

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

**NALAŽENJE OBLIKA KONSTRUKCIJA
OD UŽADI**

ZAVRŠNI RAD IZ PREDMETA
GRAĐEVNA STATIKA 1

Student: Josip Jolić, 0082043236

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 11. rujna 2012.

Sadržaj:

1. Uvod o konstrukcijama od užadi.....	2
2. Vlačne konstrukcije od užadi	5
2.1. Pravčaste mreže	5
2.2. Regularne mreže od užadi	5
2.3. Neregularne mreže od užadi	6
2.4. Lančanice.....	7
3. Traženje oblika konstrukcija od užadi	14
3.1. Uvjeti ravnoteže čvora	14
3.2. Traženje sustava simultanih jednažbi.....	18
3.2.1. Metoda gustoće sila	19
3.2.2. Poopćeno pravilo geodetske mreže	19
4. Rješavanje sustava nelinearnih jednažbi.....	21
5. Primjeri.....	25
6. Zaključak.....	45
Literatura.....	46

1. Uvod o konstrukcijama od užadi

Danas je u svijetu vrlo rasprostranjena primjena konstrukcija od užadi, najčešće u krovnim konstrukcijama, visećim mostovima, izložbenim paviljonima itd. Razvoj takvih konstrukcija uvelike možemo zahvaliti istraživanjima u području teorije konstrukcija te razvoju informatičke tehnologije koja nam omogućuje izradu i usporedbu mnogih varijantnih rješenja prije odabira konačnog geometrijskog oblika konstrukcije.

Početak primjene konstrukcija od užadi seže u vremena nomadskih naroda, koji su kao privremene nastambe upotrebljavali šatore sastavljene od užadi, stupova i životinjske kože. Uvidjeli su da je brza i jednostavna montaža i demontaža jedna od velikih prednosti ovakvih konstrukcija. Ljudi su u prošlosti pomoću užeta premošćivali potoke, rijeke i druge prepreke. Iz tog, primitivnog načina razvili su se prvi viseći mostovi, napravljeni od dva paralelna užeta i drvenih dasaka.



Slika 1.1. Stari nomadski šatori

Danas se zahvaljujući konstrukcijama od užadi premošćuju rekordno veliki rasponi. Trenutno, najveći viseći most na svijetu je Akashi Kaikyo, sagrađen 1998. godine u Japanu, te premošćuje raspon od 1991 m. No, očekuje se da će i taj rekord ubrzo biti srušen. Naime, u Italiji je u tijeku gradnja visećeg mosta koji će spajati Siciliju s kopnom, čiji će raspon biti nevjerovatnih 4,83 km. Kao najpoznatije svjetske konstrukcije od užadi izdvojio bih: Olimpijski kompleks u Münchenu i The Millennium Dome u Londonu.



Slika 1.2. Akashi Kaikyo most, Japan

Zajedničko djelovanje čvrste konstrukcije i užeta važno je zbog međudjelovanja konstrukcije i užeta. Uže, koji je nelinearna tvorevina, ako povezuje dvije točke unutar konstrukcije (npr. gredu i pilon) ponašanje cijelog sklopa čini nelinearnim. Pri proračunu visećih mostova posebno je bitna modalna analiza užeta. Naime, ako se vlastita frekvencija užeta podudara s vlastitom frekvencijom kolničke konstrukcije mosta, može doći do pojave rezonancije. Takav slučaj se dogodio na mostu Tacoma Narrows Bridge u Washingtonu 1940. godine. Vjetar odgovarajućeg smjera i brzine pobudio je most na gibanje te kako je frekvencija gibanja bila u blizini rezonantne frekvencije mosta, amplituda gibanja postajala je iz sata u sat sve veća te konstrukcija mosta naposljetku nije izdržala i most se srušio.

Užad pripada u konstrukcijske elemente kojima je jedna dimenzija (duljina kabela) znatno veća od preostalih dviju. Zbog izuzetno male fleksijske krutosti, pretpostavljamo da užad ne može preuzeti momente savijanja. Isto tako, užad se odlikuje i svojstvom male poprečne krutosti, koja im onemogućava preuzimanje poprečnih sila. Dakle, užad ima mogućnost preuzimanja samo uzdužnih sila, pozitivnog predznaka (vlačne sile).



Slika 1.3. The Millennium Dome, London, UK

2. Vlačne konstrukcije od užadi

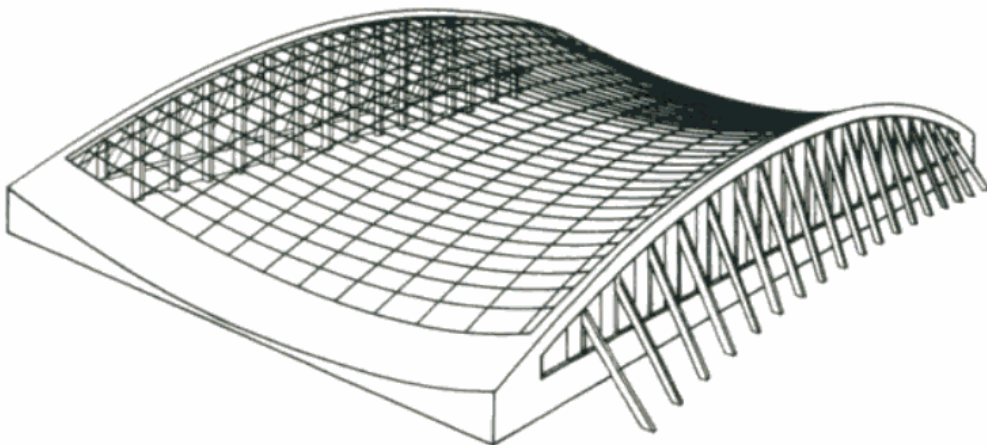
2.1. Pravčaste mreže

Pravčasta mreža je konstrukcija kod koje svako uže cijelom svojom duljinom leži na pravcu, te je svako za sebe u ravnoteži. Kod takvog tipa mreže nije potrebno provođenje postupka "nalaženja oblika", već se oblik mreže određuje neposredno geometrijski iz poznatih rubnih uvjeta. Kako svako uže leži na najkraćoj spojnici svojih rubnih točaka, pravčasta mreža je ujedno i geodetska (o kojoj će biti govora kasnije).

Za razliku od ostalih mreža, one ne mogu izgubiti prednapon pod djelovanjem poprečnog opterećenja iz razloga što se poprečnim pomakom užad može samo produljiti i dodatno nategnuti. Prednapon bi se eventualno mogao izgubiti djelovanjem dovoljno velike uzdužne sile, ali u realnim je okolnostima vjerojatnost takvog opterećenja zanemarivo mala. Najjednostavniji oblik pravčaste mreže je ravninska mreža (kada sva užad leži u istoj ravnini), no takav oblik nije pogodan za nosive konstrukcije, te se kao i ostale pravčaste mreže rijetko primjenjuje u građevinarstvu.

2.2. Regularne mreže od užadi

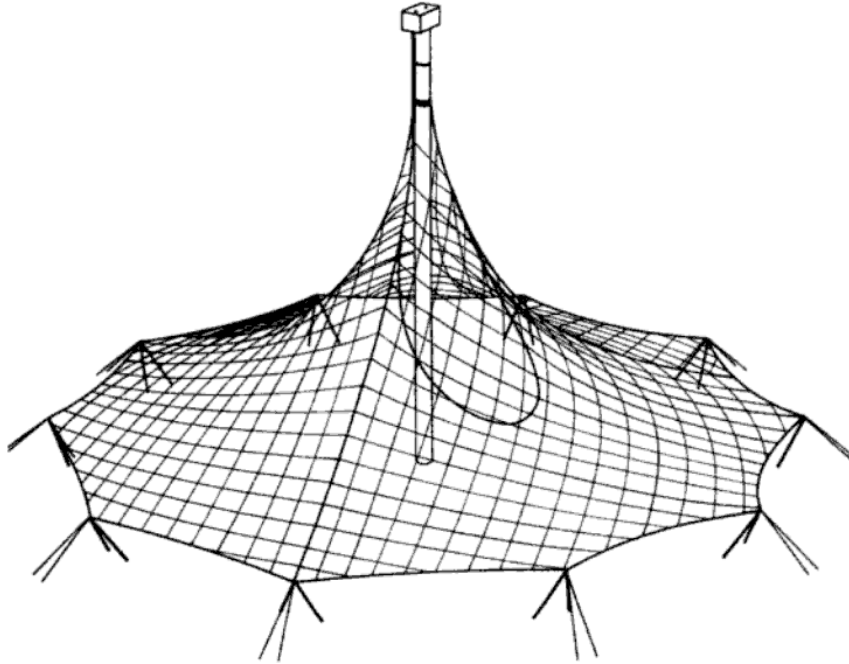
Regularna mreža od užadi je sustav dviju familija užadi, sedlastog oblika. Na mjestima kontakta dviju familija nastaju dvije uravnotežene sile kojima kablovi međusobno djeluju jedan na drugi. Pri djelovanju vertikalnog opterećenja sile se u konkavnoj (nosivoj) užadi povećavaju, dok se u konveksnoj (prednaponskoj) užadi smanjuju.



Slika 2.1. Regularna mreža od užadi: Hakametsä Stadion, Tampere, Finska

2.3. Neregularne mreže od užadi

Neregularne mreže od užadi su složenijeg oblika, te njihovo ponašanje nije tako jednostavno. Za razliku od regularnih mreža, kod neregularnih mogu postojati više od dvije familije užadi, isto tako uže može na jednom dijelu biti konkavno, a na drugom konveksno, uže može biti prekinuto u nekom svom čvoru, a može se dogoditi da unutar mreže postoje i kruti elementi.



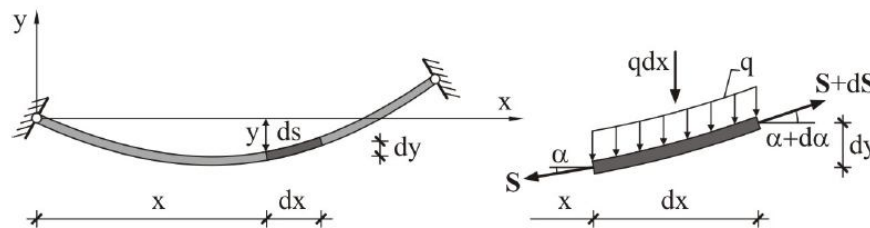
Slika 2.2. Neregularna mreža od užadi: Institut za lagane konstrukcije, Stuttgart, Njemačka

2.4. Lančanica

Nit duljine L ovješena o dvije nepomične točke na horizontalnom razmaku l i opterećena vertikalnim raspodijeljenim opterećenjem po cijeloj duljini u ravnotežnom položaju zauzima zakrivljeni oblik koji nazivamo lančanica.

Uobičajeno je užad prikazati modelom lančanice opterećene vlastitom težinom. Uvođenjem modela lančanice moguće je razviti teorijsku podlogu za statičku i dinamičku analizu užadi različitih fizikalnih i geometrijskih karakteristika.

Diferencijalna jednadžba lančanice



Slika 2.3. Shematski prikaz lančanice

Uvjeti ravnoteže na diferencijalnom elementu su

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -S \cos \alpha + (S + dS) \cos(\alpha + d\alpha) = 0, \\ \sum F_y &= -S \sin \alpha - q dx + (S + dS) \sin(\alpha + d\alpha) = 0, \\ \sum M_{x+dx} &= -S \cos \alpha dy + S \sin \alpha dx - q dx \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ako primijenimo trigonometrijske transformacije za sinus i kosinus zbroja dva kuta u prve dvije jednadžbe, dobivamo

$$\begin{aligned} (S + dS)(\cos \alpha \cos d\alpha - \sin \alpha \sin d\alpha) &= S \cos \alpha, \\ (S + dS)(\sin \alpha \cos d\alpha + \cos \alpha \sin d\alpha) &= S \sin \alpha + q dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Za diferencijalno mali kut $d\alpha$ vrijedi: $\sin d\alpha = d\alpha$, $\cos d\alpha = 1$, pa slijedi

$$\begin{aligned} (S + dS)(\cos \alpha - \sin \alpha d\alpha) &= S \cos \alpha, \\ (S + dS)(\sin \alpha + \cos \alpha d\alpha) &= S \sin \alpha + q dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Zanemarivanjem diferencijalnih veličina drugog reda, poput $dS \cos \alpha d\alpha$, dobivamo

$$\begin{aligned} -S \sin \alpha d\alpha + dS \cos \alpha &= 0, \\ S \cos \alpha d\alpha + dS \sin \alpha &= q dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Jednadžbe (4) se mogu prikazati kao totalni diferencijali u obliku

$$\begin{aligned} d(S \cos \alpha) &= 0, \\ d(S \sin \alpha) &= q dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Iz $d(S \cos \alpha) = 0$ slijedi $S \cos \alpha = konst. = H$. (2.6)

Iz jednadžbe (2.6) vidimo da je horizontalna komponenta sile u proizvoljnom presjeku lančanice uvijek jednaka.

Sila u proizvoljnom presjeku lančanice je

$$S = \frac{H}{\cos \alpha}, \quad (2.7)$$

pa ako je uvrstimo u drugu jednadžbu u (2.5), dobivamo

$$d(H \operatorname{tg} \alpha) = q dx. \quad (2.8)$$

Zanemarivanjem diferencijalno male veličine drugog reda $\frac{dx^2}{2}$ u jednadžbi

$$\sum M_{x+dx} = -S \cos \alpha dy + S \sin \alpha dx - q dx \frac{dx}{2} = 0,$$

dobivamo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$. (2.9)

Uvrštavanjem izraza (2.9) u (2.8), dobivamo

$$d\left(H \frac{dy}{dx}\right) = q dx. \quad (2.10)$$

Slijedi diferencijalna jednadžba lančanice

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \quad (2.11)$$

Rješenje jednadžbe je funkcija $y = f(x)$ koja određuje položaj lančanice. Ona zadovoljava jednadžbu i rubne uvjete.

Prvom integracijom diferencijalne jednadžbe lančanice dobivamo nagib tangente na lančanicu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \quad / \int$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int_0^x q dx + C_1, \quad (2.12)$$

dok ponovnom integracijom funkcije dobivamo funkciju položaja lančanice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int_0^x q dx + C_1 \quad / \int$$

$$y = \frac{1}{H} \int_0^x \int_0^x q dx dx + C_1 x + C_2, \quad (2.13)$$

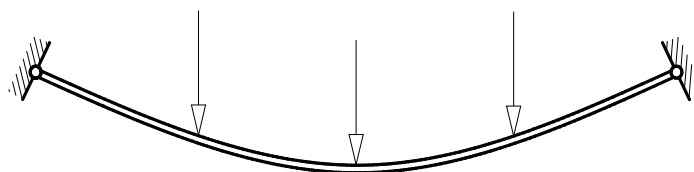
gdje su C_1 i C_2 konstante integracije koje se mogu odrediti iz rubnih uvjeta.

Rubni uvjeti nisu dovoljni za određivanje položaja lančanice (ostaje nepoznanica H), stoga je potreban dodatni uvjet:

- koordinate točke kojom prolazi lančanica,
- iznos sile u nekom presjeku,
- duljina lančanice L .

Mrežaste vlačne konstrukcije možemo opisati kao sustav lančanica. Vlastita težina užeta je zanemarivo mala u usporedbi s kontaktnim silama od međudjelovanja s ostalom užadi, te je stoga ne uvodimo u proračun. Dakle, mrežaste konstrukcije promatramo kao sustav lančanica opterećenih koncentriranim silama, te imamo nekoliko karakterističnih slučajeva:

- 1.) *Koncentrirane sile djeluju paralelno s osi y na zadanim pravcima, a projekcija je sile u užetu na os x zadana*



Slika 2.4. Shematski prikaz lančanice opterećene koncentriranim silama

Da bismo dobili ordinate čvorova y_i postavljamo uvjete ravnoteže.

Uvjet ravnoteže $\sum X = 0$ je unaprijed zadovoljen, jer pretpostavljamo vanjske vertikalne sile, a horizontalna komponenta sile u lančanici je konstantna.

Iz uvjeta ravnoteže $\sum Y = 0$ za i -ti čvor dobivamo

$$H \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta_i} + \frac{y_i - y_{i+1}}{\Delta_{i+1}} \right) = P_i, \quad (2.14)$$

pa ako preoblikujemo, dobivamo

$$-\frac{H}{\Delta_i} y_{i-1} + \left(\frac{H}{\Delta_i} + \frac{H}{\Delta_{i+1}} \right) y_i - \frac{H}{\Delta_{i+1}} y_{i+1} = P_i, \quad (2.15)$$

gdje su : H - horizontalna projekcija sile,

y_i - ordinata i -tog čvora,

Δ_i - razmak apscisa između čvora i i čvora $i-1$,

P_i - sila u i -tom čvoru.

Ako sustav linearnih jednadžbi (2.15) zapišemo u matričnom obliku, dobivamo

$$H \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} & -\frac{1}{\Delta_2} & & & \\ -\frac{1}{\Delta_2} & \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_3} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{\Delta_{n-1}} & \frac{1}{\Delta_{n-1}} + \frac{1}{\Delta_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{H}{\Delta_1} y_0 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} + \frac{H}{\Delta_n} y_n \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Rješavanjem sustava (2.16) određujemo ordinate čvorova y_i .

U ovom slučaju pretpostavka nerastezljivosti užeta ne utječe na rješenje, jer se ne zadovoljavaju uvjeti kompatibilnosti, nego samo uvjeti ravnoteže.

2.) *Koncentrirane sile djeluju vertikalno na zadanim pravcima, a duljina užeta je zadana*

a) Nerastezljivo uže

Kod ovog slučaja sila H nije poznata, pa sustav (2.16) ima dodatnu nepoznanicu, međutim imamo i dodatnu nelinearnu jednadžbu kojom izražavamo duljinu užeta:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = L. \quad (2.17)$$

Duljina L se, naravno, mora zadati većom od udaljenosti između ležajeva.

Sustav jednadžbi (2.16) i (2.17) možemo riješiti iteracijski, tako da pretpostavimo iznos sile H , pa riješimo sustav (2.16). Zatim iz poznatih koordinata čvorova izračunamo duljinu užeta kao zbroj duljina odsječaka. Ako je dobivena duljina veća od zadane, pretpostavljena je premala sila H , pa se postupak ponovno provodi s većom silom, ako je dobivena duljina manja od zadane, pretpostavili smo preveliku silu H , pa postupak ponovno provodimo s manjom silom.

Opisani postupak možemo i pojednostaviti. Uočimo da vertikalne projekcije sile ne ovise o horizontalnoj projekciji sile. Uvedemo nove nepoznanice $Y_i = H \cdot y_i$, pa se sustav (2.15) može zapisati u obliku

$$-\frac{1}{\Delta_i} Y_{i-1} + \left(\frac{1}{\Delta_i} + \frac{1}{\Delta_{i+1}} \right) Y_i - \frac{1}{\Delta_{i+1}} Y_{i+1} = P_i, \quad (2.18)$$

Ako sustav (2.18) zapišemo u matričnom obliku, dobivamo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} & -\frac{1}{\Delta_2} & & & & \\ -\frac{1}{\Delta_2} & \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_3} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -\frac{1}{\Delta_{n-1}} & \frac{1}{\Delta_{n-1}} + \frac{1}{\Delta_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{1}{\Delta_1} y_0 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} + \frac{1}{\Delta_n} y_n \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

b) Rastezljivo uže

Pretpostavlja se da je materijal užeta homogen, a poprečni presjek konstantan, te je $EF=const$.

U ovom slučaju duljina užeta može biti i manja od udaljenosti između ležajeva. Duljina užeta se pod vlačnim opterećenjem povećava za iznos

$$\Delta L = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^{n-1} S_i \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} , \quad (2.20)$$

gdje su: S_i - sila u i -tom elementu,

član s korijenom - duljina i -tog elementa u deformiranom stanju.

Jednadžbu kompatibilnosti sada pišemo u obliku

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = L + \Delta L . \quad (2.21)$$

Iteracijski postupak opisan za nerastezljivo uže mijenjamo tako da nakon svakog koraka iteracije izračunamo i novu vrijednost ΔL .

Postupak možemo i pojednostaviti ako silu S_i zapišemo u obliku

$$S_i = \frac{H}{\cos \varphi_i} , \quad (2.22)$$

$$\text{gdje je } \cos \varphi_i = \frac{\Delta_i}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} . \quad (2.23)$$

Izraz (2.23) uvrstimo u (2.20) pa dobijemo

$$\Delta L = \frac{H}{EF} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i} \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \right] , \quad (2.24)$$

i konačno, nerastegnutu duljinu užadi izračunamo izrazom

$$L = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} - \frac{H}{EF} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i} \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 \right] . \quad (2.25)$$

3.) *Koncentrirane sile djeluju u zadanom smjeru; zadane su nedeformirane duljine elemenata*

Opisat ćemo rješenje problema u ravnini za rastezljivo uže.

Zadane su sve sile u istoj ravnini, pa i deformirano uže mora ležati u toj ravnini. Ako promatramo ravnotežu i -tog čvora, dobivamo vektorsku jednadžbu koja se može zapisati u komponentama pomoću dvije skalarne:

$$\begin{aligned} S_i \sin \varphi_i - S_{i+1} \sin \varphi_{i+1} &= V_i \quad , \\ S_i \cos \varphi_i - S_{i+1} \cos \varphi_{i+1} &= H_i \quad . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sinuse i kosinuse kutova možemo izraziti pomoću koordinata čvorova:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} \quad , \\ \cos \varphi_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} \quad . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sile u elementima možemo izraziti pomoću deformacije:

$$S_i = S_{i0} + \varepsilon_i EF \quad , \quad (2.26)$$

gdje su: S_{i0} - prednaponska sila,

$$\varepsilon_i = \frac{L_i - L_{i0}}{L_{i0}} \quad - \text{deformacija izražena promjenom duljine.} \quad (2.27)$$

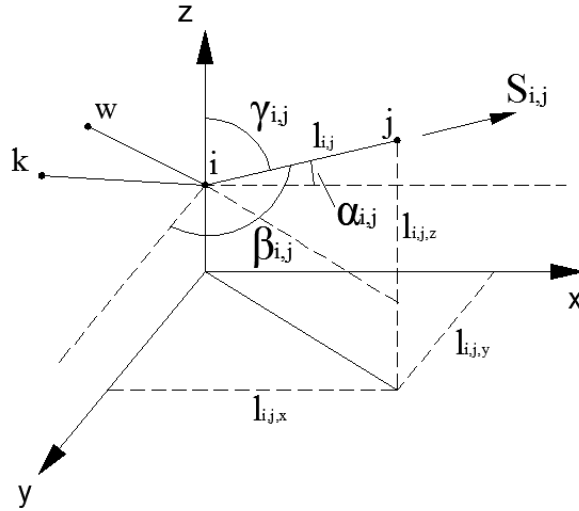
U dobivenim su izrazima jedine nepoznanice koordinate čvorova.

3. Traženje oblika konstrukcija od užadi

3.1. Uvjeti ravnoteže čvora

Uvjeti ravnoteže i -tog čvora bez vanjskog opterećenja mogu se izraziti na 2 načina:

1. *Simetričan zapis u kojemu su sve koordinate ravnopravne*



Zbroj projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenima u i -ti čvor na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} Z_{i,j} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdje je n_i broj užadi pričvršćenih u i -ti čvor.

Promatramo štap između čvorova i i j . Ako kutove koje uzdužna sila u štapu zatvara s koordinatnim osima označimo sa $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ i $\gamma_{i,j}$, tada jednadžbe (3.1) možemo zapisati u obliku

$$\sum_{j=1}^{n_i} S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} S_{i,j} \cdot \cos \beta_{i,j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} S_{i,j} \cdot \cos \gamma_{i,j} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Za kosinuse kutova $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ i $\gamma_{i,j}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{i,j} &= \frac{l_{i,j,x}}{l_{i,j}} = \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}}, \\ \cos \beta_{i,j} &= \frac{l_{i,j,y}}{l_{i,j}} = \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}}, \\ \cos \gamma_{i,j} &= \frac{l_{i,j,z}}{l_{i,j}} = \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdje su: $l_{i,j}$ - duljina štapa i - j ,

$l_{i,j,x}, l_{i,j,y}, l_{i,j,z}$ - duljine projekcija štapa na koordinatne osi,

x_i, y_i, z_i - koordinate i -tog čvora u prostoru,

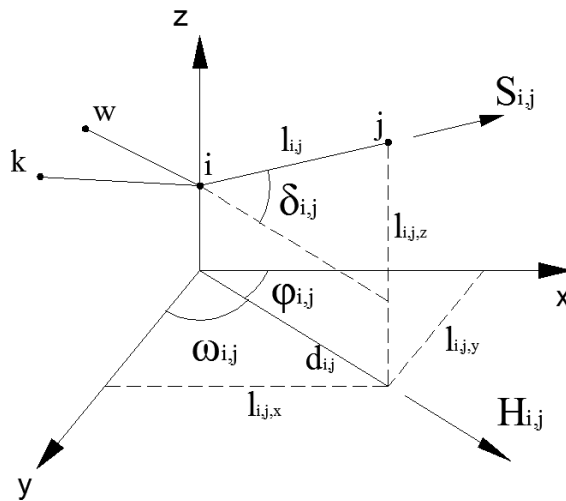
x_j, y_j, z_j - koordinate j -tog čvora u prostoru.

Sada jednadžbe (3.2) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{S_{i,j} \cdot (x_i - x_j)}{l_{i,j}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{S_{i,j} \cdot (y_i - y_j)}{l_{i,j}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{S_{i,j} \cdot (z_i - z_j)}{l_{i,j}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dobili smo konačni oblik zapisa jednadžbi ravnoteže i -tog čvora. Dobiveni sustav jednadžbi je nelinearan, te će se njegovo rješavanje objasniti u 4. poglavlju.

2. Zapis pomoću projekcija sila i duljina na ravninu xy



Kod ovog načina uvjete ravnoteže i -tog čvora zapisujemo pomoću projekcija sila na ravninu xy :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} H_{i,j} \cdot \cos \varphi_{i,j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} H_{i,j} \cdot \cos \omega_{i,j} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} H_{i,j} \cdot \operatorname{tg} \delta_{i,j} &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdje su: $H_{i,j}$ - projekcija sile $S_{i,j}$ na ravninu xy ,

$\varphi_{i,j}, \omega_{i,j}$ - kutovi između projekcije sile $H_{i,j}$ i koordinatnih osi x i y ,

$\delta_{i,j}$ - kut između štapa i njegove projekcije na ravninu xy .

Možemo pisati:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{i,j} &= \frac{x_i - x_j}{d_{i,j}}, \\ \cos \omega_{i,j} &= \frac{y_i - y_j}{d_{i,j}}, \\ \operatorname{tg} \delta_{i,j} &= \frac{z_i - z_j}{d_{i,j}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdje su: $d_{i,j}$ - projekcija štapa i - j na ravninu xy ,
 x_i, y_i, z_i - koordinate i -tog čvora u prostoru,
 x_j, y_j, z_j - koordinate j -tog čvora u prostoru.

Sada jednadžbu (3.5) možemo zapisati:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{H_{i,j} \cdot (x_i - x_j)}{d_{i,j}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{H_{i,j} \cdot (y_i - y_j)}{d_{i,j}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{H_{i,j} \cdot (z_i - z_j)}{d_{i,j}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vidljiva je ekvivalencija jednadžbi ravnoteže (3.4) i (3.7).

Vrijedi jednakost:

$$S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = H_{i,j}, \quad (3.8)$$

gdje je $\cos \alpha_{i,j}$ kosinus kuta između štapa u prostoru i njegove projekcije na ravninu xy , koji možemo zapisati i kao $\frac{d_{i,j}}{l_{i,j}}$, pa jednadžbu (3.8) možemo zapisati u obliku

$$S_{i,j} \cdot \frac{d_{i,j}}{l_{i,j}} = H_{i,j}. \quad (3.9)$$

Izrazimo silu $S_{i,j}$:

$$S_{i,j} = \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j}. \quad (3.10)$$

Ako izraz (10) uvrstimo u prvi način zapisa jednadžbi ravnoteže (3.4), dobivamo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{l_{i,j} \cdot H_{i,j} \cdot (x_i - x_j)}{d_{i,j} \cdot l_{i,j}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} \frac{l_{i,j} \cdot H_{i,j} \cdot (y_i - y_j)}{d_{i,j} \cdot l_{i,j}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{l_{i,j} \cdot H_{i,j} \cdot (z_i - z_j)}{d_{i,j} \cdot l_{i,j}} = 0 .$$

Vidljivo je da nakon sređivanja jednažbi (3.11) dobivamo drugi način zapisa jednažbi ravnoteže čvora:

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{H_{i,j} \cdot (x_i - x_j)}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{H_{i,j} \cdot (y_i - y_j)}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{H_{i,j} \cdot (z_i - z_j)}{d_{i,j}} = 0 .$$

3.2. Tvorba sustava simultanih jednažbi

Ako sa N označimo broj slobodnih čvorova, a sa S broj štapova, tada možemo napisati $3N$ jednažbi ravnoteže, dok je broj nepoznanica $3N+S$ (tri koordinate svakog slobodnog čvora i sila u svakom štapu). Vidljivo je da rješenje sustava nije moguće jednoznačno odrediti, odnosno broj nepoznanica je za S veći od broja jednažbi ravnoteže. Kako bismo dobili jednak broj jednažbi i nepoznanica, potrebno je dodati još S uvjeta. Postoje jednostavna pravila za eliminaciju sila u štapovima kao nepoznanica:

1. *"Kvazilaplaceovo" pravilo* – unaprijed su zadane uravnotežene projekcije sila u svim štapovima na ravninu xy ;
2. *Pravilo "gustoće sile"* – zadan je omjer iznosa sile i duljine svakog štapa;
3. *Poopćeno pravilo "geodetske mreže"* – zadani su iznosi sila u svim štapovima;
4. *"Kombinirano pravilo"* – u nekim su štapovima zadani iznosi sila, dok je u ostalima definirana linearna ovisnost sile o deformaciji.

U ovom radu pobliže ćemo razmotriti pravilo "gustoće sile" i poopćeno pravilo "geodetske mreže".

3.2.1. Metoda "gustoće sila"

Metoda gustoće sila se koristi omjerom sila i duljina kako bi nelinearan sustav jednadžbi ravnoteže prešao u linearan. Ako za omjere sila i duljina $S_{i,j}/l_{i,j}$ unaprijed odaberemo vrijednosti $q_{i,j}$, nazvane "gustoćama sila", dobivamo linearan sustav jednadžbi ravnoteže:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (x_i - x_j) &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (y_i - y_j) &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (z_i - z_j) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Jednim se sustavom određuju sve koordinate x_i , drugim sve koordinate y_i , a trećim sve koordinate z_i . Nedostatak ove metode je taj što na izvedenoj konstrukciji projekcije čvorova moraju padati u projektirane točke, te projekcije sila u štapovima istog užeta moraju biti međusobno jednake. Za dva štapa istog užeta vrijedi jednakost:

$$S_i \cdot \cos \varphi_i = S_j \cdot \cos \varphi_j, \quad (3.13)$$

gdje su: S_i, S_j - sile u i -tom i j -tom čvoru istog užeta,

φ_i, φ_j - kutovi nagiba i -tog i j -tog elementa prema horizontalnoj ravnini.

3.2.2. Poopćeno pravilo "geodetske mreže"

Kao što je već spomenuto, "geodetska mreža" je mreža kabela u kojoj je zbroj duljina svih kabela minimalan. Budući da je u čvoru dopušteno klizanje jednog užeta po drugom, iznos sile je po cijeloj duljini užeta jednak, te se tim načinom postavljanja mreže može ukloniti opisani nedostatak metode "gustoće sile". Kod ovog pravila sustav jednadžbi je nelinearan. Ipak, nakon prednapinjanja i postizanja konačne geometrije, kabele je potrebno međusobno spojiti, kako bismo povećali krutost i spriječili naknadno klizanje.

Za ovo pravilo vrijedi da je rješenje sustava jednadžbi ravnoteže (3.4) ekvivalentno minimalizaciji ukupne duljine užadi, uz uvjet da su sve sile $S_{i,j}$ jednake.

Ukupna duljina užadi jednaka je zbroju duljina svih štapova:

$$\Phi = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} . \quad (3.14)$$

Funkcional Φ postiže minimum kad su derivacije izraza po svakoj od koordinata x_i, y_i, z_i jednake nuli, a time dobivamo minimalnu (geodetsku) mrežu. Deriviranjem izraza i izjednačavanjem s nulom neposredno se dobivaju jednadžbe ravnoteže (3.4) uz uvjet da su sve sile $S_{i,j}$ jednake.

Tvrđnju o minimumu duljine užadi možemo poopćiti. Naime, za unaprijed zadane, ali ne nužno i jednake vrijednosti sila u štapovima istog užeta rješenje sustava jednadžbi ravnoteže ekvivalentno je minimalizaciji ukupne duljine svih štapova pomnoženih pripadnim silama (tim je umnoškom definirana unutarnja potencijalna energija sistema):

$$\Phi = \sum l_{i,j} \cdot S_{i,j} . \quad (3.15)$$

Iz izraza vidimo da se povećanjem sile u nekom štapu taj štap mora skratiti.

Nedostaci ovog pravila su u tome što ne mora nužno postojati rješenje i što može doći do divergencije numeričkog postupka. Zasad su poznata tri uzroka problema divergencije:

1. ravnotežno stanje ne postoji,
2. ravnotežno stanje je indiferentno,
3. ravnotežno stanje je stabilno, ali je područje konvergencije iterativnog postupka malo.

4. Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

"Kvazilaplaceovim" pravilom i metodom "gustoće sila" postizemo da nelinearan sustav jednadžbi ravnoteže (3.4) postane linearan, dok kod poopćenog pravila "geodetske mreže" i "kombiniranog pravila" sustav jednadžbi ravnoteže ostaje nelinearan. Nelinearan sustav jednadžbi moguće je riješiti iterativnim postupcima. U ovom radu će se поближе objasniti Newton-Raphsonova metoda rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi.

Newton-Raphsonova metoda je svakako najpoznatija metoda za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Ako početnu aproksimaciju izaberemo dovoljno blizu rješenja, onda metoda vrlo brzo (kvadratičnom brzinom) konvergira prema rješenju sustava jednadžbi. Nažalost, nemamo garancije da će Newton-Raphsonova metoda uvijek konvergirati, ali ako smo u stanju početnu aproksimaciju rješenja dobro procijeniti, ova metoda će nas vrlo brzo dovesti do pravog rješenja.

Prije opisivanja postupka kod sustava jednadžbi, opisat ćemo ideju rješavanja jednadžbe s jednom nepoznanicom.

Tražimo x za koji je $f(x) = 0$. Ako možemo izračunati vrijednosti funkcije i vrijednosti derivacije funkcije f i ako znamo neki $x^{(k)}$ koji je blizu traženog korijena, možemo nelinearnu funkciju f u okolini točke $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ zamijeniti pravcem najbližijim toj funkciji – tangentom.

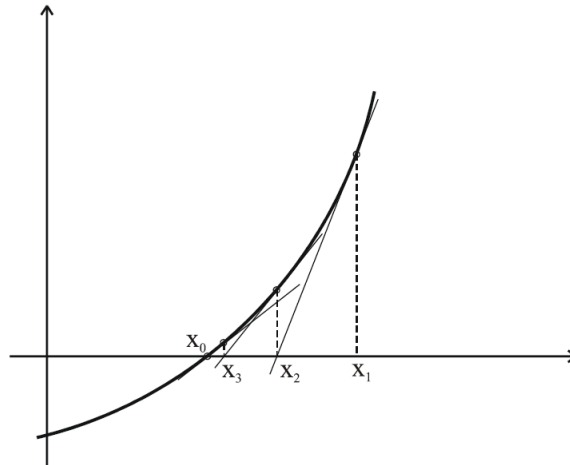
Jednadžba tangente je linearna aproksimacija funkcije f u točki $x^{(k)}$:

$$\bar{f}^{(k)}(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) . \quad (4.1)$$

Zatim tražimo mjesto gdje ta tangenta siječe os x , odnosno nul-točku funkcije $\bar{f}^{(k)}$, na način:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} . \quad (4.2)$$

Ponavljamo postupak više puta dok ne zadovoljimo odabranu točnost.



Sada promatramo sustav nelinearnih jednadžbi:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

odnosno $f(x) = 0$, gdje je $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Najprije izaberemo početnu aproksimaciju $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ i svaku od funkcija f_i razvijemo u Taylorov red u okolini $x^{(0)}$, te linearnu aproksimaciju označimo s \tilde{f}_i :

$$\tilde{f}_i(x) = \tilde{f}_i(x^{(0)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^{(0)})}{\partial x_j} (x_j - x_j^{(0)}), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Sada umjesto sustava (4.3) rješavamo sustav:

$$\tilde{f}_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

što možemo zapisati u matričnom obliku:

$$J^{(0)} \cdot s^{(0)} = -f(x^{(0)}), \quad (4.6)$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(x^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Nova aproksimacija rješenja tada je:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s^{(0)} \quad (4.8)$$

Općenito, dobivamo iterativni postupak:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

gdje je vektor smjera kretanja $s^{(k)}$ rješenje sustava.

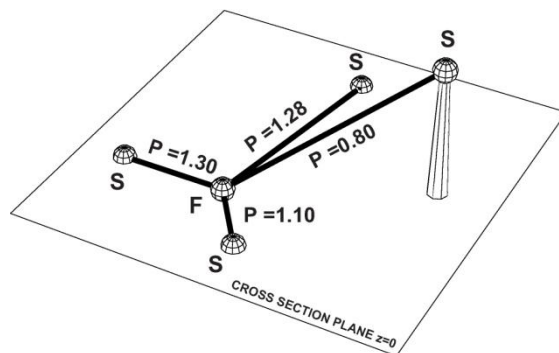
Sustav (4.7) možemo rješavati iterativno, koristeći se samo dijagonalnim elementima matrice J . Takva metoda rješavanja poznata je kao Newton-Gauss-Seidelova metoda rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, x_n^{(k)})}{\partial_{x_i} f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, x_n^{(k)})}, \quad (4.10)$$

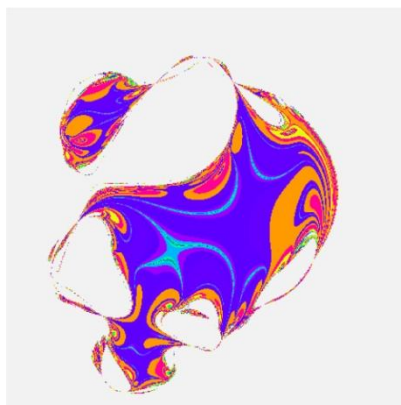
gdje je

$$\partial_{x_i} f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (4.11)$$

Već smo spomenuli da početna aproksimacija mora biti u području konvergencije. Međutim, uočeno je da to područje ima izrazito nepravilan oblik. Ponekad je iteracija, koja je započela od neke odabrane aproksimacije, konvergirala pravom rješenju manjim brojem iteracija od neke prividno bolje aproksimacije. Varirajući početnu aproksimaciju uočavamo nepredvidivo ponašanje iteracijskog postupka. Dolazi se do pretpostavke da područje konvergencije ima svojstva fraktala. Na slici 4.2. možemo vidjeti kako izgleda područje konvergencije za mrežu od užadi sastavljenu od četiri ležajna čvora, jednog slobodnog čvora i četiri elementa (slika 4.1.).



Slika 4.1. Prostorni prikaz mreže



Slika 4.2. Područje konvergencije mreže za Newton-Raphson metodu

5. Primjeri

Primjere rješavamo u programskom paketu Mathematica. Svaki primjer ćemo riješiti metodom gustoće sila i Newton-Gauss-Seidel metodom, te ćemo moći usporediti rezultate dobivene spomenutim metodama.

Primjer 1

U ovom primjeru provest ćemo postupak nalaženja ravnotežnog oblika mreže čiji rub u tlocrtu čini kvadrat stranice 24 m. Kabeli su postavljeni u dva dijagonalna smjera, te ih imamo 14, po 7 u jednom smjeru. Mreža se sastoji od 41 čvora i 64 elementa. Zadane su koordinate 16 rubnih čvorova, dok ćemo koordinate ostalih čvorova pretpostaviti kako bismo imali ulazne podatke, a proračunom ćemo dobiti njihov ravnotežni položaj.

Zadajemo koordinate čvorova:

```
nds = {{0., 0., 0.}, {6., 0., 0.}, {12., 0., 0.}, {18., 0., 0.}, {24., 0., 0.}, {3., 3., 0.}, {9., 3., 0.},
{15., 3., 0.}, {21., 3., 0.}, {0., 6., 0.}, {6., 6., 0.}, {12., 6., 0.}, {18., 6., 0.}, {24., 6., 2.},
{3., 9., 0.}, {9., 9., 0.}, {15., 9., 0.}, {21., 9., 0.}, {0., 12., 0.}, {6., 12., 0.}, {12., 12., 0.},
{18., 12., 0.}, {24., 12., 4.}, {3., 15., 0.}, {9., 15., 0.}, {15., 15., 0.}, {21., 15., 0.},
{0., 18., 0.}, {6., 18., 0.}, {12., 18., 0.}, {18., 18., 0.}, {24., 18., 6.}, {3., 21., 0.}, {9., 21., 0.},
{15., 21., 0.}, {21., 21., 0.}, {0., 24., 0.}, {6., 24., 2.}, {12., 24., 4.}, {18., 24., 6.},
{24., 24., 8.}}
```

zatim zadajemo ležajne čvorove:

```
supps = {1, 2, 3, 4, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32, 37, 38, 39, 40, 41} .
```

Elemente zadajemo na način da im navedemo početni i krajnji čvor:

```
elems = {{1, 6}, {6, 2}, {2, 7}, {7, 3}, {3, 8}, {8, 4}, {4, 9}, {9, 5}, {10, 6}, {6, 11}, {11, 7},
{7, 12}, {12, 8}, {8, 13}, {13, 9}, {9, 14}, {10, 15}, {15, 11}, {11, 16}, {16, 12}, {12, 17},
{17, 13}, {13, 18}, {18, 14}, {19, 15}, {15, 20}, {20, 16}, {16, 21}, {21, 17}, {17, 22},
{22, 18}, {18, 23}, {19, 24}, {24, 20}, {20, 25}, {25, 21}, {21, 26}, {26, 22}, {22, 27},
{27, 23}, {28, 24}, {24, 29}, {29, 25}, {25, 30}, {30, 26}, {26, 31}, {31, 27}, {27, 32},
{28, 33}, {33, 29}, {29, 34}, {34, 30}, {30, 35}, {35, 31}, {31, 36}, {36, 32}, {37, 33},
{33, 38}, {38, 34}, {34, 39}, {39, 35}, {35, 40}, {40, 36}, {36, 41}}
```


8, 4.25918, 4.25918, 4.28843, 4.28843, 4.33193, 4.33193, 4.24448, 4.25918, 4.24448, 4.28843, 4.25918, 4.33193, 4.28843, 4.38926, 4.25918, 4.24448, 4.28843, 4.24448, 4.33193, 4.25918, 4.38926, 4.28843, 4.25918, 4.28843, 4.24448, 4.33193, 4.24448, 4.38926, 4.25918, 4.45989, 4.28843, 4.25918, 4.33193, 4.24448, 4.38926, 4.24448, 4.45989, 4.25918, 4.28843, 4.33193, 4.25918, 4.38926, 4.24448, 4.45989, 4.24448, 4.5432, 4.33193, 4.28843, 4.38926, 4.25918, 4.45989, 4.24448, 4.5432, 4.24448, 4.33193, 4.38926, 4.28843, 4.45989, 4.25918, 4.5432, 4.24448, 4.63849} }

Dobivene sile u pojedinim štapovima se razlikuju, najveća dobivena vrijednost sile iznosi

Max[f2]

4.63849 ,

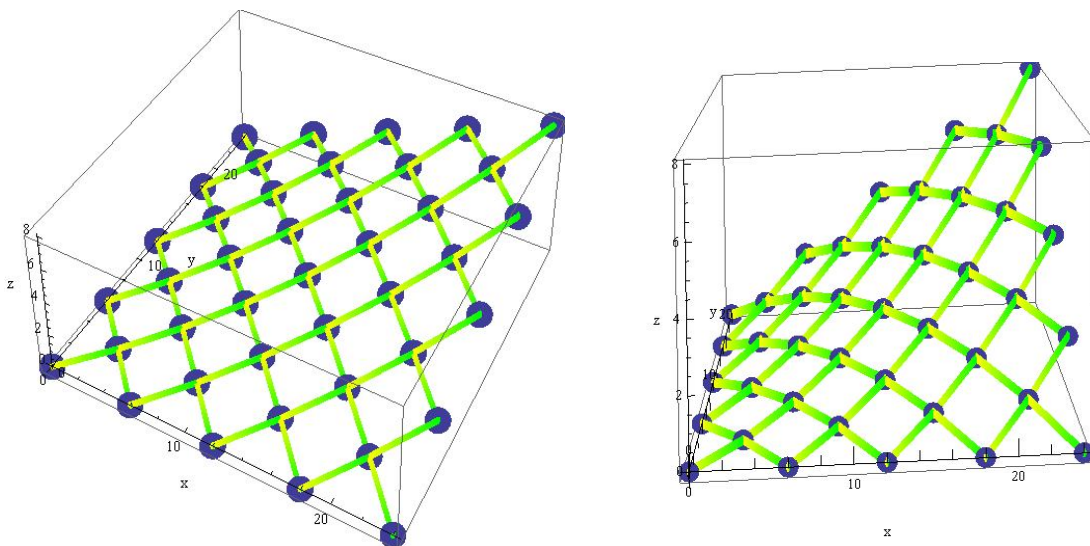
a najmanja

Min[f2]

4.24448 .

Prostorni prikaz mreže se mijenja, slobodni čvorovi dobivaju nove koordinate:

crt [nds2, elems]

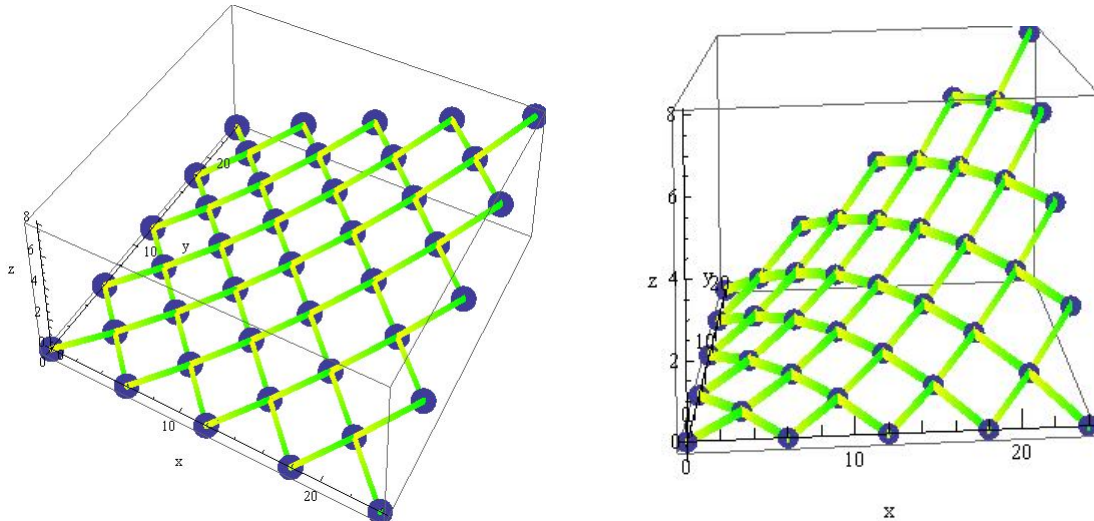


Slika 5.2. Prostorni prikaz mreže nakon jedne iteracije metodom gustoće sile

Min [f3]

4.31709

crt [nds3, elems]



Slika 5.3. Prostorni prikaz mreže nakon 170 iteracija metodom gustoće sila

Sad ćemo postupak provesti Newton-Gauss-Seidel metodom, te ćemo usporediti broj iteracija potrebnih za dobivanje ravnotežnog položaja užeta metodama gustoće sila i Newton Gauss-Seidel. Zadali smo točnost na 5 decimala i ograničili broj iteracija na 1000, u slučaju divergencije postupka.

Koristimo se ulaznim podacima s pretpostavljenim koordinatama slobodnih čvorova:

```
nds4 = newtonGS [nds, elems, supps, func, dfunc, 0.00001, 1000]
```

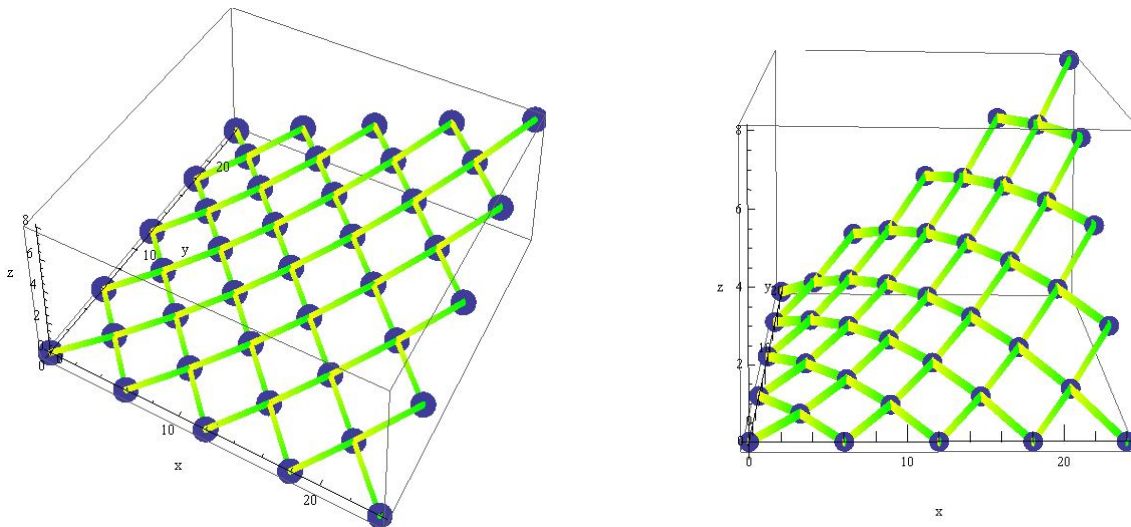
76

```
{ {0., 0., 0.}, {6., 0., 0.}, {12., 0., 0.}, {18., 0., 0.}, {24., 0., 0.}, {2.9
9507, 2.99507, 0.121504}, {8.94602, 2.99475, 0.364099}, {14.8972, 2.95
539, 0.601742}, {20.8488, 2.87808, 0.829701}, {0., 6., 0.}, {5.9607, 5.9
6069, 0.483227}, {11.8437, 5.92147, 0.958605}, {17.7276, 5.8057, 1.419
16}, {24., 6., 2.}, {2.99475, 8.94602, 0.364099}, {8.86833, 8.86833, 1.0
7533}, {14.6655, 8.75322, 1.76844}, {20.8513, 8.91084, 2.57565}, {0., 1
2., 0.}, {5.92147, 11.8437, 0.958605}, {11.6907, 11.6907, 1.88263}, {17
.7716, 11.8502, 2.91618}, {24., 12., 4.}, {2.95539, 14.8972, 0.601742},
{8.75323, 14.6655, 1.76845}, {14.788, 14.788, 3.02738}, {20.8932, 14.9
```

424, 4.33014}, {0., 18., 0.}, {5.80571, 17.7276, 1.41917}, {11.8502, 17.7716, 2.91618}, {17.8911, 17.8911, 4.43761}, {24., 18., 6.}, {2.87808, 20.8488, 0.829702}, {8.91084, 20.8513, 2.57565}, {14.9424, 20.8932, 4.33014}, {20.9703, 20.9703, 6.10192}, {0., 24., 0.}, {6., 24., 2.}, {12., 24., 4.}, {18., 24., 6.}, {24., 24., 8.}}

Vidimo da Newton-Gauss-Seidel metodom već nakon 76 iteracija dolazimo do jednakih vrijednosti sila u štapovima zaokruženih na pet decimala. Iz ovih se rezultata može zaključiti da Newton-Gauss-Seidel metoda u usporedbi s metodom gustoće sila brže konvergira prema traženom rješenju. No, za točniju bi usporedbu postupaka trebalo analizirati i broj aritmetičkih operacija u odgovarajućim koracima iteracije.

crt [nds4, elems]



Slika 5.4. Prostorni prikaz mreže nakon 76 iteracija Newton-Gauss-Seidelovom metodom

Taj broj iteracija možemo i smanjiti ako kao početnu aproksimaciju u Newton-Gauss-Seidelovoj metodi upotrijebimo koordinate slobodnih čvorova dobivenih iz metode gustoće sila nakon jedne iteracije. Tada broj iteracija iznosi 67.

nds4 = newtonGS [nds2, elems, supps, func, dfunc, 0.00001, 1000]

67

{{0., 0., 0.}, {6., 0., 0.}, {12., 0., 0.}, {18., 0., 0.}, {24., 0., 0.}, {2.99507, 2.99507, 0.121504}, {8.94602, 2.99475, 0.364099}, {14.8972, 2.95539, 0.601743}, {20.8488, 2.8781, 0.829707}, {0., 6., 0.}, {5.96069, 5.9

607,0.483228}, {11.8437,5.92147,0.958606}, {17.7276,5.80574,1.41917}, {24.,6.,2.}, {2.99475,8.94602,0.364099}, {8.86832,8.86833,1.07533}, {14.6656,8.75326,1.76846}, {20.8513,8.91084,2.57565}, {0.,12.,0.}, {5.92147,11.8437,0.958606}, {11.6907,11.6907,1.88264}, {17.7716,11.8502,2.91618}, {24.,12.,4.}, {2.95539,14.8972,0.601743}, {8.75326,14.6656,1.76846}, {14.788,14.788,3.02738}, {20.8932,14.9424,4.33014}, {0.,18.,0.}, {5.80573,17.7276,1.41917}, {11.8502,17.7716,2.91618}, {17.8911,17.8911,4.43761}, {24.,18.,6.}, {2.87809,20.8488,0.829706}, {8.91084,20.8513,2.57565}, {14.9424,20.8932,4.33014}, {20.9703,20.9703,6.10192}, {0.,24.,0.}, {6.,24.,2.}, {12.,24.,4.}, {18.,24.,6.}, {24.,24.,8.}}

Primjer 2

U ovom primjeru provest ćemo postupak nalaženja ravnotežnog oblika mreže čiji rub u tlocrtu čini pravokutnik stranica 36 m i 20 m. Kabeli su postavljeni paralelno s rubovima pravokutnika, te ih imamo 19, 13 vertikalnih i 6 horizontalnih. Mreža se sastoji od 78 čvorova i 197 elementa. Zadane su koordinate 34 rubna čvorova, dok ćemo koordinate ostalih čvorova pretpostaviti kako bismo imali ulazne podatke, a proračunom ćemo dobiti njihov ravnotežni položaj.

nds = {{0., 0., 9.}, {3., 0., 6.}, {6., 0., 3.}, {9., 0., 0.}, {12., 0., 3.}, {15., 0., 6.}, {18., 0., 9.}, {21., 0., 6.}, {24., 0., 3.}, {27., 0., 0.}, {30., 0., 3.}, {33., 0., 6.}, {36., 0., 9.}, {0., 4., 9.}, {3., 4., 0.}, {6., 4., 0.}, {9., 4., 0.}, {12., 4., 0.}, {15., 4., 0.}, {18., 4., 0.}, {21., 4., 0.}, {24., 4., 0.}, {27., 4., 0.}, {30., 4., 0.}, {33., 4., 0.}, {36., 4., 9.}, {0., 8., 9.}, {3., 8., 0.}, {6., 8., 0.}, {9., 8., 0.}, {12., 8., 0.}, {15., 8., 0.}, {18., 8., 0.}, {21., 8., 0.}, {24., 8., 0.}, {27., 8., 0.}, {30., 8., 0.}, {33., 8., 0.}, {36., 8., 9.}, {0., 12., 9.}, {3., 12., 0.}, {6., 12., 0.}, {9., 12., 0.}, {12., 12., 0.}, {15., 12., 0.}, {18., 12., 0.}, {21., 12., 0.}, {24., 12., 0.}, {27., 12., 0.}, {30., 12., 0.}, {33., 12., 0.}, {36., 12., 9.}, {0., 16., 9.}, {3., 16., 0.}, {6., 16., 0.}, {9., 16., 0.}, {12., 16., 0.}, {15., 16., 0.}, {18., 16., 0.}, {21., 16., 0.}, {24., 16., 0.}, {27., 16., 0.}, {30., 16., 0.}, {33., 16., 0.}, {36., 16., 9.}, {0., 20., 9.}, {3., 20., 6.}, {6., 20., 3.}, {9., 20., 0.}, {12., 20., 3.}, {15., 20., 6.}, {18., 20., 9.}, {21., 20., 6.}, {24., 20., 3.}, {27., 20., 0.}, {30., 20., 3.}, {33., 20., 6.}, {36., 20., 9.}}


```
{ nds2, f2 } = multiStepFDM [nds, elems, supps, gs, 1]
```

```
{{{0., 0., 9.}, {3., 0., 6.}, {6., 0., 3.}, {9., 0., 0.}, {12., 0., 3.}, {15.,
0., 6.}, {18., 0., 9.}, {21., 0., 6.}, {24., 0., 3.}, {27., 0., 0.}, {30., 0.,
3.}, {33., 0., 6.}, {36., 0., 9.}, {0., 4., 9.}, {3., 4., 6.62384}, {6., 4., 4
.52928}, {9., 4., 3.21885}, {12., 4., 4.01826}, {15., 4., 5.36382}, {18.,
4., 6.31207}, {21., 4., 5.36382}, {24., 4., 4.01826}, {27., 4., 3.21885},
{30., 4., 4.52928}, {33., 4., 6.62384}, {36., 4., 9.}, {0., 8., 9.}, {3., 8.
, 6.96608}, {6., 8., 5.27441}, {9., 8., 4.32787}, {12., 8., 4.49036}, {15.
, 8., 5.12494}, {18., 8., 5.52065}, {21., 8., 5.12494}, {24., 8., 4.49036}
, {27., 8., 4.32787}, {30., 8., 5.27441}, {33., 8., 6.96608}, {36., 8., 9.}
, {0., 12., 9.}, {3., 12., 6.96608}, {6., 12., 5.27441}, {9., 12., 4.32787}
, {12., 12., 4.49036}, {15., 12., 5.12494}, {18., 12., 5.52065}, {21., 12.
, 5.12494}, {24., 12., 4.49036}, {27., 12., 4.32787}, {30., 12., 5.27441}
, {33., 12., 6.96608}, {36., 12., 9.}, {0., 16., 9.}, {3., 16., 6.62384}, {6
., 16., 4.52928}, {9., 16., 3.21885}, {12., 16., 4.01826}, {15., 16., 5.36
382}, {18., 16., 6.31207}, {21., 16., 5.36382}, {24., 16., 4.01826}, {27.
, 16., 3.21885}, {30., 16., 4.52928}, {33., 16., 6.62384}, {36., 16., 9.},
{0., 20., 9.}, {3., 20., 6.}, {6., 20., 3.}, {9., 20., 0.}, {12., 20., 3.}, {1
5., 20., 6.}, {18., 20., 9.}, {21., 20., 6.}, {24., 20., 3.}, {27., 20., 0.},
{30., 20., 3.}, {33., 20., 6.}, {36., 20., 9.}}, {3.82703, 3.65885, 3.2737
2, 3.10468, 3.28794, 3.1463, 3.1463, 3.28794, 3.10468, 3.27372, 3.65885
, 3.82703, 3.62447, 3.44409, 3.14578, 3.0044, 3.06638, 3.02599, 3.02599
, 3.06638, 3.0044, 3.14578, 3.44409, 3.62447, 3.62447, 3.44409, 3.14578
, 3.0044, 3.06638, 3.02599, 3.02599, 3.06638, 3.0044, 3.14578, 3.44409,
3.62447, 3.82703, 3.65885, 3.27372, 3.10468, 3.28794, 3.1463, 3.1463, 3
.28794, 3.10468, 3.27372, 3.65885, 3.82703, 4.04835, 4.28237, 5.1343, 4
.12757, 4.05028, 4.81923, 4.05028, 4.12757, 5.1343, 4.28237, 4.04835, 4
.01461, 4.06881, 4.1509, 4.02776, 4.00713, 4.07754, 4.00713, 4.02776, 4
.1509, 4.06881, 4.01461, 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4.01461,
4.06881, 4.1509, 4.02776, 4.00713, 4.07754, 4.00713, 4.02776, 4.1509, 4
.06881, 4.01461, 4.04835, 4.28237, 5.1343, 4.12757, 4.05028, 4.81923, 4
.05028, 4.12757, 5.1343, 4.28237, 4.04835}}
```

Vrijednosti sila dobivenih nakon jedne iteracije:

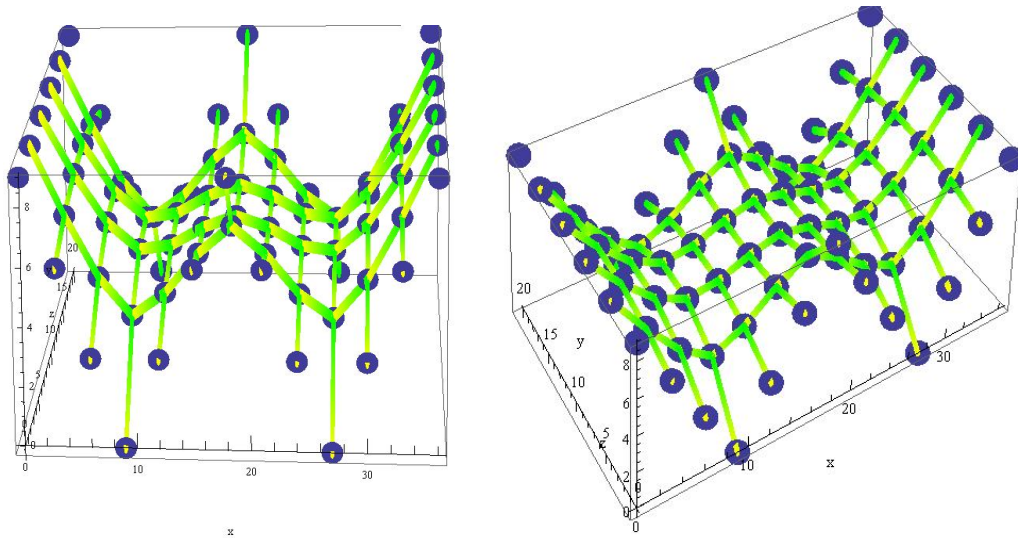
Max[f2]

5.1343 ,

Min[f2]

3.0044 .

crt [nds2, elems]



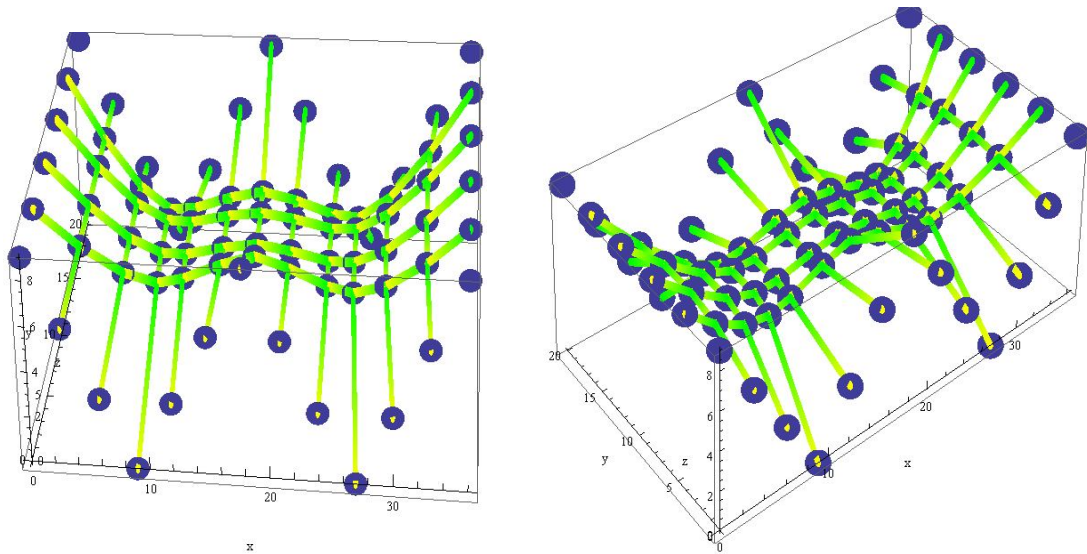
Slika 5.6. Prostorni prikaz mreže nakon jedne iteracije metodom gustoće sila

Tek nakon 600 iteracija dobivamo identične vrijednosti sila:

```
{ nds3, f3 } = multiStepFDM [nds, elems, supps, gs, 600]
```

```
{{{0., 0., 9.}, {3., 0., 6.}, {6., 0., 3.}, {9., 0., 0.}, {12., 0., 3.}, {15.,
0., 6.}, {18., 0., 9.}, {21., 0., 6.}, {24., 0., 3.}, {27., 0., 0.}, {30., 0.,
3.}, {33., 0., 6.}, {36., 0., 9.}, {0., 4., 9.}, {3.46636, 5.16008, 6.85024
}, {6.87342, 6.17657, 5.21315}, {9.6293, 6.77953, 4.50352}, {11.8543, 6
.92358, 4.68341}, {15.0954, 7.06809, 5.31789}, {18., 7.18442, 5.70573}
, {20.9046, 7.06809, 5.31789}, {24.1457, 6.92358, 4.68341}, {26.3707, 6
.77953, 4.50352}, {29.1266, 6.17657, 5.21315}, {32.5336, 5.16008, 6.85
024}, {36., 4., 9.}, {0., 8., 9.}, {3.57701, 8.23892, 7.07648}, {7.00008,
8.44616, 5.58176}, {9.68377, 8.5595, 4.9192}, {11.8439, 8.59046, 4.892
9}, {15.1008, 8.61178, 5.26171}, {18., 8.62875, 5.48315}, {20.8992, 8.6
1178, 5.26171}, {24.1561, 8.59046, 4.8929}, {26.3162, 8.5595, 4.9192},
{28.9999, 8.44616, 5.58176}, {32.423, 8.23892, 7.07648}, {36., 8., 9.},
```


crt [nds3, elems]



Slika 5.7. Prostorni prikaz mreže nakon 600 iteracija metodom gustoće sila

Sad ćemo postupak provesti Newton-Gauss-Seidel metodom. Zadali smo točnost na 4 decimalne i ograničili broj iteracija na 1000, u slučaju divergencije postupka.

Koristimo se ulaznim podacima s pretpostavljenim koordinatama slobodnih čvorova:

```
nds4 = newtonGS [nds, elems, supps, func, dfunc, 0.0001, 1000]
```

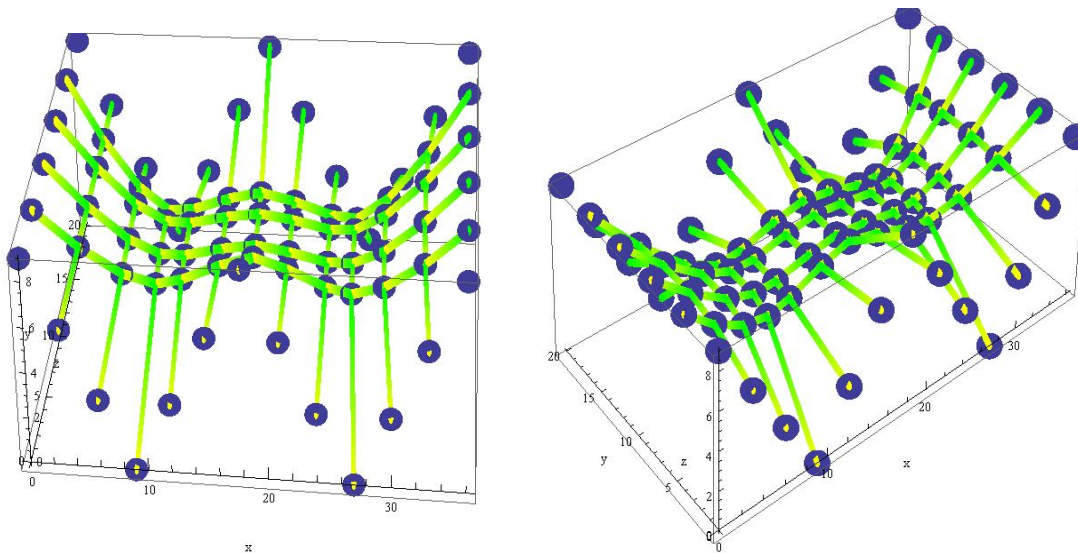
127

```
{ {0., 0., 9.}, {3., 0., 6.}, {6., 0., 3.}, {9., 0., 0.}, {12., 0., 3.}, {15., 0., 6.}, {18., 0., 9.}, {21., 0., 6.}, {24., 0., 3.}, {27., 0., 0.}, {30., 0., 3.}, {33., 0., 6.}, {36., 0., 9.}, {0., 4., 9.}, {3.46636, 5.16, 6.85021}, {6.8734, 6.17641, 5.21309}, {9.62925, 6.77934, 4.50345}, {11.8543, 6.92338, 4.68335}, {15.0954, 7.06789, 5.31785}, {18., 7.18423, 5.70569}, {20.9046, 7.0679, 5.31785}, {24.1457, 6.92342, 4.68336}, {26.3707, 6.77938, 4.50347}, {29.1266, 6.17646, 5.21311}, {32.5336, 5.16003, 6.85022}, {36., 4., 9.}, {0., 8., 9.}, {3.577, 8.23883, 7.07644}, {7.00006, 8.44598, 5.5817}, {9.68372, 8.55927, 4.91913}, {11.8439, 8.59021, 4.89283}, {15.1008, 8.61151, 5.26167}, {18., 8.62848, 5.48311}, {20.8992, 8.61152, 5.26167}, {24.1561, 8.59023, 4.89284}, {26.3163, 8.55929, 4.91914}, {28.9999, 8.446, 5.58171}, {32.423, 8.23884, 7.07645}, {36., 8., 9.}, {0., 12., 9.}, {3.577, 11.7612, 7.07644}, {7.00006, 11.5542, 5.5817}, {9.68372, 11.4409, 4.91913}, {11.8439, 11.41, 4.89283}, {15.1008, 11.3887, 5.
```


26167}, {18., 11.3717, 5.48312}, {20.8992, 11.3887, 5.26167}, {24.1561, 11.4099, 4.89284}, {26.3163, 11.4408, 4.91914}, {28.9999, 11.5541, 5.58171}, {32.423, 11.7612, 7.07645}, {36., 12., 9.}, {0., 16., 9.}, {3.46636, 14.84, 6.85022}, {6.87341, 13.8236, 5.21311}, {9.62926, 13.2206, 4.50348}, {11.8543, 13.0766, 4.68337}, {15.0954, 12.9321, 5.31785}, {18., 12.8158, 5.70568}, {20.9046, 12.9321, 5.31785}, {24.1457, 13.0766, 4.68338}, {26.3707, 13.2206, 4.50349}, {29.1266, 13.8235, 5.21312}, {32.5336, 14.84, 6.85023}, {36., 16., 9.}, {0., 20., 9.}, {3., 20., 6.}, {6., 20., 3.}, {9., 20., 0.}, {12., 20., 3.}, {15., 20., 6.}, {18., 20., 9.}, {21., 20., 6.}, {24., 20., 3.}, {27., 20., 0.}, {30., 20., 3.}, {33., 20., 6.}, {36., 20., 9.}}

Newton-Gauss-Seidel metodom dolazimo do ravnotežnog oblika nakon 127 iteracija, dok nam je metodom gustoće sila za jednaku točnost potrebno 600 iteracija.

crt [nds4, elems]



Slika 5.8. Prostorni prikaz mreže nakon 127 iteracija Newton-Gauss-Seidelovom metodom

Ponovit ćemo postupak tako da kao ulazne podatke upotrijebimo rezultate iz metode gustoće sila nakon jedne iteracije

nds4 = newtonGS [nds2, elems, supps, func, dfunc, 0.0001, 1000]

130

```
{ {0.,0.,9.}, {3.,0.,6.}, {6.,0.,3.}, {9.,0.,0.}, {12.,0.,3.}, {15.,0.,6.}, {18.,0.,9.}, {21.,0.,6.}, {24.,0.,3.}, {27.,0.,0.}, {30.,0.,3.}, {33.,0.,6.}, {36.,0.,9.}, {0.,4.,9.}, {3.46636,5.16003,6.85023}, {6.8734,6.17647,5.21313}, {9.62925,6.7794,4.50351}, {11.8543,6.92345,4.68339}, {15.0954,7.06795,5.31787}, {18.,7.18429,5.70569}, {20.9046,7.06796,5.31787}, {24.1457,6.92347,4.6834}, {26.3707,6.77943,4.50351}, {29.1266,6.1765,5.21314}, {32.5336,5.16005,6.85023}, {36.,4.,9.}, {0.,8.,9.}, {3.577,8.23875,7.07645}, {7.00005,8.44584,5.58171}, {9.68371,8.5591,4.91914}, {11.8439,8.59002,4.89285}, {15.1008,8.61131,5.2617}, {18.,8.62827,5.48315}, {20.8992,8.61133,5.2617}, {24.1561,8.59006,4.89285}, {26.3163,8.55915,4.91915}, {28.9999,8.4459,5.58172}, {32.423,8.23878,7.07646}, {36.,8.,9.}, {0.,12.,9.}, {3.577,11.7612,7.07645}, {7.00005,11.5541,5.58171}, {9.68371,11.4409,4.91914}, {11.8439,11.41,4.89285}, {15.1008,11.3887,5.2617}, {18.,11.3717,5.48315}, {20.8992,11.3887,5.2617}, {24.1561,11.4099,4.89286}, {26.3163,11.4408,4.91915}, {28.9999,11.5541,5.58172}, {32.423,11.7612,7.07646}, {36.,12.,9.}, {0.,16.,9.}, {3.46636,14.84,6.85023}, {6.87341,13.8235,5.21313}, {9.62925,13.2206,4.50351}, {11.8543,13.0765,4.68339}, {15.0954,12.932,5.31787}, {18.,12.8157,5.7057}, {20.9046,12.932,5.31787}, {24.1457,13.0765,4.6834}, {26.3707,13.2206,4.50351}, {29.1266,13.8235,5.21314}, {32.5336,14.8399,6.85024}, {36.,16.,9.}, {0.,20.,9.}, {3.,20.,6.}, {6.,20.,3.}, {9.,20.,0.}, {12.,20.,3.}, {15.,20.,6.}, {18.,20.,9.}, {21.,20.,6.}, {24.,20.,3.}, {27.,20.,0.}, {30.,20.,3.}, {33.,20.,6.}, {36.,20.,9.}}
```

Nakon 130 iteracija dolazimo do konačnog rješenja. Uočavamo da nam je s početnom aproksimacijom koja je "bliže" rješenju potreban veći broj iteracija od naizgled lošije pretpostavke. Kao što je već spomenuto u 4. poglavlju, vidimo da je područje konvergencije izrazito nepravilno, te da ima svojstva fraktala.

.06881, 4.01461, 4.04835, 4.28237, 5.1343, 4.12757, 4.05028, 4.81923, 4.05028, 4.12757, 5.1343, 4.28237, 4.04835} }

Vrijednosti sila dobivenih nakon jedne iteracije:

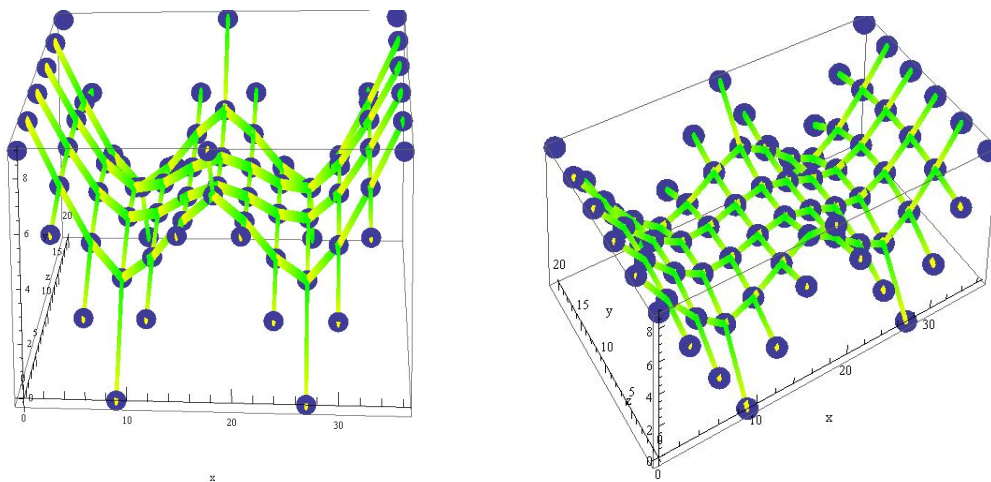
Max[f2]

5.1343 ,

Min[f2]

3.0044 .

crt [nds2, elems]



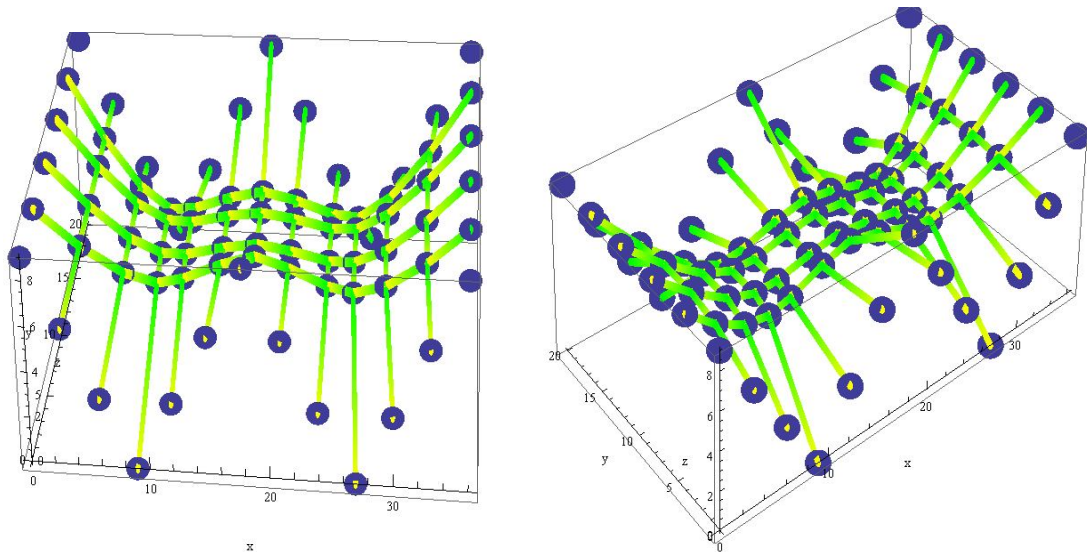
Slika 5.9. Prostorni prikaz mreže nakon jedne iteracije metodom gustoće sila

Nakon 600 iteracija dobivamo identične vrijednosti sila:

{ nds3, f3 } = multiStepFDM [nds, elems, supps, gs, 600]

{{{0., 0., 9.}, {3., 0., 6.}, {6., 0., 3.}, {9., 0., 0.}, {12., 0., 3.}, {15., 0., 6.}, {18., 0., 9.}, {21., 0., 6.}, {24., 0., 3.}, {27., 0., 0.}, {30., 0., 3.}, {33., 0., 6.}, {36., 0., 9.}, {0., 4., 9.}, {3.46636, 5.16008, 6.85024}, {6.87342, 6.17657, 5.21315}, {9.6293, 6.77953, 4.50352}, {11.8543, 6.92358, 4.68341}, {15.0954, 7.06809, 5.31789}, {18., 7.18442, 5.70573}, {20.9046, 7.06809, 5.31789}, {24.1457, 6.92358, 4.68341}, {26.3707, 6.77953, 4.50352}, {29.1266, 6.17657, 5.21315}, {32.5336, 5.16008, 6.85024}, {36., 4., 9.}, {0., 8., 9.}, {3.57701, 8.23892, 7.07648}, {7.00008, 8.44616, 5.58176}, {9.68377, 8.5595, 4.9192}, {11.8439, 8.59046, 4.8929}, {15.1008, 8.61178, 5.26171}, {18., 8.62875, 5.48315}, {20.8992, 8.6

crt [nds3, elems]



Slika 5.10. Prostorni prikaz mreže nakon 600 iteracija metodom gustoće sila

Sad ćemo postupak provesti Newton-Gauss-Seidelovom metodom tako da kao ulazne podatke upotrijebimo rezultate iz metode gustoće sila nakon jedne iteracije

```
nds4 = newtonGS [nds2, elems, supps, func, dfunc, 0.0001, 1000]
```

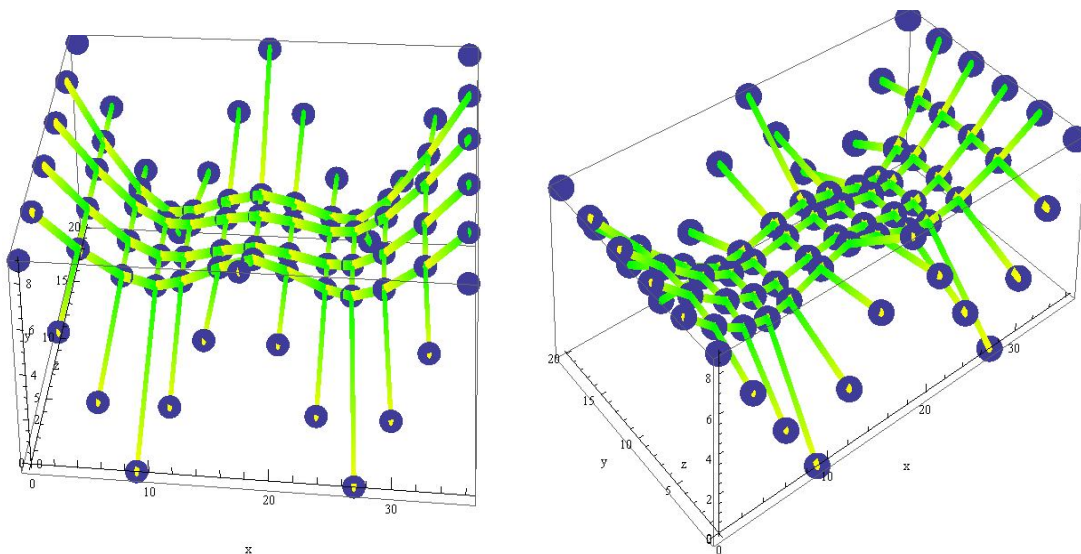
130

```
{ {0., 0., 9.}, {3., 0., 6.}, {6., 0., 3.}, {9., 0., 0.}, {12., 0., 3.}, {15., 0., 6.}, {18., 0., 9.}, {21., 0., 6.}, {24., 0., 3.}, {27., 0., 0.}, {30., 0., 3.}, {33., 0., 6.}, {36., 0., 9.}, {0., 4., 9.}, {3.46636, 5.16003, 6.85023}, {6.8734, 6.17647, 5.21313}, {9.62925, 6.7794, 4.50351}, {11.8543, 6.92345, 4.68339}, {15.0954, 7.06795, 5.31787}, {18., 7.18429, 5.70569}, {20.9046, 7.06796, 5.31787}, {24.1457, 6.92347, 4.6834}, {26.3707, 6.77943, 4.50351}, {29.1266, 6.1765, 5.21314}, {32.5336, 5.16005, 6.85023}, {36., 4., 9.}, {0., 8., 9.}, {3.577, 8.23875, 7.07645}, {7.00005, 8.44584, 5.58171}, {9.68371, 8.5591, 4.91914}, {11.8439, 8.59002, 4.89285}, {15.1008, 8.61131, 5.2617}, {18., 8.62827, 5.48315}, {20.8992, 8.61133, 5.2617}, {24.1561, 8.59006, 4.89285}, {26.3163, 8.55915, 4.91915}, {28.9999, 8.4459, 5.58172}, {32.423, 8.23878, 7.07646}, {36., 8., 9.}, {0., 12., 9.}, {3.577, 11.7612, 7.07645}, {7.00005, 11.5541, 5.58171}, {9.68
```


371, 11.4409, 4.91914}, {11.8439, 11.41, 4.89285}, {15.1008, 11.3887, 5.2617}, {18., 11.3717, 5.48315}, {20.8992, 11.3887, 5.2617}, {24.1561, 11.4099, 4.89286}, {26.3163, 11.4408, 4.91915}, {28.9999, 11.5541, 5.58172}, {32.423, 11.7612, 7.07646}, {36., 12., 9.}, {0., 16., 9.}, {3.46636, 14.84, 6.85023}, {6.87341, 13.8235, 5.21313}, {9.62925, 13.2206, 4.50351}, {11.8543, 13.0765, 4.68339}, {15.0954, 12.932, 5.31787}, {18., 12.8157, 5.7057}, {20.9046, 12.932, 5.31787}, {24.1457, 13.0765, 4.6834}, {26.3707, 13.2206, 4.50351}, {29.1266, 13.8235, 5.21314}, {32.5336, 14.8399, 6.85024}, {36., 16., 9.}, {0., 20., 9.}, {3., 20., 6.}, {6., 20., 3.}, {9., 20., 0.}, {12., 20., 3.}, {15., 20., 6.}, {18., 20., 9.}, {21., 20., 6.}, {24., 20., 3.}, {27., 20., 0.}, {30., 20., 3.}, {33., 20., 6.}, {36., 20., 9.}}

Nakon 130 iteracija dobivamo identične vrijednosti sila.

crt [nds4, elems]



Slika 5.11. Prostorni prikaz mreže nakon 130 iteracija Newton-Gauss-Seidelovom metodom

6. Zaključak

Unatoč davnoj primjeni, intenzivan razvoj konstrukcija od užadi je započeo posljednjih godina razvojem informatičke tehnologije, novim spoznajama u području teorije konstrukcija, te proizvodnji novih sintetičkih materijala izvrsnih mehaničkih i drugih svojstava. Takve konstrukcije se danas mogu oblikovati na razne načine, ostavljajući vrlo upečatljiv dojam. Izvrsno se uklapaju u gotovo svaku sredinu, osobito u ambijent neke starije arhitektonske cjeline, gdje konstrukcija od užadi može biti vizualno bolje rješenje od, primjerice, suvremenog betonskog objekta.

U ovom su radu opisane osnovne značajke konstrukcija od užadi i dane su teorijske postavke nalaženja ravnotežnog oblika takvih konstrukcija. U tri je primjera prikazan postupak računalnog oblikovanja konstrukcija od užadi. Primjeri su riješeni metodom gustoće sila i Newton-Gauss-Seidelovom metodom, te su uspoređene brzina i točnost obje metode. Zaključeno je da Newton-Gauss-Seidelovom metodom dolazimo do ravnotežnog položaja manjim brojem iteracija, no veliki je nedostatak te metode taj što nemamo garanciju da će uvijek konvergirati. Optimalno rješenje je da približne koordinate slobodnih čvorova nađemo metodom gustoće sila, te onda konačni položaj Newton-Gauss-Seidelovom metodom. U tom će nam slučaju metoda vrlo brzo konvergirati prema konačnom rješenju.

Literatura

- [1] Buchholdt, H.A.: *An introduction to cable roof structures*, Press Syndicate of the University of Cambridge, 1999.
- [2] Dvornik, J.; Lazarević, D.: *Viseće konstrukcije od platna i užadi*, Građevni godišnjak 1997, HDGI, Zagreb, 1997., str. 239-297.
- [3] Dvornik, J.; Lazarević, D.; Fresl, K.: *The Fractal Nature of the Form Finding Equations*, Computational mechanics in the UK - 11th Annual Conf. Assoc. Computational Mechanics in Engineering (UK), (Ed. M. A. Wheel), University of Strathclyde, Glasgow, UK, 2003, 201-204
- [4] Flannery, B.P.; Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.: *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992., 355-362.
- [5] Fresl, K.; Gidak, P.: *Prednapete gipke konstrukcije od užadi*, bilješke s predavanja, Građevinski fakultet, Zagreb, 2011.
- [6] Ortega, J.M.; Rheinboldt, W.C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [7] Smokrović, N.: *Metoda gustoće sile*, završni rad, Građevinski fakultet, Zagreb, 2011.
- [8] Travaš, V.; Kožar, I.: *Statička i dinamička analiza prostorne lančanice*, Građevinar 60, 2008, 395-402.