tkaninu. Najpoznatiji projekt tek slijedi, a to je krovna konstrukcija od užadi Olimpijskog stadiona u Münchenu sagrađenog za potrebe Olimpijskih igara 1972. godine. Razvojem računala u kasnijem XX. stoljeću rješavanje kompleksnih matematičkih problema vezanih uz nalaženje oblika i računanje sila u konstrukcijama od užadi postalo je moguće te su se počele razvijati vlačne konstrukcije od platna paralelno s konstrukcijama od užadi. Jedna od značajnih takvih konstrukcija je krov zračne luke u Denveru, SAD, djelo njemačkog inženjera Horsta Bergera. Izvedba takve konstrukcije koja se nalazi pod klimatskim utjecajima značajnih snježnih oborina i ekstremnih vjetrova bila je dokazom da su konstrukcije od platna izvedive i stabilne čak i u područjima nepovoljnih klimatskih utjecaja. Konstrukcije od užadi krasi ne samo estetska ljepota i minimalizam u prostoru već i prirodni sklad elemenata. Takve su konstrukcije imitacija pojava u prirodi, one su spoj arhitekture (stvari iz prirode) i građevinarstva (matematičkih dokaza). Potražnja i primjena konstrukcija od užadi u budućnosti će zasigurno biti velika s obzirom da su globalizacija i slobodno tržište uvelike doprinjeli gospodarskoj moći, razvoju kvalitete i znanosti koje omogućavaju nove dosege u projektiranju i izvedbi ovakvih konstrukcija. Cilj ovog rada biti će pobliže objasniti i prikazati osnovne karakteristike, oblike i primjere ovakvih konstrukcija te postupke za nalaženje oblika.



Slika 1. Otto Frei, krovna konstrukcija Olimpijskog stadiona u Münchenu



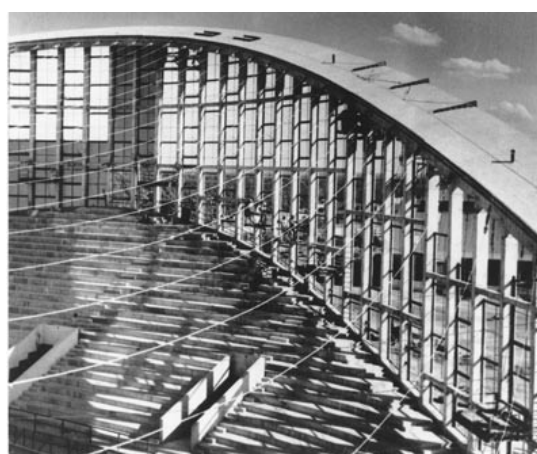
Slika 2. Horst Berger, krovna konstrukcija Zračne luke Denver

2. Općenito o konstrukcijama od užadi

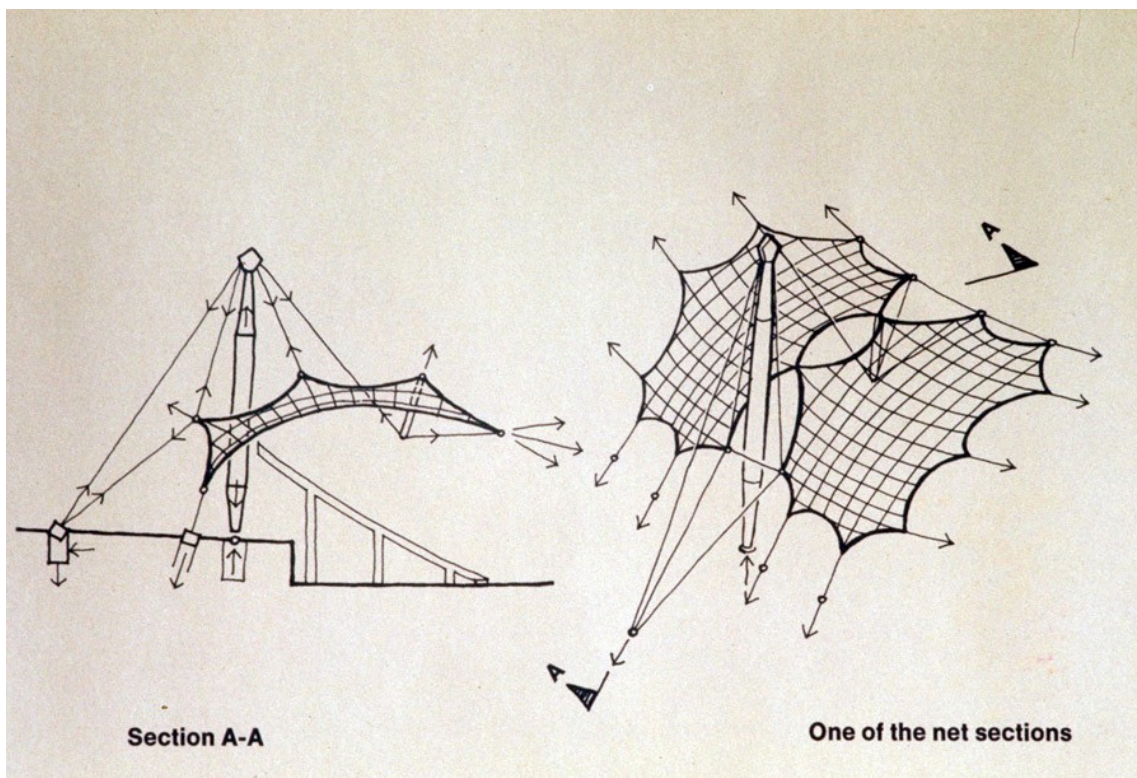
2.1. Klasifikacija i karakteristike prednapetih konstrukcija od užadi

Uže je linijski element, najčešće zakrivljen, kod kojeg je jedna dimenzija znatno izraženija od ostale dvije. Konstrukcije od užadi najčešće se sastoje od kablova i membrana koji leže u zakrivljenim plohama i skupa tvore mreže. Temeljne karakteristike po kojima se konstrukcije od užadi razlikuju od uobičajenih konstruktivnih elemenata su zanemariva krutost na savijanje, tako da nisu učinkovite pri prijenosu opterećenja okomito na njegovu os. Nadalje, uže ima zanemarivu tlačnu čvrstoću okomito na poprečni presjek pa dolazi do izvijanja pri vrlo malim naprezanjima. Užad koja se koristi za ovakve konstrukcije ima vrlo veliku vlačnu čvrstoću okomito na poprečni presjek. Pojam konstrukcija od užadi obuhvaća široki spektar. Neke od oblika koje susrećemo su jednostavni ovješeni kabeli, prednapeta užad za ovješene mostove, prednapete grede i rešetke od užadi te prednapete mreže od užadi koje će biti glavnim predmetom proučavanja u ovom završnom radu.

Kako bi mreža postigla određenu krutost užad mora biti prednapeta, a oblik mreža takav da je antiklastičan (dvostruka zakrivljenost), odnosno sedlastog oblika (slika 3.). Na taj način jedna familija užadi, ona konkavna (ulegnuta) služi za preuzimanje dominantnog opterećenja u smjeru gravitacije, a konveksna (izbočena) familija užadi služi za stabilizaciju. Ukoliko kabeli nisu dovoljno napeti konstrukcija neće imati dovoljnu krutost i biti će podložna pomacima uslijed čega može doći do oštećenja membrane. Slično vrijedi za mreže u jednoj ravnini. Takve ravninske konstrukcije imaju manju krutost i podložne su vitoperenju uslijed promjene opterećenja, osobito vjetra. Upotreba ravnih mreža nije praktična za velike raspone te se preporuča za male raspone gdje je moguće dobro prednapinjanje elemenata. Osim antiklastičnih i ravninskih oblika postoje složeni oblici mreža koji sadrže više familija užadi, kombinacije konkavnih i konveksnih ploha, pravčastih mreža, prekide i različite elemente u svojoj strukturi (slika 4.). Prednapinjanje elemenata može se postići sidrenjem kablova u krute grede, fleksibilnim kablovima koji se sidre na oslonce i jarbole te izvedbom membrane dostatne težine da stabilizira mrežu kablova i osigura krutost konstrukcije. Krutost mreže uglavnom će ovisiti o napetosti, poprečnom presjeku i zakrivljenosti kablova te krutosti oslonaca i rubnih elemenata na koje se sidre kablovi.



Slika 3. Antiklastičan oblik krovne konstrukcije kablova ovješениh u pretenaste grede



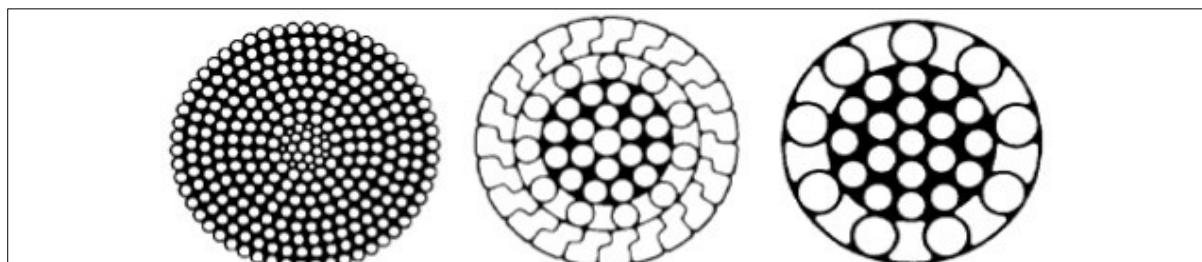
Slika 4. Složeni oblik konstrukcije od užadi, sidrene na jarbole i rubne oslonce

Kao što smo već spomenuli, same konstrukcije mreža od užadi se razlikuju od klasičnih konstrukcija koje su u najmanju ruku statički određeni sustavi, konstrukcije od užadi nisu sasvim određene te se one mogu više smatrati mehanizmima. Stoga se konstrukcije od užadi smatraju nelinearnim strukturama. To je bitno kod proračuna unutarnjih sila i pomaka konstrukcije jer klasične linearne metode mogu dati netočnu aproksimaciju istih. Prvi korak u projektiranju ovakvih konstrukcija je nalaženje oblika konstrukcije. Oblik konstrukcije ne može se raditi „na silu“ već on mora biti pronađen. Načelo koje se koristi kod nalaženja oblika je slaganje mreža minimalnih duljina tako da su mreže bazirane na minimizaciji ukupne potencijalne energije. Najčešće se u početku koriste linearne metode i iterativni postupci za nalaženje prvobitnog oblika mreže. Radi zornijeg prikaza često se izrađuju fizikalni modeli, a nakon toga se vrši analiza kroz računalni software. Analiza konstrukcije vrši se za sva moguća opterećenja koja se mogu javiti u vijeku trajanja konstrukcije. Osim statičke analize vrši se i dinamička analiza, posebno za utjecaj vjetra. Analiziranje se osim na računalu nerijetko vrši i na fizikalnim modelima.

2.2. Vrste užadi

Užad koja tvori mreže konstrukcija najčešće se izrađuje od nelegiranih, umirenih čelika. Udio ugljika u potrebnom čeliku za ove elemente najčešće varira od 0.5% do 0.9%, a od pratećih elemenata tu su silicij, mangan te ograničena količina sumpora i fosfora. Užad koja se uglavnom koristi za vlačne konstrukcije može se podijeliti prema građi i načinu pletenja na spiralnu i pramenu užad. Spiralna užad uglavnom se koristi kao nosiva i nepokretna užad dok se pramena užad uglavnom koristi kao pokretna.

Spiralna užad (engl. spiral strand) sastoji se od jednog ili više slojeva žica koji su omotani oko jezgre užeta. Dijelimo ih na: otvoreni, zatvoreni i poluzatvoreni tip (slika 5).



Slika 5. S lijeva na desno: otvoreni, zatvoreni i poluzatvoreni tip spiralnih užadi

Modul elastičnosti kod otvorenih spiralnih užadi iznosi $170 \text{ GPa} \pm 5 \text{ GPa}$. Uzorak može biti jednoslojan ili višeslojan. Broj žica u uzorku može iznositi od 7 do 91. Žice se slažu tako da u svaki novi sloj dodajemo po 6 žica na prethodni broj žica iz prošlog sloja. Primjera radi, u jednoslojni uzorak ide 1 + 6 žica, dvoslojni 1 + 6 + 12 žica, troslojni 1 + 6 + 12 + 18 žica itd. Nazivni promjer užadi iznosi od 6 do 71 mm,² a nazivna vlačna čvrstoća iznosi³ od 1770 kN/mm^2 do 1860 kN/mm^2 . Presjek žica je okruglog presjeka. Ovakav tip užeta primjenjuje se kod sidrenja mreža na jarbole i stupove ili kod visećih mostova zbog svoje nosivosti.

Kod zatvorenih tipova užeta (engl. locked coil cables) modul elastičnosti iznosi⁴ od $160 \text{ GPa} \pm 5 \text{ GPa}$ makar je danas u upotrebi i uže modula elastičnosti 180 GPa ⁵. Ovakav tip užeta koristi se kod ovješanih i visećih mostova. Nazivni promjer užeta ovakvog tipa iznosi⁶ od 20 do 124 mm. Presjek žica je u obliku slova Z tako da im je površina glatka. Poluzatvoreni tip danas nije u širokoj upotrebi.

Pramena užad (engl. strand rope) može biti s vlaknastom (engl. fiber) ili čeličnom jezgrom. Kod ovakvog tipa užeta pramenovi, koji se sastoje od žica, se omotavaju oko jezgre užeta. Pramenovi mogu biti omotani oko jezgre u istom smjeru pa onda govorimo o istosmjerno upredenom užetu ili mogu biti omotani u obrnutom smjeru pa govorimo o križano upredenom užetu⁷. Njihov modul elastičnosti je manji nego kod spiralnih užeta i iznosi oko $100 \text{ GPa} \pm 5 \text{ GPa}$. Uglavnom se koriste pramene užadi 6x19 (6 pramena sa po 19 žica) čiji promjer iznosi 6 do 40 mm za vlaknastu jezgru, odnosno 6 do 45 mm za čeličnu jezgru.⁸ Vlaknasta jezgra užeta može biti prirodnog ili umjetnog porijekla, a omogućava užetu elastičnost tako da ono može postati savitljivije. Čeličnu jezgru može tvoriti jedna žica,

² Vilnay, O. (1990), *Cable nets and tensegric shells*. Ellis Horwood

³ Pfeiffer catalogue. Seilbauwerke. Lightweight Cable Structures. Pfeifer Seilund Hebeteknik GmbH & Co Gimsin, N.J. (1983). *Cable Supported Bridges*. John Wiley & Sons.

⁴ Pfeiffer catalogue. Seilbauwerke. Lightweight Cable Structures. Pfeifer Seilund Hebeteknik GmbH & Co

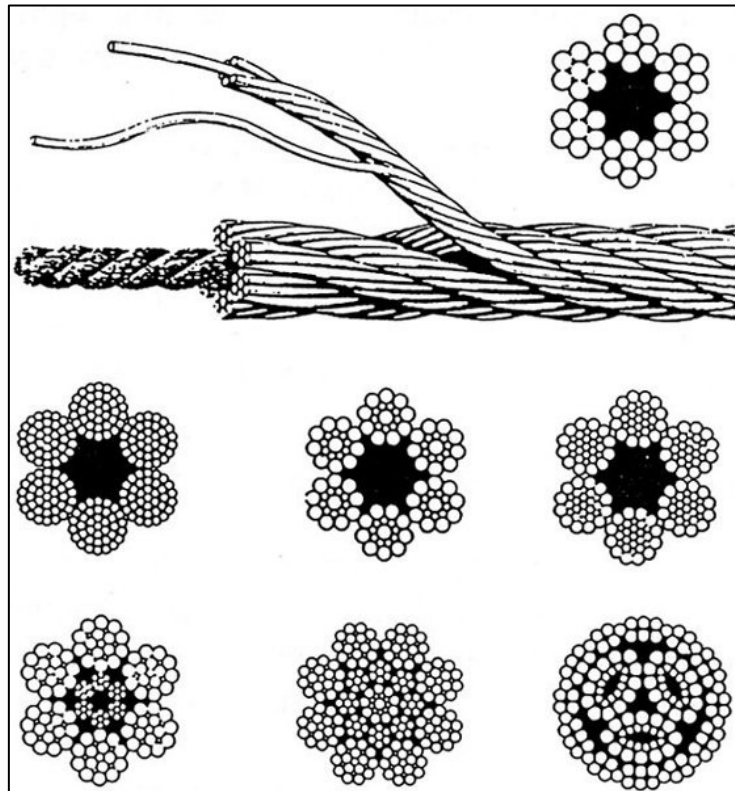
⁵ Gimsin, N.J. (1983). *Cable Supported Bridges*. John Wiley & Sons

⁶ Vilnay, O. (1990), *Cable nets and tensegric shells*. Ellis Horwood

⁷ <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=63589>

⁸ Pfeiffer catalogue. Seilbauwerke. Lightweight Cable Structures. Pfeifer Seilund Hebeteknik GmbH & Co

pramen ili više pramenova oko jezgre. Kod čelične jezgre gubi se elastičnost, ali se dobiva na poprečnoj nosivosti. Pramen užad najčešće se koristi kao rubni kabel membrane.



Slika 6. Oblici pramenih užadi

2.3. Tkanine za membrane

Odabir membrane veoma je bitan zbog estetskih svojstava. To je vizualno najupečatljiviji element ovakvih konstrukcija pa je shodno tomu potrebno odabrati povoljan materijal koji neće samo osigurati estetska svojstva već i potrebnu nosivost i trajnost. Membrana se izrađuje od pletenih ili satkanih vlaknaca koja su najčešće najlonska, polister, staklo ili aramidna vlakna. Moguća je široka primjena različitih materijala tkanina i platna, ali zbog njihove male vlačne čvrstoće i relativno kratkog vijeka trajanja od oko 5 godina danas se najviše upotrebljavaju materijali od staklenih vlaknaca i sintetičkih tkanina. Vlačna čvrstoća platnene tkanine je oko 0.3 kN/mm^2 , a kod sintetičkih tkanina ona iznosi oko 1 kN/mm^2 . Čvrstoća na vlak kod tkanine od staklenih vlakna može biti od 2.8 kN/mm^2 do 4.6 kN/mm^2 . Kako bi se poboljšala vodonepropusna svojstva tkanina danas su najčešće u upotrebi obložene tkanine: polister obložen PVC – om (polivinilkloridom), staklena vlakna presvučena PTFE - om (politetrafluoretilenom), staklena vlakna presvučena ETFE - om (etilentetrafluoretilenom), staklo presvučeno silikonom. Osim ovih uobičajenih klasičnih tkanina, stalno se pojavljuju novi i unaprijeđeni materijali kao npr. PVDF (polivinildifluorid).

PVC prevlaka polistera je među najstarijim i najčešćim oblogama. Odlikuju se lakoćom rukovanja i relativno jeftinom cijenom. Vlačna čvrstoća iznosi od 350 do 1200 MPa, nivo prednapinjanja iznosi od 1 do 4 kN/m, a masa membrane može težiti od 0.8 kg/m^2 do

1.1 kg/m². Ima relativno dobra svojstva u slučaju požara. Mane su uvijek trajanja od oko 15 godina i razaranje materijala uslijed UV zračenja, zadržavanje prljavštine na ulegnućima te sklonost puzanju. Osobiti problem je iščeznuće prednapinjanja za 50% već nakon 10 dana, odnosno 100 i 1000 dana, nakon postavljanja tako da je potrebno stalno prednapinjanje u tim intervalima. Na slici 7. može se vidjeti primjer ovakvog tipa membrane.



Slika 7. Mercedes - Benz Arena, „dom“ nogometnog kluba Stuttgart

Staklena vlakna presvučena PTFE – om još se nazivaju i staklena vlakna presvučena teflonom. Vijek trajanja im je oko 50 godina te su pogodni za velike raspone malih zakrivljenosti. Vlačna čvrstoća materijala iznosi oko 3500 MPa, ali zato imaju malu čvrstoću na paranje i širenje pukotina, svega 50 N do 800 N. Nivo prednapinjanja može iznositi od 1 – 8 kN/m te je ono veoma postojano tijekom vremena. Naime, posljednje ispitivanje⁹ na konstrukciji krovista Sveučilišta La Verne (California, SAD) pokazalo je da je puzanje membrane konstrukcije minimalno. Navedena konstrukcija može se vidjeti na slici 8. PTFE tkanina smatra se negorljivim materijalom s obzirom na karakteristične okolnosti pod kojima se nalazi, ali pod utjecajem ekstremnih temperatura i male prozračnosti materijal otpušta izuzetno štetne tvari. Imaju veliku otpornost na utjecaje od sunčevog zračenja. Iako je sam materijal hidrofoban na površini, treba paziti na rubne dijelove tkanina koji su skloni kapilarnom širenju vode iz rubnih dijelova u sam materijal. Iako su potrebni minimalni radovi održavanja, materijal je krhak i može lako doći do oštećenja pri transportu i rukovanju na gradilištu. Još jedna negativna karakteristika leži u tome da su ovakve tkanine izrazito skupi materijali te im je cijena 3 do 10 puta veća nego kod PVC tkanina.

⁹ članak objavljen na stranicama kompanije Birdair, Inc: http://www.birdair.com/sites/default/files/press-releases/2009-01-26_LaVerne.pdf



Slika 8. PTFE membrana sportskog paviljona Sveučilišta La Verne

ETFE tkanina uglavnom je u upotrebi kod pneumatskih struktura (stabilizacija se ostvaruje pritiskom unutarnjeg zraka). Trajnost ovakvih membrana je oko 15 godina. Glavna odlika ovakvog tipa tkanine je da propušta i do 90% svjetlosti što nije moguće postići niti jednom drugom membranom. Ima veoma dobru otpornost na paranje, ali im vlačna čvrstoća iznosi svega 5% iznosa PVC i PTFE tkanina. Elastična svojstva puno su veća nego kod PTFE tkanine pa će pod izvanrednim stalnim opterećenjem doći do puzanja materijala. Ovo svojstvo je pogodno i za potresna opterećenja.

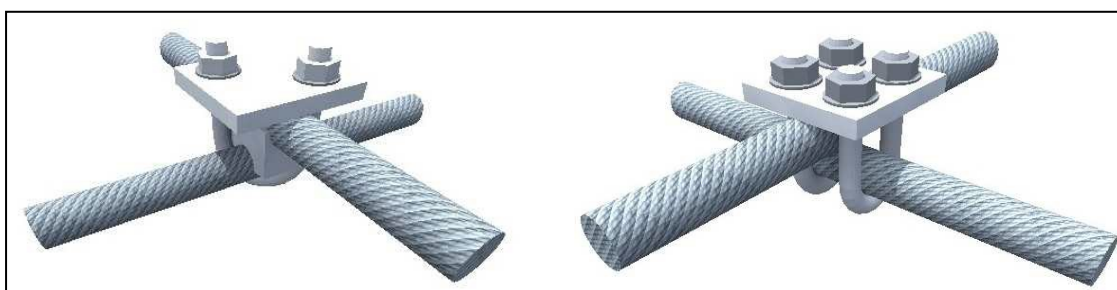
Staklene tkanine presvučene silikonom imaju vijek trajanja oko 50 godina. Mogu propuštati oko 80% svjetlosti. Glavno svojstvo ovih konstrukcija je elastičnost dok su glavni nedostaci ovakvih tkanina način izvedbe koja zahtjeva iskustvo i vremenski rok. Ukupna cijena izvedbe ovakvog tipa membrane je oko 3 puta veća nego kod PVC tkanina.



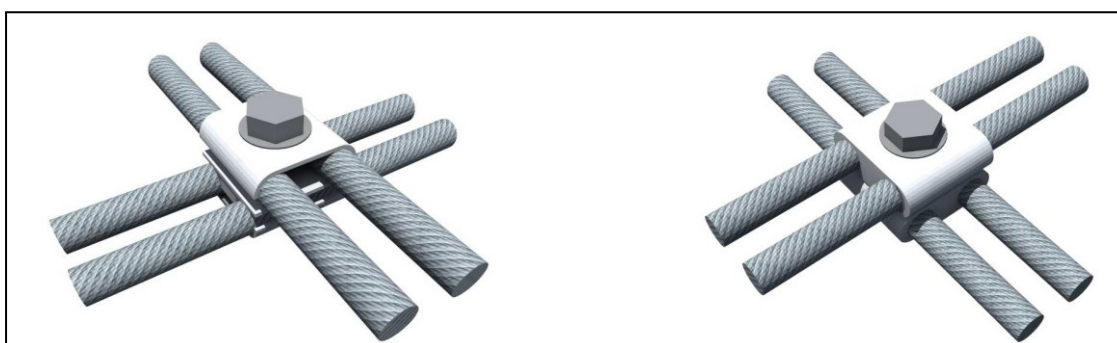
Slika 9. Allianz Arena u Münchenu, vanjski dio je ETFE tkanina

2.4. Detalji povezivanja

Mreža koju tvore užadi može biti dvosmjerni, trosmjerni ili višesmjerni sustav, ali najčešće se izvodi kao dvosmjerni sustav kablova zbog jednostavnosti izvedbe i povoljnijeg načina prijenosa sila. Razmak između kablova iznosi od 0.5 – 5 metara. Naime, na mjestu prelaska kablova jednog preko drugog postoji spojni element koji će kablove držati fiksno na prethodno određenom položaju. Na taj način sprječava se klizanje kablova te se daje krutost mreži. Takvi detalji prikazani su na slici 10. Ukoliko je mreža većeg raspona, najčešće se kablove izvode kao dva paralelna užeta umjesto korištenje kablova velikih poprečnih presjeka. Detalj takvog spoja prikazan je na slici 11.

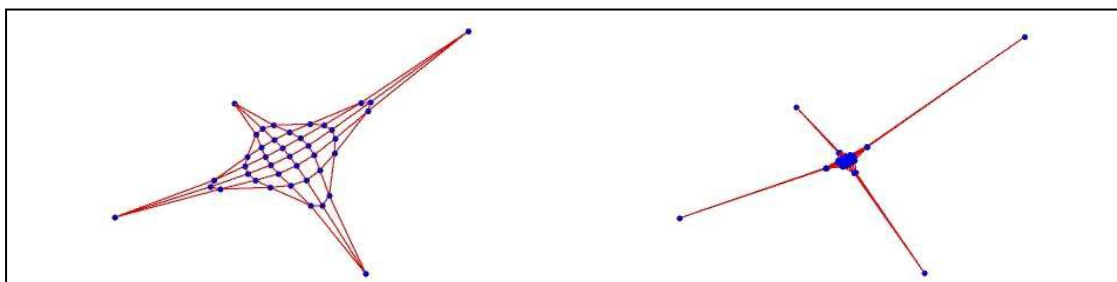


Slika 10. Jednostruka „U“ vijčana veza (lijevo) i dvostruka „U“ vijčana veza (desno) dvosmjernog sustava kablove

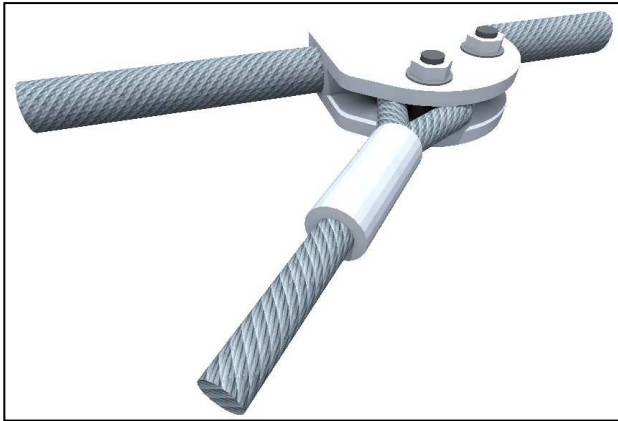


Slika 11. Spoj dvosmjernog sustava kablova s po dva paralelna užeta (lijevo) i spoj dvosmjernog sustava kablova sa p dva paralelna užeta s utisnutim spojem (desno)

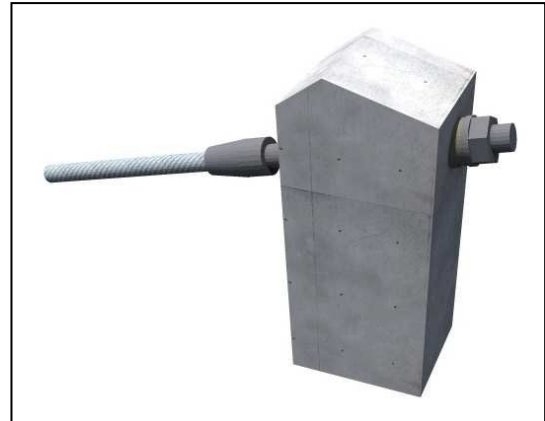
Sile u rubnim kabelima bit će veće nego one u unutarnjim pa će i debljina rubnih kablova biti veća. Naime, čvorovi na rubnim kabelima imaju tendenciju klizanja u jednu točku (slika 12.) te se apsolutno to ne može spriječiti, ali se proces može značajno usporiti povećanjem sila u rubnim kablovima. Spriječavanje klizanja u spojevima s rubnim kabelima prikazano je spojem na slici 13.



Slika 12. Čvorovi (lijevo) su otklizali po rubnim kablovima u jednu točku (desno)



Slika 13. Spoj rubnog i unutarnjeg kabela



Slika 14. Spoj s fiksnim osloncem

Kod spoja kabela sa gredom, „prstenom“, lukom, jarbolom ili nekim drugim fiksnim osloncem, taj spoj smatramo krutim i nepomičnim. Primjer spoja sa fiksnim osloncem dan je na slici 14. Izvedba mreže i spajanja kablova može se izvesti na terenu ili u zraku na predviđenom mjestu. Kod mreža sa krutim osloncima obje metode su pogodne, a ukoliko govorimo o mrežama s rubnim kablovima onda je puno praktičnije da ih se najprije sastavi na terenu.

Neki od uobičajenih vrsta spoja tkanine i kabela su „džepovi“ od tkanine koji obuhvaćaju kabel, stezaljke ukoliko se radi o većim silama, remenovi koji se pričvršćuju na mjestu spoja kabela i tkanine, spojnice rubnih kabela s metalnim pločicama, povezivanje tkanine s uvodnicima.

3. Nalaženje oblika

3.1. Načela nalaženja oblika mreža i ideja iz prirode

Temeljna razlika u projektiranju ovakvih konstrukcija prema uobičajenim betonskim, zidanim ili metalnim konstrukcijama je nalaženje njezinog oblika. Kod potonjih konstrukcijskih elemenata najčešće je već poznato mjesto ugradnje te je potrebno dimenzionirati elemente na određena opterećenja koja se mogu javiti u vijeku trajanja konstrukcije. Za mreže koje tvore užadi oblik se ne može proizvoljno odabrati već je njega potrebno „pronaći“. Taj postupak obuhvaća nalaženje početnog geometrijskog oblika užadi i iznosa sila prednapinjanja u užadima. Konfiguracija mreža prvotno se izvodila pomoću fizikalnih modela. Takvi modeli možda daju zorni prikaz i stabilnu konfiguraciju mreža, ali je njihov položaj veoma teško očitati, a unutarnje sile skoro nemoguće točno odrediti.

U vrlo ranoj fazi iznalaženja oblika inženjeri su shvatili da je ključ oblika u prirodi. Tako se navodi mnoštvo primjera iz prirode koji su doveli do zaključka o nalaženju minimalnih mreža kao što je rast stabala koja rastu proporcionalno (uz minimum materijala) dok naprezanja ostaju konstantna po površini. Među prvima koji su se bavili nalaženjem oblika mreža bio je Frei Otto. Njegove ideje bile su inspirirane pojavama iz prirode. Promatrajući modele sapunice i formiranje površina minimalnih oblika uz konstantna površinska naprezanja, primjenjuje taj isti princip na svojim konstrukcijama. Navedeni princip nalaže strukturni oblik koji zahtjeva minimalni utrošak materijala uz povećanje čvrstoće i stabilnosti mreža, a čime direktno utječe na estetska i ekonomska svojstva mreže. Ovo pravilo moglo bi se sumirati u izraz strukturalna umjetnost¹⁰ koji nalaže tri svojstva koja konstrukcija mora zadovoljiti kako bi težila izvrsnosti: učinkovitost, ekonomičnost i elegancija. Stoga, opisani postupak nalaženja oblika mreže nalaže da buduća projektirana mreža mora biti minimalna tj. minimalne površine.

Da bi površina neke plohe bila minimalna, ona mora zadovoljiti uvjet srednje zakrivljenosti jednak nuli u svakoj točki plohe. Srednja zakrivljenost u nekoj točki je zakrivljenost normalnih presjeka kroz tu točku čije su ravnine međusobno okomite. Jednostavnije rečeno, srednja zakrivljenost je aritmetička sredina ekstremnih vrijednosti zakrivljenosti u nekoj točki i može se prikazati jednadžbom:

$$H = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \quad (1)$$

gdje su r_1 i r_2 ekstremne vrijednosti zakrivljenosti. Odnosno, ako uvažimo uvjet za minimalne površine da ovaj izraz mora biti jednak nuli, jednadžba (1) izgledati će ovako:

$$0 = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$$

$$r_1 = -r_2$$

Navedeno možemo dovesti u analogiju s modelom koji tvori opna od sapunice. Naime, opna sapunice prije razvoja računala bila je jedini načini traženja oblika mreža. Sapunica će između zadanih rubova tvoriti takve oblike koji zauzimaju minimalnu površinu i

¹⁰ Prof. David P. Billington: *The Tower and the Bridge*, 1983

stanje minimuma energije unutar kojeg će napreznja biti konstantna duž cijele plohe koju čini opna. Stoga membranu koju čini opna sapunice možemo opisati jednadžbom ravnoteže:

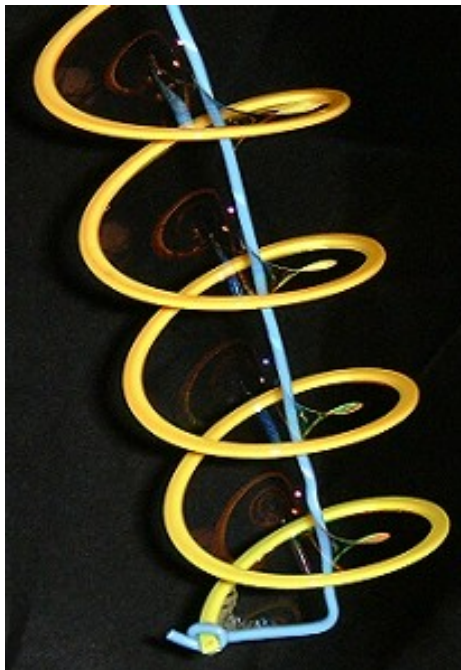
$$w = \frac{t_1}{r_1} + \frac{t_2}{r_2} \quad (2)$$

gdje je: w opterećenje po jedinici površine, t_1 i t_2 površinska napreznja u određenim smjerovima, r_1 i r_2 maksimalni i minimalni radijusi zakrivljenosti. U neopterećenom stanju vanjsko opterećenje iznositi će $w = 0$, a za površinska napreznja znamo da su konstantna duž cijele površine, odnosno $t_1 = t_2$ pa jednadžba (2) poprima oblik:

$$0 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

$$r_1 = -r_2$$

Možemo uočiti da je ovakav oblik jednadžbe (2) zapravo jednadžba (1). Opna sapunice je minimalne površine s obzirom da je zadovoljen uvjet nulte srednje zakrivljenosti.

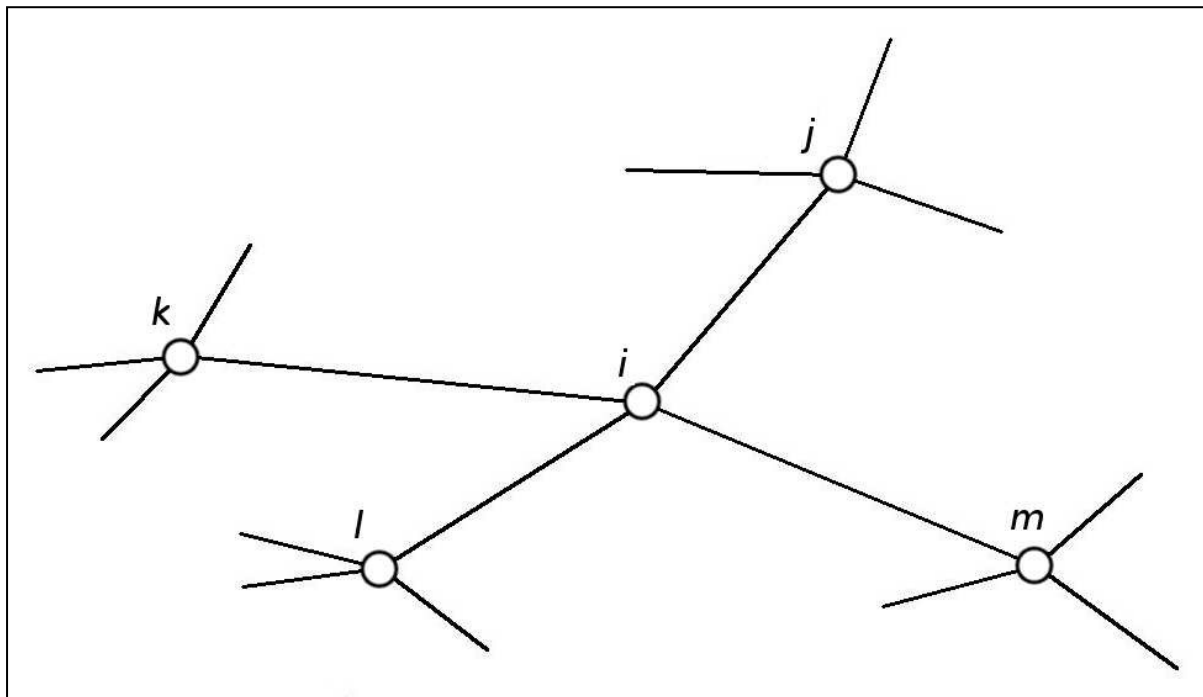


Slika 15. Sapunica tvori helikoid

Gore opisana metoda jedan je od načina nalaženja oblika mreža gdje se geometrijski položaj čvorova mreže određuje prema načelu konstantnog površinskog napreznja. Drugi način određivanja oblika kao što je metoda gustoća sila dati će strukturu mreže koja je kruta i u ravnoteži, ali površinska napreznja više neće biti konstanta. Ova metoda biti će detaljnije razrađena u sljedećim poglavljima.

3.2. Ravnoteža slobodnog čvora u prostoru

Osnovu postupka nalaženja oblika prednapetih mreža čine jednačbe ravnoteže slobodnih čvorova u prostoru u kojima djeluju samo sile prednapinjanja od užadi. Radi pojednostavljenja umjesto užadi koristit ćemo izraz štap.



Slika 16. Sustav zglobno spojenih štapova

Za svaki čvor unutar mreže možemo napisati tri jednačbe ravnoteže projekcija sile na pripadajuće koordinatne osi da bi vrijedilo da je čvor u ravnoteži:

$$\begin{aligned} \sum S_{i,j} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{i} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{k} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

gdje vrijedi da je $S_{i,j}$ iznos sile u štapu i, j , a $\vec{e}_{i,j}$ jedinični vektor orijentiran od čvora i prema čvoru j . Općenito vrijedi za jedinični vektor:

$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{k} \quad (4)$$

gdje se u brojcima nalaze koordinate čvorova, a $l_{i,j}$ predstavlja ukupnu duljinu štapa:

$$l_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (5)$$

Uvrstimo li izraz (5) i (4) u jednadžbu (3) dobijemo:

$$\begin{aligned}
\sum S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \cdot \vec{i} &= 0 \\
\sum S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \cdot \vec{j} &= 0 \\
\sum S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \cdot \vec{k} &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Iz navedenog se može zaključiti da se radi o sustavu nelinearnih algebarskih jednadžbi gdje broj jednadžbi iznosi trostruki broj slobodnih čvorova. U jednadžbama se zanemaruje veza produljenja kablova i sila u njima te modul elastičnosti i poprečni presjeci što ne odgovara realno situaciji u kojoj kabel ima zanemarivu fleksijsku krutost i minimalnu otpornost na tlačna naprezanja, ali daje dobar početni uvid problema nalaženja oblika.

3.2. Minimalne mreže kabela

Ukupna duljina kabela u mreži može se prikazati funkcijom \mathcal{L} za koju vrijedi:

$$\mathcal{L} = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

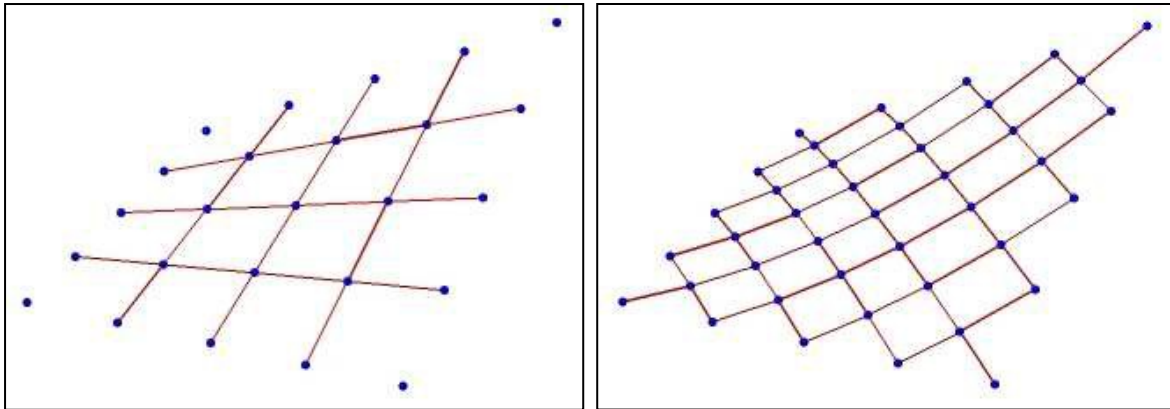
Izjednačimo li s nulom parcijalne derivacije funkcije \mathcal{L} dobijemo sustave od $3n_f$ jednadžbi s $3n_f$ nepoznanice, gdje je n_f broj slobodnih čvorova u mreži:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= \sum \frac{(x_j - x_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} &= \sum \frac{(y_j - y_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} &= \sum \frac{(z_j - z_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0
\end{aligned}$$

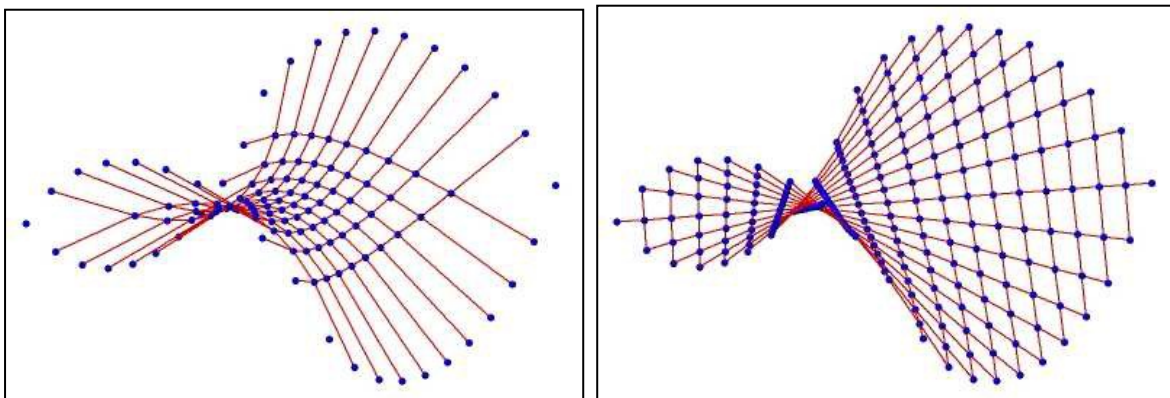
Rješenje tog sustava biti će koordinate slobodnih čvorova za koje funkcija \mathcal{L} poprima minimum. Pomnožimo li sustav s konstantom S (sila u užetu) tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
S \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= S \cdot \sum \frac{(x_j - x_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 \\
S \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} &= S \cdot \sum \frac{(y_j - y_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 \\
S \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} &= S \cdot \sum \frac{(z_j - z_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0
\end{aligned}$$

Položaj točaka u prostoru neće se promijeniti ukoliko mijenjamo silu u užetu S zato što je ona konstantna (sile u svim štapovima jednake). Rješavanjem gornjeg sustava dobit ćemo položaj slobodnih čvorova mreže u kojoj je zbroj duljina kablova koji ju sačinjavaju najmanji mogući za zadane rubne čvorove. Takva oblik mreže zove se minimalna ili geodetska mreža kablova. Naravno, sila u kablovima mora biti takva da je vlačna ($S > 0$) kako bi mreža kablova imala smisla. Ukoliko je sila u kablovima različita u svakom pojedinom kabelu, ali vrijedi da je ista duž svakog zasebnog kabela onda je riječ o poopćenim minimalnim mrežama što će biti tema idućeg potpoglavlja. Na slikama 17. i 18. prikazani su primjeri minimalnih mreža. Na prvoj slici nalaze se mreže nad tlocrtnim područjem $[0, 1]^2$ koje zadovoljavaju funkciju $z = \frac{1}{2}xy$ (rubni čvorovi ležajni). Minimalne mreže na slici 18. nalaze se nad tlocrtnim područjem $[1, 1]^2$ i zadovoljavaju funkciju $z = \ln\left(\frac{\cos x}{\sin y}\right)$



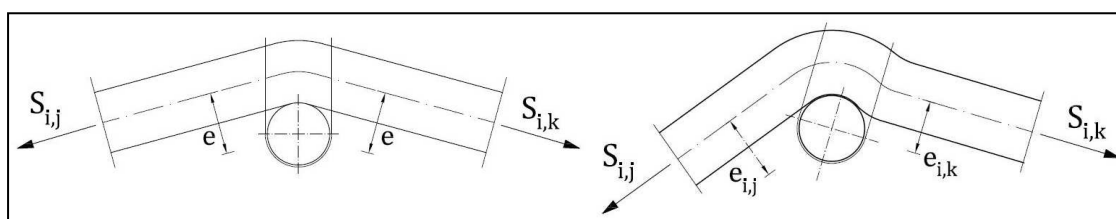
Slika 17.



Slika 18.

3.2. Poopćene minimalne mreže kabela

U prethodnom modelu minimalnih mreža kabela se prikazuju kao sustavi zglobno spojenih štapova (slika 16.), odnosno da se kabeli sijeku, ali u stvarnosti kabel prelazi preko drugog kabela ili ispod njega. Sukladno tome, ukoliko se kabeli spoje prije nego što se izjednači sila uzduž njih, sile će u priključnim štapovima istog užeta biti različite te će spoj prenositi s jednog užeta na drugo normalnu i tangencijalnu komponentu sile. S obzirom da su sile u dva priključna štapa jednog užeta različite, odnosno $S_{i,j} \neq S_{i,k}$ tada će i vrijednosti momenata tih sila biti različite u odnosu na os poprečnog kabela, odnosno $e \cdot S_{i,j} \neq e \cdot S_{i,k}$ što je prikazano na slici 19. Čvor će se zaokrenuti kako bi se smanjio krak veće sile tj. kako bi se smanjio veći momenti. Tada će vrijediti ravnoteža $e \cdot S_{i,j} = e \cdot S_{i,k}$



Slika 19. Zaokretanje čvora u ravnotežni položaj

U svakom kabelu, odnosno u svim priključenim štapovima jednog kabela, sile će biti jednake onda kada postignemo ravnotežni oblik mreže. Tek tada možemo osigurati spojeve različitim spojnim sredstvima kako bi mreža dobila krutost. Ovakva konfiguracija ravnoteže vrijedit će za opterećenje mreža vlastitom težinom kablova i silama prednapinjanja. Ukoliko na mrežu djeluje korisno opterećenje i/ili druga vanjska opterećenja naravno da će doći do promjene preraspodjela sila u mreži, ali ta opterećenja mogu se smatrati relativno malima u odnosu na sile prednapetosti unesenih u kablove.

Unošenjem sila i prednapinjanjem kablova zasebno ostvaruju se različiti oblici mreža od užadi. Kod zadavanja sila bitan je omjer vrijednosti sila u pojedinim kablovima, a ne njihove apsolutne vrijednosti. Ukoliko se sile u drugim kablovima ne mijenjaju, a određeno uže napinje, duljina kabela se smanjuje što bi značilo da se smanjuje i duljina štapova između čvorova koji tvore to određeno uže. To se može prikazati na izrazu (6) ukoliko ga pomnožimo sa konstantom $s \neq 0$:

$$s \cdot \sum S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$s \cdot \sum S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$s \cdot \sum S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

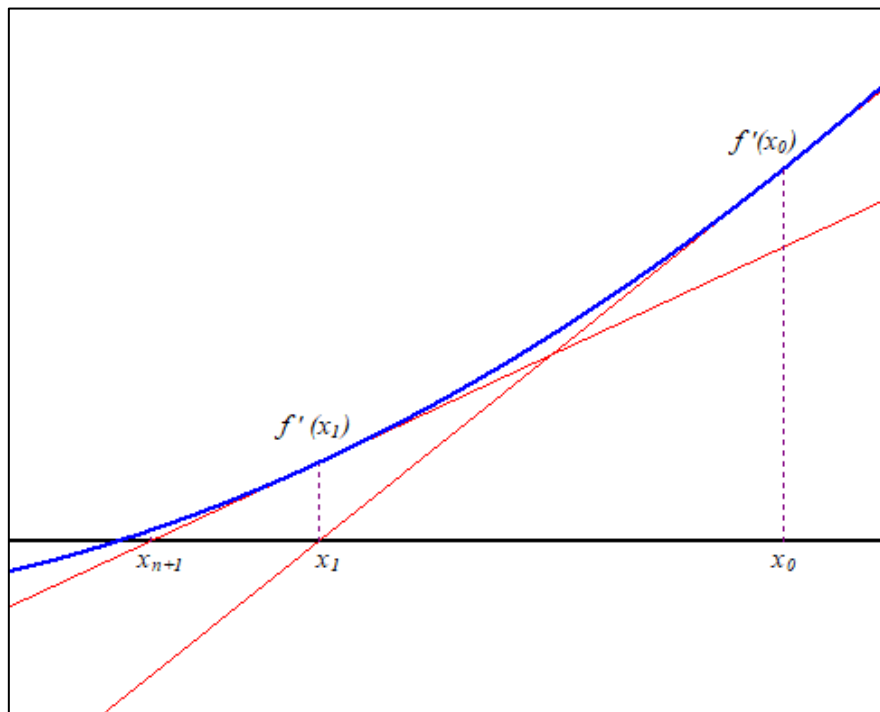
gdje vrijedi $s \cdot A = 0$, $A = 0$ za $s \neq 0$.

4. Newton – Raphsonov postupak

4.1. Načela postupka

Newton – Raphsonova metoda (skraćeno Newtonova metoda) je iterativni postupak nalaženja aproksimacije korijena realne funkcije $f(x) = 0$. Zasniva se na iterativnom postupku sukcesivnog nalaženja tangenata funkcije i njihovih presjecišta s apscisom dok se ne zadovolji vrijednost zahtjevane točnosti.

Metoda započinje odabirom proizvoljne točke x_0 funkcije $f(x)$. Kroz proizvoljnu točku x_0 provlačimo tangentu i nalazimo njeno sjecište s apscisom, točku $(x_1, 0)$. U točki x_1 funkcije $f(x)$ provlačimo iduću tangentu. Postupak nalaženja tangenti u točkama ponavlja se do željene točnosti. Navedeno se može prikazati skiciranim grafom iscrtanim u programu Graph na slici 20.



Slika 20.

Dakle, za Newtonov iterativni postupak nalaženja nultočke funkcije $f(x)$ biti će potrebno odrediti početnu proizvoljnu točku x_0 i tangentu u toj proizvoljno točki, odnosno prvu derivaciju $f'(x)$ funkcije $f(x)$. Nalaženje iduće aproksimativne vrijednosti x_1 možemo zapisati kao:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Odnosno vrijedi općenito da je svaka iduća iteracija:

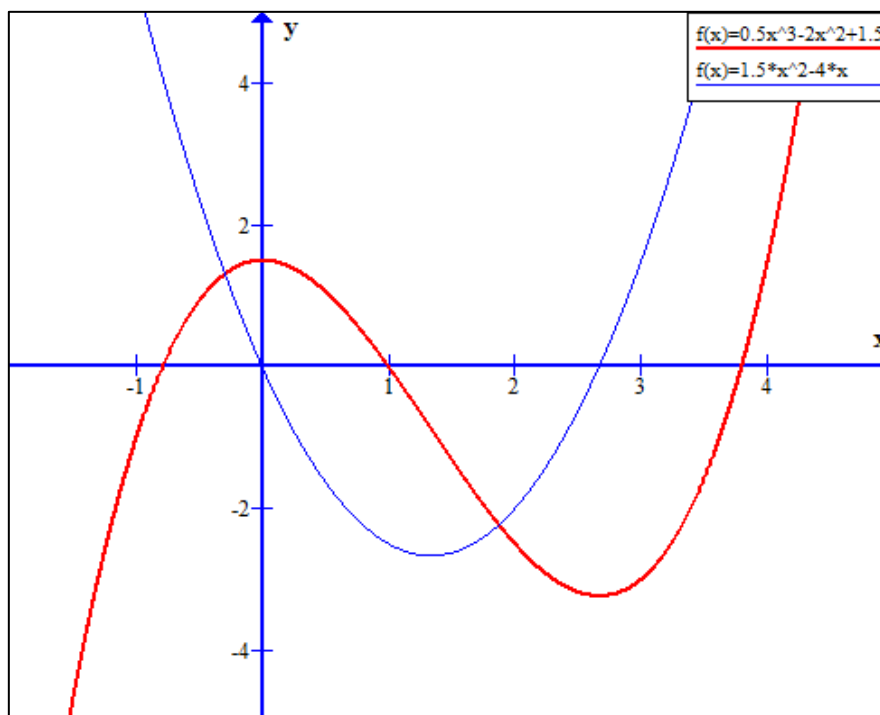
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7)$$

Konkretan primjer nalaženja nultočke funkcije pokazat ćemo na slijedećem primjeru. Imamo realnu funkciju i njezinu prvu derivaciju:

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 1.5$$

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$$

Tražimo nultočku zadane funkcije koja je grafički prikazana na slici 21, zajedno sa pripadajućom funkcijom prve derivacije. Iterativni postupak dan je u tablici 1., tražena točnost je na 5 decimala.



Slika 21.

Tablica 1.

Broj iteracije	X	$g(x)/g'(x)$
0	0.5	-0.653846154
1	1.153846154	0.15071708
2	1.003129074	0.003127131
3	1.000001944	1.94354E-06
4	1	7.55396E-13
5	1	0

Kao što možemo iščitati iz tablice, jedna od nultočki funkcije $g(x)$ je 1. Trebalo nam je četiri koraka iteracije da dođemo do spomenutog rješenja. Naravno, s obzirom da je navedena funkcija polinom trećeg stupnja ovo nije jedino rješenje. Prema tome, možemo

zaključiti da navedena metoda nalaženja nultočaka svakako treba biti pridružena sa grafičkim materijalom kako bismo mogli točno zadati početnu točku koja će dalje konvergirati do traženog rješenja. U tablici 2. i 3. slijedi nalaženje ostalih dviju nultočki.

Tablica 2.

Broj iteracije	X	$g(x)/g'(x)$
0	-0.5	0.394736842
1	-0.894736842	-0.09608199
2	-0.798654852	-0.007325244
3	-0.791329608	-4.17589E-05
4	-0.791287849	-1.35404E-09
5	-0.791287847	0

Tablica 3.

Broj iteracije	x	$g(x)/g'(x)$
0	4	0.1875
1	3.8125	0.020957526
2	3.791542474	0.000254589
3	3.791287885	3.73672E-08
4	3.791287847	5.5549E-16
5	3.791287847	5.5549E-16

Osim toga, možemo uočiti još jednu opasku. Naime, ukoliko odaberemo stacionarne točke kao početne (npr. $x_0 = 0$), ona će sjeći apscisu u beskonačnosti i neće konvergirati. Newtonova metoda jednostavna je sama po sebi, ali treba imati uvid u grafičku podlogu kako bi se znalo točno što se traži te usporedilo grafičke rezultate s dobivenim rješenjem iz postupka.

4.2. Sustavi nelinearnih jednadžbi

Tražimo rješenje sustava od n nelinearnih jednadžbi:

$$f_1(x_1, x_2, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_n) = 0$$

$$f_n(x_1, x_2, x_n) = 0$$

Sustav jednadžbi zapisati ćemo kao vektor u matricnom obliku pa tako imamo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_n) \\ f_n(x_1, x_2, x_n) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Kod rješavanja nelinearnih sustava biti će potrebno još definirati Jacobijevu matricu. To je matrica koja sadrži sve prve parcijalne derivacije funkcije:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

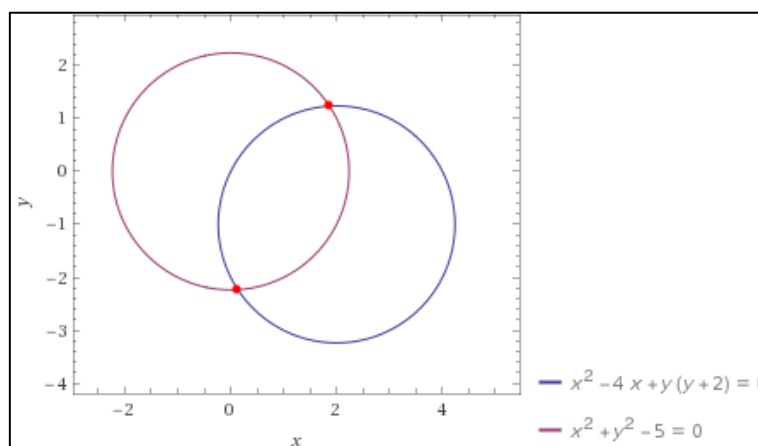
Sada možemo definirati izraz Newtonove metode za sustave nelinearnih jednadžbi, analogno izrazu (7) te primijetiti da je postupak isti, ali s obzirom da imamo parcijalne derivacije izraz malo drugačiji:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \left[\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_n) \right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Postupak računanja je isti: odabiremo proizvoljnu početku točku nakon koje slijedi konvergencija do traženog rezultata. Isto kao i u prethodnom potpoglavlju potrebno je zorno prikazati ono što računamo kako bismo znali da su tražene nepoznanice rezultat koji tražimo.

U sljedećem primjeru pokazati ćemo nalaženje rješenja sustava dviju jednadžbi pomoću Newtonove metode. Neka je zadan sustav jednadžbi koje su prikazane na slici 22:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y &= 0 \end{aligned}$$



Slika 22. Grafički prikaz funkcija u programu Wolfram alpha

Prema tome, navedene funkcije te njihove parcijalne derivacije su:

$$f_1(x_1, x_2) = x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x - 4 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y + 2$$

Iduće što možemo formulirati jest Jacobijeva matrica i njezin inverz:

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x - 4 & 2y + 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{df}{dx} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{y+1}{2x+4y} & -\frac{y}{2x+4y} \\ -\frac{x-2}{2x+4y} & \frac{x}{2x+4y} \end{bmatrix}$$

Imajući sve potrebno, možemo krenuti s iterativnim postupkom. Kao početnu točku uzimamo (0, -1). Slijedi da je:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1+1}{2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1)} & -\frac{-1}{2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1)} \\ \frac{0-2}{2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1)} & \frac{0}{2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0^2 + (-1)^2 - 5 \\ 0^2 - 0 + (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.25 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Iduća točka koja će biti objekt iteracije je dakle (-0.25, -3). Nakon petog koraka stajemo i zapisujemo rješenje sa točnošću na petoj odnosno šestoj decimali. Jedno od rješenja sustava biti će točka (0.133975, -2.23205). Iterativni postupak do traženog rješenja prikazan je u tablici 4. Iz grafičkog prikaza funkcije vidljivo je da to nije jedino rješenje. Za drugo rješenje odabrana je početna točka (2, 0) i postupak je prikazano u tablici 5. Nakon petog koraka zapisujemo rješenje sa točnošću na šest decimala. Drugo rješenje sustava je (1.866025, 1.232051).

Tablica 4.

Korak	x_n, y_n	df/dx		$(df/dx)^{-1}$		f(x)	$(df/dx)^{-1} * f(x)$	x_{n+1}, y_{n+1}
0	x= 0	0	-2	0	-0.25	-4	0.25	x= -0.25
	y= -1	-4	0	-0.5	0	-1	2	y= -3
1	x= -0.25	-0.5	-6	0.16	-0.24	4.0625	-0.325	x= 0.075
	y= -3	-4.5	-4	-0.18	0.02	4.0625	-0.65	y= -2.35
2	x= 0.075	0.15	-4.7	0.1459	-0.2541	0.5281	-0.057094595	x= 0.132095
	y= -2.35	-3.85	-2.7	-0.208	-0.0081	0.5281	-0.114189189	y= -2.23581
3	x= 0.13209	0.2642	-4.4716	0.1424	-0.2576	0.0163	-0.001877965	x= 0.133973
	y= -2.2358	-3.7358	-2.4716	-0.215	-0.0152	0.0163	-0.003755931	y= -2.23205
4	x= 0.13397	0.2679	-4.4641	0.1423	-0.2577	2E-05	-2.03617E-06	x= 0.133975
	y= -2.2321	-3.7321	-2.4641	-0.215	-0.0155	2E-05	-4.07234E-06	y= -2.23205
5	x= 0.13397	0.2679	-4.4641	0.1423	-0.2577	2E-11	-2.3936E-12	x= 0.133975
	y= -2.2321	-3.7321	-2.4641	-0.215	-0.0155	2E-11	-4.7872E-12	y= -2.23205

Tablica 5.

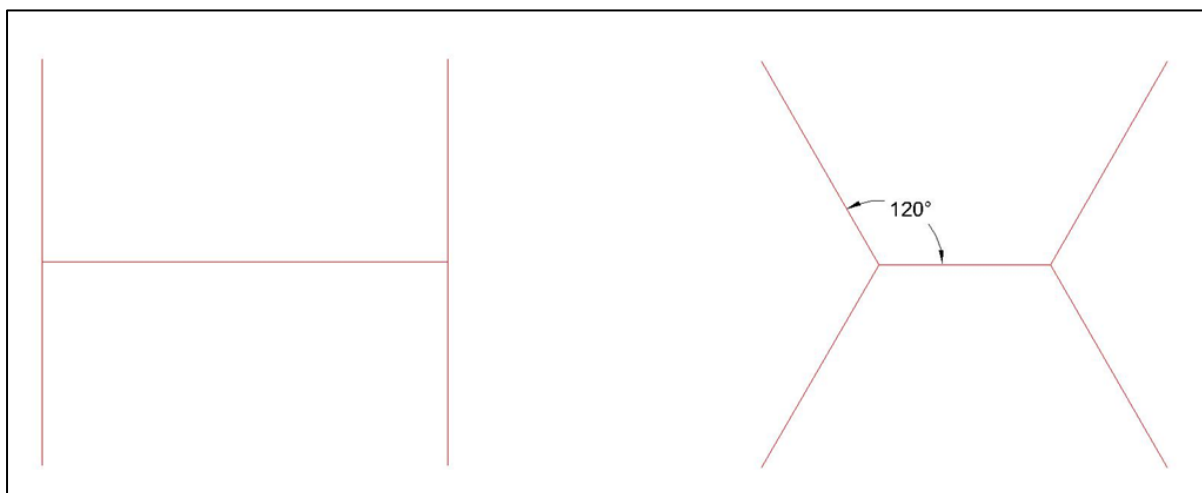
Korak	x_n, y_n	df/dx		$(df/dx)^{-1}$		f(x)	$(df/dx)^{-1} * f(x)$	x_{n+1}, y_{n+1}
0	x= 2	4	0	0.25	0	-1	-0.25	x= 2.25
	y= 0	0	2	0	0.5	-4	-2	y= 2
1	x= 2.25	4.5	4	0.24	-0.16	4.0625	0.325	x= 1.925
	y= 2	0.5	6	-0.02	0.18	4.0625	0.65	y= 1.35
2	x= 1.925	3.85	2.7	0.2541	-0.1459	0.5281	0.057094595	x= 1.867905
	y= 1.35	-0.15	4.7	0.0081	0.20811	0.5281	0.114189189	y= 1.235811
3	x= 1.86791	3.7358	2.47162	0.2576	-0.1424	0.0163	0.001877965	x= 1.866027
	y= 1.23581	-0.2642	4.47162	0.0152	0.21522	0.0163	0.003755931	y= 1.232055
4	x= 1.86603	3.7321	2.46411	0.2577	-0.1423	2E-05	2.03617E-06	x= 1.866025
	y= 1.23205	-0.2679	4.46411	0.0155	0.21547	2E-05	4.07234E-06	y= 1.232051
5	x= 1.86603	3.7321	2.4641	0.2577	-0.1423	2E-11	2.39364E-12	x= 1.866025
	y= 1.23205	-0.2679	4.4641	0.0155	0.21547	2E-11	4.7875E-12	y= 1.232051

4.3. Newtonova metoda u nalaženju oblika mreža

U sljedećim primjerima pokazati ćemo realizaciju korištenja modificirane (kvazi) Newtonove metode u softveru. Umjesto običnog Newtonovog postupka koristi se modificirana verzija u kojoj nema Jacobijeve i Hessian matrice za nalaženje ekstrema. Koristi se algoritam kojeg je napisao Vinicius F. Arcaro u programu Ada. Zadaje se naredba (input) koju program procesira te izbacuje rezultate (output) skupa sa skriptom za AutoCAD koja predstavlja grafički prikaz danog rješenja.

4.3.1. Primjer 1. Problem Steinerovog stabla

Za početni primjer uzet ćemo jednostavan Steinerov problem stabla koji se pita kolika je najkraća udaljenost između točaka tako da su sve povezane. Neka su zadane četiri točke koje tvore kvadrat sa stranicama a . Traži se minimalna duljina užeta koje povezuje sve četiri točke. Na slici 23. lijevo je dan početni (inicijalni) oblik “mreže” od tri užeta, a desno oblik nakon procesa optimizacije.



Slika 23.

Kao što možemo vidjeti, oblik i duljina užeta nisu onakvi kakvima bismo ih možda intuitivno predvidjeli: dvije linije između točaka i jedna ortogonalna na njih (ukupna duljina užeta $3a$) ili prostorne dijagonale koje bi dale duljinu užeta $2\sqrt{2a^2}$. Ukoliko zadamo proizvoljnu duljinu stranice kvadrata $a = 5$ m dobijemo za prvi slučaj duljinu užeta 15 m, a za drugi slučaj prostornih dijagonala 14.14 m s točnošću na dvije decimale. U procesu optimizacije dobili smo još manje rješenje, ono minimalno, koje iznosi 13.66 m s točnošću na drugu decimalu.

Dakle, minimalna udaljenost između točaka koje sačinjavaju kvadrat sa stranicama $a = 5$ m iznosi 13.66 m što je oko 3.5% manje udaljenosti nego kod pretpostavljenog intuitivnog rješenja. Između navedenog u primjeru, možda se 3.5% ne čini puno, ali ušteda na materijalu direktno će se odraziti na cijenu buduće konstrukcije.

Općenito vrijedi za tzv. Steinerove točke da broj točaka u kojima će se dužine sastajati iznosi $n - 2$ gdje je n broj zadanih početnih točaka. U Steinerovim točkama dužine se sastaju na način da između sebe tvore kutove od 120° i tako tvore konfiguraciju lokalnog minimuma.

4.3.2. Primjer 2. Krug

U programu zadajemo mrežu tlocrtnog oblika kruga radijusa 6 m unutar koje se nalazi ispuna od po pet elemenata trokuta duž radijusa (slika 24). Visina nakon optimizacije zadana je na 2 m (mjereno od središta do najviše točke). Rješenje će biti hiperbolički paraboloid:

$$z = 2 \left[\left(\frac{x}{6} \right)^2 + \left(\frac{y}{6} \right)^2 \right]$$

Kao rješenje (output) dobivamo koordinate čvorova nakon procesa minimizacije i skriptu koju ubacujemo u AutoCAD te dobivamo grafičko rješenje prikazano na slici 25:

```

-----
| Minor Iterations      |      127 |
| Objective             | 2.47741247E+02 |
| Maximum Gradient     | 9.87216692E-04 |
-----

```

```

-----
Node      Displ X      Displ Y      Displ Z
-----
1  5.59577470E-08  -1.14640189E-08  8.63711256E-03
2  -3.11889042E-01  -2.07413917E-08  4.86396499E-02
3  -3.91861691E-02  1.65896452E-01  -5.58149022E-02
4  3.91869801E-02  1.65897399E-01  -5.58076865E-02
5  3.11890355E-01  -1.66023318E-08  4.86523838E-02
6  3.91866073E-02  -1.65896803E-01  -5.58134009E-02
7  -3.91857872E-02  -1.65895859E-01  -5.58206165E-02
8  -4.26454985E-01  -3.19136466E-08  2.06239383E-01
9  -2.38200884E-01  -2.27517098E-02  1.03879339E-01
10 4.75574660E-01  2.28482918E-01  -1.38858467E-01
11 -5.50995733E-09  -8.67087219E-02  -2.91539859E-01
12 -4.75572493E-01  2.28486582E-01  -1.38844294E-01
13 2.38205046E-01  -2.27490716E-02  1.03899558E-01
14 4.26459879E-01  -2.54437687E-08  2.06262702E-01
15 2.38204145E-01  2.27495850E-02  1.03894795E-01
16 -4.75573579E-01  -2.28484818E-01  -1.38851484E-01
17 1.61857814E-10  8.67108598E-02  -2.91548565E-01
18 4.75575749E-01  -2.28481152E-01  -1.38865655E-01
19 -2.38199981E-01  2.27522164E-02  1.03874575E-01
20 -3.22990284E-01  -3.86286466E-09  5.66889352E-01
21 -1.42784552E-01  -7.86916897E-02  4.83479671E-01
22 4.54904122E-01  -3.47398610E-02  2.69918118E-01
23 -3.74166224E-02  3.02658270E-01  -4.60101880E-01
24 -1.53693133E-01  -1.05125975E-01  -6.09867755E-01
25 1.53693354E-01  -1.05124875E-01  -6.09865289E-01
26 3.74182843E-02  3.02661628E-01  -4.60093498E-01
27 -4.54898655E-01  -3.47356003E-02  2.69935013E-01
28 1.42792249E-01  -7.86888470E-02  4.83502526E-01
29 3.22999154E-01  5.82103767E-10  5.66914417E-01
30 1.42791312E-01  7.86891816E-02  4.83499749E-01
31 -4.54900050E-01  3.47366733E-02  2.69930547E-01
32 3.74170916E-02  -3.02658949E-01  -4.60100410E-01
33 1.53692907E-01  1.05128113E-01  -6.09873615E-01
34 -1.53692679E-01  1.05129215E-01  -6.09876079E-01
35 -3.74154297E-02  -3.02655585E-01  -4.60108790E-01
36 4.54905512E-01  3.47409374E-02  2.69913650E-01
37 -1.42783620E-01  7.86920195E-02  4.83476893E-01
38 -1.52347540E-01  1.08877462E-09  1.16362643E+00
39 -1.46957633E-02  -7.41135264E-02  1.07900703E+00
40 3.60240729E-01  -5.14890720E-02  8.12492778E-01
41 -6.89206236E-02  -4.61979953E-02  -1.57917958E-02
42 5.82910303E-01  3.01106586E-01  -5.96186666E-01
43 3.50765841E-01  -4.57521555E-02  -1.00824751E+00
44 -3.87351279E-08  -1.54398751E-01  -1.17391124E+00

```

```

45 -3.50765457E-01  -4.57504479E-02  -1.00824450E+00
46 -5.82909435E-01  3.01108219E-01  -5.96183473E-01
47 6.89239172E-02  -4.61944144E-02  -1.57823476E-02
48 -3.60236633E-01  -5.14869308E-02  8.12501323E-01
49 1.47021796E-02  -7.41119641E-02  1.07901966E+00
50 1.52355029E-01  2.08698474E-09  1.16364063E+00
51 1.47016314E-02  7.41120940E-02  1.07901861E+00
52 -3.60237347E-01  5.14873052E-02  8.12499809E-01
53 6.89227689E-02  4.61956979E-02  -1.57857702E-02
54 -5.82910023E-01  -3.01107154E-01  -5.96185574E-01
55 -3.50766029E-01  4.57525237E-02  -1.00824831E+00
56 -3.77764628E-08  1.54401412E-01  -1.17391591E+00
57 3.50766414E-01  4.57542340E-02  -1.00825132E+00
58 5.82910889E-01  -3.01105518E-01  -5.96188767E-01
59 -6.89194806E-02  4.61992837E-02  -1.57952171E-02
60 3.60241439E-01  5.14894482E-02  8.12491263E-01
61 -1.46952176E-02  7.41136558E-02  1.07900597E+00
62 0.00000000E+00  0.00000000E+00  2.00000000E+00
63 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.82709100E+00
64 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.33826100E+00
65 0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.18034000E-01
66 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -2.09056900E-01
67 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.00000000E+00
68 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.61803400E+00
69 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.95629500E+00
70 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.95629500E+00
71 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.61803400E+00
72 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.00000000E+00
73 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -2.09056900E-01
74 0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.18034000E-01
75 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.33826100E+00
76 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.82709100E+00
77 0.00000000E+00  0.00000000E+00  2.00000000E+00
78 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.82709100E+00
79 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.33826100E+00
80 0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.18034000E-01
81 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -2.09056900E-01
82 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.00000000E+00
83 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.61803400E+00
84 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.95629500E+00
85 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.95629500E+00
86 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.61803400E+00
87 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -1.00000000E+00
88 0.00000000E+00  0.00000000E+00  -2.09056900E-01
89 0.00000000E+00  0.00000000E+00  6.18034000E-01
90 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.33826100E+00
91 0.00000000E+00  0.00000000E+00  1.82709100E+00

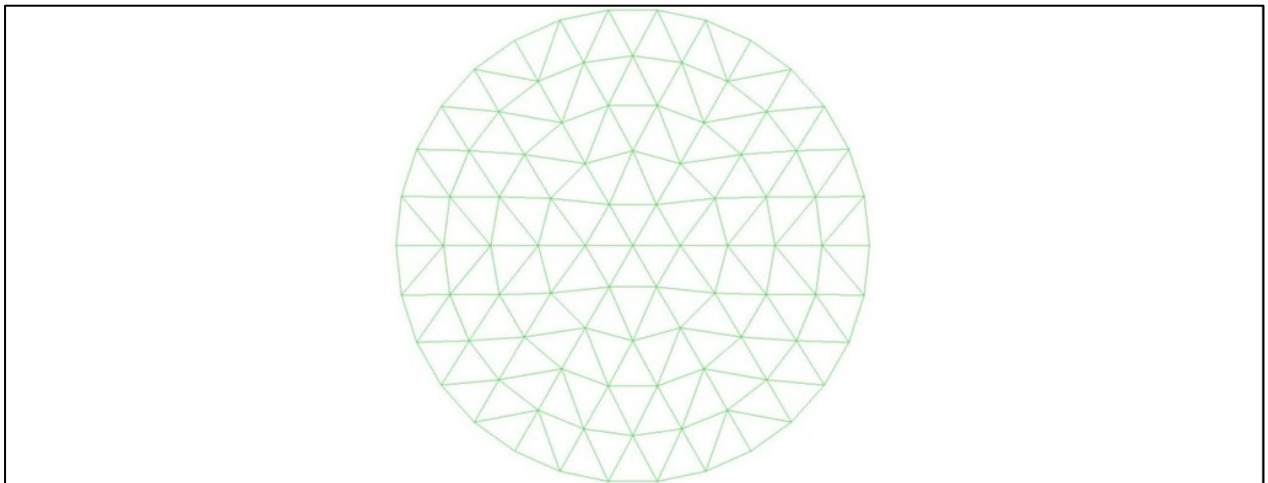
```

```

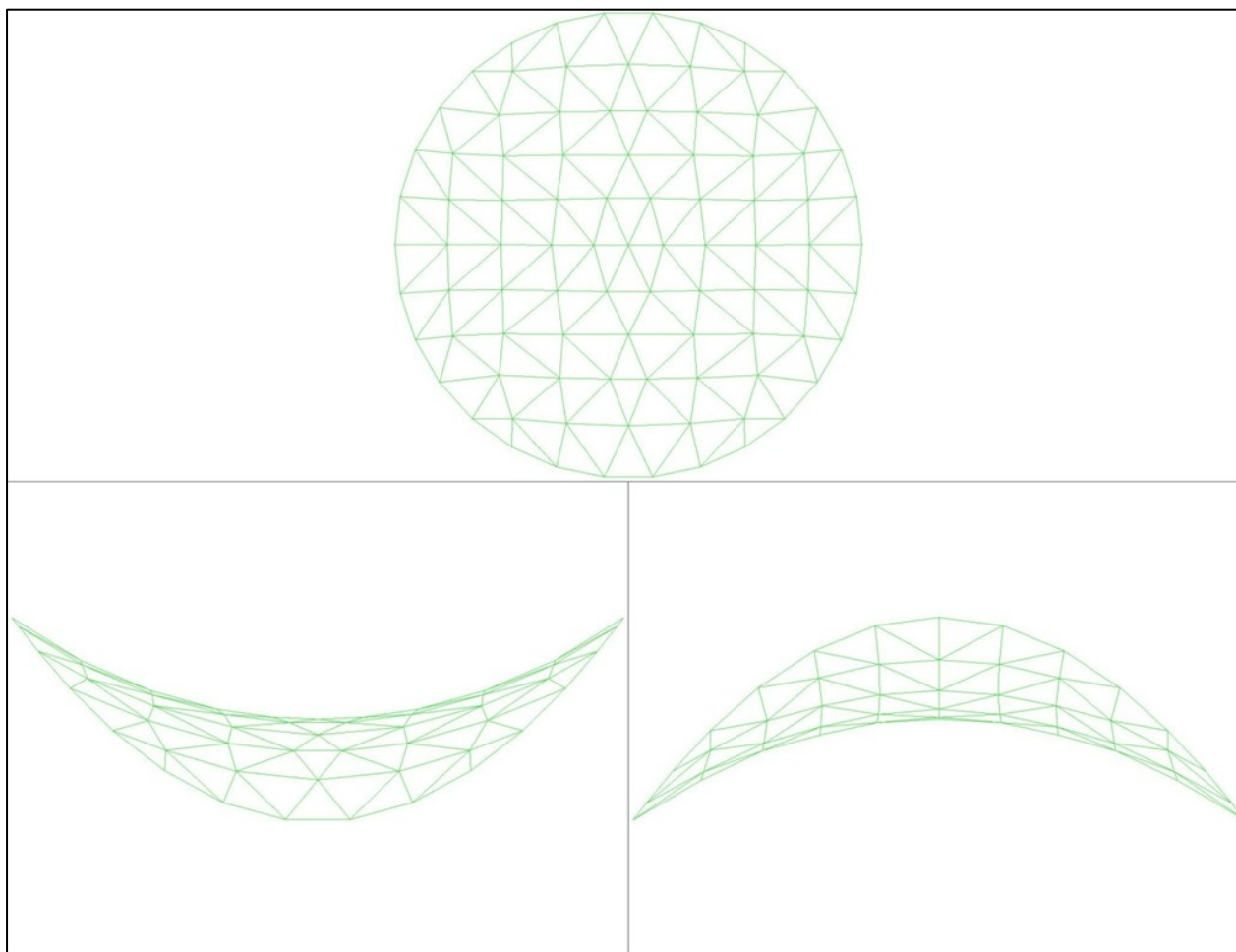
-----
Node      Coord X      Coord Y      Coord Z
-----
1  5.59577470E-08  -1.14640189E-08  8.63711256E-03
2  8.88110958E-01  -2.07413917E-08  4.86396499E-02

```

3	5.60813831E-01	1.20512645E+00	-5.58149022E-02	48	-4.51715863E+00	2.34851307E+00	8.12501323E-01
4	-5.60813020E-01	1.20512740E+00	-5.58076865E-02	49	-4.62174182E+00	1.16821904E+00	1.07901966E+00
5	-8.88109645E-01	-1.66023318E-08	4.86523838E-02	50	-4.64764497E+00	2.08698474E-09	1.16364063E+00
6	-5.60813393E-01	-1.20512680E+00	-5.58134009E-02	51	-4.62174237E+00	-1.16821891E+00	1.07901861E+00
7	5.60814213E-01	-1.20512586E+00	-5.58206165E-02	52	-4.51715935E+00	-2.34851269E+00	8.12499809E-01
8	1.97354501E+00	-3.19136466E-08	2.06239383E-01	53	-3.32519023E+00	-3.34791730E+00	-1.57857702E-02
9	1.84026012E+00	1.17724829E+00	1.03879339E-01	54	-2.98291002E+00	-4.45802915E+00	-5.96185574E-01
10	1.67557466E+00	2.30694392E+00	-1.38858467E-01	55	-1.59309703E+00	-4.59069148E+00	-1.00824831E+00
11	-5.50995733E-09	2.31329128E+00	-2.91539859E-01	56	-3.77764628E-08	-4.64559859E+00	-1.17391591E+00
12	-1.67557249E+00	2.30694758E+00	-1.38844294E-01	57	1.59309741E+00	-4.59068977E+00	-1.00825132E+00
13	-1.84025595E+00	1.17725093E+00	1.03899558E-01	58	2.98291089E+00	-4.45802752E+00	-5.96188767E-01
14	-1.97354012E+00	-2.54437687E-08	2.06262702E-01	59	3.32519352E+00	-3.34791372E+00	-1.57952171E-02
15	-1.84025685E+00	-1.17725042E+00	1.03894795E-01	60	4.51716344E+00	-2.34851055E+00	8.12491263E-01
16	-1.67557358E+00	-2.30694582E+00	-1.38851484E-01	61	4.62174878E+00	-1.16821734E+00	1.07900597E+00
17	1.61857814E-10	-2.31328914E+00	-2.91548565E-01	62	6.00000000E+00	0.00000000E+00	2.00000000E+00
18	1.67557575E+00	-2.30694215E+00	-1.38865655E-01	63	5.86888600E+00	1.24747000E+00	1.82709100E+00
19	1.84026102E+00	-1.17724778E+00	1.03874575E-01	64	5.48127300E+00	2.44042000E+00	1.33826100E+00
20	3.27700972E+00	-3.86286466E-09	5.66889352E-01	65	4.85410200E+00	3.52671200E+00	6.18034000E-01
21	3.24010845E+00	1.15258131E+00	4.83479671E-01	66	4.01478400E+00	4.45886900E+00	-2.09056900E-01
22	3.21266412E+00	2.27929514E+00	2.69918118E-01	67	3.00000000E+00	5.19615200E+00	-1.00000000E+00
23	1.76258338E+00	3.42034927E+00	-4.60101880E-01	68	1.85410200E+00	-5.70633900E+00	-1.61803400E+00
24	4.71440267E-01	3.44018202E+00	-6.09867755E-01	69	6.27170800E-01	5.96713100E+00	-1.95629500E+00
25	-4.71440046E-01	3.44018312E+00	-6.09865289E-01	70	-6.27170800E-01	5.96713100E+00	-1.95629500E+00
26	-1.76258172E+00	3.42035263E+00	-4.60093498E-01	71	-1.85410200E+00	5.70633900E+00	-1.61803400E+00
27	-3.21265865E+00	2.27929940E+00	2.69935013E-01	72	-3.00000000E+00	5.19615200E+00	-1.00000000E+00
28	-3.24010075E+00	1.15258415E+00	4.83502526E-01	73	-4.01478400E+00	4.45886900E+00	-2.09056900E-01
29	-3.27700085E+00	5.82103767E-10	5.66914417E-01	74	-4.85410200E+00	3.52671200E+00	6.18034000E-01
30	-3.24010169E+00	-1.15258382E+00	4.83499749E-01	75	-5.48127300E+00	2.44042000E+00	1.33826100E+00
31	-3.21266005E+00	-2.27929833E+00	2.69930547E-01	76	-5.86888600E+00	1.24747000E+00	1.82709100E+00
32	-1.76258291E+00	-3.42034995E+00	-4.60100410E-01	77	-6.00000000E+00	0.00000000E+00	2.00000000E+00
33	-4.71440493E-01	-3.44017989E+00	-6.09873615E-01	78	-5.86888600E+00	-1.24747000E+00	1.82709100E+00
34	4.71440721E-01	-3.44017879E+00	-6.09876079E-01	79	-5.48127300E+00	-2.44042000E+00	1.33826100E+00
35	1.76258457E+00	-3.42034659E+00	-4.60108790E-01	80	-4.85410200E+00	-3.52671200E+00	6.18034000E-01
36	3.21266551E+00	-2.27929406E+00	2.69913650E-01	81	-4.01478400E+00	-4.45886900E+00	-2.09056900E-01
37	3.24010938E+00	-1.15258098E+00	4.83476893E-01	82	-3.00000000E+00	-5.19615200E+00	-1.00000000E+00
38	4.64765246E+00	1.08877462E-09	1.16362643E+00	83	-1.85410200E+00	-5.70633900E+00	-1.61803400E+00
39	4.62174824E+00	1.16821747E+00	1.07900703E+00	84	-6.27170800E-01	-5.96713100E+00	-1.95629500E+00
40	4.51716273E+00	2.34851093E+00	8.12492778E-01	85	6.27170800E-01	-5.96713100E+00	-1.95629500E+00
41	3.32519238E+00	3.34791500E+00	-1.57917958E-02	86	1.85410200E+00	-5.70633900E+00	-1.61803400E+00
42	2.98291030E+00	4.45802859E+00	-5.96186666E-01	87	3.00000000E+00	-5.19615200E+00	-1.00000000E+00
43	1.59309684E+00	4.59069184E+00	-1.00824751E+00	88	4.01478400E+00	-4.45886900E+00	-2.09056900E-01
44	-3.87351279E-08	4.64560125E+00	-1.17391124E+00	89	4.85410200E+00	-3.52671200E+00	6.18034000E-01
45	-1.59309646E+00	4.59069355E+00	-1.00824450E+00	90	5.48127300E+00	-2.44042000E+00	1.33826100E+00
46	-2.98290943E+00	4.45803022E+00	-5.96183473E-01	91	5.86888600E+00	-1.24747000E+00	1.82709100E+00
47	-3.32518908E+00	3.34791859E+00	-1.57823476E-02				



Slika 24. Inicijalni oblik



Slika 25. Krajnji oblik

4.3.3. Primjer 3. Krnji stožac

Zadajemo inicijalnu mrežu oblika krnjeg stošca gornjeg radijusa 4 m, donjeg 8 m i visine 7 m. Broj elemenata (trokuta) duž izvodnice je 6. Prikazan je output te kranji izgled stošca na slici 26.

Minor Iterations		188	
Objective		5.65393235E+02	
Maximum Gradient		8.69069066E-04	

Node	Displ X	Displ Y	Displ Z

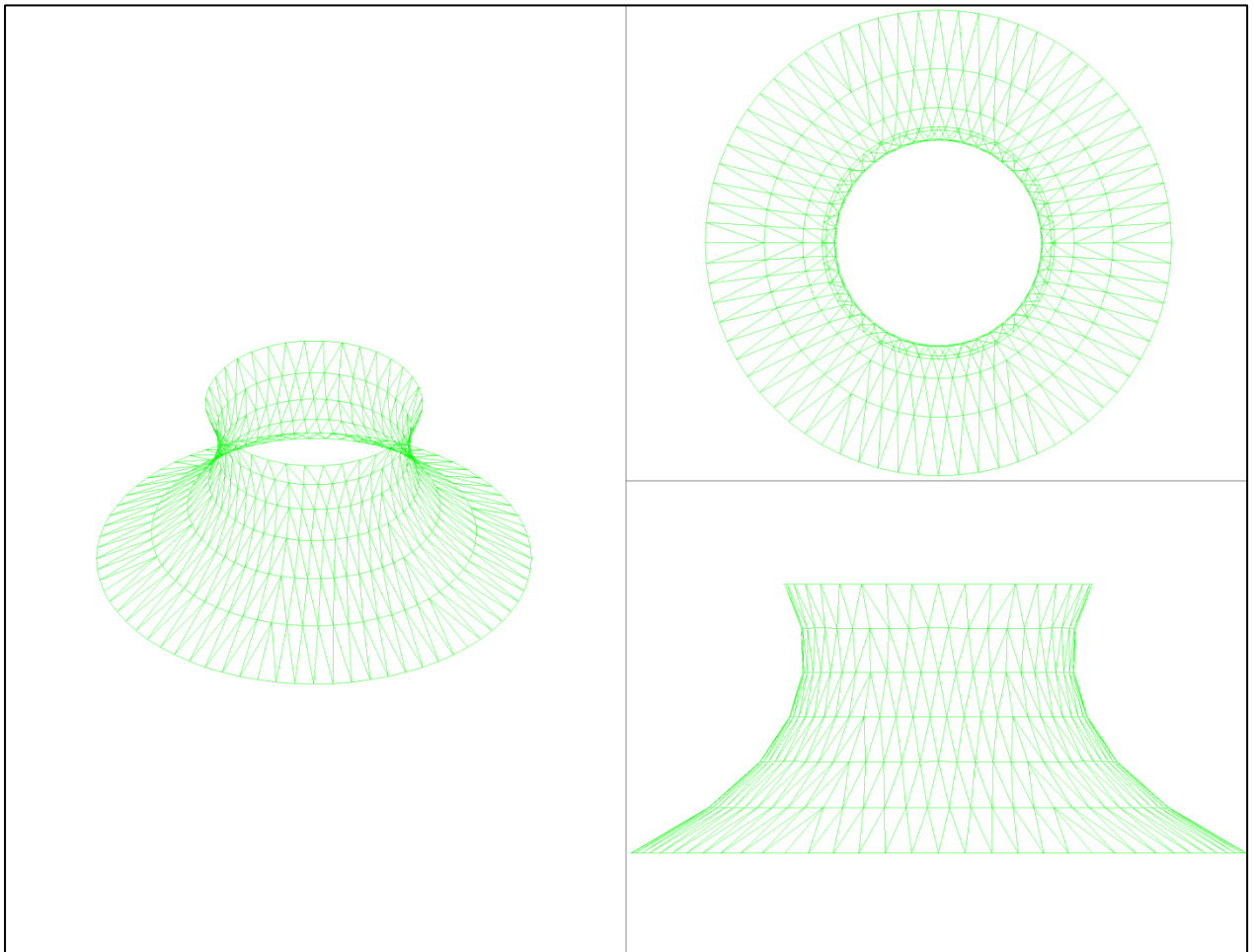
1	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
2	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
3	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
4	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
5	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
6	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
7	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
8	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
9	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
10	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
11	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
12	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
13	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
14	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
15	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
16	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
17	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
18	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
19	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
20	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
21	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
22	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
23	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
24	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
25	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00

306	-1.34497363E+00	1.23364190E-01	1.99528057E-02
307	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
308	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
309	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
310	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
311	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
312	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
313	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
314	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
315	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
316	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
317	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
318	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
319	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
320	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
321	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
322	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
323	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
324	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
325	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
326	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
327	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
328	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
329	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
330	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
331	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
332	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
333	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
334	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
335	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
336	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
337	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
338	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
339	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
340	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
341	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
342	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
343	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
344	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
345	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
346	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
347	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
348	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
349	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
350	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
351	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
352	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
353	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
354	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
355	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
356	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
357	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
358	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
359	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
360	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
361	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
362	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
363	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
364	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
365	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
366	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
367	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
368	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
369	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
370	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
371	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
372	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
373	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
374	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
375	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00

376	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
377	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
378	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00

Node	Coord X	Coord Y	Coord Z
1	4.00000000E+00	0.00000000E+00	7.00000000E+00
2	3.93923100E+00	6.94592700E-01	7.00000000E+00
3	3.75877000E+00	1.36808100E+00	7.00000000E+00
4	3.46410200E+00	2.00000000E+00	7.00000000E+00
5	3.06417800E+00	2.57115000E+00	7.00000000E+00
6	2.57115000E+00	3.06417800E+00	7.00000000E+00
7	2.00000000E+00	3.46410200E+00	7.00000000E+00
8	1.36808100E+00	3.75877000E+00	7.00000000E+00
9	6.94592700E-01	3.93923100E+00	7.00000000E+00
10	0.00000000E+00	4.00000000E+00	7.00000000E+00
11	-6.94592700E-01	3.93923100E+00	7.00000000E+00
12	-1.36808100E+00	3.75877000E+00	7.00000000E+00
13	-2.00000000E+00	3.46410200E+00	7.00000000E+00
14	-2.57115000E+00	3.06417800E+00	7.00000000E+00
15	-3.06417800E+00	2.57115000E+00	7.00000000E+00
16	-3.46410200E+00	2.00000000E+00	7.00000000E+00
17	-3.75877000E+00	1.36808100E+00	7.00000000E+00
18	-3.93923100E+00	6.94592700E-01	7.00000000E+00
19	-4.00000000E+00	0.00000000E+00	7.00000000E+00
20	-3.93923100E+00	-6.94592700E-01	7.00000000E+00
21	-3.75877000E+00	-1.36808100E+00	7.00000000E+00
22	-3.46410200E+00	-2.00000000E+00	7.00000000E+00
23	-3.06417800E+00	-2.57115000E+00	7.00000000E+00
24	-2.57115000E+00	-3.06417800E+00	7.00000000E+00
25	-2.00000000E+00	-3.46410200E+00	7.00000000E+00
26	-1.36808100E+00	-3.75877000E+00	7.00000000E+00
27	-6.94592700E-01	-3.93923100E+00	7.00000000E+00
28	0.00000000E+00	-4.00000000E+00	7.00000000E+00
29	6.94592700E-01	-3.93923100E+00	7.00000000E+00
30	1.36808100E+00	-3.75877000E+00	7.00000000E+00
31	2.00000000E+00	-3.46410200E+00	7.00000000E+00
32	2.57115000E+00	-3.06417800E+00	7.00000000E+00
33	3.06417800E+00	-2.57115000E+00	7.00000000E+00
34	3.46410200E+00	-2.00000000E+00	7.00000000E+00
35	3.75877000E+00	-1.36808100E+00	7.00000000E+00
36	3.93923100E+00	-6.94592700E-01	7.00000000E+00
37	3.57088831E+00	-2.61535611E-15	5.85151523E+00
38	3.52898043E+00	5.45603900E-01	5.85199898E+00
39	3.40707309E+00	1.06896489E+00	5.85309998E+00
40	3.21390279E+00	1.55618772E+00	5.85468167E+00
41	2.95499282E+00	2.00487695E+00	5.85472225E+00
42	2.62953865E+00	2.41589686E+00	5.85318473E+00
43	2.23714397E+00	2.78329214E+00	5.85195941E+00
44	1.78555924E+00	3.09256069E+00	5.85141239E+00
45	1.29198622E+00	3.32902322E+00	5.85203962E+00
46	7.77717326E-01	3.48524286E+00	5.85317220E+00
47	2.59048879E-01	3.56151705E+00	5.85463695E+00
48	-2.59048879E-01	3.56151705E+00	5.85463695E+00
49	-7.77717326E-01	3.48524286E+00	5.85317220E+00
50	-1.29198622E+00	3.32902322E+00	5.85203962E+00
51	-1.78555924E+00	3.09256069E+00	5.85141239E+00
52	-2.23714397E+00	2.78329214E+00	5.85195941E+00
53	-2.62953865E+00	2.41589686E+00	5.85318473E+00
54	-2.95499282E+00	2.00487695E+00	5.85472225E+00
55	-3.21390279E+00	1.55618772E+00	5.85468167E+00
56	-3.40707309E+00	1.06896489E+00	5.85309998E+00
57	-3.52898043E+00	5.45603900E-01	5.85199898E+00
58	-3.57088831E+00	7.76251410E-15	5.85151523E+00
59	-3.52898043E+00	-5.45603900E-01	5.85199898E+00
60	-3.40707309E+00	-1.06896489E+00	5.85309998E+00
61	-3.21390279E+00	-1.55618772E+00	5.85468167E+00

342	-7.96955800E+00	6.97245900E-01	0.00000000E+00	361	0.00000000E+00	-8.00000000E+00	0.00000000E+00
343	-8.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	362	6.97245900E-01	-7.96955800E+00	0.00000000E+00
344	-7.96955800E+00	-6.97245900E-01	0.00000000E+00	363	1.38918500E+00	-7.87846200E+00	0.00000000E+00
345	-7.87846200E+00	-1.38918500E+00	0.00000000E+00	364	2.07055200E+00	-7.72740700E+00	0.00000000E+00
346	-7.72740700E+00	-2.07055200E+00	0.00000000E+00	365	2.73616100E+00	-7.51754100E+00	0.00000000E+00
347	-7.51754100E+00	-2.73616100E+00	0.00000000E+00	366	3.38094600E+00	-7.25046200E+00	0.00000000E+00
348	-7.25046200E+00	-3.38094600E+00	0.00000000E+00	367	4.00000000E+00	-6.92820300E+00	0.00000000E+00
349	-6.92820300E+00	-4.00000000E+00	0.00000000E+00	368	4.58861100E+00	-6.55321600E+00	0.00000000E+00
350	-6.55321600E+00	-4.58861100E+00	0.00000000E+00	369	5.14230100E+00	-6.12835600E+00	0.00000000E+00
351	-6.12835600E+00	-5.14230100E+00	0.00000000E+00	370	5.65685400E+00	-5.65685400E+00	0.00000000E+00
352	-5.65685400E+00	-5.65685400E+00	0.00000000E+00	371	6.12835600E+00	-5.14230100E+00	0.00000000E+00
353	-5.14230100E+00	-6.12835600E+00	0.00000000E+00	372	6.55321600E+00	-4.58861100E+00	0.00000000E+00
354	-4.58861100E+00	-6.55321600E+00	0.00000000E+00	373	6.92820300E+00	-4.00000000E+00	0.00000000E+00
355	-4.00000000E+00	-6.92820300E+00	0.00000000E+00	374	7.25046200E+00	-3.38094600E+00	0.00000000E+00
356	-3.38094600E+00	-7.25046200E+00	0.00000000E+00	375	7.51754100E+00	-2.73616100E+00	0.00000000E+00
357	-2.73616100E+00	-7.51754100E+00	0.00000000E+00	376	7.72740700E+00	-2.07055200E+00	0.00000000E+00
358	-2.07055200E+00	-7.72740700E+00	0.00000000E+00	377	7.87846200E+00	-1.38918500E+00	0.00000000E+00
359	-1.38918500E+00	-7.87846200E+00	0.00000000E+00	378	7.96955800E+00	-6.97245900E-01	0.00000000E+00
360	-6.97245900E-01	-7.96955800E+00	0.00000000E+00				



Slika 26. Krajnji oblik krnjeg stošca

5. Metoda gustoća sila

5.1. Načela postupka

Postupak metode gustoća sila razvijen je za potrebe modeliranja prednapetih vlačnih konstrukcija olimpijskog kompleksa u Münchenu. Metoda se bazira na pojednostavljenju nelinearnih sustava tako da se sustav linearizira. U postupku se koristi linearni sustav jednadžbi za nalaženje statičke ravnoteže prednapetih kablova na način da se zadaju predodređene sile i duljine kablova u zadanom omjeru tako da budu konstantni.

Za već poznate izraze ravnoteže slobodnog čvora u prostoru (6):

$$\begin{aligned}\sum S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{i} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \sum S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}} \cdot \vec{k} &= 0\end{aligned}$$

u metodi gustoća sila možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned}\sum \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}} \cdot (x_j - x_i) &= 0 \\ \sum \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}} \cdot (y_j - y_i) &= 0 \\ \sum \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}} \cdot (z_j - z_i) &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

Kao što već rekosmo, unaprijed zadajemo predodređeni omjer sila i duljina kablova pa vrijedi izraz koji nazivamo koeficijentom ili gustoćom sila:

$$q_{i,j} = \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}}\tag{9}$$

Ukoliko ubacimo (9) u izraz (8) dobijemo:

$$\begin{aligned}\sum q_{i,j} \cdot (x_j - x_i) &= 0 \\ \sum q_{i,j} \cdot (y_j - y_i) &= 0 \\ \sum q_{i,j} \cdot (z_j - z_i) &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

Metoda gustoća sila služi za generiranje inicijalnih oblika napetih struktura mreža koje su u statičkoj ravnoteži, a ne za nalaženje mreža minimalnih površina iako su se razvile nelinearne metode gustoća sila koje zadržavaju formulaciju mreža s elementima jednakih udaljenosti u strukturi ili konstantnu prednapetost. Pomoću metode gustoća sila nalazimo početni oblik mreža koji je u statičkoj ravnoteži i on je polazište za daljnje iznalaženje oblika. Metoda je jednostavna jer zahtjeva jedino koordinate rubnih točaka i pretpostavljene gustoće sila.

5.2. Primjena metode gustoća sila na numeričkom primjeru

Na sljedećem jednostavnom primjeru pokazati ćemo nalaženje mreže koja se sastoji od četiri kabla koji se sastaju u jednom čvoru kojeg ćemo označiti sa T_5 . Poznate su koordinate rubnih točaka kabla: $T_1(2, 0, 3)$, $T_2(0, 4, 4)$, $T_3(5, 4, 1)$ i $T_4(1, 5, 2)$, a za gustoće (koeficijente) sila zadajemo proizvoljnu vrijednost 1. Dakle, jedina nepoznanica je položaj čvora T_5 u kojem se sastaju kablovi. Vanjska opterećenja se zanemaruju te se u obzir uzimaju samo unutarnje sile u kablovima.

Prema izrazima (10) za metodu gustoća sila imamo sustav jednačbi:

$$q_{1,5} \cdot (x_1 - x_5) + q_{2,5} \cdot (x_2 - x_5) + q_{3,5} \cdot (x_3 - x_5) + q_{4,5} \cdot (x_4 - x_5) = 0$$

$$q_{1,5} \cdot (y_1 - y_5) + q_{2,5} \cdot (y_2 - y_5) + q_{3,5} \cdot (y_3 - y_5) + q_{4,5} \cdot (y_4 - y_5) = 0$$

$$q_{1,5} \cdot (z_1 - z_5) + q_{2,5} \cdot (z_2 - z_5) + q_{3,5} \cdot (z_3 - z_5) + q_{4,5} \cdot (z_4 - z_5) = 0$$

nakon sređivanja izraza imamo izraze za traženu točku T_5 :

$$x_5 = \frac{q_{1,5} \cdot x_1 + q_{2,5} \cdot x_2 + q_{3,5} \cdot x_3 + q_{4,5} \cdot x_4}{q_{1,5} + q_{2,5} + q_{3,5} + q_{4,5}}$$

$$y_5 = \frac{q_{1,5} \cdot y_1 + q_{2,5} \cdot y_2 + q_{3,5} \cdot y_3 + q_{4,5} \cdot y_4}{q_{1,5} + q_{2,5} + q_{3,5} + q_{4,5}}$$

$$z_5 = \frac{q_{1,5} \cdot z_1 + q_{2,5} \cdot z_2 + q_{3,5} \cdot z_3 + q_{4,5} \cdot z_4}{q_{1,5} + q_{2,5} + q_{3,5} + q_{4,5}}$$

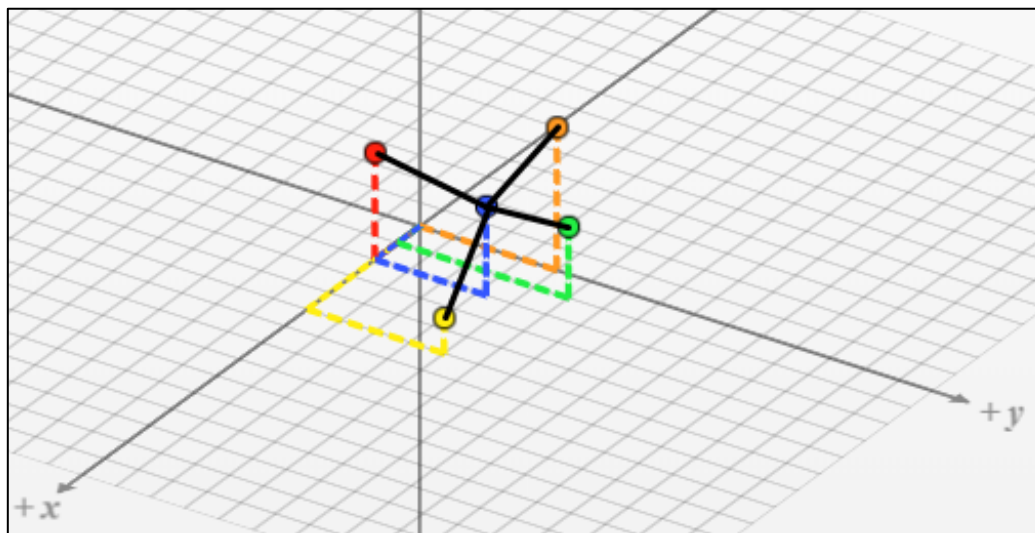
i nakon uvrštavanja zadanih koordinata i gustoća sila dobijemo traženu točku:

$$x_5 = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1}{1 + 1 + 1 + 1} = 2$$

$$y_5 = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{1 + 1 + 1 + 1} = 3.25$$

$$z_5 = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{1 + 1 + 1 + 1} = 2.5$$

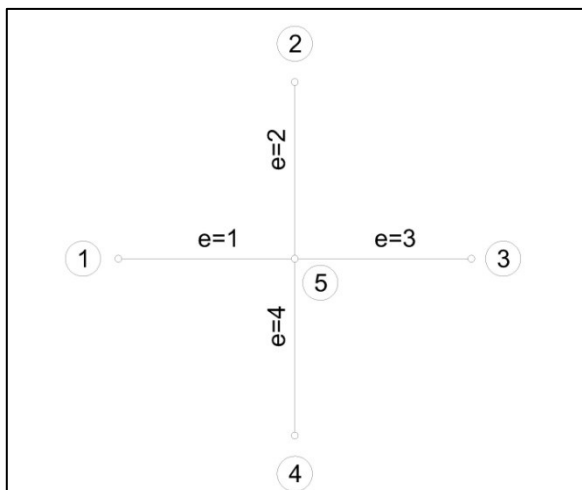
Dobiveno rješenje je točka $T_5(2, 3.25, 2.5)$. Grafički prikaz je na slici 27.



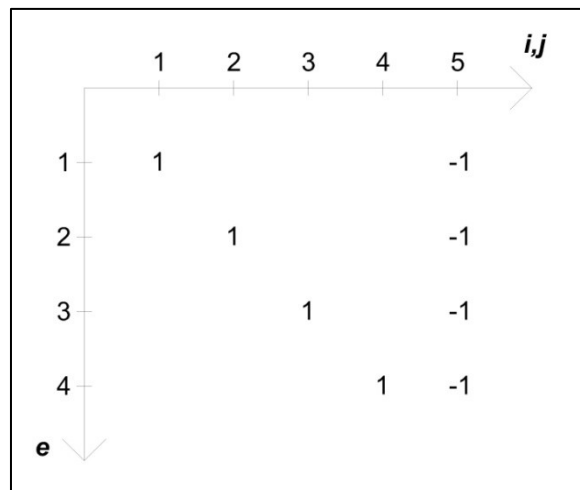
Slika 27.

5.3. Matrična formulacija metode gustoća sila

Za potrebe računalnih programa potrebno je sustav jednažbi prikazati u matričnom obliku. Matrica povezanosti [C] dati će jasan odnos između pojedinih čvorova i njihovu pripadnost određenom elementu u sustavu. Za sustav kablova sa slike 28. možemo definirati matricu povezanosti na način prikazan na slici 29. gdje su i, j oznake čvorova elementa, a e oznaka elementa kojem pripadaju.



Slika 28.



Slika 29.

Duljine kablova na projicirane osi biti će:

$$\begin{Bmatrix} l_{1x} \\ l_{2x} \\ l_{3x} \\ l_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 - x_5 \\ x_2 - x_5 \\ x_3 - x_5 \\ x_4 - x_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} l_{1y} \\ l_{2y} \\ l_{3y} \\ l_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 - y_5 \\ y_2 - y_5 \\ y_3 - y_5 \\ y_4 - y_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} l_{1z} \\ l_{2z} \\ l_{3z} \\ l_{4z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1 - z_5 \\ z_2 - z_5 \\ z_3 - z_5 \\ z_4 - z_5 \end{Bmatrix}$$

(11)

Opći oblik izraza (11) biti će:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{l}_{ex}\} &= [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{X}\} \\ \{\mathbf{l}_{ey}\} &= [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{Y}\} \\ \{\mathbf{l}_{ez}\} &= [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{Z}\}\end{aligned}\quad (12)$$

Komponente unutarnjih sila kablova možemo izraziti kao matricu $[\mathbf{Q}_e]$:

$$\begin{aligned}[\mathbf{Q}_{ex}] &= [\mathbf{Q}] \cdot \{\mathbf{l}_{ex}\} \\ [\mathbf{Q}_{ey}] &= [\mathbf{Q}] \cdot \{\mathbf{l}_{ey}\} \\ [\mathbf{Q}_{ez}] &= [\mathbf{Q}] \cdot \{\mathbf{l}_{ez}\}\end{aligned}\quad (13)$$

gdje je $[\mathbf{Q}]$ matrica gustoće sila:

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}$$

Kao što je već poznato, čvor će biti u ravnoteži, ako je suma komponenti unutarnjih sila pripadajućih elemenata koji se spajaju u čvoru u ravnoteži s komponentama vanjskih sila:

$$\begin{aligned}\sum Q_{ex} &= P_x \\ \sum Q_{ey} &= P_y \\ \sum Q_{ez} &= P_z\end{aligned}\quad (14)$$

Zamjenom Q_{ex} , Q_{ey} i Q_{ez} iz izraza (14) s jednadžbama iz izraza (12) i (13) i množenjem Q_{ex} , Q_{ey} i Q_{ez} s transponiranom matricom povezanosti $[\mathbf{C}^T]$ dobivamo matičnu formulaciju izraza (14) za ravnotežu čvora u prostoru:

$$\begin{aligned}[\mathbf{C}]^T[\mathbf{Q}][\mathbf{C}]\{\mathbf{X}\} &= P_x \\ [\mathbf{C}]^T[\mathbf{Q}][\mathbf{C}]\{\mathbf{Y}\} &= P_y \\ [\mathbf{C}]^T[\mathbf{Q}][\mathbf{C}]\{\mathbf{Z}\} &= P_z\end{aligned}$$

5.4. Iteracijska primjena metode gustoća sila

Višekoračna primjena metode gustoća sila može se koristiti za izračunavanje minimalnih mreža s jednolikom raspodjelom vlačnih sila. U iterativnom postupku metode gustoća sila općenito vrijedi da je u k – tom koraku gustoća sila u elementu i, j :

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \cdot \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}} \quad (15)$$

gdje je $q_{i,j}^{(k-1)}$ gustoća sila iz prethodne iteracije, $S_{i,j}^{(k-1)}$ vrijednost sile iz prethodne iteracije, a \bar{S} traženi iznos sile.

Uz nepromijenjenu duljinu elementa, omjer vrijednosti sila u dva uzastopna koraka iteracije jednak je omjeru gustoća sila, odnosno vrijedi izraz (15) samo drukčiji oblik:

$$\frac{S_{i,j}^{(k)}}{S_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{q_{i,j}^{(k)}}{q_{i,j}^{(k-1)}}$$

U prethodno prikazanom postupku pretpostavlja se da su sile u pojedinačnim kabelima jednake. Ukoliko su sile u pojedinačnim kabelima različite izraz (15) proširujemo:

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \cdot \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}}$$

pa je sada iznos tražene sile $\bar{S}_{i,j}$ jednak za elemente samo između čvorova i, j odnosno imamo poopćenu minimalnu mrežu. Kako nebi došlo do klizanja užeta ili zaokretanja čvorova, sile u pojedinačnim kabelima moraju biti jednake, odnosno vrijednost sile između čvorova i, j mora biti jednaka duž pojedinačnog kabela. U tom slučaju vrijede izrazi:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}$$

Pri promjeni gustoće sila, mijenja se i vrijednost sila pa će biti potreban iterativni postupak za nalaženje duljina. Iteracijski postupak provodi se do željene točnosti. Postupak se prekida kada vrijedi:

$$r_s^k = \max(|S_{i,j}^k - \bar{S}_{i,j}|) < \tau_s$$

$$r_l^k = \max(|l_{i,j}^k - \bar{l}_{i,j}|) < \tau_l$$

gdje su τ_s i τ_l zathjevane točnosti za sile odnosno duljine.

Prednost iteracijskog postupka metode gustoća sila prema drugim iteracijskim metodama kao što je Newtonova metoda leži u tome da postupak konvergira prema traženom rješenju kroz niz ravnotežnih konfiguracija pa je u svakom koraku iteracije sustav u ravnoteži. Dakle, prekinemo li postupak prije tražene točnosti sustav će i dalje biti u ravnoteži što nije slučaj kod prethodno navedene Newtonove metode gdje je ravnotežni položaj tek onaj u posljednjem koraku iteracije dok su prethodni koraci iteracije neuravnotežene aproksimacije koje konvergiraju prema traženom rješenju. Nadalje, za razliku od Newtonove metode te ostalih iterativnih postupaka koji zahtjevaju početnu aproksimaciju, a samim time i mogućnost „odlutanja“ u beskonačnost, iterativni postupak metode gustoća sila ne zahtjeva prvu aproksimaciju rješenja zbog linearnih sustava jednadžbi. Također, bitna prednost je da se sile i duljine štapova dobivaju bez uvođenja Lagrangeovog multiplikatora za nalaženje

lokalnih minimuma i maksimuma funkcija kod procesa optimizacije. Sve to navedeno daje postupku relativnu brzinu i jednostavnost za razliku od mnogih drugih iterativnih postupaka.

5.5. Primjeri nalaženja oblika mreža

Za primjere nalaženja oblika mreža pomoću iterativne metode gustoća sila koristi se kôd programskog paketa kojeg je izradio prof. dr. sc. Fresl u programu Sage. Objašnjenja pojedinih linija koda nalaze se u primjerima i prate razvoj nalaženja oblika. Linije koda stavljene su u *kurziv*, a ispis programa u **plavoj boji**. U prvom primjeru detaljno ćemo popratiti cijeli postupak, a u drugom primjeru samo linije koda i najbitnija rješenje.

5.5.1. Primjer 1.

Traži se oblik kvadratne mreže 10x10m koja sadrži po 36 čvorova međusobno jednako udaljenih i pravilno raspoređenih duž x i y osi. Međusobni razmak im je 2m. Mrežu tvore 4 rubna i 8 unutarnjih kabela. Fiksni čvorovi [0, 5 i 30] nalaze se u ravnini, a čvor [35] je izdignut na visinu 5m.

Najprije zadajemo koordinate čvorova funkcijom *nds = make_nodes*:

```
nds = make_nodes (6, [0, 0, 0], [2, 0, 0])  
nds.extend (make_nodes (6, [0, 2, 0], [2, 0, 0]))  
nds.extend (make_nodes (6, [0, 4, 0], [2, 0, 0]))  
nds.extend (make_nodes (6, [0, 6, 0], [2, 0, 0]))  
nds.extend (make_nodes (6, [0, 8, 0], [2, 0, 0]))  
nds.extend (make_nodes (6, [0, 10, 0], [2, 0, 0]))  
nds[35] = [10, 10, 5]  
print_indexed (nds)
```

```
0 : [0, 0, 0]  
1 : [2, 0, 0]  
2 : [4, 0, 0]  
3 : [6, 0, 0]  
4 : [8, 0, 0]  
5 : [10, 0, 0]  
6 : [0, 2, 0]  
7 : [2, 2, 0]  
8 : [4, 2, 0]  
9 : [6, 2, 0]  
10 : [8, 2, 0]  
11 : [10, 2, 0]  
12 : [0, 4, 0]  
13 : [2, 4, 0]  
14 : [4, 4, 0]  
15 : [6, 4, 0]  
16 : [8, 4, 0]  
17 : [10, 4, 0]  
18 : [0, 6, 0]
```

```

19 : [2, 6, 0]
20 : [4, 6, 0]
21 : [6, 6, 0]
22 : [8, 6, 0]
23 : [10, 6, 0]
24 : [0, 8, 0]
25 : [2, 8, 0]
26 : [4, 8, 0]
27 : [6, 8, 0]
28 : [8, 8, 0]
29 : [10, 8, 0]
30 : [0, 10, 0]
31 : [2, 10, 0]
32 : [4, 10, 0]
33 : [6, 10, 0]
34 : [8, 10, 0]
35 : [10, 10, 5]

```

Zatim zadajemo kabele i štapove naredbom `cbls = [cable (ndl, nnds, step=)]`:

```

cbls = [cable (24, 6, 1)]
cbls.append (cable (18, 6, 1))
cbls.append (cable (12, 6, 1))
cbls.append (cable (6, 6, 1))
cbls.append (cable (1, 6, 6))
cbls.append (cable (2, 6, 6))
cbls.append (cable (3, 6, 6))
cbls.append (cable (4, 6, 6))
cbls.append (cable (0, 6, 1))
cbls.append (cable (0, 6, 6))
cbls.append (cable (30, 6, 1))
cbls.append (cable (5, 6, 6))
print_indexed (cbls)

```

```

0 : [24, 25, 26, 27, 28, 29]
1 : [18, 19, 20, 21, 22, 23]
2 : [12, 13, 14, 15, 16, 17]
3 : [6, 7, 8, 9, 10, 11]
4 : [1, 7, 13, 19, 25, 31]
5 : [2, 8, 14, 20, 26, 32]
6 : [3, 9, 15, 21, 27, 33]
7 : [4, 10, 16, 22, 28, 34]
8 : [0, 1, 2, 3, 4, 5]
9 : [0, 6, 12, 18, 24, 30]
10 : [30, 31, 32, 33, 34, 35]
11 : [5, 11, 17, 23, 29, 35]

```

Zatim kabel dijelimo na štapove i dobivamo sljedeće štapove te grafički prikaz istog:

```

els = make_elements_on_cables (cbls)

```

print_indexed (els)

```
0 : [24, 25]
1 : [25, 26]
2 : [26, 27]
3 : [27, 28]
4 : [28, 29]
5 : [18, 19]
6 : [19, 20]
7 : [20, 21]
8 : [21, 22]
9 : [22, 23]
10 : [12, 13]
11 : [13, 14]
12 : [14, 15]
13 : [15, 16]
14 : [16, 17]
15 : [6, 7]
16 : [7, 8]
17 : [8, 9]
18 : [9, 10]
19 : [10, 11]
20 : [1, 7]
21 : [7, 13]
22 : [13, 19]
23 : [19, 25]
24 : [25, 31]
25 : [2, 8]
26 : [8, 14]
27 : [14, 20]
28 : [20, 26]
29 : [26, 32]
30 : [3, 9]
31 : [9, 15]
32 : [15, 21]
33 : [21, 27]
34 : [27, 33]
35 : [4, 10]
36 : [10, 16]
37 : [16, 22]
38 : [22, 28]
39 : [28, 34]
40 : [0, 1]
41 : [1, 2]
42 : [2, 3]
43 : [3, 4]
44 : [4, 5]
45 : [0, 6]
46 : [6, 12]
47 : [12, 18]
48 : [18, 24]
```

```

49 : [24, 30]
50 : [30, 31]
51 : [31, 32]
52 : [32, 33]
53 : [33, 34]
54 : [34, 35]
55 : [5, 11]
56 : [11, 17]
57 : [17, 23]
58 : [23, 29]
59 : [29, 35]

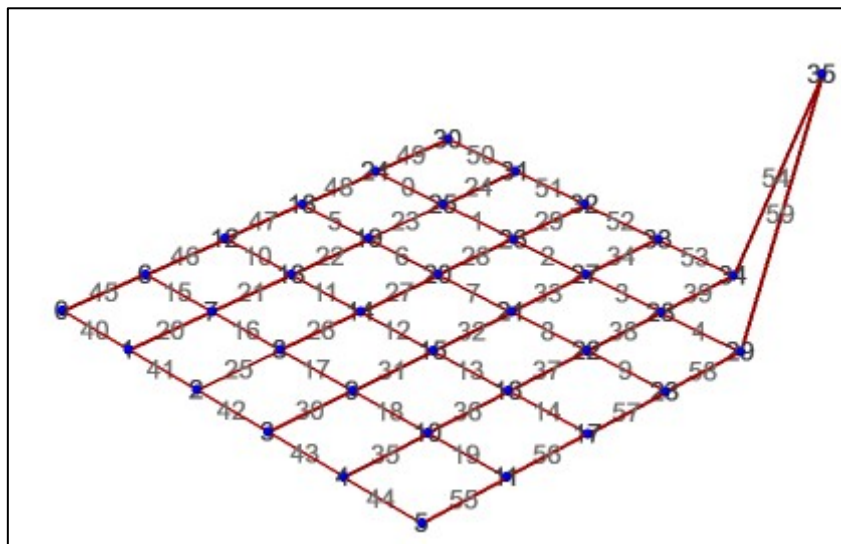
```

```

plot3d_elements (els, nds, elem_labels = True)
plot3d_mesh (nds, els, node_labels = True, elem_labels = True)

```

Grafičko rješenje u perspektivi početne zadane mreže je:



Sada zadajemo ležajne čvorove:

```
supps = [0, 5, 30, 35]
```

Zatim pripadnost elemenata kabelima:

```

tcei = table_of_cable_element_incidences (cbls)
print_indexed (tcei)

```

```

0 : [0, 1, 2, 3, 4]
1 : [5, 6, 7, 8, 9]
2 : [10, 11, 12, 13, 14]
3 : [15, 16, 17, 18, 19]
4 : [20, 21, 22, 23, 24]
5 : [25, 26, 27, 28, 29]
6 : [30, 31, 32, 33, 34]
7 : [35, 36, 37, 38, 39]

```

```
8 : [40, 41, 42, 43, 44]
9 : [45, 46, 47, 48, 49]
10 : [50, 51, 52, 53, 54]
11 : [55, 56, 57, 58, 59]
```

Kao početne vrijednosti nalaženja oblika zadajemo jediničnu gustoću sila:

```
cbl_qs = value_list (len (cbls), 1)
print_indexed (cbl_qs)
```

```
0 : 1
1 : 1
2 : 1
3 : 1
4 : 1
5 : 1
6 : 1
7 : 1
8 : 1
9 : 1
10 : 1
11 : 1
```

```
qs = map_cable_values_to_elements (cbl_qs, tcei)
print_indexed (qs)
```

```
0 : 1
1 : 1
2 : 1
3 : 1
4 : 1
5 : 1
6 : 1
7 : 1
8 : 1
9 : 1
10 : 1
11 : 1
12 : 1
13 : 1
14 : 1
15 : 1
16 : 1
17 : 1
18 : 1
19 : 1
20 : 1
21 : 1
22 : 1
```

23 : 1
24 : 1
25 : 1
26 : 1
27 : 1
28 : 1
29 : 1
30 : 1
31 : 1
32 : 1
33 : 1
34 : 1
35 : 1
36 : 1
37 : 1
38 : 1
39 : 1
40 : 1
41 : 1
42 : 1
43 : 1
44 : 1
45 : 1
46 : 1
47 : 1
48 : 1
49 : 1
50 : 1
51 : 1
52 : 1
53 : 1
54 : 1
55 : 1
56 : 1
57 : 1
58 : 1
59 : 1

Slijedi proračun gustoća sila i dobivene koordinate:

```
nc = FDM (nds, els, supps, qs)  
print_indexed (list (nc))
```

```
0 : (0.0, 0.0, 0.0)  
1 : (2.378309137489325, 1.8488471391972674,  
0.40022341260599176)  
2 : (4.171648163962425, 2.5832621690862516,  
0.6154952600298461)  
3 : (5.828351836037575, 2.5832621690862516, 0.67613582451328)
```

4 : (7.621690862510674, 1.8488471391972683,
0.5242001569926422)
5 : (10.0, 0.0, 0.0)
6 : (1.848847139197267, 2.378309137489326,
0.40022341260599165)
7 : (2.9632792485055504, 2.9632792485055512,
0.585174977788129)
8 : (4.308283518360375, 3.3176771989752356,
0.7701265429702665)
9 : (5.691716481639625, 3.317677198975236,
0.8887120565173516)
10 : (7.036720751494451, 2.9632792485055526,
0.896464646464647)
11 : (8.151152860802737, 2.3783091374893273,
0.7889311561386715)
12 : (2.5832621690862507, 4.171648163962426,
0.615495260029846)
13 : (3.3176771989752343, 4.308283518360377,
0.7701265429702664)
14 : (4.406490179333902, 4.406490179333904,
0.9911238775457396)
15 : (5.593509820666099, 4.406490179333905,
1.2121212121212128)
16 : (6.682322801024768, 4.308283518360379,
1.3840152162099224)
17 : (7.416737830913753, 4.171648163962429,
1.4703288219513677)
18 : (2.5832621690862507, 5.828351836037574,
0.6761358245132798)
19 : (3.317677198975235, 5.691716481639625,
0.8887120565173513)
20 : (4.406490179333903, 5.5935098206661, 1.2121212121212126)
21 : (5.593509820666098, 5.5935098206661, 1.5846336982118374)
22 : (6.682322801024767, 5.691716481639627,
1.9571461843024616)
23 : (7.4167378309137515, 5.828351836037579,
2.238040093505509)
24 : (1.8488471391972674, 7.6216908625106745,
0.5242001569926422)
25 : (2.9632792485055512, 7.0367207514944505,
0.8964646464646469)
26 : (4.308283518360377, 6.6823228010247675,
1.3840152162099224)
27 : (5.691716481639624, 6.6823228010247675,
1.9571461843024613)
28 : (7.0367207514944505, 7.036720751494452,
2.621895729282579)
29 : (8.151152860802735, 7.621690862510678,
3.286645274262696)
30 : (0.0, 10.0, 0.0)


```

31 : (2.3783091374893255, 8.151152860802735,
0.7889311561386715)
32 : (4.171648163962425, 7.4167378309137515,
1.4703288219513673)
33 : (5.828351836037575, 7.41673783091375,
2.2380400935055076)
34 : (7.6216908625106745, 8.151152860802734,
3.2866452742626957)
35 : (10.0, 10.0, 5.0)

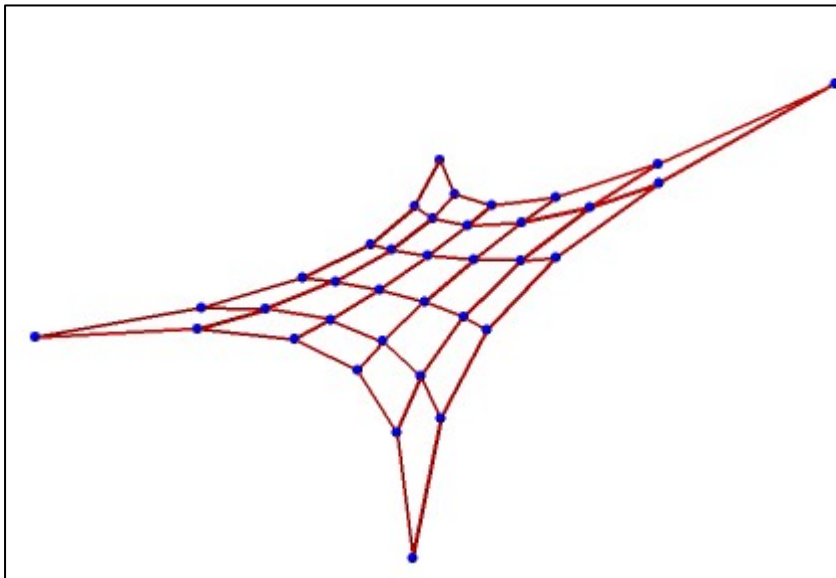
```

Grafički prikaz oblika nakon gustoće sila:

```

plt0 = plot3d_mesh (list (nc), els)
plt0

```



Duljina pojedinih štapova nakon gustoće sila:

```

ll = list_of_element_lengths (els, nc)
print_indexed (ll)

```

```

0 : 1.31252802148
1 : 1.47388600349
2 : 1.49745312797
3 : 1.54159863479
4 : 1.42339064019
5 : 0.776674520382
6 : 1.1400665491
7 : 1.2440985416
8 : 1.15495619257
9 : 0.798082730314
10 : 0.762853517959
11 : 1.11534661713

```

12 : 1.20741685047
13 : 1.10666426847
14 : 0.751987163943
15 : 1.27214623314
16 : 1.40315411651
17 : 1.38850613535
18 : 1.3909329588
19 : 1.2632151078
20 : 1.27214623314
21 : 1.40315411651
22 : 1.38850613535
23 : 1.3909329588
24 : 1.2632151078
25 : 0.762853517959
26 : 1.11534661713
27 : 1.20741685047
28 : 1.10666426847
29 : 0.751987163943
30 : 0.776674520382
31 : 1.1400665491
32 : 1.2440985416
33 : 1.15495619257
34 : 0.798082730314
35 : 1.31252802148
36 : 1.47388600349
37 : 1.49745312797
38 : 1.54159863479
39 : 1.42339064019
40 : 3.03887625243
41 : 1.9498133932
42 : 1.65781311828
43 : 1.94384020615
44 : 3.05767491767
45 : 3.03887625243
46 : 1.9498133932
47 : 1.65781311828
48 : 1.94384020615
49 : 3.05767491767
50 : 3.11400103833
51 : 2.05419888983
52 : 1.82593747252
53 : 2.20340716281
54 : 3.46556986855
55 : 3.11400103833
56 : 2.05419888983
57 : 1.82593747252
58 : 2.20340716281
59 : 3.46556986855

Ukoliko bismo nastavili s iteracijama čvorovi bi otklizali u jednu točku. Zato ćemo postaviti kinematičke uvjete ograničenja na način da fiksiramo duljine rubnih kabela na duljine dobivene iz prvog koraka iteracije. Prvo definiramo rubne i unutarnje kabele:

```
bnd_cbls = [8, 9, 10, 11]
int_cbls = others (bnd_cbls, all_of (cbls))
int_cbls; bnd_cbls
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
[8, 9, 10, 11]
```

Zatim definiramo liste elemenata rubnih kabela (*beis*) i liste duljina elemenata rubnih kabela iz prve iteracije (*bels*):

```
beis = select_elements_on_cables (bnd_cbls, tcei)
beis
```

```
[40,
41,
42,
43,
44,
45,
46,
47,
48,
49,
50,
51,
52,
53,
54,
55,
56,
57,
58,
59]
```

```
ll = list_of_element_lengths (els, nc)
bels = get_values (beis, ll)
bels
```

```
[3.038876252429691,
1.949813393197309,
1.6578131182760483,
```

```

1.9438402061546263,
3.0576749176742544,
3.0388762524296915,
1.9498133931973087,
1.6578131182760463,
1.9438402061546278,
3.057674917674253,
3.1140010383282513,
2.054198889828663,
1.8259374725161208,
2.2034071628069873,
3.4655698685482434,
3.114001038328252,
2.054198889828665,
1.825937472516122,
2.203407162806986,
3.46556986854824]

```

Slijedi pridruživanje duljina rubnim elementima:

```

length_constraints = element_constraints (beis, bels)
length_constraints

```

```

[ (40, 3.038876252429691) ,
(41, 1.949813393197309) ,
(42, 1.6578131182760483) ,
(43, 1.9438402061546263) ,
(44, 3.0576749176742544) ,
(45, 3.0388762524296915) ,
(46, 1.9498133931973087) ,
(47, 1.6578131182760463) ,
(48, 1.9438402061546278) ,
(49, 3.057674917674253) ,
(50, 3.1140010383282513) ,
(51, 2.054198889828663) ,
(52, 1.8259374725161208) ,
(53, 2.2034071628069873) ,
(54, 3.4655698685482434) ,
(55, 3.114001038328252) ,
(56, 2.054198889828665) ,
(57, 1.825937472516122) ,
(58, 2.203407162806986) ,
(59, 3.46556986854824) ]

```

Unutrašnjim elementima zadajemo jedinične sile:

```

ieis = select_elements_on_cables (int_cbls, tcei)
fs1 = value_list (len (ieis), 1)
force_constraints1 = element_constraints (ieis, fs1)

```

force_constraints1

force_constraints = *element_constraints* (*ieis*, [1.]**len*(*ieis*))

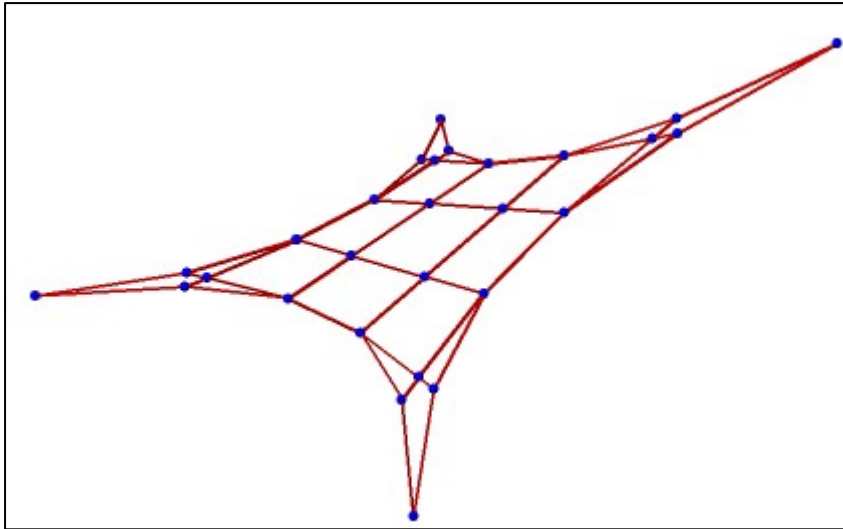
```
[ (0, 1),  
  (1, 1),  
  (2, 1),  
  (3, 1),  
  (4, 1),  
  (5, 1),  
  (6, 1),  
  (7, 1),  
  (8, 1),  
  (9, 1),  
  (10, 1),  
  (11, 1),  
  (12, 1),  
  (13, 1),  
  (14, 1),  
  (15, 1),  
  (16, 1),  
  (17, 1),  
  (18, 1),  
  (19, 1),  
  (20, 1),  
  (21, 1),  
  (22, 1),  
  (23, 1),  
  (24, 1),  
  (25, 1),  
  (26, 1),  
  (27, 1),  
  (28, 1),  
  (29, 1),  
  (30, 1),  
  (31, 1),  
  (32, 1),  
  (33, 1),  
  (34, 1),  
  (35, 1),  
  (36, 1),  
  (37, 1),  
  (38, 1),  
  (39, 1) ]
```

Slijedi iterativni postupak metode gustoća sila za 25 koraka iteracije:

ncl, fl, qs1 = *multistepFDM* (*nds, els, supps, qs, fcs* = *force_constraints, steps* = 25)

Te sada imamo sljedeći oblik mreže nakon 25 iteracija:

```
plt1 = plot3d_mesh (list (nc1), els)  
plt1
```



Pripadajuće vrijednosti u elementima te mreže biti će:

```
print_indexed (f1)
```

```
0 : 0.994298636678  
1 : 1.00104040189  
2 : 1.00024998834  
3 : 1.00170231776  
4 : 0.990821708495  
5 : 0.827630902337  
6 : 1.00090840688  
7 : 0.999796654111  
8 : 1.00138788958  
9 : 0.851049787945  
10 : 0.809854719619  
11 : 1.00080800493  
12 : 0.999794960978  
13 : 1.00092250932  
14 : 0.817168044146  
15 : 0.993166649431  
16 : 1.00114655021  
17 : 1.00012262934  
18 : 1.00110882677  
19 : 0.992895580615  
20 : 0.993166649431  
21 : 1.00114655021  
22 : 1.00012262934
```

```
23 : 1.00110882677
24 : 0.992895580615
25 : 0.809854719619
26 : 1.00080800493
27 : 0.999794960978
28 : 1.00092250932
29 : 0.817168044146
30 : 0.827630902337
31 : 1.00090840688
32 : 0.999796654111
33 : 1.00138788958
34 : 0.851049787945
35 : 0.994298636678
36 : 1.00104040189
37 : 1.00024998834
38 : 1.00170231776
39 : 0.990821708495
40 : 2.76705662848
41 : 2.09385118316
42 : 1.91782256099
43 : 2.09540620857
44 : 2.76677500217
45 : 2.76705662848
46 : 2.09385118316
47 : 1.91782256099
48 : 2.09540620857
49 : 2.76677500217
50 : 2.83580322001
51 : 2.19749289828
52 : 2.10232584269
53 : 2.39586353693
54 : 3.13273173835
55 : 2.83580322001
56 : 2.19749289828
57 : 2.10232584269
58 : 2.39586353693
59 : 3.13273173835
```

Sile u unutarnjim elementima kablova nisu u ravnoteži. Nastaviti ćemo postupak iteracije, ali ovaj put gustoća sila u rubnim kablovima biti će 10, dok će vrijednosti unutarnjih elemenata ostati 1:

```
cbl_qs = set_value (10, bnd_cbls, cbl_qs)
print_indexed (cbl_qs)
```

```
0 : 1
1 : 1
2 : 1
3 : 1
4 : 1
```

```
5 : 1
6 : 1
7 : 1
8 : 10
9 : 10
10 : 10
11 : 10
```

```
qs = map_cable_values_to_elements (cbl_qs, tcei)
print_indexed (qs)
```

```
0 : 1
1 : 1
2 : 1
3 : 1
4 : 1
5 : 1
6 : 1
7 : 1
8 : 1
9 : 1
10 : 1
11 : 1
12 : 1
13 : 1
14 : 1
15 : 1
16 : 1
17 : 1
18 : 1
19 : 1
20 : 1
21 : 1
22 : 1
23 : 1
24 : 1
25 : 1
26 : 1
27 : 1
28 : 1
29 : 1
30 : 1
31 : 1
32 : 1
33 : 1
34 : 1
35 : 1
36 : 1
37 : 1
38 : 1
```


39 : 1
40 : 10
41 : 10
42 : 10
43 : 10
44 : 10
45 : 10
46 : 10
47 : 10
48 : 10
49 : 10
50 : 10
51 : 10
52 : 10
53 : 10
54 : 10
55 : 10
56 : 10
57 : 10
58 : 10
59 : 10

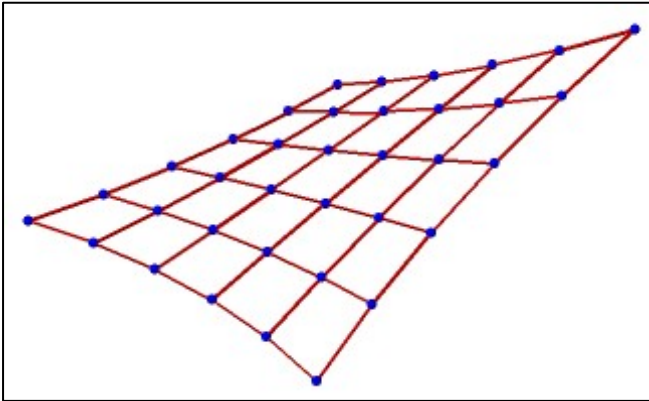
Koordinate nakon postupka gustoće sila za navedene koeficijente gustoća sila:

nc = FDM (nds, els, supps, qs)
print_indexed (list (nc))

0 : (0.0, 0.0, 0.0)
1 : (2.0103602849813433, 0.3543699523058812,
0.07172671496856108)
2 : (4.004953814131964, 0.5273741155134931,
0.12343005962674668)
3 : (5.995046185868035, 0.5273741155134931,
0.14025699812999987)
4 : (7.989639715018655, 0.35436995230588114,
0.10545826118437952)
5 : (10.0, 0.0, 0.0)
6 : (0.35436995230588114, 2.0103602849813442,
0.07172671496856108)
7 : (2.1680278432885736, 2.1680278432885745,
0.2719604180723158)
8 : (4.04996538827746, 2.257415747589612, 0.4721941211760706)
9 : (5.950034611722536, 2.257415747589612,
0.6565137526187353)
10 : (7.831972156711424, 2.1680278432885745,
0.8120535035719715)
11 : (9.64563004769412, 2.010360284981344,
0.9334534275221109)
12 : (0.5273741155134931, 4.004953814131965,
0.12343005962674668)

13 : (2.257415747589611, 4.049965388277461,
0.47219412117607057)
14 : (4.076845283966767, 4.076845283966768,
0.8368722543864848)
15 : (5.92315471603323, 4.076845283966768,
1.2015503875968994)
16 : (7.742584252410388, 4.049965388277461,
1.5527885729626605)
17 : (9.472625884486508, 4.004953814131964,
1.8790468474392357)
18 : (0.527374115513493, 5.995046185868035,
0.14025699812999984)
19 : (2.257415747589612, 5.950034611722538,
0.656513752618735)
20 : (4.076845283966767, 5.923154716033231,
1.201550387596899)
21 : (5.923154716033231, 5.923154716033231,
1.7600269704197165)
22 : (7.742584252410387, 5.950034611722539,
2.318503553242534)
23 : (9.472625884486504, 5.995046185868036,
2.857266094804018)
24 : (0.35436995230588114, 7.989639715018655,
0.10545826118437951)
25 : (2.1680278432885745, 7.831972156711424,
0.8120535035719713)
26 : (4.049965388277461, 7.742584252410387,
1.5527885729626596)
27 : (5.950034611722537, 7.742584252410388,
2.318503553242538)
28 : (7.8319721567114255, 7.831972156711425,
3.103932574783741)
29 : (9.64563004769412, 7.989639715018655, 3.889361596324949)
30 : (0.0, 10.0, 0.0)
31 : (2.0103602849813433, 9.64563004769412,
0.9334534275221107)
32 : (4.004953814131963, 9.472625884486506,
1.8790468474392352)
33 : (5.995046185868034, 9.472625884486506,
2.8572660948040176)
34 : (7.989639715018655, 9.645630047694118,
3.889361596324948)
35 : (10.0, 10.0, 5.0)

Grafički prikaz takve mreže:



Slijedi već opisani postupak:

```
ll = list_of_element_lengths (els, nc)  
print_indexed (ll)
```

```
0 : 1.95281613088  
1 : 2.02444253159  
2 : 2.0485561952  
3 : 2.0412197012  
4 : 1.98270339495  
5 : 1.80598757667  
6 : 1.89950290868  
7 : 1.92892576646  
8 : 1.90340286335  
9 : 1.81254935566  
10 : 1.7654196275  
11 : 1.85581154956  
12 : 1.88197998389  
13 : 1.85321737243  
14 : 1.76111173756  
15 : 1.83147687409  
16 : 1.89466953755  
17 : 1.90898841809  
18 : 1.89046865481  
19 : 1.82454157146  
20 : 1.83147687409  
21 : 1.89466953755  
22 : 1.90898841809  
23 : 1.89046865481  
24 : 1.82454157146  
25 : 1.7654196275  
26 : 1.85581154956  
27 : 1.88197998389  
28 : 1.85321737243  
29 : 1.76111173756
```

```
30 : 1.80598757667
31 : 1.89950290868
32 : 1.92892576646
33 : 1.90340286335
34 : 1.81254935566
35 : 1.95281613088
36 : 2.02444253159
37 : 2.0485561952
38 : 2.0412197012
39 : 1.98270339495
40 : 2.04261383041
41 : 2.00274986528
42 : 1.99016350934
43 : 2.002384763
44 : 2.04407631545
45 : 2.04261383041
46 : 2.00274986528
47 : 1.99016350934
48 : 2.002384763
49 : 2.04407631545
50 : 2.24465183044
51 : 2.21415462486
52 : 2.21751675167
53 : 2.25245530728
54 : 2.32392861384
55 : 2.24465183044
56 : 2.21415462486
57 : 2.21751675167
58 : 2.25245530728
59 : 2.32392861384
```

ff = list_of_element_forces (ll, qs)
print_indexed (ff)

```
0 : 1.95281613088
1 : 2.02444253159
2 : 2.0485561952
3 : 2.0412197012
4 : 1.98270339495
5 : 1.80598757667
6 : 1.89950290868
7 : 1.92892576646
8 : 1.90340286335
9 : 1.81254935566
10 : 1.7654196275
11 : 1.85581154956
12 : 1.88197998389
13 : 1.85321737243
14 : 1.76111173756
15 : 1.83147687409
```

16 : 1.89466953755
17 : 1.90898841809
18 : 1.89046865481
19 : 1.82454157146
20 : 1.83147687409
21 : 1.89466953755
22 : 1.90898841809
23 : 1.89046865481
24 : 1.82454157146
25 : 1.7654196275
26 : 1.85581154956
27 : 1.88197998389
28 : 1.85321737243
29 : 1.76111173756
30 : 1.80598757667
31 : 1.89950290868
32 : 1.92892576646
33 : 1.90340286335
34 : 1.81254935566
35 : 1.95281613088
36 : 2.02444253159
37 : 2.0485561952
38 : 2.0412197012
39 : 1.98270339495
40 : 20.4261383041
41 : 20.0274986528
42 : 19.9016350934
43 : 20.02384763
44 : 20.4407631545
45 : 20.4261383041
46 : 20.0274986528
47 : 19.9016350934
48 : 20.02384763
49 : 20.4407631545
50 : 22.4465183044
51 : 22.1415462486
52 : 22.1751675167
53 : 22.5245530728
54 : 23.2392861384
55 : 22.4465183044
56 : 22.1415462486
57 : 22.1751675167
58 : 22.5245530728
59 : 23.2392861384

ll = list_of_element_lengths (els, nc)
bels = get_values (beis, ll)
bels

[2.0426138304064527,

```
2.0027498652766242,  
1.9901635093382384,  
2.0023847630037794,  
2.0440763154490047,  
2.0426138304064536,  
2.0027498652766242,  
1.9901635093382375,  
2.0023847630037794,  
2.0440763154490047,  
2.244651830436141,  
2.2141546248641384,  
2.217516751674499,  
2.2524553072761373,  
2.323928613844542,  
2.2446518304361414,  
2.214154624864139,  
2.2175167516745,  
2.252455307276136,  
2.3239286138445414]
```

```
length_constraints = element_constraints (beis, bels)  
length_constraints
```

```
[ (40, 2.0426138304064527) ,  
  (41, 2.0027498652766242) ,  
  (42, 1.9901635093382384) ,  
  (43, 2.0023847630037794) ,  
  (44, 2.0440763154490047) ,  
  (45, 2.0426138304064536) ,  
  (46, 2.0027498652766242) ,  
  (47, 1.9901635093382375) ,  
  (48, 2.0023847630037794) ,  
  (49, 2.0440763154490047) ,  
  (50, 2.244651830436141) ,  
  (51, 2.2141546248641384) ,  
  (52, 2.217516751674499) ,  
  (53, 2.2524553072761373) ,  
  (54, 2.323928613844542) ,  
  (55, 2.2446518304361414) ,  
  (56, 2.214154624864139) ,  
  (57, 2.2175167516745) ,  
  (58, 2.252455307276136) ,  
  (59, 2.3239286138445414) ]
```

```
ieis = select_elements_on_cables (int_cbls, tcei)  
fs1 = value_list (len (ieis), 1)  
force_constraints1 = element_constraints (ieis, fs1)  
force_constraints1
```

```
[ (0, 1),  
  (1, 1),  
  (2, 1),  
  (3, 1),  
  (4, 1),  
  (5, 1),  
  (6, 1),  
  (7, 1),  
  (8, 1),  
  (9, 1),  
  (10, 1),  
  (11, 1),  
  (12, 1),  
  (13, 1),  
  (14, 1),  
  (15, 1),  
  (16, 1),  
  (17, 1),  
  (18, 1),  
  (19, 1),  
  (20, 1),  
  (21, 1),  
  (22, 1),  
  (23, 1),  
  (24, 1),  
  (25, 1),  
  (26, 1),  
  (27, 1),  
  (28, 1),  
  (29, 1),  
  (30, 1),  
  (31, 1),  
  (32, 1),  
  (33, 1),  
  (34, 1),  
  (35, 1),  
  (36, 1),  
  (37, 1),  
  (38, 1),  
  (39, 1) ]
```

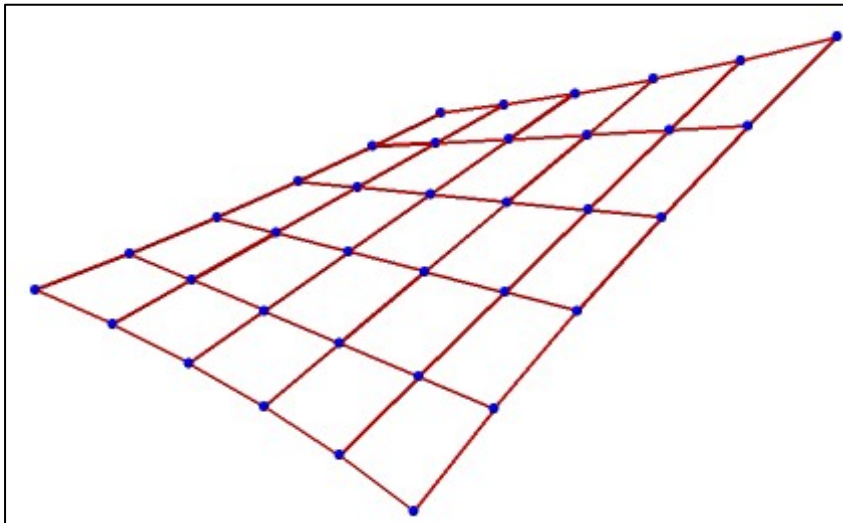
```
force_constraints = element_constraints (ieis, [1.]*len(ieis))
```

```
nc1, fl, qs1 = multistepFDM (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints, steps = 25)
```

```
plt1 = plot3d_mesh (list (nc1), els)
```

```
plt1
```

Novi oblik mreže nakon 25 iteracija sada će biti:



S pripadajućim iznosima sila:

print_indexed (f1)

```
0 : 0.999931175058
1 : 1.00012765408
2 : 0.999891685036
3 : 1.00013857463
4 : 0.999891165382
5 : 0.999864073262
6 : 1.00020629577
7 : 0.999791874186
8 : 1.00025282718
9 : 0.999838197526
10 : 0.999862969502
11 : 1.0002207042
12 : 0.999790448839
13 : 1.00025530344
14 : 0.999820363909
15 : 0.999919870365
16 : 1.00012823251
17 : 0.999873584672
18 : 1.00015400983
19 : 0.999903945683
20 : 0.999919870365
21 : 1.00012823251
22 : 0.999873584672
23 : 1.00015400983
24 : 0.999903945683
25 : 0.999862969502
26 : 1.0002207042
27 : 0.999790448839
```



```
28 : 1.00025530344
29 : 0.999820363909
30 : 0.999864073262
31 : 1.00020629577
32 : 0.999791874186
33 : 1.00025282718
34 : 0.999838197526
35 : 0.999931175058
36 : 1.00012765408
37 : 0.999891685036
38 : 1.00013857463
39 : 0.999891165382
40 : 20.0989983242
41 : 20.0246351979
42 : 20.0005308413
43 : 20.0245464169
44 : 20.0990911328
45 : 20.0989983242
46 : 20.0246351979
47 : 20.0005308413
48 : 20.0245464169
49 : 20.0990911328
50 : 22.2776851045
51 : 22.2536116339
52 : 22.3192323133
53 : 22.4697725317
54 : 22.7018727995
55 : 22.2776851045
56 : 22.2536116339
57 : 22.3192323133
58 : 22.4697725317
59 : 22.7018727995
```

Kao što vidimo, sile su skoro izjednačene u navedenim elementima nakon 25 koraka sa gustoćom sila rubnih kablova 10 i unutrašnjim jediničnim gustoćama. No, mi ćemo provesti iterativni postupak do zahtjevane točnosti od 1×10^{-4} za iznose sila i duljina:

```
nc2, f2 = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints, tol_f = 1.e-4)
```

```
steps: 34
maximal force error: 9.50005701297e-05
```

Postupak se prekida kada se dostigla zahtjevana točnost. Za listu gustoća sila uzetu sa rubnim kablovima gustoće sila 10 i unutarnjim 1, bilo je potrebno 34 koraka za traženo rješenje. Iznosi unutarnjih sila elemenata su:

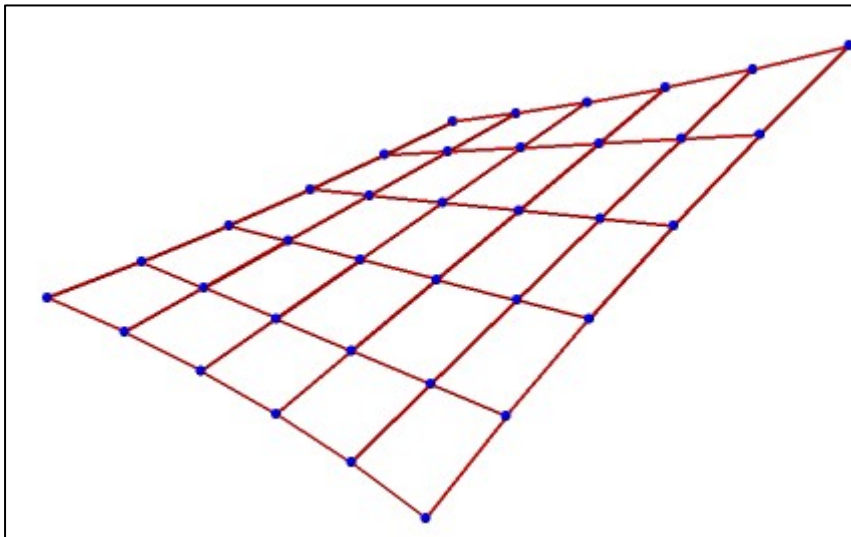
```
print_indexed (f2)
```

0 : 0.999979526198
1 : 1.0000455062
2 : 0.999951875282
3 : 1.00005143637
4 : 0.999965677911
5 : 0.99995894474
6 : 1.00007408858
7 : 0.999908641387
8 : 1.00009424705
9 : 0.999949748815
10 : 0.999959074152
11 : 1.00008004533
12 : 0.999908159749
13 : 1.00009500057
14 : 0.999942031233
15 : 0.999976021657
16 : 1.00004635053
17 : 0.999944976991
18 : 1.00005716381
19 : 0.999969249028
20 : 0.999976021657
21 : 1.00004635053
22 : 0.999944976991
23 : 1.00005716381
24 : 0.999969249028
25 : 0.999959074152
26 : 1.00008004533
27 : 0.999908159749
28 : 1.00009500057
29 : 0.999942031233
30 : 0.99995894474
31 : 1.00007408858
32 : 0.999908641387
33 : 1.00009424705
34 : 0.999949748815
35 : 0.999979526198
36 : 1.0000455062
37 : 0.999951875282
38 : 1.00005143637
39 : 0.999965677911
40 : 20.0988761602
41 : 20.0248637844
42 : 20.0003573955
43 : 20.0248106862
44 : 20.0989328238
45 : 20.0988761602
46 : 20.0248637844
47 : 20.0003573955
48 : 20.0248106862
49 : 20.0989328238
50 : 22.2775678224

```
51 : 22.2538390158
52 : 22.3190660647
53 : 22.4700273906
54 : 22.701719859
55 : 22.2775678224
56 : 22.2538390158
57 : 22.3190660647
58 : 22.4700273906
59 : 22.701719859
```

Grafički prikaz navedene mreže je:

```
plt2 = plot3d_mesh (list (nc2), els)
plt2
```



5.5.1. Primjer 2.

Nalazimo ravnotežni oblik mreže koja se sastoji od 34 kabela i 145 čvorova. Razmak između čvorova duž x i y osi iznos 1m. U mreži se nalaze 4 rubna kabela i 30 unutarnjih. Mreža ima 8 ležajnih čvorova. Čvorovi [0, 8, 136 i 144] leže u jednoj ravnini, a čvorovi [4, 68, 76 i 14] u drugoj ravnini iznad njih.

Čvorovi, kablovi i ležajevi:

```
nds = make_nodes (9, [0., 0., 0.], [1., 0., 0.])
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 0.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 1., 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 1.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 2., 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 2.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 3., 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 3.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 4., 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 4.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 5., 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 5.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 6., 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 6.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 7., 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (8, [0.5, 7.5, 0.], [1., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (9, [0., 8., 0.], [1., 0., 0.]))
nds[0] = [0., 0., 0.]
nds[4] = [4., 0., 5.]
nds[8] = [8., 0., 0.]
nds[68] = [0., 4., 5.]
nds[76] = [8., 4., 5.]
nds[136] = [0., 8., 0.]
nds[140] = [4., 8., 5.]
nds[144] = [8., 8., 0.]
```

```
cbls = [cable (119, 3, 9)]
cbls.append (cable (102, 5, 9))
cbls.append (cable (85, 7, 9))
cbls.append (cable (68, 9, 9))
cbls.append (cable (51, 11, 9))
cbls.append (cable (34, 13, 9))
cbls.append (cable (17, 15, 9))
cbls.append (cable (0, 17, 9))
cbls.append (cable (1, 15, 9))
```

```

cbls.append (cable (2, 13, 9))
cbls.append (cable (3, 11, 9))
cbls.append (cable (4, 9, 9))
cbls.append (cable (5, 7, 9))
cbls.append (cable (6, 5, 9))
cbls.append (cable (7, 3, 9))
cbls.append (cable (1, 3, 8))
cbls.append (cable (2, 5, 8))
cbls.append (cable (3, 7, 8))
cbls.append (cable (4, 9, 8))
cbls.append (cable (5, 11, 8))
cbls.append (cable (6, 13, 8))
cbls.append (cable (7, 15, 8))
cbls.append (cable (8, 17, 8))
cbls.append (cable (25, 15, 8))
cbls.append (cable (42, 13, 8))
cbls.append (cable (59, 11, 8))
cbls.append (cable (76, 9, 8))
cbls.append (cable (93, 7, 8))
cbls.append (cable (110, 5, 8))
cbls.append (cable (127, 3, 8))
# rubni kabeli:
cbls.append (cable (0, 9, 1))
cbls.append (cable (136, 9, 1))
cbls.append (cable (0, 9, 17))
cbls.append (cable (8, 9, 17))

els = make_elements_on_cables (cbls)
print_indexed (els)

```

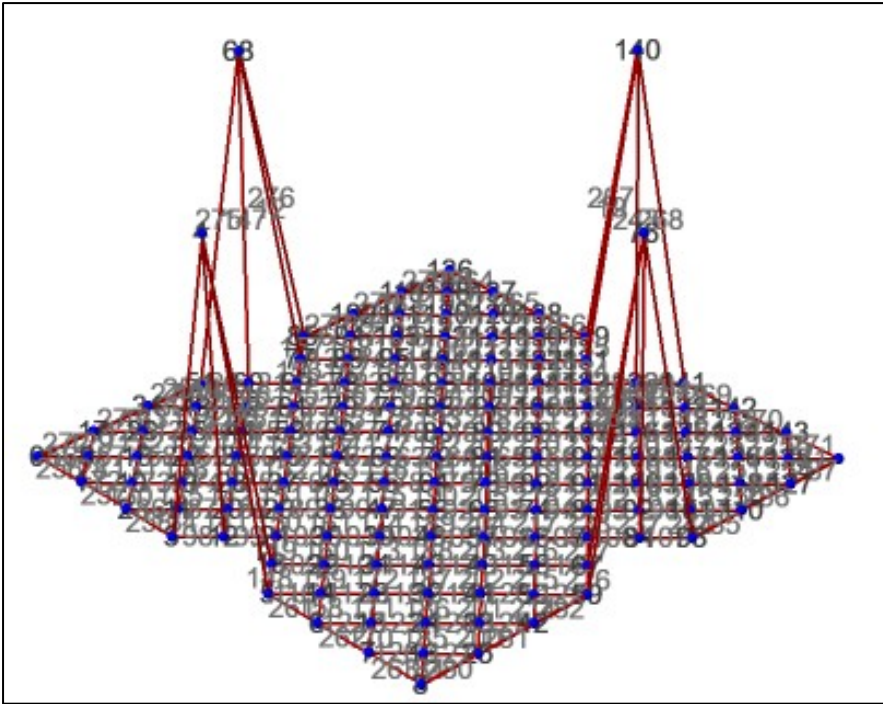
```

0 : [119, 128]
1 : [128, 137]
2 : [102, 111]
3 : [111, 120]
4 : [120, 129]
5 : [129, 138]
6 : [85, 94]
7 : [94, 103]
8 : [103, 112]
9 : [112, 121]
10 : [121, 130]
11 : [130, 139]
12 : [68, 77]
13 : [77, 86]
14 : [86, 95]
15 : [95, 104]

```

16 : [104, 113]
17 : [113, 122]
18 : [122, 131]
19 : [131, 140]
20 : [51, 60]
21 : [60, 69]
22 : [69, 78]
23 : [78, 87]
24 : [87, 96]
25 : [96, 105]
26 : [105, 114]
27 : [114, 123]
28 : [123, 132]
29 : [132, 141]
30 : [34, 43]
31 : [43, 52]
32 : [52, 61]
33 : [61, 70]
34 : [70, 79]
35 : [79, 88]
36 : [88, 97]
37 : [97, 106]
38 : [106, 115]
39 : [115, 124]
40 : [124, 133]
41 : [133, 142]
42 : [17, 26]
43 : [26, 35]
44 : [35, 44]
45 : [44, 53]
46 : [53, 62]
47 : [62, 71]
48 : [71, 80]
49 : [80, 89]
50 : [89, 98]
51 : [98, 107]
52 : [107, 116]
53 : [116, 125]
54 : [125, 134]
55 : [134, 143]
56 : [0, 9]
57 : [9, 18]
58 : [18, 27]

...



supps = [0, 4, 8, 68, 76, 136, 140, 144]

Pripadnost elemenata kablovima:

tcei = table_of_cable_element_incidences (cbls)
print_indexed (tcei)

```

0 : [0, 1]
1 : [2, 3, 4, 5]
2 : [6, 7, 8, 9, 10, 11]
3 : [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]
4 : [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]
5 : [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
6 : [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]
7 : [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69,
70, 71]
8 : [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85]
9 : [86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97]
10 : [98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107]
11 : [108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115]
12 : [116, 117, 118, 119, 120, 121]
13 : [122, 123, 124, 125]
14 : [126, 127]
15 : [128, 129]
16 : [130, 131, 132, 133]
17 : [134, 135, 136, 137, 138, 139]
18 : [140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147]
19 : [148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157]

```

```

20 : [158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168,
169]
21 : [170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180,
181, 182,
183]
22 : [184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194,
195, 196,
197, 198, 199]
23 : [200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210,
211, 212,
213]
24 : [214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224,
225]
25 : [226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235]
26 : [236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243]
27 : [244, 245, 246, 247, 248, 249]
28 : [250, 251, 252, 253]
29 : [254, 255]
30 : [256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263]
31 : [264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271]
32 : [272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279]
33 : [280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287]

```

Rubni kablovi i elementi:

```
bnd_cbls = [30, 31, 32, 33]
```

```
int_cbls = others (bnd_cbls, all_of (cbls))
```

```
int_cbls; bnd_cbls
```

```
beis = select_elements_on_cables (bnd_cbls, tcei)
```

```
beis
```

Zadajemo gustoće sila 10 u rubnim kablovima i 1 u unutrašnjim kablovima:

```
cbl_qs = value_list (len (cbls), 1)
```

```
print_indexed (cbl_qs)
```

```
qs = map_cable_values_to_elements (cbl_qs, tcei)
```

```
print_indexed (qs)
```

```
cbl_qs = set_value (10, bnd_cbls, cbl_qs)
```

```
print_indexed (cbl_qs)
```

```
qs = map_cable_values_to_elements (cbl_qs, tcei)
```

```
print_indexed (qs)
```


Gustoća sila za navedene parametre:

nc = FDM (nds, els, supps, qs)

print_indexed (list (nc))

```
0 : (0.0, 0.0, 0.0)
1 : (1.0065737706391684, 0.13448223394224673,
1.3015154548694132)
2 : (2.0066253714984144, 0.1790428885197906,
2.5327009515106322)
3 : (3.00386024658946, 0.1355604379940746, 3.744948542699902)
4 : (4.0, 0.0, 5.0)
5 : (4.996139753410541, 0.13556043799407458,
3.7449485426999014)
6 : (5.993374628501587, 0.17904288851979058,
2.5327009515106322)
7 : (6.993426229360833, 0.1344822339422467,
1.3015154548694132)
8 : (8.0, 0.0, 0.0)
9 : (0.5511409960861389, 0.5511409960861388,
1.156095868929298)
10 : (1.5272282429914246, 0.6170392654453833,
2.1502346230914675)
11 : (2.5141897576874093, 0.6214775626267967,
3.1045463344492923)
12 : (3.504481952296562, 0.5704231880449384,
3.9573120898422163)
13 : (4.495518047703441, 0.5704231880449384,
3.9573120898422163)
14 : (5.485810242312595, 0.6214775626267965,
3.104546334449292)
15 : (6.4727717570085765, 0.6170392654453831,
2.1502346230914666)
16 : (7.448859003913862, 0.5511409960861384,
1.1560958689292982)
17 : (0.13448223394224676, 1.0065737706391689,
1.3015154548694134)
18 : (1.0635079797631397, 1.0635079797631393,
2.0213525659783653)
19 : (2.032205850064975, 1.0911239595563564,
2.7453695200074573)
20 : (3.0140675625967863, 1.080182964436965,
3.3951663235791765)
21 : (4.0000000000000003, 1.0659493497487145,
3.6891334930897868)
22 : (4.985932437403219, 1.080182964436965,
3.395166323579175)
23 : (5.967794149935027, 1.0911239595563562,
2.7453695200074573)
```

24 : (6.93649202023686, 1.0635079797631395,
2.021352565978366)
25 : (7.865517766057752, 1.0065737706391678,
1.3015154548694126)
26 : (0.6170392654453833, 1.5272282429914241,
2.1502346230914666)
27 : (1.5586234145296123, 1.5586234145296114,
2.6288451488012305)
28 : (2.5287819850514532, 1.5673555956236336,
3.097851973687839)
29 : (3.5088165553517165, 1.5614755114524905,
3.4209548963373564)
30 : (4.491183444648289, 1.5614755114524905,
3.420954896337356)
31 : (5.471218014948551, 1.5673555956236338,
3.0978519736878387)
32 : (6.44137658547039, 1.558623414529612,
2.6288451488012328)
33 : (7.382960734554616, 1.5272282429914232,
2.150234623091467)
34 : (0.17904288851979067, 2.0066253714984152,
2.5327009515106327)
35 : (1.0911239595563564, 2.0322058500649733,
2.745369520007456)
36 : (2.0476558687339783, 2.0476558687339765,
3.003288989211646)
37 : (3.021198658810074, 2.050459589767235,
3.2475830619530743)
38 : (4.0000000000000002, 2.0493101418570467,
3.3519367067273875)
39 : (4.97880134118993, 2.0504595897672346,
3.247583061953073)
40 : (5.952344131266027, 2.047655868733978,
3.0032889892116486)
41 : (6.908876040443644, 2.032205850064974,
2.745369520007458)
42 : (7.8209571114802054, 2.006625371498413,
2.5327009515106313)
43 : (0.6214775626267964, 2.5141897576874075,
3.1045463344492905)
44 : (1.5673555956236334, 2.528781985051451,
3.0978519736878356)
45 : (2.5358624797312133, 2.5358624797312124,
3.1886068606696782)
46 : (3.5113336151059102, 2.5371447722616036,
3.2829185171174196)
47 : (4.488666384894092, 2.537144772261603,
3.282918517117419)
48 : (5.4641375202687925, 2.5358624797312124,
3.1886068606696805)

```

49 : (6.432644404376371, 2.5287819850514524,
3.0978519736878405)
50 : (7.378522437373202, 2.514189757687406,
3.104546334449291)
51 : (0.1355604379940746, 3.0038602465894595,
3.744948542699901)
52 : (1.080182964436965, 3.0140675625967828,
3.3951663235791743)
53 : (2.050459589767235, 3.0211986588100714,
3.2475830619530712)
54 : (3.024135801613566, 3.024135801613565,
3.255972329560922)
55 : (4.000000000000003, 3.0246735558085693,
3.2761819702282953)
56 : (4.975864198386439, 3.024135801613565,
3.255972329560923)
57 : (5.94954041023277, 3.0211986588100728,
3.2475830619530752)
58 : (6.919817035563037, 3.014067562596783,
3.3951663235791765)

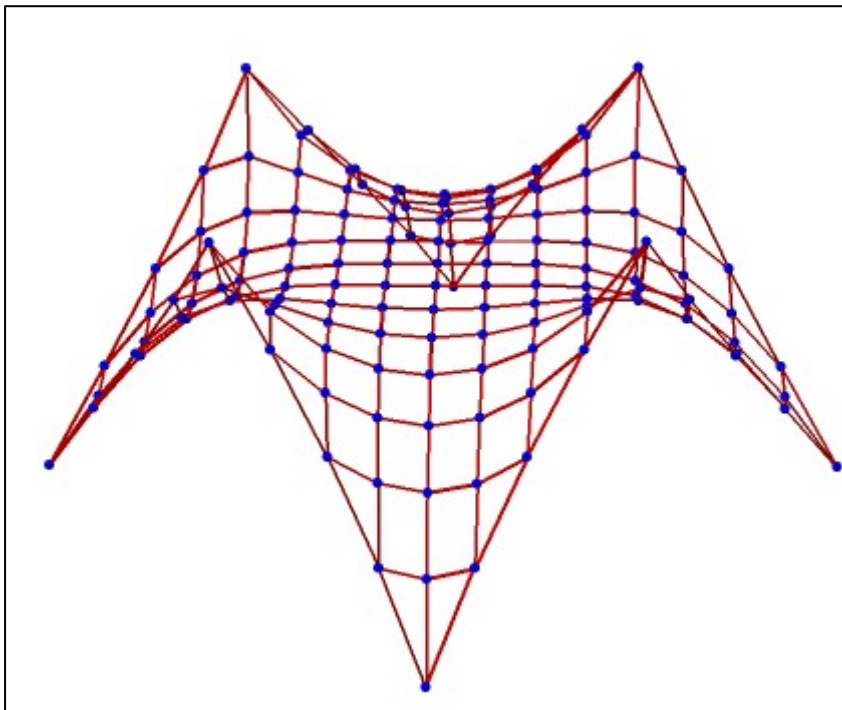
```

...

```

plt0 = plot3d_mesh (list (nc), els)
plt0

```



```

ll = list_of_element_lengths (els, nc)
print_indexed (ll)

```

0 : 0.634169056469
1 : 0.634169056469
2 : 0.753619881237
3 : 0.656491721226
4 : 0.656491721226
5 : 0.753619881237
6 : 0.941279782023
7 : 0.762813351606
8 : 0.675584186266
9 : 0.675584186266
10 : 0.762813351606
11 : 0.941279782023
12 : 1.28767962904
13 : 0.903531496839
14 : 0.749156250059
15 : 0.686376609585
16 : 0.686376609585
17 : 0.749156250059
18 : 0.903531496839
19 : 1.28767962904
20 : 0.6962944634
21 : 0.750335972941
22 : 0.747480510104
23 : 0.711993282855
24 : 0.688945110024
25 : 0.688945110024
26 : 0.711993282855
27 : 0.747480510104
28 : 0.750335972941
29 : 0.6962944634
30 : 0.883389602026
31 : 0.738070757836
32 : 0.690712771078
33 : 0.695706341365
34 : 0.693931533254
35 : 0.689382382401
36 : 0.689382382401
37 : 0.693931533254
38 : 0.695706341365
39 : 0.690712771078
40 : 0.738070757836
41 : 0.883389602026
42 : 1.10646581273
43 : 0.913205467769
44 : 0.773064233542
45 : 0.705891669129
46 : 0.691623695831
47 : 0.69030756303
48 : 0.689692869023
49 : 0.689692869023

```
50 : 0.69030756303
51 : 0.691623695831
52 : 0.705891669129
53 : 0.773064233542
54 : 0.913205467769
55 : 1.10646581273
56 : 1.39429926963
57 : 1.12858717152
58 : 0.926998287848
```

...

```
ff = list_of_element_forces (ll, qs)
print_indexed (ff)
```

```
0 : 0.634169056469
1 : 0.634169056469
2 : 0.753619881237
3 : 0.656491721226
4 : 0.656491721226
5 : 0.753619881237
6 : 0.941279782023
7 : 0.762813351606
8 : 0.675584186266
9 : 0.675584186266
10 : 0.762813351606
11 : 0.941279782023
12 : 1.28767962904
13 : 0.903531496839
14 : 0.749156250059
15 : 0.686376609585
16 : 0.686376609585
17 : 0.749156250059
18 : 0.903531496839
19 : 1.28767962904
20 : 0.6962944634
21 : 0.750335972941
22 : 0.747480510104
23 : 0.711993282855
24 : 0.688945110024
25 : 0.688945110024
26 : 0.711993282855
27 : 0.747480510104
28 : 0.750335972941
29 : 0.6962944634
30 : 0.883389602026
31 : 0.738070757836
32 : 0.690712771078
33 : 0.695706341365
34 : 0.693931533254
```

```

35 : 0.689382382401
36 : 0.689382382401
37 : 0.693931533254
38 : 0.695706341365
39 : 0.690712771078
40 : 0.738070757836
41 : 0.883389602026
42 : 1.10646581273
43 : 0.913205467769
44 : 0.773064233542
45 : 0.705891669129
46 : 0.691623695831
47 : 0.69030756303
48 : 0.689692869023
49 : 0.689692869023
50 : 0.69030756303
51 : 0.691623695831
52 : 0.705891669129
53 : 0.773064233542
54 : 0.913205467769
55 : 1.10646581273
56 : 1.39429926963
57 : 1.12858717152
58 : 0.926998287848

```

...

Sile u kablovima nisu uravnotežene, dobili smo osnovni oblik mreže. Slijedi iterativni postupak. Najprije fiksiranje duljina da spriječimo klizanje:

```

ll = list_of_element_lengths (els, nc)
bels = get_values (beis, ll)
bels

```

```

length_constraints = element_constraints (beis, bels)
length_constraints

```

Jedinične unutrašnje sile:

```

ieis = select_elements_on_cables (int_cbls, tcei)
fs1 = value_list (len (ieis), 1)
force_constraints1 = element_constraints (ieis, fs1)
force_constraints1

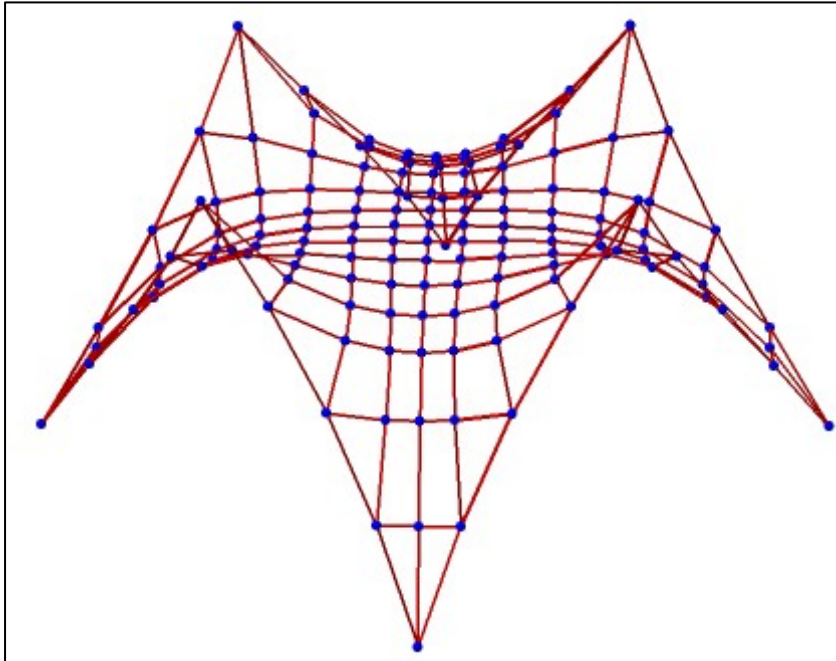
force_constraints = element_constraints (ieis, [1.]*len(ieis))

```

Provodimo iterativni postupak kroz 10 koraka i dobivamo mrežu:

```
nc1, f1, qs1 = multistepFDM (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints, steps = 10)
```

```
plt1 = plot3d_mesh (list (nc1), els)  
plt1
```



```
print_indexed (f1)
```

```
0 : 0.998925531878  
1 : 0.998925531878  
2 : 1.00713658761  
3 : 0.986513292814  
4 : 0.986513292814  
5 : 1.00713658761  
6 : 1.00620319429  
7 : 0.999736936056  
8 : 0.981751059145  
9 : 0.981751059145  
10 : 0.999736936056  
11 : 1.00620319429  
12 : 1.00098424855  
13 : 1.00880054406  
14 : 0.996293999371  
15 : 0.9801027477  
16 : 0.9801027477  
17 : 0.996293999371  
18 : 1.00880054406  
19 : 1.00098424855  
20 : 1.00180765476
```

```
21 : 1.00489861652
22 : 1.01037152072
23 : 0.993731624184
24 : 0.97972364506
25 : 0.97972364506
26 : 0.993731624184
27 : 1.01037152072
28 : 1.00489861652
29 : 1.00180765476
30 : 1.0037303529
31 : 0.994940081154
32 : 1.0080949193
33 : 1.01055840488
34 : 0.992709376662
35 : 0.979465629064
36 : 0.979465629064
37 : 0.992709376662
38 : 1.01055840488
39 : 1.0080949193
40 : 0.994940081154
41 : 1.0037303529
42 : 0.999195315193
43 : 1.00469715872
44 : 0.992203385369
45 : 1.01077226375
46 : 1.01174952438
47 : 0.992350523221
48 : 0.978704744125
49 : 0.978704744125
50 : 0.992350523221
51 : 1.01174952438
52 : 1.01077226375
53 : 0.992203385369
54 : 1.00469715872
55 : 0.999195315193
56 : 0.999815637636
57 : 0.998865434955
58 : 1.00548705702
```

...

Kao što vidimo, sile u štapovima nakon 10. koraka iteracije su približno u ravnoteži. Postupak možemo iterirati do željene točnosti. Zahtjevamo li točnost rezultata unutar granica 1×10^{-2} , postupak ćemo morati iterirati 29 puta:

```
nc2, f2 = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints, tol_f = 1.e-2)
```

```
steps: 29
maximal force error: 0.00995725116958
```


Ukoliko želimo točnost rezultata unutar 1×10^{-3} , trebat ćemo raditi više od 250 iteracija. Zaustavljamo se na 250. iteraciji i bilježimo rezultat:

```
steps: 250
maximal force error: 0.000994781959471
WARNING: maximal number of steps (250) reached !
maximal force error: 0.000994781959471
```

print_indexed (f2)

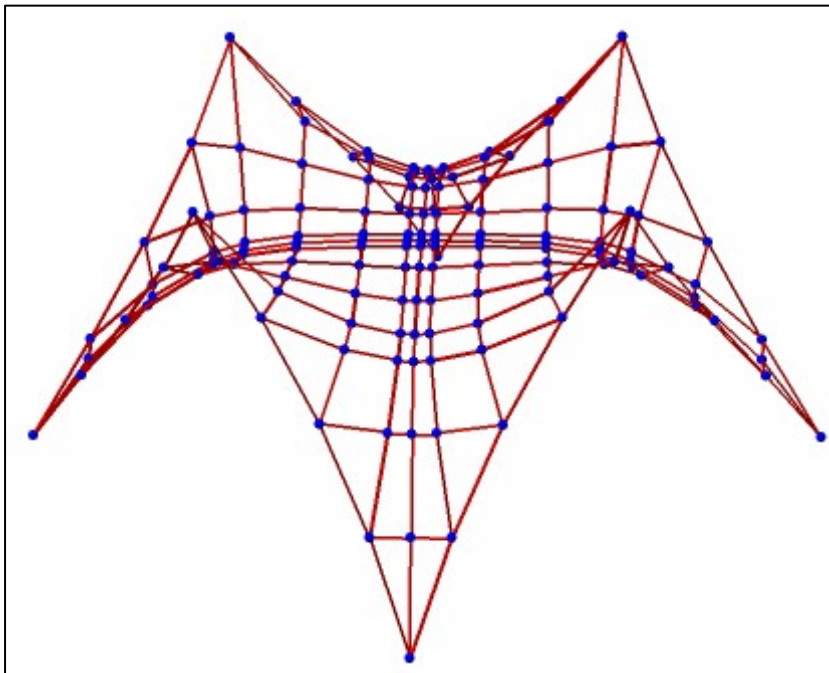
```
0 : 0.999994978031
1 : 0.999994978031
2 : 1.00007117768
3 : 0.999800242177
4 : 0.999800242177
5 : 1.00007117768
6 : 0.999987081456
7 : 1.0001761731
8 : 0.999491563862
9 : 0.999491563862
10 : 1.0001761731
11 : 0.999987081456
12 : 1.00000038889
13 : 0.99997910167
14 : 1.00022428025
15 : 0.999341026935
16 : 0.999341026935
17 : 1.00022428025
18 : 0.99997910167
19 : 1.00000038889
20 : 0.99999917763
21 : 1.00000449671
22 : 0.999968728858
23 : 1.00028482774
24 : 0.999173690141
25 : 0.999173690141
26 : 1.00028482774
27 : 0.999968728858
28 : 1.00000449671
29 : 0.99999917763
30 : 0.999998337676
31 : 0.999998883022
32 : 1.0000100396
33 : 0.999959225279
34 : 1.00033913192
35 : 0.999053933903
36 : 0.999053933903
37 : 1.00033913192
38 : 0.999959225279
39 : 1.0000100396
```

```
40 : 0.999998883022
41 : 0.999998337676
42 : 1.00000559478
43 : 1.00000151544
44 : 0.999985073194
45 : 1.00000332822
46 : 0.999950924735
47 : 1.00035970594
48 : 0.999010516946
49 : 0.999010516946
50 : 1.00035970594
51 : 0.999950924735
52 : 1.00000332822
53 : 0.999985073194
54 : 1.00000151544
55 : 1.00000559478
56 : 0.99999967949
57 : 0.999999415128
58 : 0.999999450527
```

...

Proračunata mreža biti će oblika:

```
plt2 = plot3d_mesh (list (nc2), els)  
plt2
```



6. Zaključak završnog rada

Prednapete konstrukcije od užadi bitno se razlikuju od konvencionalnih konstrukcija kojima je dobro poznat oblik i dimenzije. Za razliku od takvih uobičajenih konstrukcija kod kojih je smisao inženjera najčešće “servisna” usluga projektiranja konstrukcije na proračunska djelovanja, a arhitekonski dio osmišljavanje izgleda i estetika same konstrukcije, kod konstrukcija od užadi inženjer obavlja posao obojice. Naime, za proračun konstrukcija od užadi izgled ne može biti sam po sebi zadan već se on aproksimira početnim modelima koji se onda različitim postupcima oblikuju i proračunavaju do zadovoljavajućeg rješenja.

Pojam konstrukcija od užadi je golem te se u ovom radu autor ograničio na prednapete konstrukcije od užadi koje se najčešće koriste za membrane pokrova, odnosno nalaženje oblika istih. Kroz rad je prikazana kratka povijest i razvoj konstrukcija od užadi, navedene su osnovne karakteristike ovakvih konstrukcija i suvremeni materijali koji se koriste u konstrukterstvu. Osim opisnog dijela rada, navedene su i osnove matematičkih postupaka za nalaženje oblika te je prikazana primjena najpoznatijih metoda nalaženja. Postupci opisani u ovom radu su Newton – Raphsonov postupak i metoda gustoća sila. Uz opise postupaka, nalaze se i numerički primjeri nalaženja oblika. Kod oba postupka navedene su njihove mane i prednosti. U Newtonovoj metodi pokazali smo koliko je bitno znati točno ono što se traži kako ne bismo tražili krivo rješenje. Također je pokazan utjecaj izbora početne aproksimacije na brzinu konvergiranja prema rješenju. Pomoću programskog paketa prikazana su neka rješenja oblika. Metodu gustoća sila pokazali smo na dva primjera, a bitno je bilo pokazati utjecaj kinematičkih ograničenja kablova kako čvorovi na kabelima ne bi otklizali u jednu točku. Oba postupka odlikuju se jednostavnošću i brzinom. Prednost metode gustoća sila u odnosu na Newtonov postupak je ravnotežna konfiguracija u svakom koraku iteracije.

Razvoj ovakvih konstrukcija eksponencijalno raste od druge polovice XX. stoljeća. U budućnosti se očekuje daljnji razvitak i primjena ovakvih konstrukcija, pogotovo s obzirom na razvoj računalnih softwarea i gospodarsku moć koja stvara uvjete velike potražnje za ovakvim konstrukcija koje se odlikuju lakoćom i estetikom.

7. Literatura

1. H. Berger: *Light Structures, Structures of Light. The Art and Engineering of Tensile Architecture*, Birkhäuser, Basel, 1996.
2. H. A. Buchholdt: *An Introduction to Cable Roof Structures - Second Edition*, Thomas Telford Ltd
3. Wanda J. Lewis: *Tension Structures: Form and Behaviour*, Thomas Telford Ltd
4. 2. Poglavlje – Elementi transportnih uređaja, prof. dr. sc. Zvonko Herold
5. Vilnay, O. (1990), *Cable nets and tensegric shells*. Ellis Horwood
6. Pfeiffer catalogue. Seilbauwerke. Lightweight Cable Structures. Pfeifer Seilund Hebetchnik GmbH & Co
7. Gimsin, N.J. (1983). *Cable Supported Bridges*. John Wiley & Sons.
8. Ljudmila Koprivec, univ. dipl. ing. arh.; doc. dr. sc. Martina Zbašnik-Senegačnik, univ. dipl. ing. arh., prof. dr. sc. Jože Kušar, univ. dipl. ing. arh.: *Uporaba tehničkih tekstila u visokogradnji*, Časopis Građevinar br. 58 (2006)
9. Miriam Euni Son: *The Design and Analysis of Tension Fabric Structure*, master thesis, Massachusetts institute of technology, June 2007
10. IFAI: *Tension structure connection details*, Fabric Architecture, January 2010
11. Prof. David P. Billington: *The Tower and the Bridge*, 1983
12. GS_program_FDM_(v1.2) i GS_program_FDM_(v1.1)

8. Izvori na internetu

13. The history of tensile architecture, <http://redskyselters.com/the-history-of-tensile-architecture/> (pristupljeno 6.9.2018.)
14. K. Fresl: *Građevna statika 2. Predavanja*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017., <http://www.grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf> (pristupljeno 6.9.2018.)
15. Uže, <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=63589> (pristupljeno 6.9.2018.)
16. Birdair Tensile Roofing Structure Remains Intact 35 Years Later, http://www.birdair.com/sites/default/files/press-releases/2009-01-26_LaVerne.pdf (pristupljeno 6.9.2018.)
17. Finite element analysis for minimal shape, <http://www.arcaro.org/tension/>

9. Reference

18. Slika 1. Otto Frei, krovna konstrukcija Olimpijskog stadiona u Münchenu, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e9/2014_Olympiastadion_Munich.jpg/1280px-2014_Olympiastadion_Munich.jpg (pristupljeno 7.5.2018.)
19. Slika 2. Horst Berger, krovna konstrukcija Zračne luke Denver, <https://www.flickr.com/photos/cellphonesusie/1484521335> (pristupljeno 7.5.2018.)
20. Slika 3., Photo credit: NC Department of Agriculture & Consumer Services
21. Slika 4., Photo credit: Peter Kneen, <http://www.lsa.org/index.php/lsa-events/past-events/2016-conference-and-awards/299-frei-otto-cablenet-structures> (pristupljeno 7.5.2018.)
22. Slika 5. Photo credit: <https://www.slideshare.net/regulationarrute/wire-rope-17759747> (pristupljeno 7.5.2018.)
23. Slika 6. Photo credit: Enciklopedija Leksikografskog zavoda Miroslav Krleža, <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=63589> (pristupljeno 7.5.2018.)
24. Slika 7. Photo credit: By Markus Unger from Vienna, Austria - 2011-10-29_VfB-Stuttgart4Uploaded by Kafuffle, CC BY 2.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17217652> (pristupljeno 7.5.2018.)
25. Slika 8. Photo credit: Yoshito Isono, Image ID: 52743, URL: <https://structurae.net/photos/52743-university-of-la-verne-campus-center> (pristupljeno 7.5.2018.)
26. Slika 9. Photo credit: By Tobias Alt, Tobi 87 - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3905548>, (pristupljeno 7.5.2018.)
Odrezana je gornja i donja strana slike radi bolje naglašenost ETFE tkanine
27. Slika 10. i slika 11., Photo credit: prof. dr. sc. Fresl, *Građevna statika 2. Predavanja, Slika 114*, <http://www.grad.hr/nastava/g2/g2/g2.pdf> (pristupljeno 7.5.2018.)
28. Slika 12., Photo credit: prof. dr. sc. Fresl, *Građevna statika 2. Predavanja, Slika 140*, <http://www.grad.hr/nastava/g2/g2/g2.pdf> (pristupljeno 7.5.2018.)
29. Slika 13., Photo credit: prof. dr. sc. Fresl, *Građevna statika 2. Predavanja, Slika 141*, <http://www.grad.hr/nastava/g2/g2/g2.pdf> (pristupljeno 7.5.2018.)
30. Slika 14., Photo credit: prof. dr. sc. Fresl, *Građevna statika 2. Predavanja, Slika 111*, <http://www.grad.hr/nastava/g2/g2/g2.pdf> (pristupljeno 7.5.2018.)
31. Slika 15., Photo credit: By Blinking Spirit - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=752100> (pristupljeno 7.5.2018.)

32. Slika 16. Photo credit: prof. dr. sc. Fresl, *Građevna statika 2. Predavanja, Slika 110*, <http://www.grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf> (pristupljeno 7.5.2018.)
33. Slike 17., 18. i 19., Photo credit: prof. dr. sc. Fresl, *Građevna statika 2. Predavanja, Slika 114*, <http://www.grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf> (pristupljeno 7.5.2018.)