

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

TEORIJE ZIDANIH LUKOVA

ZAVRŠNI RAD

Student: Ana Križnjak, 0082045407

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, lipanj 2015.

Sadržaj

1. Uvod	4
1.1. Općenito o lukovima	4
1.2. Zidani luk.....	6
1.3. Povijesni pregled primjene lukova u graditeljstvu	6
2. Pregled razvoja teorija proračuna zidanih lukova	11
2.1. Tradicionalni (srednjovjekovni) pristup	11
2.2. Moderni (suvremeni) pristup	11
2.2.1. Robert Hooke, 1675.	12
2.2.2. La Hire 1695., 1712.....	13
2.2.3. Couplet 1729., 1730.	14
2.2.4. Poleni, 1748.....	16
2.2.5. Coulomb, 1773.	16
3. Vlačno-tlačna analogija	18
3.1. Vlačno-tlačna analogija	18
3.2. Tlačna linija	21
3.3. Teorija elastičnosti.....	23
3.4. Teorija plastičnosti	24
4. Granično stanje sloma i mehanizmi sloma	25
5. Primjeri mehanizama sloma zidanog luka	27
6. Zaključak	33
7. Literatura	34

Popis slika

Slika 1. Zidani lukovi

Slika 2. Oblici luka

Slika 3. Osnovni dijelovi luka

Slika 4. Luk građen na tradiciji blata i trske

Slika 5. Pont de les Ferreres

Slika 6. Katedrala Notre - Dame u Chartresu

Slika 7. Prvi metalni lučni most preko rijeke Severn

Slika 8. Odnos segmetnog luka i lančanice

Slika 9. Mehanika polukružnog luka

Slika 10. Statika polukružnog luka

Slika 11. Luk koji se ne može urušiti pod opterećenjem u točki A

Slika 12. Polukružni luk minimalne debljine

Slika 13. Polenijeva analiza ravnoteže

Slika 14. Kupola bazilike Sv. Petra u Rimu kupole bazilike Sv. Petra

Slika 15. Ravnoteža luka prema Coulombu, 1773.

Slika 16. Analogija između luka i lančanice

Slika 17. Uz pojam rezultantne linije: a) rezultanta unutarnjih sila i pripadajući moment u nekome presjeku luka, b) oblik i dimenzije jezgre pravokutnog presjeka

Slika 18. Tlačna linija i poligon sila

Slika 19. Postupak određivanja tlačne linije

Slika 20. Formiranje četvrtog zgloba u luku

Slika 21. Kameni lukovi „beskonačne“ čvrstoće

Slika 22. Lančanica se nalazi unutar luka (luk u ravnoteži)

Slika 23. Povećanje raspona luka

Slika 24. Smanjenje raspona luka

Slika 25. Luk opterećen koncentriranim opterećenjem

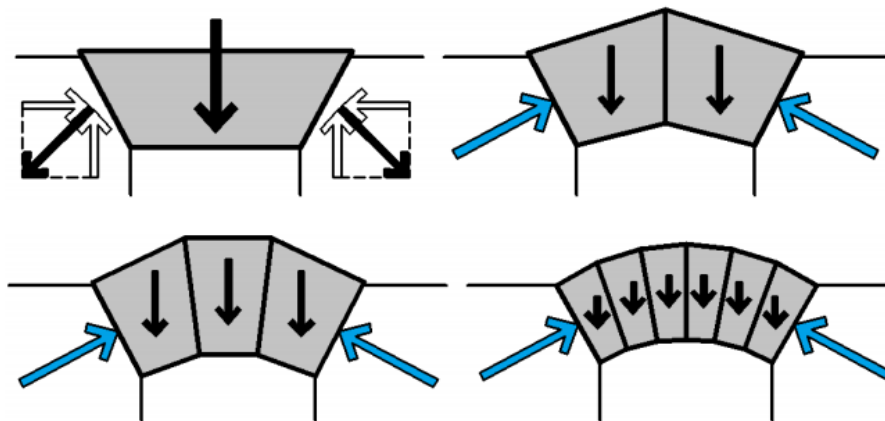
Slika 26. Kraljev most

1. Uvod

1.1. Općenito o lukovima

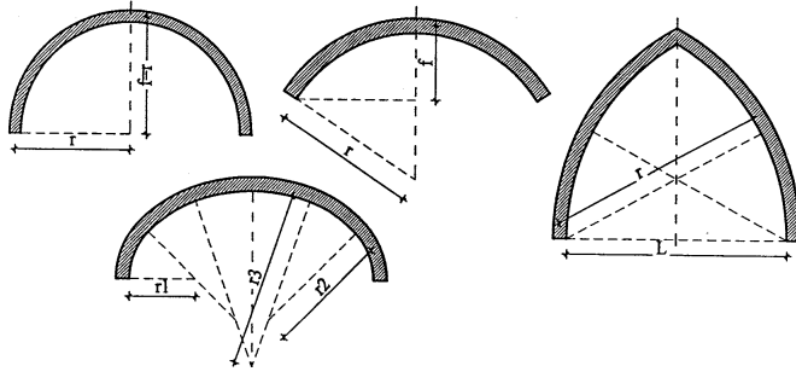
Lukovi su gredni nosači oblikovani tako da u njima nastaje tlačna sila, kojoj se odupiru vertikalne i horizontalne reakcije na osloncima. Takvim oblikovanjem momenti se smanjuju, a u idealnim slučajevima iščezavaju. Idealni lukovi su oni lukovi kod kojih ne postoji moment savijanja, odnosno spojnice rezultanata unutarnjih sila u svakom se presjeku (tlačna linija) podudara s osi luka.

Lukove možemo podijeliti prema materijalu od kojeg su građeni, statičkom sustavu te obliku luka. Prema materijalu od kojeg su građeni lukovi mogu biti zidani i kameni, betonski i armirani, metalni i drveni. Prvi lukovi vjerojatno su nastali na tradiciji građenja blatom i trskom, a nešto kasnije od kamena i opeke. Razvojem suvremenih materijala nastali su lukovi građeni betonom i čelikom. Specifično je da lukovi građeni od kamena i opeke, odnosno zidani lukovi imaju malu vlačnu čvrstoću.



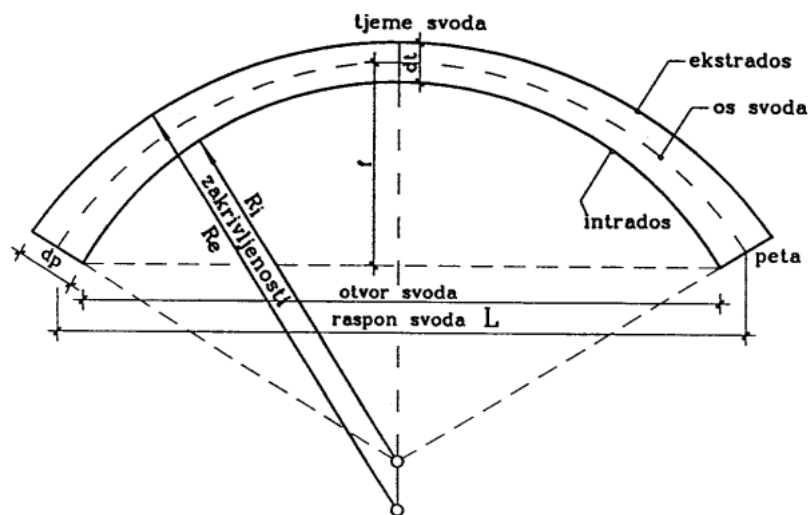
Slika 1. Zidani lukovi

Prema obliku luka lukovi mogu biti polukružni ili segmentni, gotički ili šiljasti, košarasti, oštri, eliptični i drugi. Prema statičkom sustavu lukove dijelimo na upete (bez zglobova, u krajnjem slučaju prelaze u elastično upete lukove), jednozglobne (sa zglibom u tjemenu), dvozglobe te trozglobe.



Slika 2. Oblici luka

Luk se sastoji od dijela oko najviše točke luka koja se naziva tjemenom i dijela uz oslonce koji se naziva peta luka. Strelicom luka naziva se visinska razlika između pete luka i tjemena luka, a označena je na slici 3. slovom f . Temeljne linije luka su intrados koji predstavlja liniju donjeg ili unutrašnjeg ruba luka i ekstrados koji predstavlja liniju gornjeg ili vanjskog ruba luka. Horizontalni razmak težišta ležajnih ploha, na slici 3 oznaka L , naziva se rasponom luka, dok je otvor luka horizontalni razmak između točaka intradosa. Kod projektiranja lukova spljoštenost ili plitkost jedan je od najbitnijih parametara, a predstavljena je omjerom strelice prema rasponu; uz oznake na slici 3.: f/L . Spljoštenost ili plitkost luka ima značajan utjecaj na naprezanja i deformacije od skupljanja, puzanja, promjene temperature i pomaka peta luka.



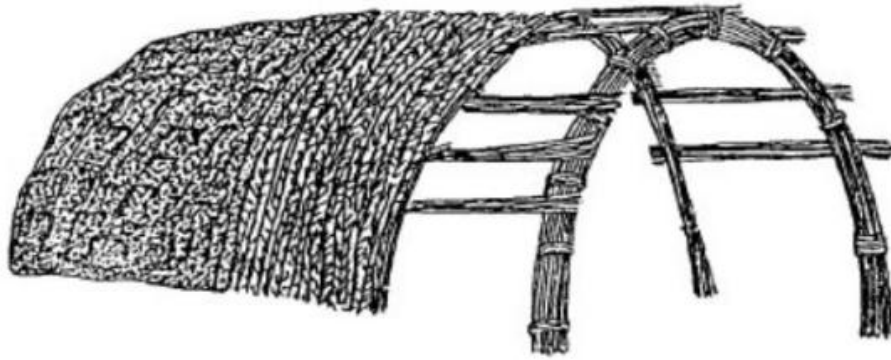
Slika 3. Osnovni dijelovi luka

1.2. Zidani luk

Iako se danas koriste mnogi moderni građevni materijali, kroz ostavštinu povijesnih građevina koje su napravljene od materijala kao što su kamen i opeka, možemo zaključiti da zidane konstrukcije zadržavaju svoja prvobitna svojstva. Svojstvo zidanih konstrukcija da zadržavaju prvobitna svojstva nam govore upravo o njihovoj složenosti. Među glavne konstrukcijske elemente zidanih konstrukcija spadaju i lukovi. Zbog različitih vanjskih i unutarnjih djelovanja kojim su zidane konstrukcije izložene, te kako bi bile što dugotrajnije potrebno je poznavati osnovna mehanička svojstva zida. Osnovna mehanička svojstva zida su: zid je anizotropan, heterogeni materijal velike tlačne i male vlačne čvrstoće koji nema problema s opasnošću od klizanja između kamenih i/ili zidanih blokova, odnosno ne postoji problem stabilnosti. U načelima granične analize zidanih konstrukcija (principles of limit analysis of masonry structures), profesora Heymana, upravo su ta osnovna mehanička svojstva sistematizirana.

1.3. Povijesni pregled primjene lukova u graditeljstvu

Lukovi su bitan konstrukcijski element koji je uz inovacije i osuvremenjivanje samih materijala usavršio svoju primjenu u graditeljstvu i arhitekturi. Pomoću njega su se po prvi puta mogle premostiti široke i duboke doline, a gradnja lukova razvijala se od izvedbe na skeli do današnjeg postupka konzolne gradnje. Osim što pripadaju jednom od najstarijih sustava za savladavanje prepreka, lukovi nisu služili samo u tu svrhu, već su se primjenivali za različite graditeljske zadatke. Pretpostavlja se da su prvi lukovi načinjeni pri kraju kamenog doba, odnosno 4000. god. pr. Kr. u starom Egiptu i Mezopotamiji. Građeni na tradiciji blatom i trskom, drevni graditelji su svežnjeve od trščanih stabljika upotrebljavali za prvo gradivo za kuće. Svežnjeve su slagali u pravokutne okvire, zatim zabijali, a potom savijali jednog prema drugom, povezivajući ih u primitivan luk. Takve lukove upotrebljavali su za umetanje u okvir nalik svodu koji su potom oblijepili blatom. Time su nastajali pokrovi koji su ih štitili od loših vremenskih uvjeta.



Slika 4. Luk građen na tradiciji blata i trske

Stari Rimljani su bili plodni graditelji no oni nisu izmislili luk. Umjesto toga, Rimljani su posudili ideju luka, koji su primjenivali Egipćani, Babilonci i Grci, i usavršili izgradnju lukova betonom. Osim što su poznavali kamen, drvo i opeku, stvorili su novo građivo – beton. Novim materijalom postizali su mnogo veću trajnost od ostalih materijala. Kako bi dobili beton, Rimljani su prvo načinili mort od pucolana i vode, kojeg su preuzeli od Grka, a zatim su time prelijevali unaprijed pripremljene i posložene komade agregata odnosno kamena. Također su se koristili metalom, olovom i drvom. Važno je napomenuti da su Rimljani bili uspješni graditelji kamenih svođenih mostova od kojih se i danas neki upotrebljavaju u cestovnom prometu, zatim akvadukta od kojih je poznatiji akvadukt vodovoda Dioklecijanove palače u Splitu. Mnogi rimski mostovi imaju polukružni odnosno segmetni luk, a najplići rimski luk ima spljoštenost $f/L=0,19$. Starorimski graditelji bili su sposobni preuzeti, razraditi i unaprijediti postojeća saznanja, poboljšati ih vlastitim izvornim doprinosima i sagraditi građevine koji spadaju među najuspješnije i najtrajnije građevine naše civilizacije.



Slika 5. Pont de les Ferreres

U srednjem vijeku nakon pada Zapadnog Rimskog carstva 476. god. po. Kr. spominju se prekrasni objekti poput katedrale u Aachenu, Vizigotska kraljevska dvorana u Austriji izgrađena oko 842.–850. godine te samostan Lorsch koji je specifičan po svom ulaznom trijemu u kojem obloga od bijeloga i crvenog pješčenjaka raščlanjuje oba pročelja prema uzoru rimskog slavoluka. Osim u Europi, u tom razdoblju vještine građenja širile su se i izvan Europe, pa su tako i izgrađeni prvi segmentni lučni mostovi u Kini.

U razdoblju Romanike otvori su se premošćivali i nosači povezivali isključivo polukružnim lukovima građenim pomoću jednostavne tehnike od kamenova klinastog oblika, bez rimskog stepenastog profiliranja i vezivanja u zidove od klesanaca. Tako se kod malih otvora i ukrasnih frizova luk klesao iz jednog komada kamena. Temelj romaničkog stila bila je kombinacija zida, luka i stupca. Tako je nastao i bačvasti svod kod kojeg se zidni istaci pred stupcima nastavljaju preko svoda kao pojasni lukovi, povezivajući oba zida najčešće uskim pravokutnim travejima.

Za razliku od antike koja je naglašavala odnos nosača i tereta, gotika je težila nijekanju sile teže. Umjesto bačvastog svoda graditelji su počeli križati prelomljene lukove koji su, za razliku od polukružnih, mogli imati zajednički završetak u tjemenu. Kod križnog svoda polukružnim vođenjem uzdužnih i poprečnih lukova nastao je prostorni travej. Svi pritisci su se koncentrirali u unaprijed određenoj točki, pa su svodnu konstrukciju nosili stupovi i lukovi. Jedna od mana križnog svoda je da se u četiri točke na kojima počiva₂ prenosi opterećenje, ali

svod isto tako stvara poprilično jak horizontalni potisak. Lebdeći upornjaci su se primjenjivali upravo da bi se riješio taj problem. Oni su se pružali od kontrafora podupirući određeni dio građevine u smjeru suprotnom od smjera djelovanja sile koja ga potiskuje iz ležišta. Važno je i spomenuti da se uz prodor Turaka u Europu pojavljuje uporaba šiljastog luka. Šiljasti ili Maurski luk nastao je iz polukružnog luka. Naime, graditelji su zamijetili da se uporabom šiljastog luka može postići veća strelica luka. Šiljasti luk se također rabio iz estetskih razloga, pa je tako upotrebljavan i za lukove nad prozorima i vratima gotičkih katedrala i ostalih građevina. Iz tog razdoblja poznata nam je i gradnja mosta u Avignonu. Naime, Johan Benezet, graditelj mosta primijenio je i unaprijedio neke starorimske elemente. Specifičnost mosta je njegov luk koji se koristi krivuljom sastavljenom od 3 kružna odjsečka s različitim središtima. Jedan od očuvanih je i most Ponte Vecchio koji se sastoji od tri plitka segmentna luka i nagoviješta renesansu.



Slika 6. Katedrala Notre - Dame u Chartresu

U razdoblju renesanse, koja je začeta u Italiji u 15. stoljeću, znanost i umjetnost doživljavaju procvat. Teži se uporabi dekorativnih elemenata i poboljšanju u oblikovanju, pa su tako renesansi graditelji povećali raspone i smjelost lukova. Osim poboljšanja više se ne rabe polukružni lukovi, a ni zašiljeni gotički lukovi nego segmentni luk, a razvijaju se i drugi oblici. Među doprinose renesanse ubraja se i konstruktivni princip rešetke koji je bitan za

skele lukova. Jedna od zanimljivosti renesanse je i drveni lučni most Kintai iz Japana. Most se sastoji od pet uzastopnih drvenih lučnih mostova. U renesansi se isticao i naš poznati mostograditelj Faust Vrančić.

U novom razdoblju pojavom novih materijala više se nisu gradili zidani lukovi. Lukovi su se upotrebljavali, a i danas se upotrebljavaju u dekorativne svrhe i u mostogradnji. Kao novi konstrukcijski materijal isticao se čelik koji se počeo upotrebljavati i u mostogradnji. Godine 1779. izrađen je prvi metalni lučni most preko rijeke Severn u Velikoj Britaniji. Urbanizacijom zahtjevi za izgradnjom mostova većih raspona postaju sve veći. Izumom armiranog betona započela je gradnja masivnih konstrukcija 20. stoljeća, a veliki kameni lučni mostovi pali su u zaborav. Iako je beton imao mane poput pojave puzanja i skupljanja, graditelji su ipak razradili oblike lukova i svodova primjerene armiranom betonu.



Slika 7. Prvi metalni lučni most preko rijeke Severn

2. Pregled razvoja teorija proračuna zidanih lukova

2.1. Tradicionalni (srednjovjekovni) pristup

Jedna od najstarijih građevinskih tehnika koja se sačuvala sve do današnjih dana je zidanje, odnosno povezivanje kamenih ili glinenih blokova mortom. Prve zidane konstrukcije bile su zapravo gomile prirodnog kamena. Kako smo spomenuli u uvodu i pregledu primjene lukova kroz povijest, razvojem ljudskih vještina i alata usavršavale su se i tehnike oblikovanja. Kroz razne kulture također su se ravijali i različiti konstrukcijski oblici, pa tako i lukovi. Možemo reći da zidanje svojom jednostavnošću i dugovječnošću održava svoju tradiciju i raširenost po cijelom svijetu. Izazov ondašnjim graditeljima bilo je razumijevanje i opisivanje mehaničkog ponašanja zidanih konstrukcija, odnosno kako izgraditi luk koji se neće urušiti. U prošlosti graditelji nisu proračunavali zidane konstrukcije, već su vještine izrade zidanih lukova stjecali na temelju iskustva te prenosili s naraštaja na naraštaj. Rimski graditelji drugačije su pristupali građenju zidanih lukova od gotičkih i renesansnih graditelja. Smatralo se da je konstrukcija koja ima prave proporcije konstrukcijski ispravna i takvo se razmišljanje zadržalo kroz cijeli srednji vijek. Tradicionalna (srednjovjekovna) pravila projektiranja zidanih lukova bila su geometrijska. To projektiranje luka sastojalo se od određivanja debljine za dani raspon i dano opterećenje, odnosno definiranja geometrijskih odnosa između pojedinih konstrukcijskih elemenata zidanog luka. Po oblicima luka razlikuju se i geometrijski odnosi.

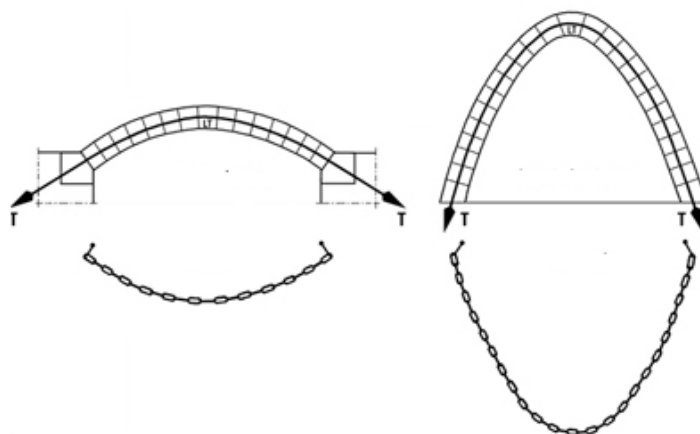
2.2. Moderni (suvremeni) pristup

Iako su brojne impozantne građevine, koje su nastale na tradicionalnom pristupu, sve do danas očuvane i pokazale da znanje o stabilnosti i raspodjeli sila u tom razdoblju unutar zidanih konstrukcija nije bilo zanemarivo, s vremenom se počelo pristupati izgradnji lukova prema teorijskim podlogama. Mnogi znanstvenici postavljali su svoje analogije i teoreme pri pristupu gradnji zidanih lukova. Matematičar G. Galilei jedan je od prvih koji je uzeo u obzir čvrstoću konstrukcije. Naime, pokušavao je riješiti problem čvrstoće oslonaca lukova. U svojoj knjizi „*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze*“ bavi se čvrstoćom materijala. Bavio se pitanjem kolika je čvrstoća konzolne grede i kolika je vrijednost kritičnog opterećenja te pokazao da tradicionalni pristup, odnosno geometrijska pravila nisu uvijek primjenjiva. Osim za napredak u analizama lukova pojavilo se zanimanje i

za konstrukcijsko stanje sloma. Inženjer S. L. Navier smatrao je da je glavni zadatak kod izgradnje proračun stvarnog stanja konstrukcije i osiguranje da pridružena naprezanja ne prekorače granične vrijednosti. Danas postoji obilje konstrukcija koje predstavljaju sklad između opeke, čelika, betona, stakla i plastike. Materijali koji se ugrađuju u zidani tip konstrukcija su ekološki prihvatljivi i zdravi te se lako recikliraju, a to je ono što se danas i traži. Još uvijek je preostalo puno prostora za razvoj, inovaciju i unaprijeđenje pristupa za izgradnju zidanih lukova.

2.2.1. Robert Hooke, 1675.

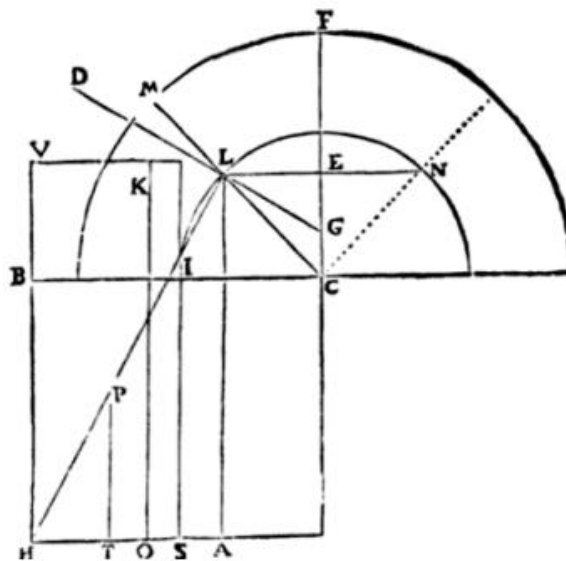
Jedan od najmnogostranijih znanstvenika u to doba bio je Robert Hooke. Osim što je bio fizičar, matematičar i izumitelj, veliki doprinos imao je i u graditeljstvu. Hookeov zakon bio je njegov najvažniji doprinos u teoriji elastičnosti, a time i u građevinarstvu. Poznao je kako u fizikalnom smislu funkcioniraju lukovi i uočio da dijelovi kamenog luka imaju oblik obrnute obješene lančanice. Glavna pretpostavka bila je „*Kao što visi savitljiva nit, tako će, ali obrnuto, stajati kruti luk.*“ koja je objavljena tek nakon njegove smrti. Robert Hooke znao je da je rješenje problema oblika lanca koji visi pod vlačnim opterećenjem vlastite težine istovremeno rješenje za savršen oblik luka pod tlačnim opterećenjem. No, Hooke nije uspio dati matematičko rješenje, pa je kasnije matematički oblik obješene lančanice izveo David Gregory koji je 1698. došao do Hookeove tvrdnje te je proširio tako da se može primijeniti kod lukova konačne debljine. Smatrao je da su lukovi stabilni kada se unutar njihove debljine može položiti obješena lančanica. Ta se analogija primjenjivala kroz 18. i 19. stoljeće.



Slika 8. Odnos segmetnog luka i lančanice

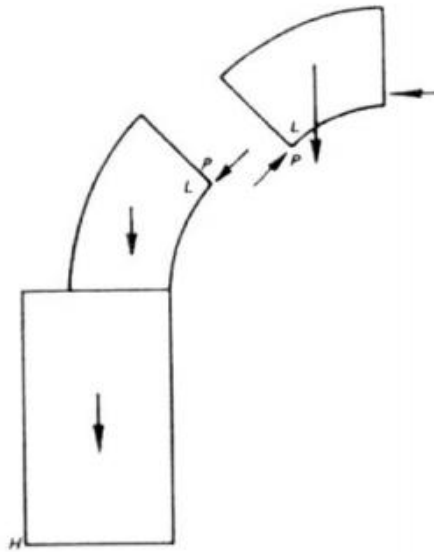
2.2.2. La Hire 1695., 1712.

U Francuskoj se kroz 18. stoljeće javio drugačiji pogled na isti problem. Fizičar La Hire postavio je drugačije pretpostavke o teoriji luka. Objavio je knjigu „*Traite de mecanique*“. Pretpostavio je da na mjestima dodirnih površina između dvaju klinasto oblikovanih kamenih blokova u zidanom polukružnom luku nema trenja tako da je sustav u ravnoteži. La Hireov grafički postupak određivanja poligona sila svodio se na određivanje tlačne linije i zapravo je bilo rješenje za proračun lukova. Time je zaključio da za lukove s glatkim blokovima tlačna linija mora biti okomita na dodirne površine, tako da je i verižni poligon fiksiran za oblik luka. U slučaju da su ležajne plohe horizontalne, tada bi težina blokova morala biti beskonačna, odnosno takav luk ne bi mogao stajati. Godine 1712. odbacio je svoje pretpostavke iz 1695. godine i u svoju novu pretpostavku uveo i trenje. Trenje je bilo toliko veliko da se klizanje nije moglo dogoditi, pa tlačna linija više nije unutar luka ležala okomito na dodirne površine.



Slika 9. Mehanika polukružnog luka

Također se bavio proračunavanjem optimalne debljine stupova ili zidova koji su podupirali lukove. Tako je promatrao duljinu LM na svojoj skici polukružnog luka kao dodirnu plohu dva susjedna bloka koji nisu povezani vezivnim sredstvom. Zbog promjene duljine raspona u točki L se formirao zglobov i točka L je postala kontaktna točka između donjeg dijela luka LMI i gornjeg dijela LMF i upravo zbog toga kroz tu točku prolaze sve sile unutar luka.

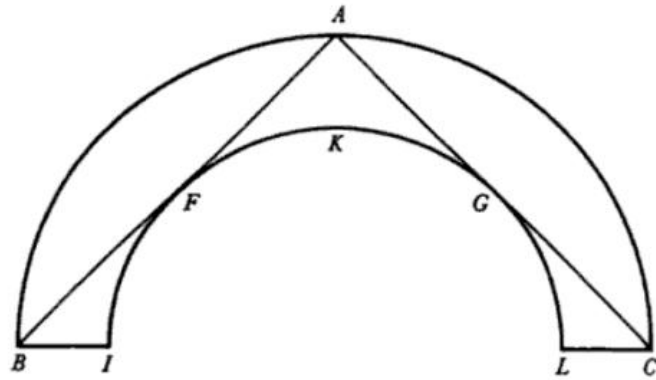


Slika 10. Statika polukružnog luka

Da bi se mogle pronaći vrijednosti svih sila potisak P u zglobu L mora tangirati intrados. Nakon računanja momenta oko točke H , za donji dio luka i stup, dobiva se izraz za provjeru stabilnosti cijele konstrukcije. La Hireove spoznaje i pretpostavke mnogo su doprinjele daljnjim istraživanjima.

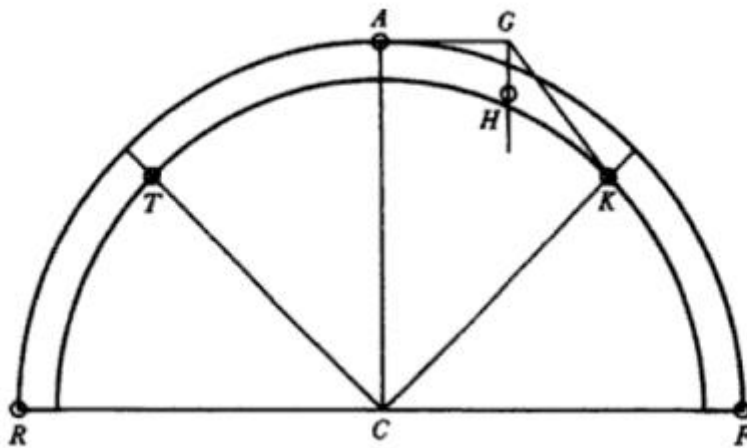
2.2.3. Couplet 1729., 1730.

Couplet je bio francuski inženjer koji je iznio mnogo ogleda u različitim područjima, pa je tako i predstavio ogled o teoriji zidanih lukova. U knjizi „*Memoire*“ 1729. godine Couplet ponavlja La Hireove analize koje su se temeljile na upotrebi glatkih blokova bez trenja, no takvi lukovi zapravo nisu imali primjenu u graditeljstvu. Među najznačajnijim ogledima bio je drugi ogled o teoriji zidanih lukova, koja se zasnivala na tvrdnji da se slom dogodi kada se u luku pojavi dovoljan broj zglobova da se stvori mehanizam. Istraživanjem na realnim lukovima uvodi pretpostavke o ponašanju materijala, odnosno navodi da trenje spaja kamene blokove te time onemogućava klizanje i nema otpora kod odvajanja blokova. Na temelju tih tvrdnji iznosi sljedeće zaključke: zid nema vlačnu čvrstoću, tlačna čvrstoća je beskonačna i ne može doći do sloma zbog klizanja. U svojim teoremima tvrdi da, ako tetiva povučena iz polovine ekstradosa prema peti luka ne siječe intrados, neće doći do rušenja konstrukcije pod opterećenjem u točki A , a razlog tome je nastanak tlačne linije AFB i AGC .



Slika 11. Luk koji se ne može urušiti pod opterećenjem u točki A

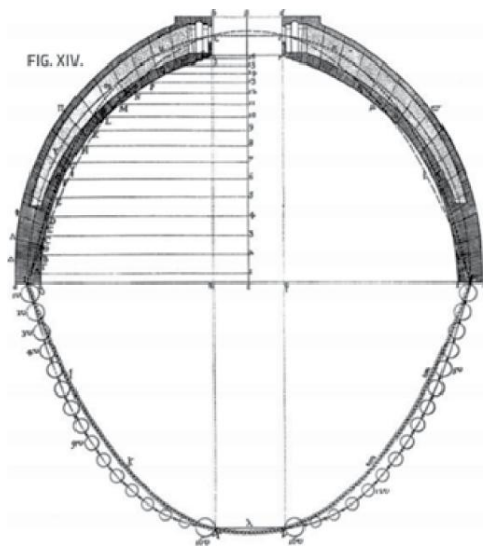
Kada bi se u stvarnosti upornjak širio, kao posljedica luk bi se srušio, upravo zbog toga što se kut BAC povećao. Couplet se također bavio i problemom najmanje debljine polukružnog luka koja nosi samo vlastitu težinu. Smatrao je da će se luk urušiti pod vlastiti opterećenjem odvajajući se u 4 komada koji su međusobno priključeni u zglobovima R, T, A, K i F kao na slici. Da bi došao do odnosa radijusa i debljine luka te stabilnosti luka da se ne sruši, Couplet je razradio La Hireove analize. Sistemom sila za projektiranje upornjaka uspio je postići da se konstrukcija ne uruši.



Slika 12. Polukružni luk minimalne debljine

2.2.4. Poleni, 1748.

Poleni je bio inženjer koji je na kupoli bazilike Sv. Petra rješavao problem lančanice. Naime, na temelju pukotina koje su se širile od dna kupole, Poleni je podijelio kupolu na 50 polumjeseca, od kojih je svaki shematski prikazan kao zašiljeni poluluk. Tlačna linija određena je eksperimentalno opterećujući elastične niti nizovima utega različitih težina. Na slici se može vidjeti Polenijeva analiza ravnoteže kupole bazilike Sv. Petra u Rimu, odnosno slika prikazuje rezultat u kojem je obrnuta lančanica unutar debljine kupole, a samim time znači da je kupola sigurna.



Slika 13. Polenijeva analiza ravnoteže kupole bazilike Sv. Petra



Slika 14. Kupola bazilike Sv. Petra u Rimu

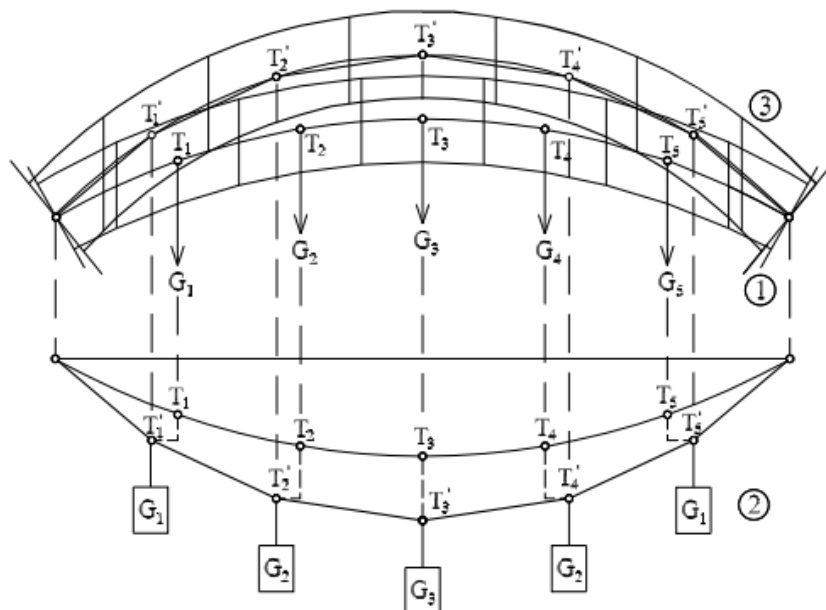
2.2.5. Coulomb, 1773.

Fizičar Coulomb je 1773. godine objavio prvu opću teoriju stabilnosti lukova. U njoj je Coulomb razvio matematičku bazu za opisivanje različitih slomova lukova uzimajući u obzir relativne rotacije i klizanje između blokova. Definirao je veličinu horizontalnog potiska u lučnim konstrukcijama H_{min} i H_{max} koje se odupiru otperećenju lukova i ne dopuštaju širenje luka.

3. Vlačno-tlačna analogija

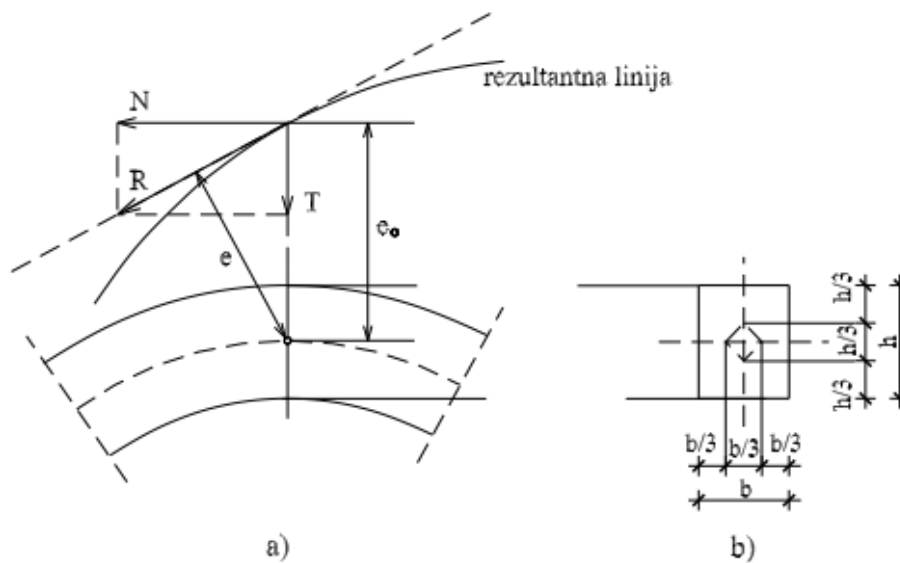
3.1. Vlačno-tlačna analogija

Prema povijesnim podacima možemo vidjeti da stari graditelji nisu bili neuki već su vješto baratali osnovnim principima mehanike, te da su Rimljani prvi uočili i razumjeli analogiju između luka i lančanice.



Slika 16. Analogija između luka i lančanice

Kako bi razumjeli vlačno-tlačnu analogiju stari graditelji su u mjerilima crtali pretpostavljene osi luka i oblikovali ekstrados i intrados. Zatim su luk dijelili na nekoliko odsječaka kojima su prema gustoći i planiranom materijalu računali težine i položaje težišta. Upotrebljavali su uže duljine osi luka, te ga opteretili utezima čije su težine odgovarale težinama odsječaka koje su proračunali. Utege su postavljali na mjesta težišta odsječaka. S obzirom da uže ima malu krutost na savijanje popimalo je ravnotežni oblik čija se zrcalna slika razlikovala od pretpostavljenog oblika luka. Hvatišta utega zauzela bi novi položaj i translirala se vertikalno i horizontalno, te bi dobivene položaje ponovno zrcalili. Kroz zrcalne položaje povukli su novu os i odredili konture, te podijelili na odsječke čija su se težišta približno podudrala s dobivenim položajima hvatišta. Zatim su ponovno određivali težine odsječaka i ponovili cijeli postupak. Stari su graditelji radili samo dva do tri ciklusa ponavljanja i upravo zbog toga je ostalo odstupanje užeta od osi luka.



Slika 17. Uz pojam rezultatne linije: a) rezultanta unutarnjih sila i pripadajući moment u nekome presjeku luka, b) oblik i dimenzije jezgre pravokutnog presjeka

Teorijski, iteraciju bi trebalo ponoviti beskonačno mnogo puta. Vlačnom linijom smatramo oblik osi užeta pod zadanim opterećenjem, a zrcalni oblik osi nazivamo tlačnom linijom. Vlačnu i tlačnu liniju nazivamo zajedničkim nazivom rezultatna linija, odnosno to je krivulja čije tangente određuju pravce rezultanata unutarnjih sila u odgovarajućem presjeku štapa. Da bi rezultatna linija postojala nužan je uvjet da uzdužna sila ne iščezava, te da nema koncentriranih momenata na štapu.

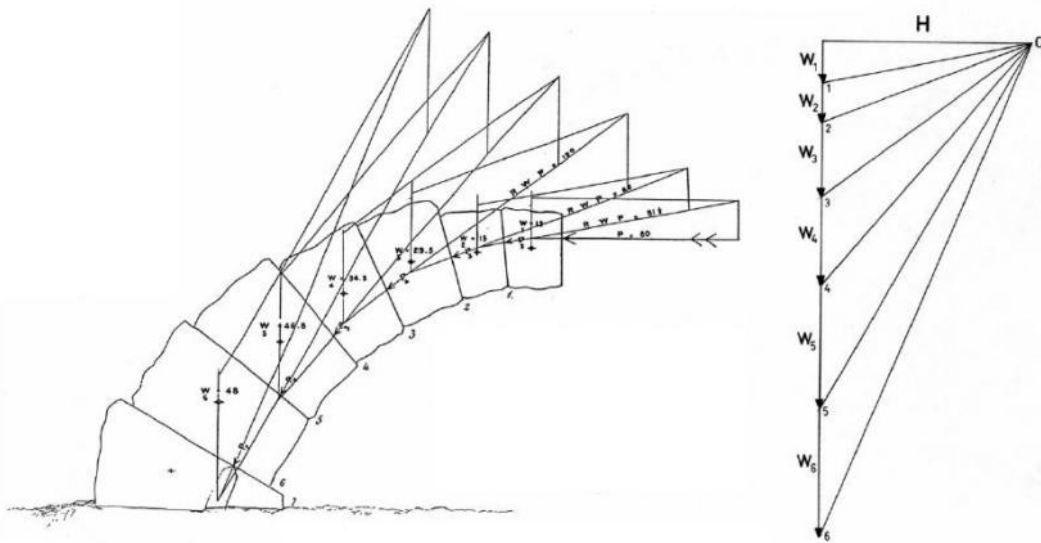
Postoje dva važna svojstva rezultatne linije:

1. Ako se os luka podudara s rezultatnom linijom, momenti savijanja su za pripadno opterećenje jednaki nuli, što je i intuitivno jasno, jer uže kao primjer vlačne linije ne može preuzeti momente i tada, zbog zrcalne analogije, ni u tlačnoj liniji nema savijanja.
2. Ako postoji odstupanje osi luka od rezultatne linije, u luku se pojavljuju momenti savijanja, te se na temelju toga odstupanja može odrediti oblik momentnog dijagrama i vrijednosti momenta koji se pojavljuju u luku.

Momentnom dijagramu na luku, prema afinom preslikavanju, odgovara lik koji zatvara os luka i os zrcaljenog užeta. Horizontalna komponenta uzdužne sile u luku pomnožena s ordinatom lika daje veličinu momenta savijanja u presjeku i taj isti moment daje uzdužna

sila u luku pomnožena s okomitom udaljenošću do užeta. Pomoću primjene jezgre presjeka možemo odrediti područje luka unutar kojeg treba smjestiti zrcaljeno uže tako da momenti ne uzrokuju vlačna naprezanja u presjecima. Momente, u jednoliko opterećenim prostim gredama na rasponima jednakim udaljenostima među hvatištima utega zanemarujemo zbog činjenice da je stalno, jednoliko opterećenje aproksimirano utezima i strogo podudaranje dviju osi nije potrebno. Momenti nastaju zbog odstupanja poligonalne linije užeta od osi luka i zbog toga je nekoliko iteracija prije opisanog postupka bilo dovoljno. Time dobivamo na kraju luk, u kojem za stalno opterećenje djeluje samo tlačno naprezanje koje je ujedno i poželjno, jer tradicijski materijali kao što su kamen ili opeka ne mogu preuzeti značajna vlačna naprezanja. Kako bi se spriječila popuštanja temeljnog tla ili djelovanja jakih potresa gradili su se masivni lukovi čija je vlastita težina dominirala u odnosu na ostala opterećenja. Velike dimenzije poprečnih presjeka imaju veću površinu jezgre, pa je i u slučaju značajnije promjene oblika tlačna linija ostala u jezgri. Ova analogija se pokazala ispravnom. Proporcionalno povećanje modela nije utjecalo na dobiveni oblik, sile se množe faktorom uvećanja na treću potenciju, a kutovi među silama ostaju sačuvani. Time se pokazuje da uvjeti ravnoteže čvorova nisu narušeni, a uvjeti kompatibilnosti ostaju zadovoljeni. Za promjenu oblika važni su omjeri sila, a ne njihovi iznosi i pri određivanju oblika ne postoji problem sličnosti. Kod pretpostavke da je uže nerastezljivo, grafičko je rješenje zapravo verižni poligon. U realnom se pokusu produljenje može kompenzirati skraćanjem užeta na krajevima, tako da duljina postane jednaka početnom iznosu.

3.2. Tlačna linija



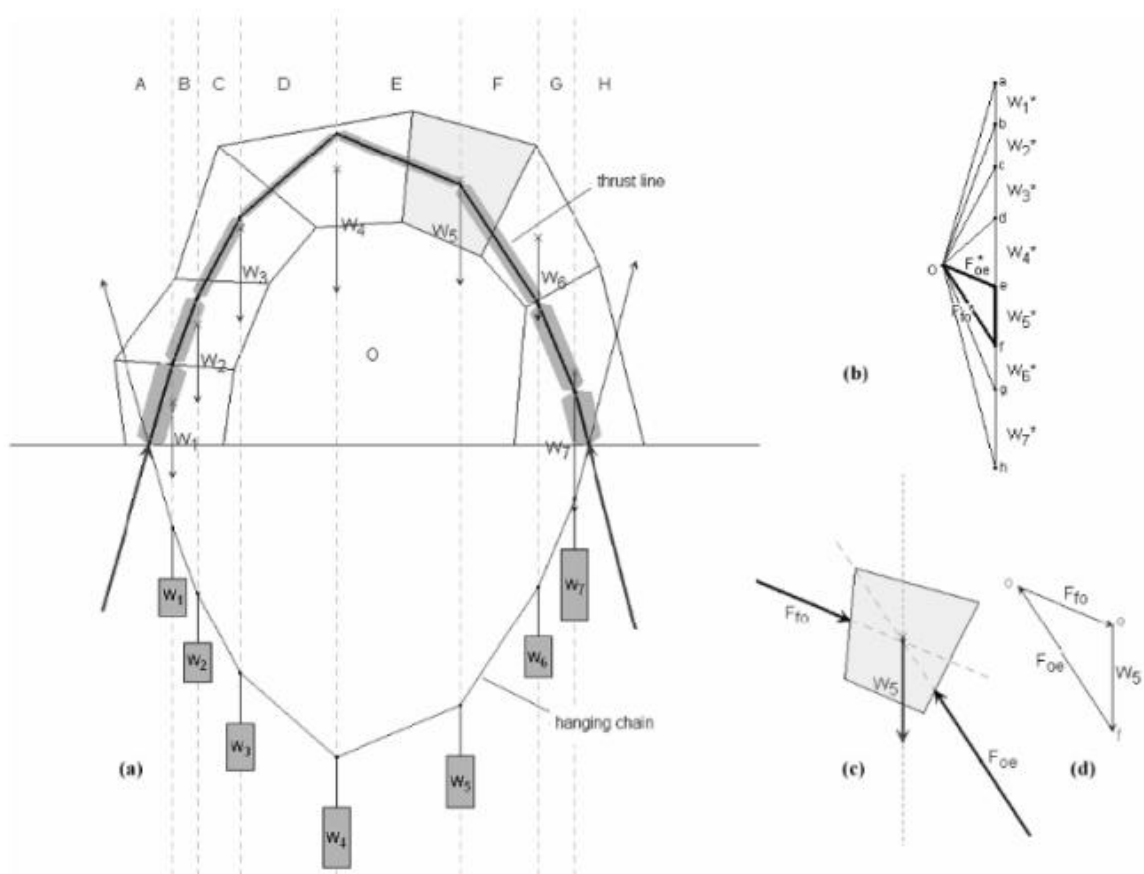
Slika 18. Tlačna linija i poligon sila

Zidani luk je geometrijski oblik kod kojeg je gomila kamena povezana mortom ili bez morta. Neke od značajki zidanog luka su upravo prijanjanje i trenje između blokova kako ne bi došlo do klizanja i urušavanja blokova. Jedan od problema prilikom građenja zidanih lukova bila je upravo mehanička stabilnost blokova, a uvjet da se zidanje mora raditi pod pritiskom nametnulo je teško geometrijsko ograničenje luka. Graditelji su se bavili stabilnošću, te došli do spoznaje da bi se opterećenje koje je djelovalo na luk prenosilo s jednog bloka na drugi, tok sila mora biti pravilan, odnosno tlačna sila, koja je rezultanta takvih naprezanja na pojedine dodirne plohe blokova, mora prolaziti tim plohama. Stabilnost samog bloka održavaju dva potiska koja djeluju sa svake strane, a točka u kojoj djeluje rezultanta naprezanja odnosno tlačna sila naziva se centar potiska. Kako bi se osigurala stabilnost, tok sila provodi se od tjemena pa sve do pete luka i na tom mjestu prenosi opterećenje na oslonce. Sila koja nastaje na mjestu dodira pete i oslonca naziva se potiskom luka. Tlačnu liniju formiraju svi položaji centra potiska. Najpovoljniji oblik osi luka pri kojemu su minimalna vlačna naprezanja određen je oblikom tlačne linije. Kako ne bi dolazilo do pojave vlačnih naprezanja graditelji su morali zadovoljiti uvjet da se rezultanta tlačnih sila ni u kojem prejsku i ni za koji slučaj opterećenja ne nalazi izvan jezgre poprečnog presjeka. Kada se os luka podudara sa tlačnom linijom moment savijanja se poništava i naprezanje se prenosi preko tlaka. U slučaju kada bi se tlačna linija postavila u obrnuti položaj dobila bi se lančanica

odnosno Hookeov obrnuti lanac. Hookeova je pretpostavka rješavala problem savršenog oblika luka pod tlačnim opterećenjem.

Jednadžbe ravnoteže nisu bile dovoljne za izračunavanje unutarnjih sila, jer je luk, osim troglobnog luka, statički neodređena konstrukcija. Upravo zbog te činjenice mnogi graditelji postavljali su pitanje „*Koja je prava tlačna linija?*“. Kako bi riješili to pitanje kroz povijest se razvilo više metoda. Jedna od njih bila je Moseleyeva metoda koja je definirala tlačnu liniju kao liniju otpora. Villarceauova metoda, druga najznačajnija, pretvarala je luk u statički određen sustav umetanjem triju zglobova.

U poglavlju 3.1. opisan je klasičan način određivanja tlačne linije koji se upotrebljavao u prošlosti. Danas se oblikovanje lukova vrši pomoću računala. Određivanje tlačne linije ne razlikuje se bitno od starog načina, no točnost postupka je ipak veća.



Slika 19. Postupak određivanja tlačne linije

Postupak se sastoji od određivanja odsječaka, zatim njihove težine i težišta blokova. Sve se to ucrtava u skicu lučne konstrukcije i nacrtava poligon sila, slike 19.a) i b). Kao što možemo vidjeti

horizontalni potisak luka predstavlja udaljenost između točke O i linije sila ah . Također možemo vidjeti da se točka O može micati po horizontali, ali time se mijenja horizontalni pritisak u osloncima, te je rezultat toga postojanje mnogo tlačnih linija. Nakon toga zrake iz poligona sila selimo na skicu lučne konstrukcije tako da se svaka zraka nalazi između pridruženih pravaca sile težine susjednih blokova. Linija koju dobivamo tim postupkom je tlačna linija luka. Na slici 19.b) možemo vidjeti trokut koji predstavlja sile koje djeluju na blok, te se vidi da su sile u ravnoteži i da upravo zbog te ravnoteže sila blok stoji. Isto pravilo primjenjujemo na sve ostale blokove luka. Na slici 19.a) možemo vidjeti da je tlačna linija identična i obrnuta lančanici na koju djeluju sile jednake težinama blokova.

3.3. Teorija elastičnosti

Poznati matematičar Poncelet 1852. godine u svojem osvrtu o teorijama lukova predložio je primjenu elastične teorije na zidane lukove. Naime, primjenom elastične teorije dobivalo bi se rješenje za pojedine oblike i vrste lukova. Lukovi su se do 1880.godine dijelili na „*elastične*“, drvene i čelične te „*krute*“ zidane i kamene. Iako su mnogi graditelji pokazivali otpor Ponceletovoj elastičnoj teoriji 1860. godine usvojene su elastične teorije zidanih lukova. Među najistaknutijima bio je Winkler koji se proučavanjem suvremenih teorija ipak vratio elastičnoj teoriji. Istaknuo je da je elastična teorija najbolje rješenje i u proračun uveo utjecaje koji su se pojavljivali i utjecali na tlačnu liniju. Zbog pojave pukotina tlačna linija često je bila drugačija od izračunate. Kao neke od utjecaja naveo je deformaciju oplata tijekom gradnje, popuštanje temeljnog tla pod pritiskom, temperaturne promjene, nesavršenost gradnje i drugi. Istaknuo je kao najbolje rješenje umjetanje unutarnjih zglobova prilikom izgradnje koji su mogli kontrolirati područje tlačne linije. Nakon toga i preostali inženjeri prihvatili su elastičnu teoriju uz istovremeno nastojanje pojednostavljenja proračuna.

Veliki korak učinio je Austrijski institut inženjera i arhitekata koji je napravio mnogobrojne testove na različitim lukovima. Tim testovima i rezultatima razvili su novu „*modernu*“ elastičnu metodu koja je ipak pokazala prisutnost rušenja zbog pomaka i stvaranje mehanizma rasporedom naknadnih plastičnih zglobova.

Na primjeru prijenosu sila sa zidanog luka na upornjake možemo vidjeti da upornjaci nisu apsolutno kruti i da će nakon određene vrijednosti potiska popustiti. Time se raspon povećava i stvaraju se zglobovi, luk postaje trozglobni, a određivanje tlačne linije moguće. Postoje dva

ekstremna položaja tlačne linije, a to su oni koji odgovaraju minimalnom i maksimalnom potisku.

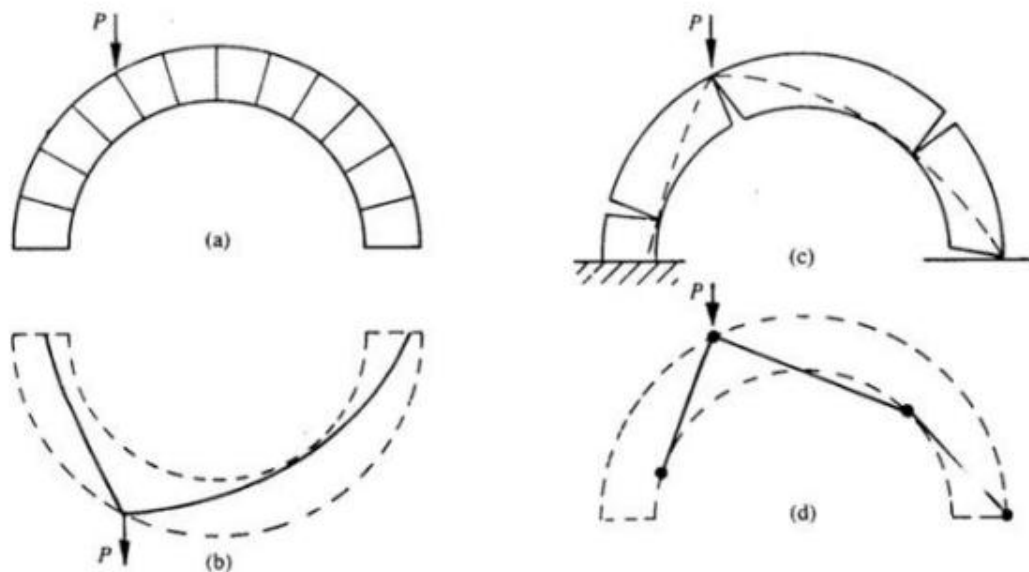
3.4. Teorija plastičnosti

Teorijom plastičnosti nastojalo se opisati plastično ponašanje materijala pojavom trajne deformacije. Ta se teorija primjenjuje, osim za modeliranje duktilnih materijala i za druge, kao što su tlo, beton i žiđe. Naime, opažanje koje je dovelo do razvoja plastične teorije konstrukcija nam govori da ako su dvije naoko identične konstrukcije zapravo s različitim malim greškama, onda se one nalaze u veoma različitim stanjima početnog naprezanja. Ipak, ta različita početna stanja naprezanja dovode do jednakog ishoda, odnosno ako ih opteretimo do sloma, izračunano granično opterećenje bit će isto. Prema teoriji plastičnosti, ako su unutarnje sile u ravnoteži s vanjskim opterećenjem, te ako za to stanje svaki unutarnji dio konstrukcije zadovoljava kriterij čvrstoće, konstrukcija je sigurna. Glavni uvjet kriterija čvrstoće je da naprezanja u svakom poprečnom presjeku moraju biti manja od granice popuštanja materijala, dok su uvjeti za žiđe da sve sile moraju ležati unutar poprečnih presjeka.

Graditelj Pippard je u svojim radovima proučavao dvozglobni luk za koji je utvrdio minimalno opterećenje zadanog položaja koje će luk pretvoriti u mehanizam, no u svojim je proučavanjima došao do zaključka da izmjerena naprezanja nisu bila ista onima koje su projektanti izračunali. Upravo zbog tih razloga napustila se dotadašnja teorija.

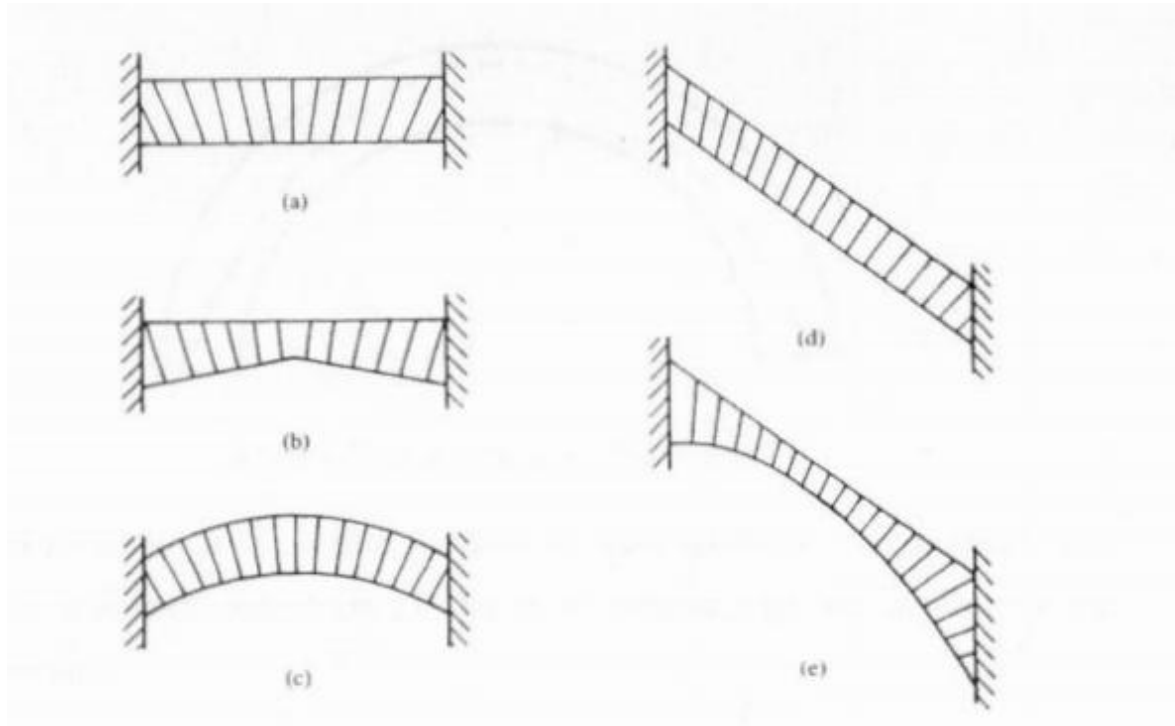
4. Granično stanje sloma i mehanizmi sloma

Pomoću mehanizama sloma možemo vidjeti ponašanje luka. Da bi došlo do mehanizma, mora se formirati plastični zglob u bilo kojem presjeku statički određene konstrukcije, dok kod statički neodređenih konstrukcija formiranje plastičnog zgloba ne uzrokuje potpuno smanjenje nosivosti. U stabilnu statički određenu konstrukciju, pretvara je n formiranih plastičnih zglobova, a da bi konstrukcija postala labilna potrebno je da se formira $n+1$ plastični zglob. Time se konstrukcija pretvara u mehanizam i nalazi se u stanju plastičnog sloma. Kao što smo već vidjeli, Couplet je smatrao da se slom u luku dogodi kada se pojavi dovoljan broj zglobova da stvori mehanizam, no nije samo dovoljan broj zglobova uzorkovao slom, već i različiti vanjski utjecaji koji uzrokuju deformacije i pomake oslonaca. Zglobovi u luku se stvaraju pod direktnim opterećenjem ili zbog deformacija. Kod promjene raspona, odnosno povećanja i smanjenja raspona naprezanja se unutar luka drugačije raspodjeljuju te time nastaje novi oblik tlačne linije. Promjena duljine luka popraćena je stvaranjem pukotina koje predstavljaju zglobove. Pukotine se ne stvaraju samo između kamenih blokova već i na samim blokovima. One su neizbježne i pokazuju da se u konstrukciji luka događaju promjene. Tlačna linija dodiruje rubne dijelove luka i na tim mjestima nastaju zglobovi, a stvaranje četvrtog zgloba dovodi do sloma luka. Ovaj se slučaj događa kod prevelikog opterećenja na luk. Opterećenje koje dovodi do urušavanja naziva se kritično opterećenje. Na slici 20. prikazano je nastajanje mehanizma otvaranjem četvrtog zgloba.



Slika 20. Formiranje četvrtog zgloba u luku

Na slici 21. prikazani su sustavi kod kojih se mehanizam sloma ne može dogoditi. Iznimno, kod ovakvih tipova lukova do mehanizma sloma dovodi jedino drobljenje ili klizanje blokova.



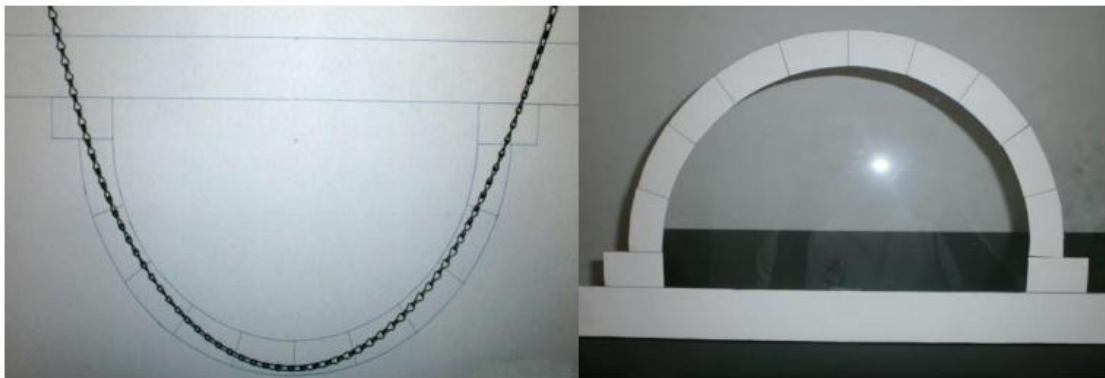
Slika 21. Kameni lukovi „beskonačne“ čvrstoće

5. Primjeri mehanizama sloma zidanog luka

Mnogi su graditelji od najstarijih vremena pokušavali ispitivanjima upoznati svojstva materijala koji su ih okruživali. Znanje su stjecali radeći različite pokuse i na taj način naučili procijeniti nosivost materijala. Neka od poznatijih ispitivanja su ona Leonarda da Vincia sa žicom na vlak, drvenom gredom na savijanje i druga. Graditelji pokuse naravno nisu vršili sa stvarnim dimenzijama, pa su često rezultati takvih pokusa bili nepouzdana i neuspješni. Modele za svoja ispitivanja izrađivali su od laganog kamena ili gipsa. Jedan od problema bio je kako izraditi zglob koji će dati jednake rezultate kao zglobovi koji nastaju u konstrukcijama stvarnih veličina. Za pedagoško–edukacijske namjene mogu se upotrijebiti jednostavniji modeli koji pokazuju ono što trebamo znati o ponašanju luka i tlačne linije.

Primjer jednostavnog modela na kojem se provodi ispitivanje:

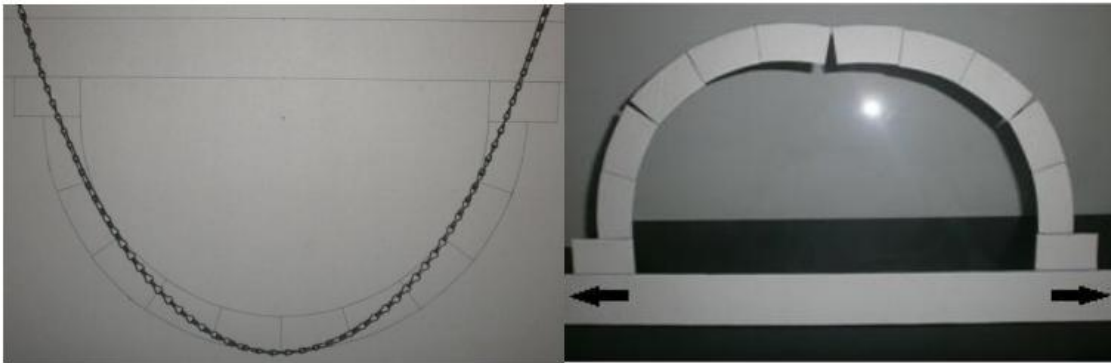
Model je napravljen od kartona i sastoji se od luka, lančanice koja tvori tlačnu liniju te podloge. Luk se sastoji od lučnih elemanata, postolja i oslonca. Sastoji se od 10 blokova koji su izrađeni od kartona. Pritom treba pripaziti nalazi li se lančanica između intradosa i ekstradosa.



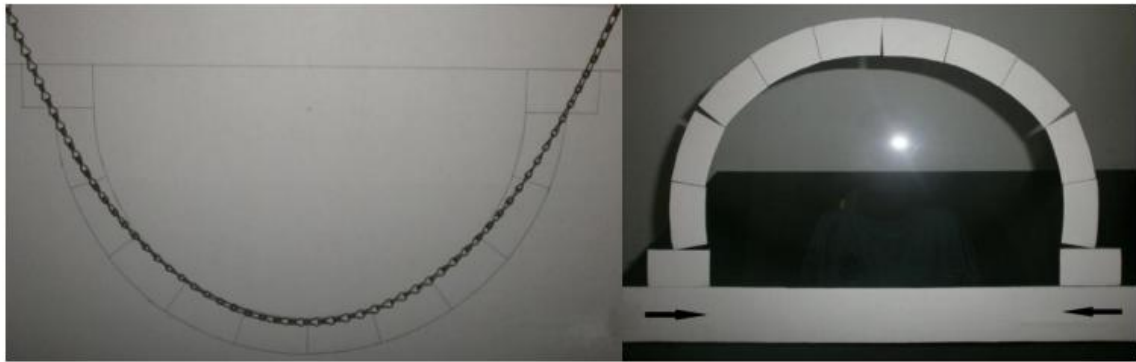
Slika 22. Lančanica se nalazi unutar luka (luk u ravnoteži)

Uvjet da se lančanica nalazi između intradosa i ekstradosa je Hookeov uvjet stabilnosti luka. Nakon izrade, blokova se slažu jedan na drugi od peto luka prema tjemenu i postavljaju na ukošenu podlogu. Tada se može vidjeti da blokovi pritišću jedan drugoga i kako se prenosi tlačna sila. Za ovakav luk može se konstruirati veliki broj tlačnih linija unutar rubova intradosa i ekstradosa. Raspon luka će se smanjivati ili povećavati ako na luk djeluje horizontalna sila u osloncu. Kao što smo već vidjeli, prilikom promjena raspona dolazi do

stvaranja zglobova, a mjesto gdje će nastati ovisi upravo o povećanju ili smanjenju raspona luka. Na luku nastaju tri zgloba i time znamo da postoji tlačna linija za taj oblik luka.



Slika 23. Povećanje raspona luka

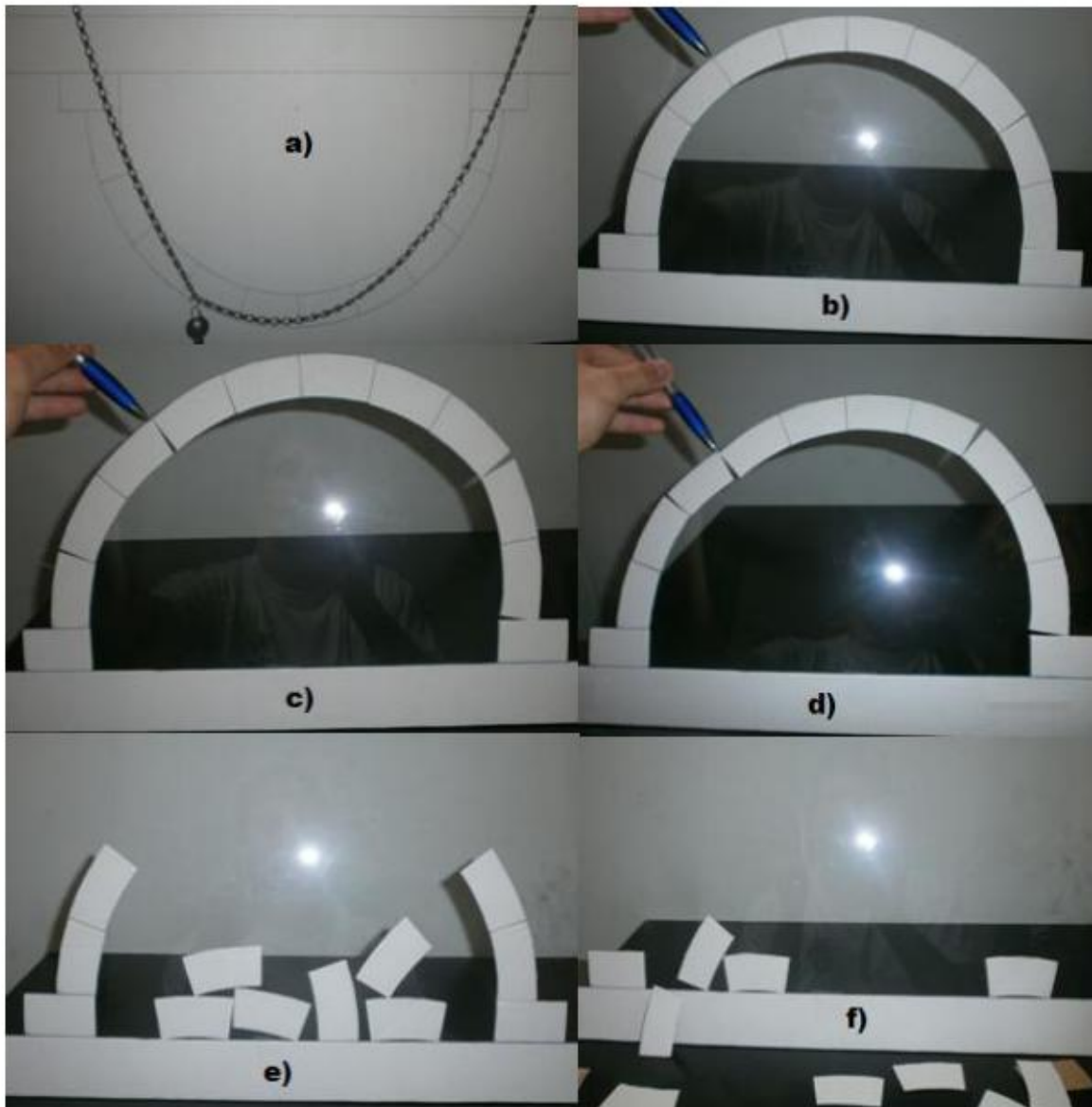


Slika 24. Smanjenje raspona luka

Iz slika možemo vidjeti da zglobovi nastaju na ekstradosu u tjemenu i na intradosu u blizini pete kod povećanja raspona luka, a kod smanjenja raspona luka nastaju zglobovi na intradosu u tjemenu i na ekstradosu u petama luka.

Vidjet ćemo na primjeru ponašanje i rušenje luka opterećenog koncentriranom silom. Pomoću lančanicice i privjeska koji je zapravo koncentrirano opterećenje možemo vidjeti oblik tlačne linije. U ovom slučaju mjesta na kojima lančanicica dodiruje intrados mjesta su na kojima nastaje pukotina koja predstavlja zglob. Prevelika vrijednost tlačnog opterećenja stvara na luku pukotine i stabilnost luka se narušava, te se luk ruši. Smanjenjem debljine luka smanjujemo i mogućnost većeg broja tlačnih linija. Tim smanjenjem preostaje nam samo

jedna tlačna linija i dolazi u pitanje granično stanje luka, a takav luk nazivamo minimalnim lukom.



Slika 25. Luk opterećen koncentriranim opterećenjem

Tvrdnje koje se mogu potvrditi nakon pokusa na ovim modelima su sljedeće:

Ravnoteža:

- (1) Lančanica predstavlja određeno ravnotežno stanje za dano opterećenje.
- (2) Postoji beskonačno mnogo oblika lančanica koje se mogu umetnuti u luk.
- (3) Varijacije u opterećenju mijenjaju oblik lančanice, odnosno tlačne linije.

Materijal:

- (4) Zidani luk mora biti u tlaku; to implicira da se lančanica mora nalaziti unutar luka.
- (5) Lančanica unutar luka garantira da model nikad neće biti u stanju vlačnog naprezanja.

Ravnoteža + materijal:

- (6) Postoje dvije ekstremne pozicije lančanice, koje odgovaraju maksimalnoj i minimalnoj visini lančanice, a analogno tome i maksimalnom i minimalnom potisku luka.
- (7) Nije moguće izračunati stvarni, ali je moguće izračunati minimalan i maksimalan potisak luka.

Pukotine i zglobovi:

- (8) Kad lančanica dodiraje rubne dijelove luka (linije intradosa ili ekstradosa), stvara se zglob. U realnom luku to se manifestira pojavom pukotine.
- (9) Zbog nanošenja opterećenja postupno se povećava polumjer luka. Rezultat je prilagodba luka novonastaloj situaciji i razvitak zglobova. Nastaju tri zglobova, jedan u tjemenu, a dva u svakoj od peta luka.
- (10) Pukotine određuju poziciju lančanice (tlačne linije), koja mora prolaziti kroz zglobove. U spomenutom slučaju, lančanica se prilagođava poziciji u kojoj je potisak luka minimalan. Luk je sada statički određen i unutar se sile mogu proračunati jednostavnim jednadžbama ravnoteže.
- (11) Kad se oslonci približe i raspon se smanji, ponovno se pojavljuju pukotine, a lančanica zauzima položaj u kojem je potisak luka maksimalan. Stvaraju se tri zglobova i luk je opet statički određen.
- (12) Bilo koji drukčiji pokret oslonaca će rezultirati sasvim novim stanjem pukotina. Kako kraj svakog luka, u blizini oslonca ima tri stupnja slobode (horizontalni, vertikalni pomak i moment savijanja), broj mogućih kombinacija je poprilično velik.

Rušenje lukova:

(13) Dodatna koncentrirana sila na stabilnom luku deformirat će tlačnu liniju. Za određenu vrijednost koncentrirane sile, tlačna linija će ostati unutar rubova obrisa luka, no kod granične situacije tlačna linija će dodirivati intrados, odnosno ekstrados u četiri zgloba, nastat će mehanizam i konstrukcija će se srušiti.

Minimalni luk:

(14) Luk u kojem se debljina ne može smanjiti, odnosno može se iscrtati samo jedna tlačna linija, zove se minimalan luk.

(15) Kod polukružnog luka, minimalni luk je okarakteriziran odnosom raspona i debljine luka. Za takav je polukružni minimalan luk karakterističan odnos $s/t \cong 18$.

Geometrijski koeficijent sigurnosti:

(16) Minimalan nam luk daje vrlo važnu informaciju o sigurnosti luka istog oblika. Geometrijski koeficijent sigurnosti (Heyman) se može definirati kao: odnos između debljina realnog luka i minimalnog luka istog oblika.

(17) Za prikaz geometrijskog koeficijenta sigurnosti koji je jednak ili veći od određene vrijednosti n , potrebno je nacrtati tlačnu liniju unutar luka istog oblika debljine t/n . Primjerice, za koeficijent 2, tlačnu liniju je moguće nacrtati u jednoj od polovica debljine luka; za koeficijent 3, tlačnu liniju je moguće nacrtati u jednoj od trećina debljine luka.

Primjer mehanizma sloma



Slika 26. Kraljev most

Na slici 26. prikazana je katastrofa koja se dogodila na Kraljevom mostu u Bendigu u Australiji 1901. godine. Kako bi testirali most, radnici su više puta parnim valjkom prolazili po samom mostu. Teret je bio veći nego što je most mogao podnijeti, te je pred sam kraj testa pukotina koja je bila razvijena u luku popustila i most se srušio.

6. Zaključak

Od najstarijih vremena pa sve do danas graditelji su usavršavali svoje teorije projektiranja zidanih lukova. Glavni problem kod zidanih konstrukcija je izloženost morta atmosferilijama i raznim kemijskim reakcijama zbog kojih on gubi svoja prvobitna svojstva, odnosno dolazi do promjene mehaničkih karakteristika koje se očituju u stvaranju pukotina koje imaju negativan utjecaj na konstrukciju. Zbog brojnih pokušaja graditelja nastale su i brojne teorije od kojih se kao najjednostavnija i najupotrebljivija za zidane lukove rabi Hookeova teorija. Primjena određenih teorija u velikoj mjeri ovisila je i o iskustvu inženjera, pa je tako profesor Heyman upotunio Hookeovu teoriju. Hookeova teorija upotpunjena je novim pojmovima, koeficijentima i vrijednostima da bi bila primjenjiva na zidane lukove. Promatrajući ponašanje i stabilnost luka došlo se do spoznaje da je tlačna linija ključno rješenje svih teorija. Naime, kako ne bi došlo do mehanizma sloma, tlačna linija poništavala je sve unutrašnje sile osim tlačnih, a upravo je to bilo važno za zidane lukove. Tlačna linija, osim što se morala nalaziti unutar rubova intradosa i ekstradosa, stvarala je tri zgloba koji su činili luk statički određenim sustavom i stabilnim. Da bi poboljšali dosadašnju teoriju inženjeri su pokušavali pomoću elastične teorije dobiti jednu tlačnu liniju na temelju koje su stvarali oblik luka. Upravo zbog same složenosti u modeliranju zidanih lukova danas su se razvile mnoge metode koje se razlikuju prema razini točnosti, količini ulaznih podataka, rezultatima od metoda starih graditelja. Iako se danas rijetko primjenjuju zidani lukovi, iz ostavštine starih graditelja možemo vidjeti da nisu bili neuspješni u svojim projektima. Svaka teorija, svako otkriće zapravo nikad nije krajnje. Vjerojatno će se u skoroj budućnosti razviti bolje teorije, no sve dok se to ne dogodi značajno mjesto zauzimat će teorije velikih fizičara i graditelja.

7. Literatura

- [1] Philippe Block, Matt DeJong, John Ochsendorf: As hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches, *Nexus Network Journal* 8 (2006) 2, pp. 13–24.
- [2] Santiago Huerta, Galileo was Wrong: The Geometrical Design of Masonry Arches, *Nexus Network Journal* 8 (2006) 2, pp. 25–51.
- [3] Santiago Huerta: The Analysis of Masonry Architecture: A Historical Approach, *Architectural Science Review* 51 (2008) 4, pp. 297–328.
- [4] Skripta uz predavanja: *Lučni mostovi*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, veljača 2003.
- [5] Hrvoje Smoljanović, Nikolina Živaljić, Željana Nikolić: Pregled metoda za modeliranje povijesnih zidanih konstrukcija, *Građevinar* 65 (2013) 7, str. 603–618.
- [6] Santiago Huerta: The use of simple models in the teaching of the essentials of masonry arch behaviour, Fondazione Flaminia, Ravenna, 2005.
- [7] The Bendigo Monier Arch Bridges preuzeto sa:
<http://www.aholgate.com/texts/bgobrshist.html>
- [8] S. Perko: Teorije lukova, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2012., završni rad