

Građevinski fakultet  
Sveučilište u Zagrebu

Marta Miletić  
**COUPLET – HEYMANOVA  
TEORIJA LUKOVA**  
(ZAVRŠNI RAD)

Zagreb, 2009.

# SADRŽAJ:

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. UVOD:</b>  | <b>3</b>  |
| 1. 1. Općenito .....   | 3         |
| 1. 2. Povijesni pregled razvoja zidanih konstrukcija i lukova.....   | 4         |
| 1. 3. Uvod u temu rada.....  | 9         |
| <b>2. ZIDANI LUK</b>   | <b>10</b> |
| 2. 1. Materijal.....   | 10        |
| 2. 2. Tlačna linija.....   | 10        |
| 2. 3. Mehanizmi sloma.....   | 12        |
| 2. 4. Elastično rješenje.....  | 17        |
| 2. 4. 1. Odgovor konstrukcije na male pomake upornjaka.....          | 18        |
| 2. 5. Teorija plastičnosti.....                                      | 19        |
| 2. 6. Geometrijski faktor sigurnosti (Heyman).....                   | 21        |
| 2. 7. Teorem sigurnosti (The safe theorem) .....                     | 22        |
| <b>3. POVIJESNI PREGLED RAZVOJA TEORIJA PRORAČUNA ZIDANIH LUKOVA</b> | <b>23</b> |
| 3. 1. Tradicionalni (srednjovjekovni) pristup.....                   | 23        |
| 3. 2. Moderne analize: .....   | 24        |
| 3. 2. 1. Robert Hooke.....   | 26        |
| 3. 2. 2. La Hire.....  | 27        |
| 3. 2. 3. Couplet.....  | 29        |

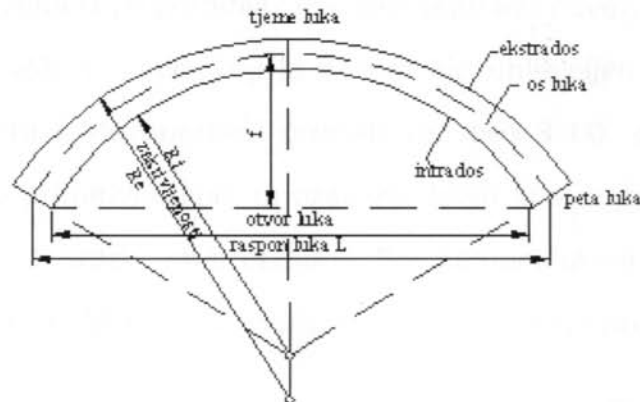
|  |           |
|--|-----------|
| 3. 2. 4. Poleni.....   | 32        |
| 3. 2. 5. Coulomb.....  | 34        |
| 3. 3. Granična analiza zidanih konstrukcija profesora Heymana (Limit Analysis of masonry arches) ..... | 36        |
| <b>4. ZAKLJUČAK</b>  | <b>37</b> |
| <b>5. LITERATURA</b>   | <b>38</b> |

# 1. UVOD

## 1. 1. Općenito

Lukovi su konstrukcijski elementi pretežno opterećeni na tlak. Prema upotrebljenom materijalu mogu se podijeliti na zidane lukove, betonske lukove, drvene lukove i metalne. Prvi su lukovi građeni od kamena i opeke, dakle gradiva dobre otpornosti na tlak, a vrlo slabe na vlak. Kasnije su se zajedno s razvojem materijala počeli graditi i ostali lukovi.

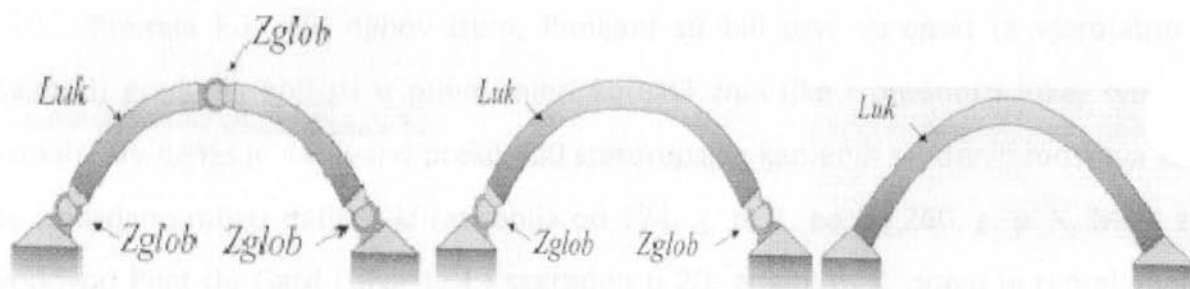
Dio luka uz oslonce naziva se *peta luka*, dok je njegov predio oko najviše točke *tjemena luka*. Visinska razlika između pete i tjemena luka, naziva se *strelica luka*. *Intrados* je linija donjeg ruba luka, dok je *ekstrados* linija gornjeg ruba luka. *Raspon luka L* je horizontalni razmak središta ležajnih ploha, dok je *otvor luka* horizontalni razmak između točaka intradosa. Bitan parametar kod promatranja lukova je *smjelost luka*, predstavljena omjerom strelice prema rasponu ( $f/L$ ).



Slika 1. Osnovni dijelovi luka

Neovisno o obliku, prema statičkom sustavu lukovi se dijele na (slika 2.):

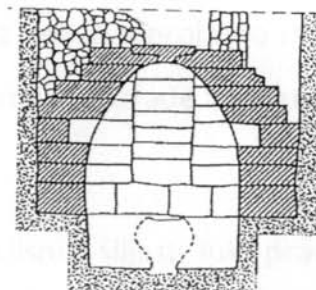
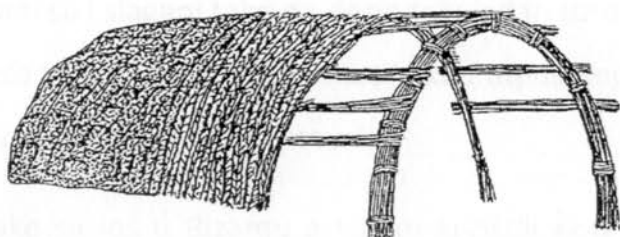
- (I) trozglobne lukove,
- (II) dvozglobne lukove i
- (III) upete lukove.



Slika 2. Statički sustavi lukova

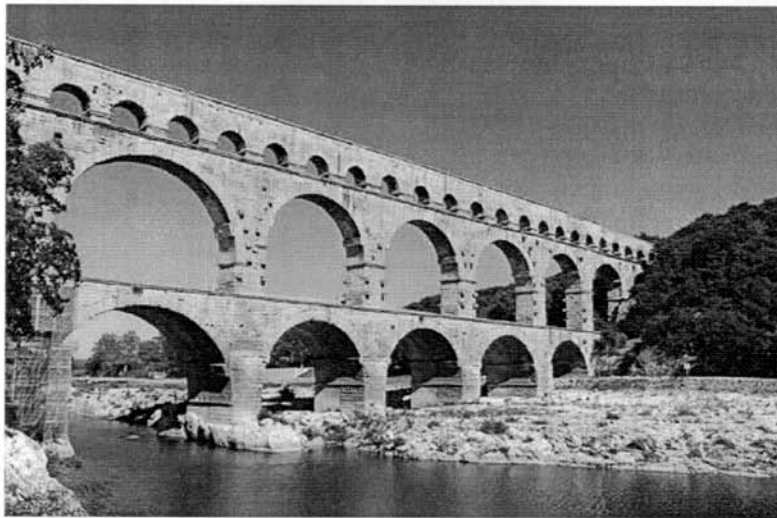
## 1. 2. Povijesni pregled razvoja zidanih konstrukcija i lukova

Lukovi su nešto „mlađi“ od samih početaka zidanih konstrukcija. Kroz najveći dio povijesti civilizacije luk je bio glavni način trajnog premoštenja neke prepreke. Prvi lukovi i svodovi vjerojatno su nastali na tradiciji građenja blatom i trskom. Drevni graditelji su tršćane biljke slagali u pravokutne okvire, ili zbijali, a potom savijali jedno prema drugom, povezujući ih u primitivni luk. Nizovi lukova povezivani su vodoravnim snopovima u okvir nalik na svod, koji je potom bio oblijepljen blatom. Lukovi od opeke bili su u Egiptu i Mezopotaniji poznati već oko 3600. godina pr. Kr. Neki pretpostavljaju da su primitivne kulture preuzele ideju luka iz prirode - kopiranjem kamenih lukova nastalih erozivnim procesima. Prvi kameni lukovi su se razvili od tzv. „lažnih lukova“ koji su nastali konzolnim prepuštanjem blokova prema vrhu.



Slika 3. Rekonstrukcija prvog svoda na tršćanim okvirima i nacrtu drevnog kamenog konzolnog luka

Premda luk nije njihov izum, Rimljani su bili prvi europski (a vjerojatno i svjetski) graditelji koji su u punoj mjeri koristili značajke i prednosti luka, svoda i kupole. Do danas je sačuvano preko 400 starorimskih kamenih svođenih mostova koji se pouzdano mogu datirati iz razdoblja od 174. g. p. K. pa do 260. g. p. K. Most za vodovod Pont du Gard (slika 1. 4.) sagrađen u 20. godini p. K. pravo je remek-djelo antičkog graditeljstva. Spomenut ćemo i tri akvadukta vodovoda Dioklecijanove palače, na prilazu Splitu, kao i mnogi drugi.

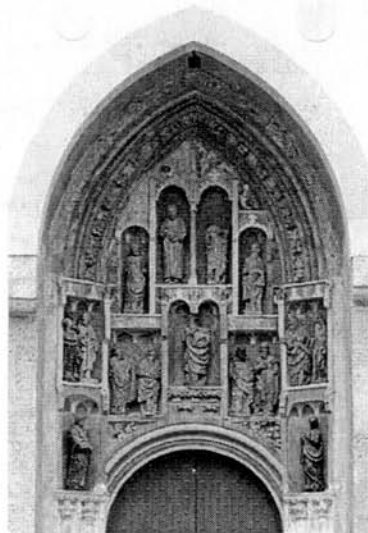


*Slika 4. Pont du Gard*

Rimskim graditeljima nije nedostajalo ideja, poznavali su graditeljske principe i vještine, a glavna ograničenja proizlazila su iz nedostataka izvora mehaničke snage i vrlo ograničene uporabe tvrdih metala. Rimljani su poznavali i prije uvriježena gradiva: kamen, drvo i opeku, pridodavši im novo gradivo - beton. Klesanci lukova obrađivani su i slagani tako da dosjedaju jedan uz drugog, bez veziva, vjerojatno zbog poteškoća zbog mogućih deformacija kod otpuštanja skele. Umijeće izrade vapnenog morta preuzeli su od Grka i usavršili.

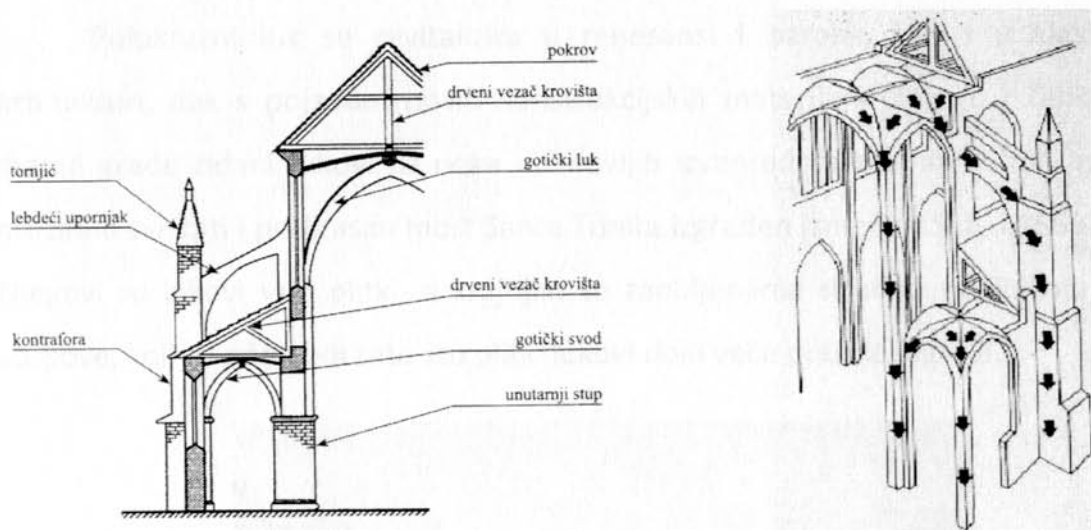
Iako su još u Bizantu arhitekti koristili potkovasti, trolisni i šiljasti luk, prava konstrukcijska vrijednost luka u europskoj arhitekturi započinje u gotici kada se iskorištava šiljasti luk prezet iz Arapsko-Maurske umjetnosti. Šiljasti luk je nastao iz polukružnog luka kada je zamijećeno da se uporabom ovog luka može postići veća

strelica luka. Kod gotičkih katedrala glavni su lukovi preuzimali koncentriranu silu od krovišta u sredini, što sa statičkog gledišta opravdava lom linije luka na tom mjestu. Očito iz estetskih razloga, taj je oblik korišten i za lukove nad prozorima i vratima, iako u njih nije bilo koncentriranih tereta.



*Slika 5. Portal crkve Sv. Marka*

U gotici umjesto bačvastog svoda sačinjenog od polukružnih lukova počinju se križati prelomljeni lukovi koji su, za razliku od polukružnih, mogli imati zajednički završetak u tjemenu (ključ). U križnom svodu svi se pritisci koncentriraju u unaprijed određenoj točki, stoga svodnu konstrukciju ne nose plohe zida nego stupovi i lukovi. Križni svod, kakav god da bio, ima jedan bitan problem. Naime, u četiri točke na koje počiva, prenosi se vertikalno opterećenje, ali svod isto tako stvara i poprilično jak horizontalni potisak. Da bi se taj potisak apsorbirao, koristili su se lebdeći upornjaci ili kontrafori. Riječ je o konstrukcijama koje bočno pridržavaju križne svodove glavnih lađa crkava i prenose ih, preko krovova sporednih lađa do visokih stubova uz vanjske rubove crkve, od kamo se opterećenje prenosi u zemlju (slika 6.).



*Slika 6. Presjek gotičke katedrale*

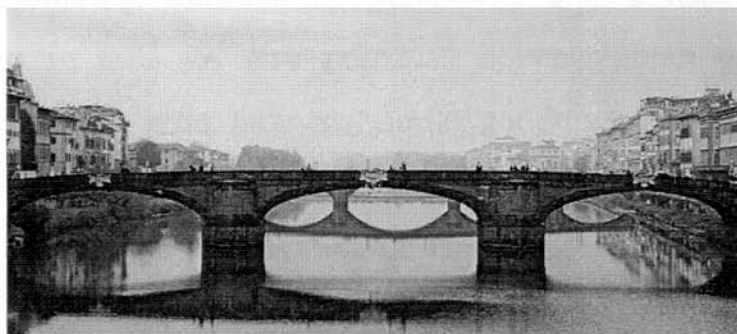
Lebdeći upornjaci, koliko god im ime impozantno zvučalo, zapravo su obični lukovi opterećeni kamenim pločama (u kojima su često skrivene cijevi za odvod vode). Kod razvijenih gotičkih crkava redovito postoje dva takva luka u svakom presjeku: donji prenosi bočni potisak križno-rebrastog svoda, a gornji podupire krovnu konstrukciju.



*Slika 7. Jedan od najboljih primjera gotičke arhitekture jest katedrala u Reimsu (13. i 14.st.)*

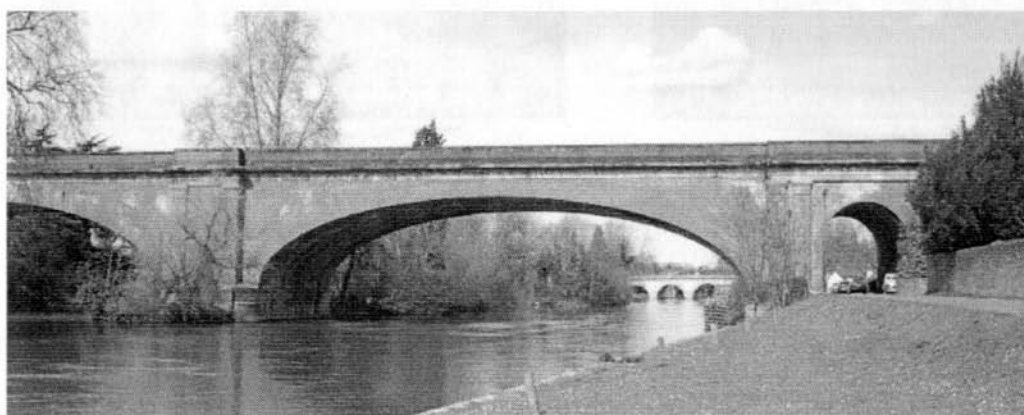


Polukružni luk se revitalizira u renesansi i baroku, kao i u klasicističkoj arhitekturi, dok s pojavom novih konstrukcijskih materijala (željezo i čelik) sve se manje grade zidani lukovi. U neke od novijih izvanrednih zidanih lučnih građevina možemo svrstati i prekrasan most Santa Trinita izgrađen između 1566. i 1569. godine. Njegovi su lukovi vrlo plitki, a krajnjim se zaobljenjima skladno priključuju na jake stupove, koji su potrebni zato što plitki lukovi daju veće potiske (slika 8.).



*Slika 8. Most Santa Trinita u Firenci*

Iz prošlog stoljeća Brunelov željeznički most Maidenhead sagrađen 1837. godine, najduži je i najplići luk od opeke na svijetu (slika 9.). Neki su suvremenici sumnjali u nosivost ovog mosta, no on je još uvijek u uporabi i nosi vlakove koji su deset puta teži od onih iz Brunelova doba.



*Slika 9. Brunelov Maidenhead most u Engleskoj*

### 1.3. Uvod u temu rada

Teorija zidanih konstrukcija treba sadržavati u proračunu osnovna svojstva ziđa kao materijala: heterogenost, dobra tlačna čvrstoća, gotovo da nema otpornosti na vlak i veliki koeficijent trenja.

Stari tradicionalni pristupi projektiranju zidanih lukova i svodova su bazirani uglavnom na geometriji, odnosno na definiranju omjera između elemenata u konstrukciji. Iako se tada još nisu poznavali pojmovi poput graničnih stanja i opterećenja, ovi „neuki“, grčki, bizantski, rimski, gotički graditelji sagradili su brojne građevine koje su već stoljećima postojane (npr. Aja Sofija, rimski Pantheon te brojne gotičke katedrale). Namjera je ovog rada objasniti ovu, na prvi pogled nevjerovatnu stabilnost.



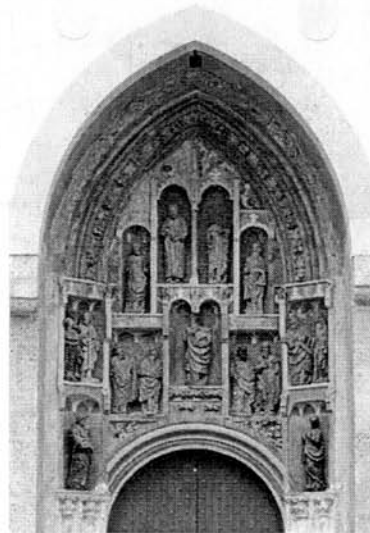
*Slika 10. Aja Sofija u Istanbulu*



*Slika 11. Pantheon u Rimu*

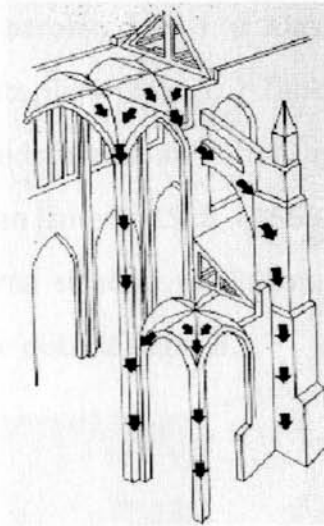
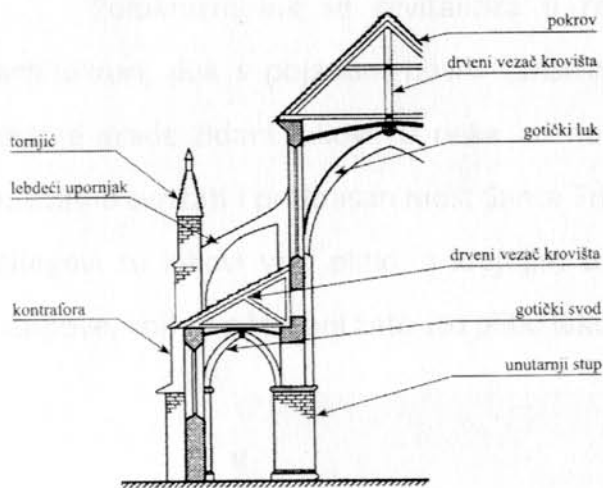
Od kraja 17-tog stoljeća „znanstvena“ teorija svođenih zidanih konstrukcija počela se snažno razvijati. Profesor Heyman je pripojio tradicionalnu „geometrijsku“ teoriju zidanih konstrukcija u šire okvire moderne granične analize (Limit Analysis). Obje su teorije pokušale riješiti glavni problem - što čini konstrukciju sigurnom, odnosno nesigurnom. Na kraju su došle do istog zaključka: sigurnost zidane konstrukcije ovisi o njejoj geometriji. Sigurno stanje ravnoteže postignuto je kroz pravilnu geometriju.

strelica luka. Kod gotičkih katedrala glavni su lukovi preuzimali koncentriranu silu od krovišta u sredini, što sa statičkog gledišta opravdava lom linije luka na tom mjestu. Očito iz estetskih razloga, taj je oblik korišten i za lukove nad prozorima i vratima, iako u njih nije bilo koncentriranih tereta.



*Slika 5. Portal crkve Sv. Marka*

U gotici umjesto bačvastog svoda sačinjenog od polukružnih lukova počinju se križati prelomljeni lukovi koji su, za razliku od polukružnih, mogli imati zajednički završetak u tjemenu (ključ). U križnom svodu svi se pritisci koncentriraju u unaprijed određenoj točki, stoga svodnu konstrukciju ne nose plohe zida nego stupovi i lukovi. Križni svod, kakav god da bio, ima jedan bitan problem. Naime, u četiri točke na koje počiva, prenosi se vertikalno opterećenje, ali svod isto tako stvara i poprilično jak horizontalni potisak. Da bi se taj potisak apsorbirao, koristili su se lebdeći upornjaci ili kontrafori. Riječ je o konstrukcijama koje bočno pridržavaju križne svodove glavnih lađa crkava i prenose ih, preko krovova sporednih lađa do visokih stubova uz vanjske rubove crkve, od kamo se opterećenje prenosi u zemlju (slika 6.).



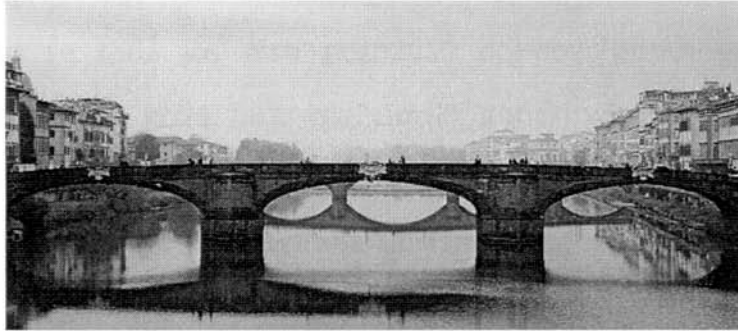
*Slika 6. Presjek gotičke katedrale*

Lebdeći upornjaci, koliko god im ime imponantno zvučalo, zapravo su obični lukovi opterećeni kamenim pločama (u kojima su često skrivene cijevi za odvod vode). Kod razvijenih gotičkih crkava redovito postoje dva takva luka u svakom presjeku: donji prenosi bočni potisak križno-rebrastog svoda, a gornji podupire krovnu konstrukciju.



*Slika 7. Jedan od najboljih primjera gotičke arhitekture jest katedrala u Reimsu (13. i 14.st.)*

Polukružni luk se revitalizira u renesansi i baroku, kao i u klasicističkoj arhitekturi, dok s pojavom novih konstrukcijskih materijala (željezo i čelik) sve se manje grade zidani lukovi. U neke od novijih izvanrednih zidanih lučnih građevina možemo svrstati i prekrasan most Santa Trinita izgrađen između 1566. i 1569. godine. Njegovi su lukovi vrlo plitki, a krajnjim se zaobljenjima skladno priključuju na jake stupove, koji su potrebni zato što plitki lukovi daju veće potiske (slika 8.).



*Slika 8. Most Santa Trinita u Firenci*

Iz prošlog stoljeća Brunelov željeznički most Maidenhead sagrađen 1837. godine, najduži je i najplići luk od opeke na svijetu (slika 9.). Neki su suvremenici sumnjali u nosivost ovog mosta, no on je još uvijek u uporabi i nosi vlakove koji su deset puta teži od onih iz Brunelova doba.

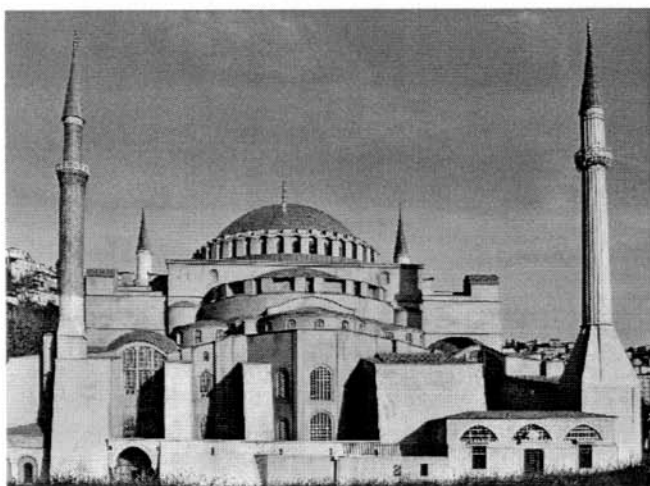


*Slika 9. Brunelov Maidenhead most u Engleskoj*

### 1.3. Uvod u temu rada

Teorija zidanih konstrukcija treba sadržavati u proračunu osnovna svojstva ziđa kao materijala: heterogenost, dobra tlačna čvrstoća, gotovo da nema otpornosti na vlak i veliki koeficijent trenja.

Stari tradicionalni pristupi projektiranju zidanih lukova i svodova su bazirani uglavnom na geometriji, odnosno na definiranju omjera između elemenata u konstrukciji. Iako se tada još nisu poznavali pojmovi poput graničnih stanja i opterećenja, ovi „neuki“, grčki, bizantski, rimski, gotički graditelji sagradili su brojne građevine koje su već stoljećima postojane (npr. Aja Sofija, rimski Pantheon te brojne gotičke katedrale). Namjera je ovog rada objasniti ovu, na prvi pogled nevjerojatnu stabilnost.



*Slika 10. Aja Sofija u Instanbulu*



*Slika 11. Pantheon u Rimu*

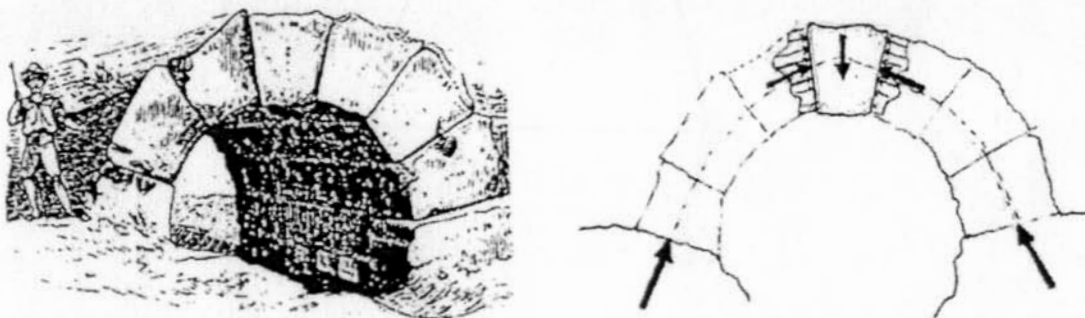
Od kraja 17-tog stoljeća „znanstvena“ teorija svođenih zidanih konstrukcija počela se snažno razvijati. Profesor Heyman je pripojio tradicionalnu „geometrijsku“ teoriju zidanih konstrukcija u šire okvire moderne granične analize (Limit Analysis). Obje su teorije pokušale riješiti glavni problem - što čini konstrukciju sigurnom, odnosno nesigurnom. Na kraju su došle do istog zaključka: sigurnost zidane konstrukcije ovisi o njejoj geometriji. Sigurno stanje ravnoteže postignuto je kroz pravilnu geometriju.

## 2. ZIDANI LUK

### 2. 1. Materijal

Da bi se u potpunosti razumjelo osnovno konstrukcijsko djelovanje, treba dobro poznavati prirodu ziđa kao materijala. Štoviše, treba izgraditi konstrukcijsku teoriju koja uključuje bitna svojstva materijala. A bitna su svojstva ziđa: ziđe je mješoviti heterogeni materijal, koji je dosta slab na vlak, s iznimnom čvrstoćom na tlak, a nema opasnosti od klizanja između kamenja. Sve ove tvrdnje iznesene su implicitno ili eksplicitno u teoriji svodova 18-tog i 19-tog stoljeća, a sistematizirao ih je profesor Heyman u načelima granične analize zidanih konstrukcija (Principles of Limit Analysis of masonry structures). Njegova važnost bit će pokazana kasnije.

### 2. 2. Tlačna linija



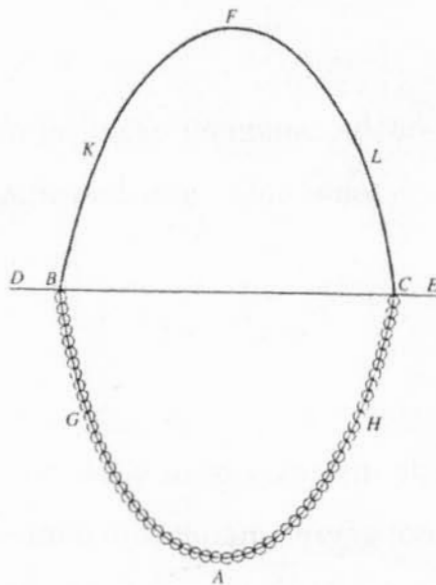
Slika 12. Etrušćanski kameni luk

Na slici 12. može se vidjeti masivni etrušćanski luk od kamenih blokova klinastog oblika. Promotrimo sada ravnotežu tjemnog (ključnog) kamena. U svakoj dodirnoj površini između dva susjedna bloka (koju zamišljamo više-manje ravnom) postojat će određena raspodjela naprezanja. Rezultanta tih naprezanja mora biti tlačna sila. Točka u kojoj djeluje rezultanta zove se *centar potiska*, a mora se nalaziti unutar odgovarajuće dodirne površine. Dva potiska sa svake strane održavaju ključni kamen u ravnoteži. Isto će se dogoditi i s preostalim kamenim blokovima u luku dok

se ne dođe do pete luka. Na mjestu dodira završetka luka i upornjaka javlja se određeni potisak koji upornjak mora izdržati. Taj se potisak naziva *potiskom luka*. Također, upornjak mora imati odgovarajuće dimenzije kako bi mogao izdržati taj potisak.

Kod projektiranja lukova javljaju se dva glavna problema: projektiranje lukova koji će moći samostalno stajati i podupirača koji će izdržati njihov potisak. Kritičniji je drugi problem projektiranja upornjaka, jer loše projektiran upornjak dovodi do rušenja cijele konstrukcije. Većina tradicionalnih pravila projektiranja govorila su o projektiranju podupirača.

Svi položaji centra potiska formiraju zajedno liniju, *tlačnu liniju*. Oblik te linije ovisi o geometriji luka, njegovom opterećenju i o vrsti ležajeva.



Slika 13. Hookeov obrnuti lanac

Ako se tlačna linija postavi u obrnuti položaj, dobit će se matematička lančanica, kao što je prikazano na slici 13. To je bila izvršna Hookeova ideja 1670. godine, kada je pokušavao riješiti problem oblika i potiska luka. Kasnije, njegov će se rad detaljnije razmotriti u odjeljku 3.2.



Tlačna linija mora biti sadržana unutar granica zidanog luka. Za bilo koju je tlačnu liniju unutar luka moguće ravnotežno stanje tog luka. Ali, to rješenje nije jedinstveno. Očito je da u luku dostatne debljine postoje beskonačne mogućnosti linija potiska. Luk je statički neodređena konstrukcija, pa jednadžbe ravnoteže nisu dovoljne za izračunavanje unutarnjih sila.

Koja je onda prava tlačna linija? Prvi koji je postavio to pitanje i pokušao odrediti područje tlačne linije bio je Moseley. Da bi mu to pošlo za rukom, trebao je odrediti dodatne uvjete, pored onih o ravnoteži. Moseleyev pristup dostigao je široku rasprostranjenost u Europi. Javili su se mnogi pristupi sličnog mišljenja, kao npr. Culmannov.

Drugi pristup za dobivanje položaja tlačne linije predložio je Villarceau 1853. godine. Pokušao je projektirati luk s oblikom tlačne linije koja bi se podudarala sa središnjom osi luka.

Treća mogućnost bila je fizičko umetanje zglobova koji bi učinili luk statički određenim i tako odredili točno područje tlačne linije.

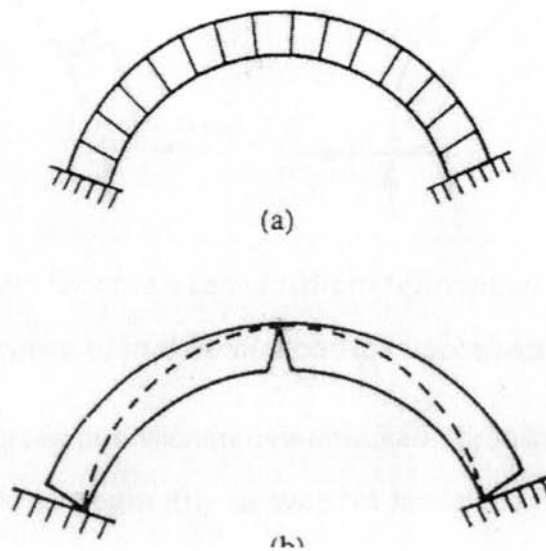
### **2. 3. Mehanizmi sloma**

Statički određene konstrukcije se formiranjem plastičnog zgloba u bilo kojem presjeku pretvaraju u kinematički mehanizam. Prema tome, određivanje je graničnog stanja statički određene konstrukcije istovjetno određivanju graničnog stanja najnapregnutijeg poprečnog presjeka.

Kod statički neodređenih konstrukcija formiranje jednog plastičnog zgloba još ne uzrokuje potpunu iscrpljenost njihove nosivosti. Ako je konstrukcija  $n$  puta statički određena,  $n$  formiranih plastičnih zglobova pretvaraju je u stabilnu statički određenu konstrukciju. Prema tome, da bi  $n$  puta statički neodređena konstrukcija postala labilna, potrebno je da se u konstrukciji formira  $n+1$  plastični zglob. Konstrukcija gubi

sposobnost nošenja opterećenja i pretvara se u kinematički labilan mehanizam. Tada se konstrukcija nalazi u graničnom plastičnom stanju konstrukcije (stanje plastičnog loma).

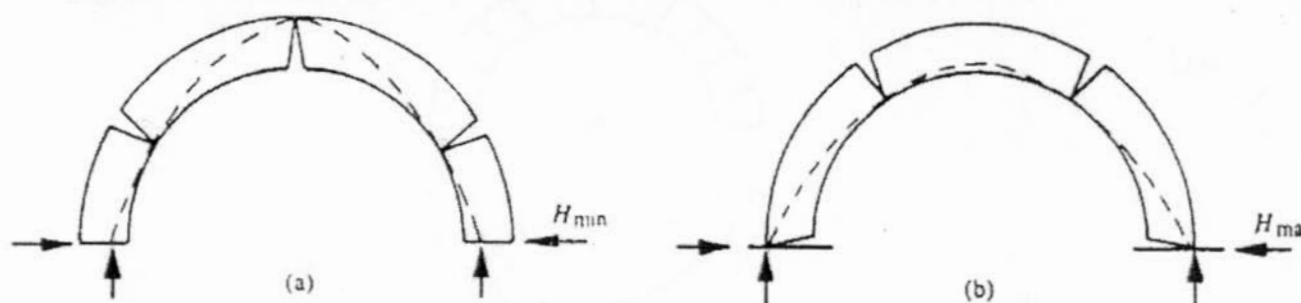
Za potpuno razumijevanje ponašanja zidanog luka, trebalo bi proučiti rušenje lukova. Iz toga proizlazi naivno pitanje, kako može doći do rušenja konstrukcije izgrađene beskrajno čvrstim materijalom. Prekomjerna deformacija može dovesti do rušenja. Sada ćemo pregledati neke primjere.



Slika 14. Pucanje zidanog luka uslijed povećanja raspona

Ako se upornjaci jednostavnog kamenog luka sastavljenog od klinastih blokova sa slike 14. a) pomaknu za neznatno mali iznos, luk će se da ne padne, nekako sam prilagoditi tom povećanom rasponu. Prilagodba luka (slika 14. b) mora biti popraćena otvaranjem pukotina. Kamene blokove zbog trenja ne mogu iskliznuti, zbog velike krutosti gotovo da nema deformacije, ali se blokovi mogu rotirati oko kontaktne točke između dva bloka. Rezultirajuće pukotine, koje se mogu javiti i na ekstradosu i na intradosu, idealiziramo u zglobove. Ovakvi jednostavni zidani lukovi imaju i veoma jednostavne sheme otvaranja pukotina. Složene konstrukcije imaju i složenije načine otvaranja pukotina od ovog. Kod složenih konstrukcija, pukotine će se ponekad dogoditi i kroz kamene blokove, a ne samo između njih. Pukotine su neizbježne i mogu se čak smatrati prirodnima, ali one ne predstavljaju početak rušenja

konstrukcije. Samo nagovještavaju, da je došlo do nepredvidljivih i neodoljivih promjena u okolini konstrukcije kojoj ona, na taj način, odgovara. Slomljeni „trozglobni“ luk sa slike ustvari je dobroznani zadovoljavajući oblik konstrukcije. Tlačna linija prolazi kroz tjeme i time dodiruje ekstrados, pošto je to jedino mjesto sposobno za prijenos sile između dva dijela. Slično, tlačna linija mora proći i kroz intrados u „zglobovima“ u upornjacima.

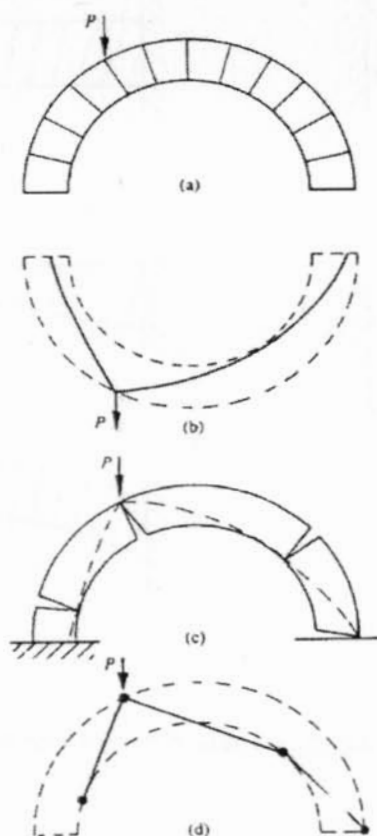


Slika 15. Polukružni luk opterećen vlastitom težinom. a) minimalni potisak upornjaka, b) maksimalni potisak upornjaka

Drugi je primjer nacrtan pod sličnim uvjetima kao i prijašnji (slika 15.). U ovom je slučaju razlika u tome da su geometrijska svojstva lančanice i kružnice takva da se zglobovi na intradosu formiraju daleko od upornjaka. Ali luk je opet statički određen i minimalna se vrijednost potiska upornjaka može izračunati (slika 15. a). Pomaknu li se pak upornjaci malo bliže jednom drugome umjesto da se odvoje, opet će se formirati zglobovi, ali ovaj put uz maksimalni potisak upornjaka (slika 15. b). A ta se vrijednost opet odmah može izračunati. Isprekidane linije na slikama 15. a i b predstavljaju granice unutar kojih se moraju nalaziti mogući položaji tlačne linije. Zaključno, kada luk djeluje na svoju okolinu, tada potisak upornjaka pada na njegovu minimalnu vrijednost, a suprotno tome, kada okoliš djeluje na luk, tada luk pruža otpor i razvija maksimalni potisak upornjaka koji je moguć.

Ali, bi li bilo moguće rušenje bez pomaka upornjaka? Kao što smo vidjeli, kada linija potiska dodiruje granicu ziđa, formira se zglob, koji dopušta rotaciju. Tri zgloba čine luk stabilnom statički određenom konstrukcijom. Još jedan zglob će međutim

pretvoriti luk u četvrozglobni luk koji će se srušiti. Dakle, povećanje opterećenja koje vodi do stvaranja četiri zgloba vodit će do rušenja konstrukcije bez sloma materijala. To se može dogoditi u stabilnom luku dodavanjem dodatnog opterećenja, koje poprilično deformira tlačnu liniju. Opterećenje za koje je došlo do stvaranja četvrtog zgloba, odnosno do urušavanja, kritično je opterećenje (slika 16.).

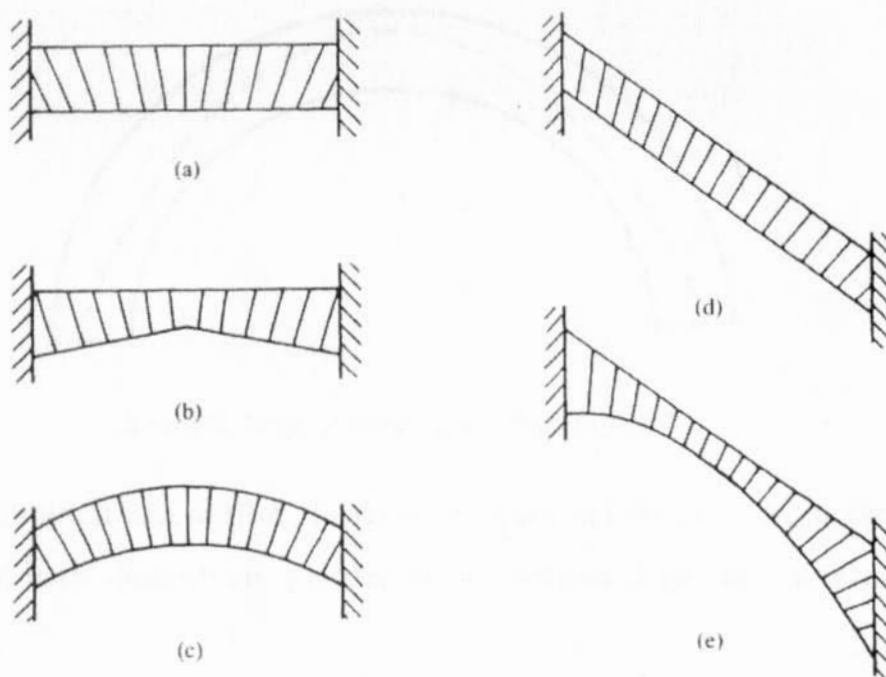


### 16. Rušenje polukružnog luka pod opterećenjem

Polukružni luk opterećen je vlastitom težinom i dodatnom silom  $P$ . Prema tome, Hookeov ovješeni lanac će biti deformiran u oblik prikazan na slici 16.b. S povećanjem sile  $P$  linija potiska sve manje i manje pristaje unutar luka. Za određenu, kritičnu silu  $P$  tlačna linija dostiže površinu i time pretvara luk u četvrozglobni. Urušavanje će se znači, konačno dogoditi, kada više nije moguće održavati liniju potiska unutar luka.

Ipak, postoje neki oblici luka za koje se mehanizmi sloma ne mogu dogoditi ni konstruirati. Nema mogućih razmještaja zglobova na intradosu i ekstradosu. Neki od

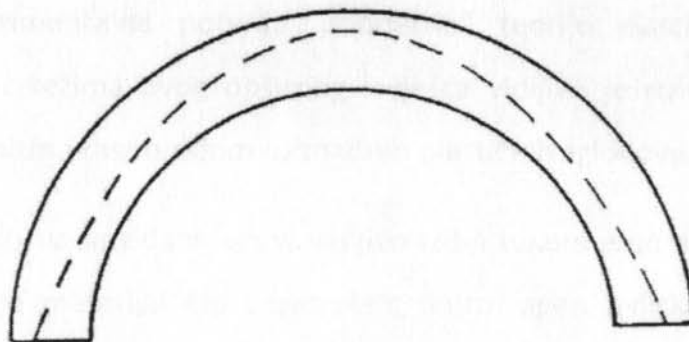
takvih tipova lukova skicirani su na slici 17. „Beskonačno“ su čvrsti, a srušit će se jedino kada se opterećenje koje nose poveća do te vrijednosti koja prouzrokuje globalno drobljavanje (lokalna se mogu tolerirati) ili alternativno ako jedan od kamenih blokova isklizne iz konstrukcije.



17. Oblici kamenih lukova „beskonačne“ čvrstoće

## 2. 4. Elastično rješenje

Poncelet je u svojem osvrtu o problemu određivanja položaja tlačne linije 1852. godine predložio primjenu elastične teorije na zidane lukove kako bi se dobilo jedinstveno rješenje.



*Slika 18. Linija potiska u kružnom luku.*

Ako je materijal luka sa slike 18. linearno elastičan i ako su upornjaci kruti, tada se može izračunati jedinstven položaj linije potiska koja uravnotežava dana opterećenja.

Ipak, inženjeri su pokazali određen otpor pristupu zidu kao elastičnom materijalu. Do 1880. godine inženjeri su dijelili lukove na „elastične“, ako su bili napravljeni od drva ili kovanog željeza, i na „krute“, zidane.

Već su u 1860-ima napravljene prve detaljnije elastične analize zidanih lukova. Među prvima koji su iznjeli dublju raspravu o elastičnom pristupu analizi zidanog luka bio je Winkler. Nakon proučavanja svih suvremenih teorija zaključio je da je elastična analiza najbolje rješenje. Napomenuo je neke od smetnji koje bi se mogle pojaviti i utjecati na područje tlačne linije kao što su deformacija oplata tokom gradnje, popuštanje temelja pod pritiskom i posljedice promjene temperature. Sve ove smetnje prouzročit će otvaranje pukotina, što će znatno utjecati na područje tlačne linije. Područje se znalo dosta razlikovati od proračunatog (po elastičnoj teoriji). Winkler je tada kao rješenje predložio umetanje unutarnjih zglobova prilikom gradnje kako bi se, barem umjereno, moglo kontrolirati područje tlačne linije.

Nakon 1880-e inženjeri su prihvatili elastičnu teoriju i svi su napori bili usmjereni pojednostavljenju teških proračuna. Ipak su još postojale neke sumnje i da bi se detaljnije istražila primjena elastične teorija na zidane ili betonske zidove Austrijski institut inženjera i arhitekata napravio je mnogobrojne testove na kamenim, ciglenim, nearmiranim i armiranim betonskim lukovima. Rezultati su bili konačna eksperimentalna potvrda „moderne“ teorije elastičnosti. A ipak, na fotografijama i crtežima ovog opširnog izvješća vidljivo je rušenje zbog pomaka i stvaranje mehanizma rasporedom naknadnih plastičnih zglobova.

Dakle, iako su se zidani lukovi vidljivo rušili tokom gradnje i/ili nakon micanja oplata te iako je materijal bio nepravilan, anizotropan i diskontinuiran, elastična analiza se smatrala najboljom i najprikladnijom teorijom. To se nazivalo „modernom teorijom lukova“.

#### **2. 4. 1. Odgovor konstrukcije na male pomake upornjaka**

Elastična teorija se činila dosta racionalnom. U tri koraka se mogao dobiti sustav jednadžbi. Prvi korak su bile jednadžbe ravnoteže. Drugi, jednadžbe elastičnosti koje su povezivale unutarnje sile s deformacijama konstrukcije i treći o kompatibilnosti deformacija - tvrdnje o načinu na koji su elementi konstrukcije povezani i o rubnim uvjetima. Sustav se može riješiti i dobiti jedinstveno, elastično rješenje. Potom se mogu izračunati naprezanja i usporediti s dopuštenim vrijednostima dobivenim dijeljenjem kritične čvrstoće materijala, koja je dobivena laboratorijskim ispitivanjima, faktorom sigurnosti. No, sustav jednadžbi je jako osjetljiv na male promjene rubnih uvjeta.

Vratimo se na zidani luk sa slike 14. Nakon micanja oplata luk polagano počinje potiskivati upornjake. Stvarni upornjaci nisu apsolutno kruti i popustit će pod potiskom za određeni iznos. Raspon se tada povećava i luk se mora prilagoditi povećanju raspona. Stvaraju se tri zglobova, jedan kod ključnog kamena, a druga dva na

upornjacima. Luk postaje trozglobni i jedinstvena je tlačna linija moguća. Ali može se dogoditi da pomak nije simetričan. Možda desni upornjak, uz horizontalno popuštanje, popušta i vertikalno. Svaki mogući pomak odgovara određenim pukotinama koje posredno i neposredno dopuštaju da luk odgovara na agresiju okoline.

Pomoću pukotina određuje se točan položaj tlačne linije. Kako se pukotine pomiču, tako se tlačna linija pomiče iz jednog položaja u drugi. Nemoguće je ustvari znati u kakvom je stanju luk, tj. koja je stvarna tlačna linija. Znamo ipak, da koja god tlačna linija bila, za ravnotežu mora biti sadržana unutar luka.

Iako je nemoguće znati stvarni potisak luka, moguće je smjestiti njegove vrijednosti unutar određenih granica. Dva su ekstremna položaja tlačne linije, koji odgovaraju minimalnom i maksimalnom potisku, kao što je vidljivo na slici 15. Pukotine funkcioniraju kao zglobovi, a svojstva materijala (odjeljak 2. 1.) dozvoljavaju formiranje zglobova. Deformacije su rezultat podjele konstrukcije u određeni broj dijelova, koji su povezani zglobovima koji dopuštaju određene pomake. Pukotine nisu opasne, ali veliki neograničeni pomaci upornjaka mogu dovesti do katastrofalnog rušenja konstrukcije.

## 2. 5. Teorija plastičnosti

Pippard ( član Istražnog komiteta čeličnih konstrukcija ) je 1930-ih napravio niz pažljivih testova na modelima čeličnih lukova i pokazao da izmjerena naprezanja nisu ni sličila onima koje su „pouzdana“ izračunali projektanti. Također se pokazalo da i najmanje greške sklopa pretvaraju neodređeni u statički određeni luk i da uvijek vode do nepredvidljivog stanja konstrukcije. Ono zbog čega je pošlo po zlu je osnovni zahtjev u projektiranju konstrukcije za poznavanjem njezinog „stvarnog“ stanja. Da bi došlo do napretka, takva se filozofija projektiranja morala napustiti.

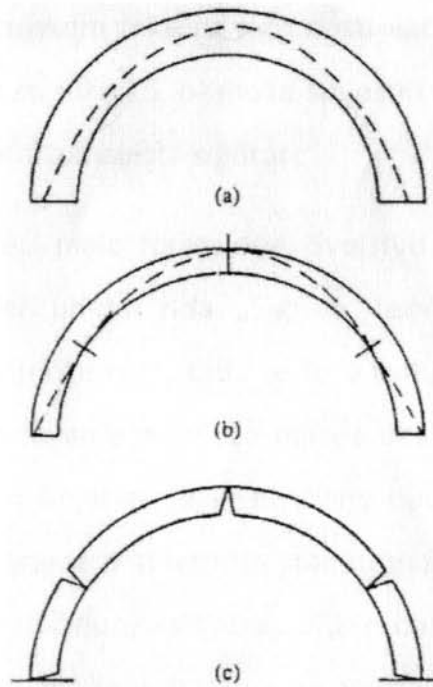


Ako su dvije naoko identične konstrukcije zapravo s različitim malim greškama, onda se one nalaze u veoma različitim stanjima početnog naprezanja. Opterećujući ih polako sve do sloma, granično opterećenje (što predstavlja zapravo čvrstoću konstrukcije) bit će izračunato kao isto. Odnosno, različita početna stanja dovode do jednakog ishoda. Ovo je opažanje dovelo do razvoja takozvane plastične teorije konstrukcija, primjenjive u svakom slučaju gdje je slom duktilni kvazi-stabilni proces. Ta se teorija može primijeniti na čelik i na armiranobetonske okvire, pa i za bilo koji tip građevine koji koristi konstrukcijski sličan materijal (drvena građa, kovano željezo, aluminijska legura). Ali ne i za materijale kao lijevano željezo ili staklo, koji su krhki.

„Plastični“ projektanti odbacili su zbog toga potragu za stvarnim stanjem konstrukcije i umjesto toga razmatrali načine na koji se konstrukcija može srušiti. Računice su bile bazirane na opterećenjima uvećanim za neki hipotetski faktor. Glavno je polazište „plastičnim“ projektantima bilo da se stanje stvarne konstrukcije opterećene manjim radnim opterećenjem neće nikada slomiti.

„Plastični“ projektanti proračunom hipotetičkog sloma zapravo stvaraju ravnotežno stanje za konstrukciju pod stvarnim opterećenjem. „Elastični“ su projektanti vjerovali da stvaraju „stvarno“ ravnotežno stanje, dok su „plastični“ projektanti znali da oni stvaraju samo jedno, osobito stanje od beskonačno mnogo mogućih. Ono što su radile obje vrste projekatnata, jedni svjesno, drugi nesvjesno, bilo je primijeniti glavnu i najsigurniju teoriju plastičnosti. Ako se bilo koje ravnotežno stanje može naći, to je ono za koje se unutarnje sile nalaze u ravnoteži s vanjskim opterećenjem, i kasnije, ako za to stanje svaki unutarnji dio konstrukcije zadovoljava kriterij čvrstoće, tada je konstrukcija sigurna. Uobičajen je uvjet za kriterij čvrstoće da su naprezanja u svakom poprečnom presjeku manja od granice popuštanja materijala, dok je u uvjetima za žiđe kriterij da sve sile moraju ležati unutar poprečnih presjeka. Detaljnim pregledom svojstava materijala omogućena su velika pojednostavljenja te se došlo do jasnih izraza o ponašanju pojedinačnih elemenata konstrukcije.

## 2. 6. Geometrijski faktor sigurnosti (Heyman)



Slika 19. Polukružni luk sa a) stabilnom i b), c) minimalnom debljinom

Zna se da je tlačna linija sa slike 19. a) samo jedna od beskonačno mnogo mogućih stanja stabilnosti luka. Prirodni luk sa slike ima ustvari dovoljnu debljinu da se prilagodi tlačnoj liniji koja proizlazi iz vlastite težine luka. Ako je vlastita težina luka ravnomjerno raspodjeljena duljinom luka, onda je oblik tlačne linije zapravo matematička lančanica. *Granični luk* je takav luk koji bi imao minimalnu debljinu luka koja bi sadržavala samo lančanicu tj. opterećenje. Tanji se luk ne može konstruirati, a da tlačna linija ne izađe izvan ziđa, te bi se tada pojavilo i vlačno naprezanje što se proturječi s pretpostavkom koja govori da takvih naprezanja nema. Tlačna linija u graničnom luku (zbog simetrije) dodiruje intrados i ekstrados u pet točaka, odnosno pet zglobova zbog kojih se luk nalazi u nestabilnoj ravnoteži i dolazi do urušavanja. Profesor Heyman je predložio geometrijski faktor sigurnosti definiran omjerom stvarnog i njemu pripadnog graničnog luka. Npr. ako faktor sigurnosti iznosi 2 tada stvarni luk ima dvostruko veću debljinu od graničnog, tj. tlačna linija se mora nalaziti u srednjoj polovini debljine luka. Ako faktor iznosi 3, onda se linija potiska mora nalaziti unutar srednje trećine luka, itd.

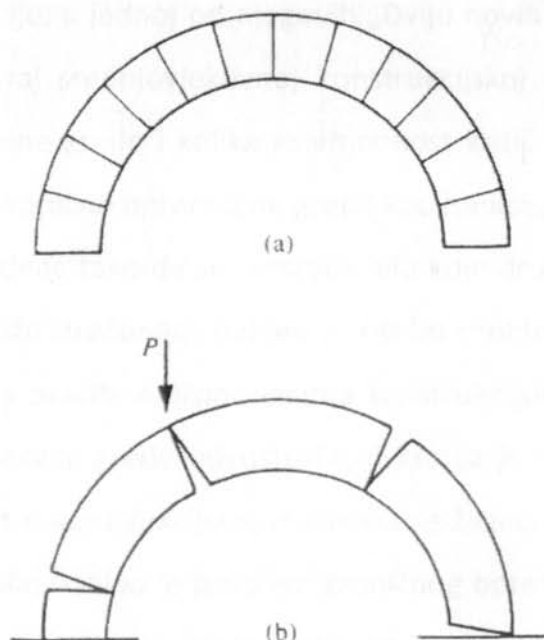
## 2. 7. Teorem sigurnosti

Rasprava o geometrijskom faktoru sigurnosti već je dala određeni pogled na ponašanje ziđa: ako se luk sa slike 19. b) može smjestiti unutar granica stvarnog luka sa slike 19. a) tada je i stvarni luk doista siguran.

Ovo ćemo sada izreći malo formalnije. Svojstvo materijala (bez vlačnih sila) zahtijeva da tlačna linija leži unutar ziđa. „Sigurni“ teorem kaže da ako se bilo koja takva pozicija tlačne linije može naći, tada je to apsolutni dokaz da je konstrukcija stabilna, i da se doista urušavanje ne može nikada desiti pod danim opterećenjem. Snaga ovog teorema leži u činjenici da je dovoljno naći samo jedan položaj tlačne linije - nema nikakve napomene o stvarnom stanju. Vidjeli smo da je stvarno stanje konstrukcije u bilo kojem slučaju „kratkotrajno“, te da male promjene u vezama s okolinom mogu uzrokovati velike promjene u položaju tlačne linije. Ipak, ako je jednom pokazano da tlačna linija leži unutar ziđa, onda nije važno kako reagira na odgovor promjenama i slijeganjima, ne može nikada pobjeći van.

### 3. POVIJESNI PREGLED RAZVOJA TEORIJA PRORAČUNA ZIDANIH LUKOVA

#### 3. 1. Tradicionalni ( srednjovjekovni ) pristup



Slika 20. Polukružni luk opterećen silom  $P$

Polukružni luk (slika 20.) će nositi dano opterećenje  $P$  pod pretpostavkom da luk ima izvjesnu minimalnu debljinu. Projektiranje luka se sastoji od procesa određivanja te debljine za neki dani raspon i dano opterećenje. Tj. projektiranje se sastoji u pridruživanju pravilnih proporcija luka. Stara tradicionalna pravila projektiranja zidanih svodova i lukova su geometrijska, u smislu da se definiraju odnosi (proporcije) između konstrukcijskih elemenata. To su bila precizna pravila koja su koristili još antički građevinari te se nikad nisu izgubila, preživjela su „tamne godine“ zabilježene u tajnim knjigama masonskih domova te su se pojavila u 12. i 13. stoljeću u vrijeme visoke gotike. Bit će viđeno da geometrijska pravila o omjerima daju osnove pravilnog shvaćanja projektiranja i ponašanja zida.

### 3. 2. Moderne analize

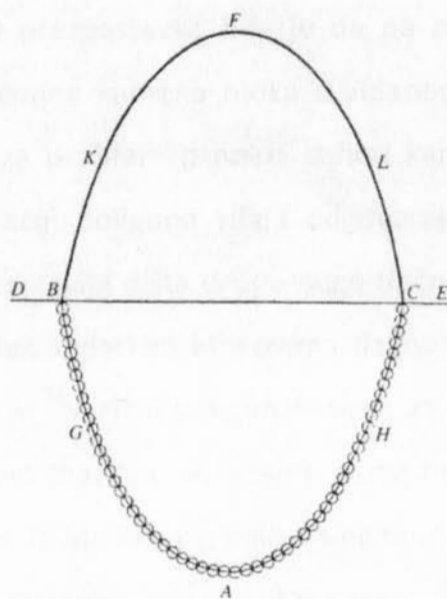
Tradicijska geometrijska pravila omjera ne govore o nikakvim granicama sigurnosti ili o opterećenjima koji mogu dovesti do urušavanja. Antički i srednjovjekovni graditelji se očito nisu pitali takva pitanja. Galileo je prvi koji je uzeo u obzir čvrstoću konstrukcije, u jednoj od njegovih „Dviju novih znanosti“ iz 1638.g. te pomoću toga najavio kraj srednjovjekovnoj konstrukcijskoj teoriji. Prvi se zapitao kolika je čvrstoća konzolne grede i kolika je vrijednost kritičnog opterećenja. On je želio odrediti čvrstoću poprečno opterećene grede kao funkciju njegove širine i visine, a ta bi formula bila izvedena tako da se čvrstoća bilo koje druge grede (pravokutnog poprečnog presjeka) može izračunati. Galileo je riješio problem, u biti točno, i time dokazao da geometrijska pravila o proporcijama konstrukcijskih elemenata nisu više primjenjiva; ako se dimenzije grede udvostruče, čvrstoća je tada bila puno veća od dvostruke. Nova znanost o konstrukcijskoj mehanici se željno tražila u 18.st. , ideja o naprezanju polako izvirala; Galileo je problem graničnog opterećenja konzolne grede primijenio u problemu određivanja naprezanja te grede. Paralelno s uspjesima u racionalnoj mehanici, građevinskim materijalima koji su uobičajeno korišteni u eksperimentima određene su vrijednosti graničnih naprezanja. To je bio prvi prirodni korak u pokušaju da se povežu dvije vrijednosti, pokušati urediti da izračunate vrijednosti naprezanja imaju primjerenu granicu sigurnosti kada se uspoređuju s poznatim graničnim vrijednostima za korištenje materijala.

Čini se da je Navier, bio prvi koji je, 1826. izjavio da inženjeri nisu ustvari zainteresirani za konstrukcijsko stanje sloma, zato što su se složili da je to stanje koje treba izbjegavati. Radije, Navier efektivno reafirmira srednjovjekovne potrebe da bi građevine trebale stajati. Ali to nije moglo biti osigurano pridruživanjem geometrijskih omjera konstrukciji, već proračunom naprezanja konstrukcijskim elemenata. Inženjerov je posao, smatrao je Navier, da izračuna stvarno stanje konstrukcije i osigura da pridružena naprezanja ne prekorače granične vrijednosti. Projektanti moraju kao prvi korak naći unutarnje sile konstrukciji, tako da bi se

odgovarajuće vrijednosti naprezanja mogle izračunati. Prve jednadžbe, koje se napišu, su one vezane za statiku; unutarnje sile moraju biti u ravnoteži sa vanjskim nametnutim opterećenjem. Ako se ove jednadžbe mogu odmah riješiti tada je prvi korak završen (i tehnički tada je konstrukcija statički određena). Općenito su međutim, jednadžbe ravnoteže, ako su same, neriješive; konstrukcija je statički neodređena. Postoji mnogo mogućih ravnotežnih stanja, tj. ima mnogo različitih načina na koji konstrukcija može nositi opterećenje, i drugi podaci moraju biti uvedeni u analize kako bi se odredilo stvarno stanje.

Jednadžbe ravnoteže, korištene same, ne daju dovoljno informacija da bi se odredio stvarni položaj tlačne linije sa slike 18. Moraju se koristiti i druga dva iskaza konstrukcijske analize. Prvi od njih je iskaz o svojstvima materijala, čime će se deformacije luka povezati s unutarnjim silama. Drugi je geometrijski iskaz koji uključuje unutarnja i vanjska ograničenja konstrukcije; na slici 18. npr. je vidljivo je da lukovi leže na krutim temeljima iz čega slijedi da su pomaci na tim mjestima jednaki nuli.

### 3. 2. 1. Robert Hooke, 1675.



Slika 21. Hookeov obrnuti lanac

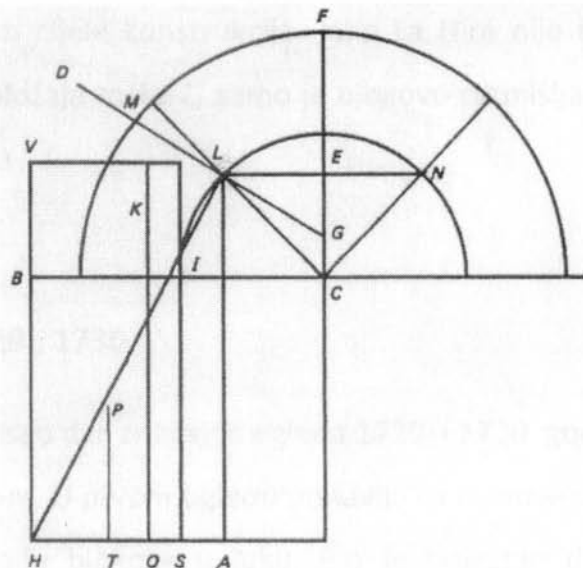
Robert Hooke je znao kako u fizičkom smislu funkcioniraju lukovi. Bio je kustos Kraljevskog društva od 1663. pa sve do njegove smrti 40 godina poslije. Među mnoštvom demonstracija, koje je kao kustos pripremao, u svim područjima znanosti, pokazao je i eksperimente na modelima lukova, ali nije mogao naći odgovarajući matematički izraz jednadžbe lančanice. Objavio je svoje radove u brojnim knjigama, ali glavna pretpostavka nije objavljena sve do njegove smrti. A glasila je, prevedena s latinskog jezika: „Kao što visi savitljiva nit, tako će, ali obrnuto, stajati kruti luk.“ (slika 21.). Hooke je znao da će, ako može riješiti problem oblika lanca koji visi pod vlačnim opterećenjem vlastite težine, u istovrijeme naći i oblik savršenog luka pod istim tlačnim opterećenjem, ali, kao što je rečeno, matematičko rješenje nije mogao dati. Problem lančanice riješio je D. Gregory 1697. god.

### 3. 2. 2. La Hire, 1695., 1712.

Početa La Hireova pretpostavka bila je da na mjestima dodirnih površina između dva klinasto oblikovana kamena bloka u zidanom polukružnom luku nema trenja. Zatim je postavio za problem pronaći težinu kamenih blokova. Rješenje je ležalo u La Hireovoj inovaciji poligona sila i odgovarajućeg verižnog poligona za lukova, što zapravo ne predstavlja ništa drugo nego tlačnu liniju (iako se La Hire nije koristio tim izrazima). Za luk s glatkim blokovima tlačna linija mora biti okomita na dodirne površine, tako da je i verižni poligon fiksiran za oblik luka, a radeći unazad može se konstruirati poligon sila. Ako su ležajne plohe horizontalne, dobiva se da je težina blokova beskonačna, tj. luk takvog oblika s glatkim blokovima ne može stajati. La Hire je došao do ovog zaključka kao rezultat nerealne pretpostavke o ponašanju materijala, te je time dokazao da trenje između blokova daje nužnu stabilnost.

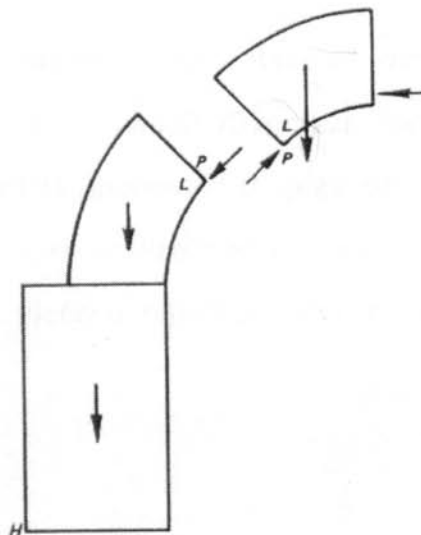
La Hire se vratio proučavanju lukova opet 1712. godine. Napustio je sve svoje prijašnje pretpostavke o glatkim kamenim blokovima, te je uzeo trenje toliko veliko da se klizanje nije nikako moglo dogoditi. Stoga tlačna linija unutar luka nije više ležala okomito na dodirne površine te više nije bilo jednostavnog početka za statičke analize. Pitao se kolika je bila vrijednost potiska luka kako bi pomoću te vrijednosti mogao odrediti dimenzije upornjaka. Ako bi upornjaci bili preslabi i lagano, neznatno se pomicali, kako će se u toj situaciji, luk ponašati? Tvrdio je da će do otvaranja pukotina doći negdje između pete luka i ključnog kamena.





Slika 22. Mehanika polukružnog luka

Na slici 22. kao kritično mjesto je uzeta dužina  $LM$ , koja je ujedno i dodirna površina između dva kamena bloka, te se zbog blago promijenjene dužine raspona formirao zglob u točki  $L$ , tako da je sada točka  $L$  ostala jedini kontakt između donjeg dijela luka  $LMI$  i gornjeg dijela  $LMF$ , pa kroz tu točku moraju proći sile unutar luka.



Slika 23. Statika polukružnog luka

Potisak  $P$  u zglobu  $L$  mora tangirati intrados, što se na slici 23. jasno vidi. Sada se, poznavajući težinu gornjeg dijela luka  $LMF$  (slika 22.), može pronaći vrijednost svih sila. Napokon, računajući moment oko točke  $H$ , za donji dio luka i stup, dobiva se izraz

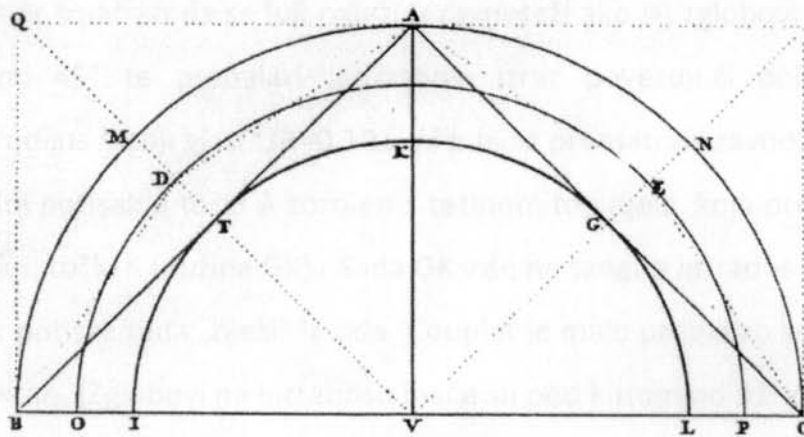
za provjeru stabilnosti cijele konstrukcije. Iako La Hire nije dao nikakvo pravilo za pronalazak točnog položaja točke  $L$ , samo je njegovo razmišljanje puno doprionijelo daljnjim istraživanjima.

### 3. 2. 3. Couplet, 1729., 1730.

Couplet je napisao dva značajna oglada 1729. i 1730. godine koja su se protivila svemu dosad poznatom. U prvom ogledu ponavlja La Hireove prve analize u kojima se ne javlja trenje između blokova u luku. Bio je svijestan da takav luk nije imao praktičnu primjenu te je i on brzo napustio tu ideju.

Glavni uspjeh napravio je sa svojim drugim ogledom. U samom uvodu precizno navodi pretpostavke o ponašanju materijala - navodi da trenje u praksi spaja kamene blokove te time onemogućava klizanje, dok nikakav otpor nije pružen odvajanju blokova. Polazeći od toga Couplet iznosi 3 ključna postulata o ponašanju zida: nema vlačne čvrstoće, tlačna čvrstoća je beskonačna i ne može doći do sloma zbog klizanja.

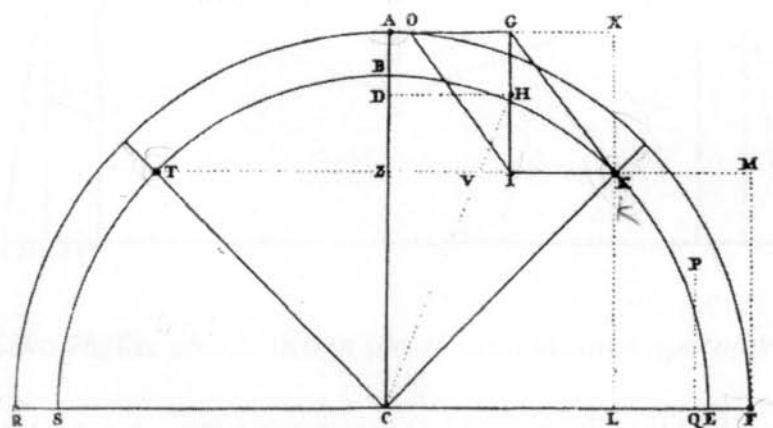
Pored toga, u svojem radu navodi dva moguća pristupa svakom konstrukcijskom problemu - *pomoću ravnoteže* (pomoću tlačne linije) i *pomoću deformacije* (pomoću modela zglobova). U njegovom prvom teoremu 1730. nalaze se oba pogleda na konstrukcijske analize. Teorem govori da se luk neće srušiti ako tetiva polovine ekstradosa ne siječe u nijednoj točki intrados, što znači da mora ležati unutar debljine luka.



Slika 24. Luk koji se ne bi mogao srušiti pod vertikalnim opterećenjem u tjemenu  
(Couplet, 1730)

Ako se polukružni luk zanemarive vlastite težine sa slike 24. izloži jediničnoj vertikalnoj sili smještenoj u točki A, u točkama B i C, koje se nalaze na osloncima, bit će izazvane sile koje prate tlačne linije AFB i AGC. Nadalje, da bi se luk srušio, kut BAC mora se povećati, a to se može dogoditi jedino kao posljedica širenja upornjaka.

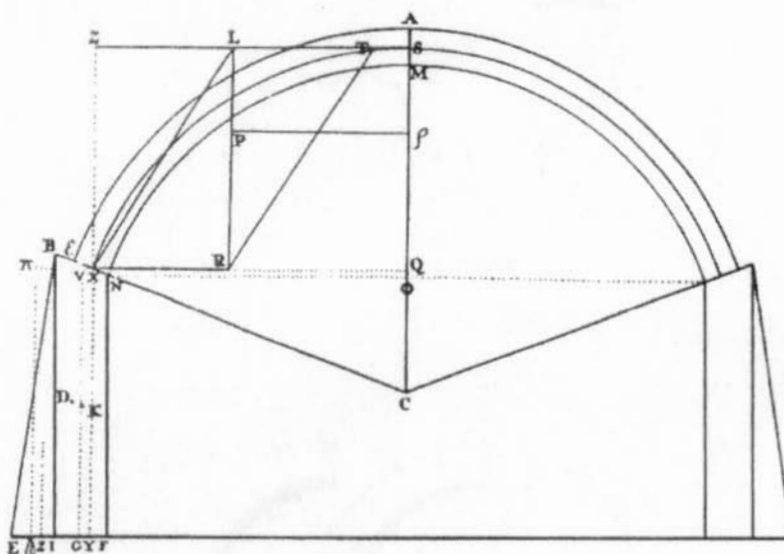
Sljedeći Coupletov problem bio je pronaći najmanju debljinu polukružnog luka koji nosi samo vlastitu težinu. Luk će se srušiti odvajajući se u 4 komada koji su međusobno priključeni u zglobovima R, T, A, K i F (statika luka prikazana je na slici 25.).



Slika 25. Polukružni luk minimalne debljine (Couplet)

Couplet je smatrao da se luk nalazi u ravnoteži ako su zglobovi T i K smješteni pod kutom od  $45^\circ$  te pronalazi jedinstven izraz povezujući debljinu luka  $t$  i odgovarajući radijus  $R$  koji glasi  $t/R=0,101$ . Ako bi se promatrala ravnoteža samo djela AK, horizontalni potisak u točki A zbrojen s težinom tog djela, koja prolazi kroz točku H, daje potisak u točki K (dužina GK). Sada GK više ne tangira intrados u točki K, što je nemoguće, jer potisak tada „bježi“ iz ziđa. Couplet je malo promašio smisao, ali je rad potpuno korektan. (Zglobovi na intradosu inače su pod kutom od  $31^\circ$  od pete luka, ali analize nisu osjetljive na njihov točan položaj. Točna vrijednost odnosa  $t/R$  povećana je do 0,106.)

Kasnije, kako bi odredio vrijednost potiska upornjaka općenitijeg oblika luka, Couplet napušta svoja dosadašnja razmatranja i prerađuje La Hireove pristupe (slika 26.). Potisak u tjemenu djeluje horizontalno u točki S, a težina polovine luka u liniji LR. Jednostavnim zbrajanjem sila dobiva se veličina potiska upornjaka, djelujući u liniji LX. Konačno se dimenzije stupova mogu izračunati i time je cijela konstrukcija stabilna.



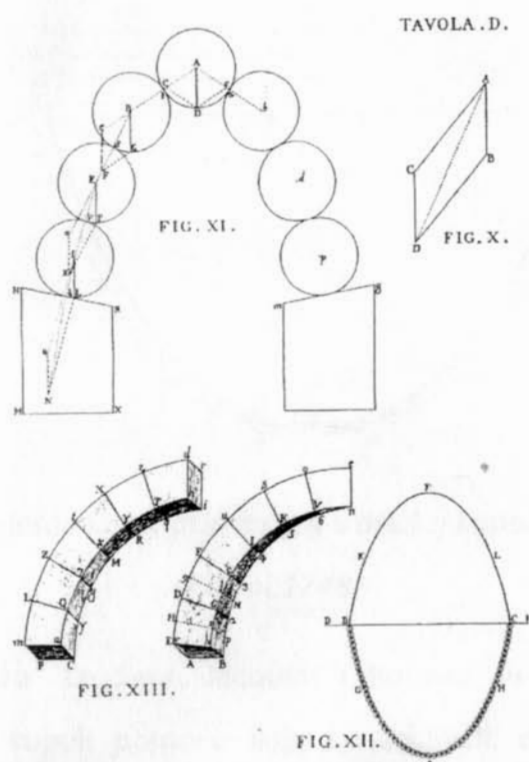
Slika 26. Coupletov sistem sila za projektiranje upornjaka

Coupletov je doprinos bio veoma izrazit. Imao je jasne ideje o tlačnim linijama, mehanizmima sloma uzrokovanih stvaranjem zglobova, pojednostavio je brojne pretpostavke i koristio sve ideje kako bi došao do, u biti točnog i potpunog rješenja

problema projektiranja lukova. Njegov rad je odmah zamijećen te se našao u mnogim standardnim tekstovima.

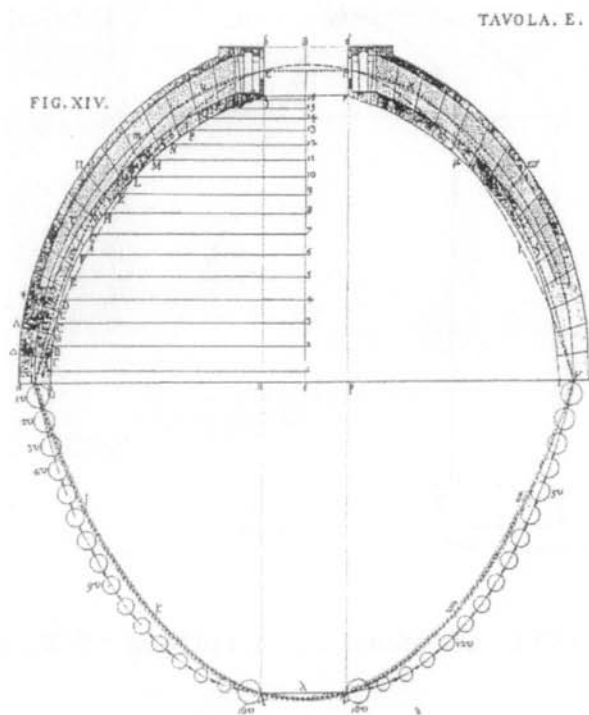
### 3. 2. 4. Poleni, 1748.

Oko 1740. mehanika luka bila je već prilično dobro svladana - ne samo da je problem strukture luka bio riješen, već se teorija mogla primjenjivati općenito za analizu zida. Poleni iznosi u svojim *Memorie istoriche* (1748.) razumljiv pregled postojećih saznanja. Poznao je rad La Hirea i Coupleta, a poznao je i Hookeovu pretpostavku ovješene lanca. Također je naveo i Gregoryeve uratke te Stirlingov interesantan pogled na Gregoryev rad (slika 27. XI prikazuje obrnutu lančanicu sastavljenu od uravnoteženih, glatkih kugli utemeljenu na Stirlingovu radu). Poleni izričito tvrdi (prema Gregoryu) da je jedino što je nužno za stabilnost lukova da tlačna linija leži bilo gdje unutar zida.



Slika 27. Polenijeve ilustracije, 1748.

Na kupoli crkve Sv. Petra javile su se pukotine koje su se širile od dna kupole, a nestajale blizu tjemena. Te meridijalne pukotine dijelile su kupolu na polulukove koji su oblikom sličili polumjesecu ili kriškama naranči (slika XIII). Poleni je hipotetički podijelio kupolu na 50 polumjeseca od kojih je svaki shematski prikazan kao zašiljeni poluluk. Tada je krenuo u razmatranje ravnoteže tog kvazi-dvodimenzionalnog luka zašiljenog do nulte debljine u tjemenu. Pritisak linije je određen eksperimentalno opterećivajući elastične niti nizovima utega različitih težina. Svaka je težina bila proporcionalna segmentu poluluka. Slika 28. prikazuje dobiveni rezultat u kojem se vidi da obrnuta lančanica leži unutar debljine kupole, što zapravo znači da su podijeljeni polulukovi sigurni, a time i cijela rascjepkana kupola.



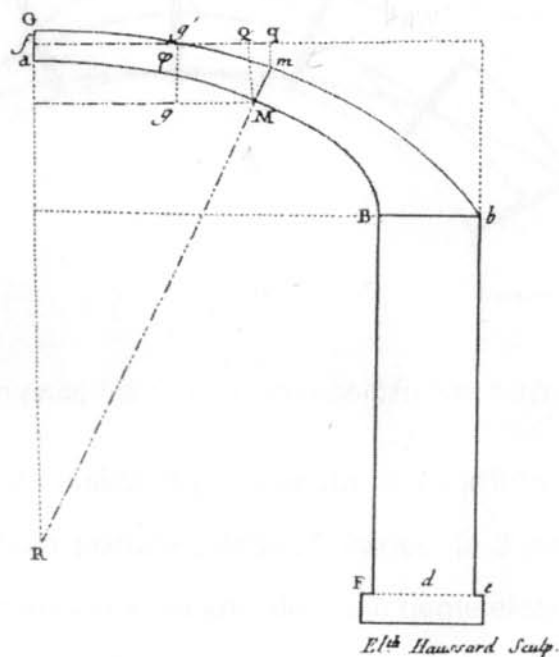
*Slika 28. Ovješeni lanac primjenjen u analizi kupole Sv. Petra u Rimu  
(Poleni,1748)*

„Tri matematičara“ Le Seur, Jacquier i Bošović su 1743. godine napravili alternativnu studiju o kupoli pomoću koje su zaključili da su potrebni dodatni prstenovi blizu podloge da zadrže horizontalni potisak. Napravili su proračun tog potiska pomoću virtualnog rada. Poleni se složio s njima, da se trebaju postaviti

dodatni prstenovi, ali je njegova procjena sile proizašla iz horizontalnog djelovanja obješenog lanca.

### 3. 2. 5. Coulomb, 1773.

Iako nije poznao rad Coupleta i Polenia, Coulomb je iznio mnoge matematičke uvjete kojima je upotpunio teoriju zidanih lukova. Zaključio je da će u praksi umetanjem zglobova uvijek doći do otvaranja pukotina.

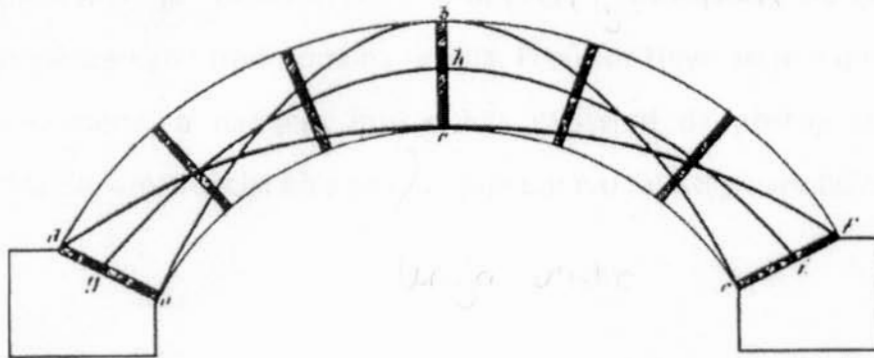


Slika 29. Ravnoteža luka po Coulombu ( 1773 )

Slika 29. Pokazuje jednu od Coulombovih slika iz 1773.; pola luka je održavano u ravnoteži horizontalnim potiskom *H* u tjemenu (prenosi se preko drugog dijela luka) djelovanjem kroz točku *f*. Do loma može doći na mjestu dodirne površine *Mm* između dva susjedna kamena bloka. Coulomb smatra da se prvo zglob stvara negdje oko točke *M* na intradosu te daje općeniti izraz za vrijednost sile *H*. Položaj točke *M* ne smije biti proizvoljan, već mora biti tako odabran da vrijednost potiska *H* bude maksimalna. Ta maksimalna vrijednost *H*, jednom nađena, minimalna je vrijednost za koju je luk stabilan. Slično tomu, ako se slom dogodi umetanjem zgloba oko točke *m*

na ekstradosu, tada položaj točke  $m$  mora biti tako odabran da je vrijednost potiska  $H$  minimalna, što je maksimalna vrijednost za koju će luk biti stabilan. Ideju je fizički prikazao Barlow 1846. na Institutu građevinarstva, započinjući svoju studiju potvrđivanjem Coulombova rada.

U drugom Barlowovom eksperimentu šest je kamenih blokova bilo sastavljeno kao na slici 30., s „mortom“ između svakog kamena u obliku četiri mala komada drveta, koja su se mogla izmaknuti rukom po potrebi.



Slika 30. Barlowov model kamenog luka s mogućim položajima tlačne linije (1846).

Tri od četiri komada su doista bila maknuta u različitim oblicima te su alternativne pozicije linije potiska postale „vidljive“. Barlow je 3 pozicije skicirao u svojoj ilustraciji, slika 30. Najstrmiju krivulju koja dodiruje tjeme ekstradosa Barlow je nazvao *linijom otpora*, a najravniju *linijom utiska*. One predstavljaju granice koje odgovaraju ekstremnim (najvećim i najmanjim) vrijednostima horizontalne komponente potiska upornjaka.



### 3. 3. Granična analiza zidanih konstrukcija profesora Heymana

Profesor Heyman je pripojio tradicionalnu „geometrijsku“ teoriju zidanih konstrukcija u šire okvire moderne granične analize (Limit Analysis). Iznimni, veliki uspjesi starih arhitekata nisu mogli biti stvar slučajnosti. Kao najbolji alat za razumijevanje i analizu zidanih građevina profesor Heyman u ovoj teoriji navodi „ravnotežni pristup“. Analitičari trebaju samo proučavati mogućnosti ravnotežnog stanja zida u tlaku. Postojanje ovih mogućih stanja ravnoteže ovise o geometriji. „Sigurna građevina je uravnotežena građevina“. Moderna teorija daje iste geometrijske iskaze kao i tradicionalna teorija. Profesor Heyman je napravio i brojne povijesne napomene, a namjera mu je bila razjasniti da postoji stara tradicija proračuna zidanih konstrukcija koja primjenjuje upravo taj isti „ravnotežni pristup“.

## 4. ZAKLJUČAK:

Ravnotežni pristup analizi i projektiranju zidanih konstrukcija pokazao se najprikladnijim. On uključuje i tradicionalna pravila geometrijskog projektiranja starih majstora gradnje. Primjenjivali su ga veliki inženjeri 18-og i 19-og stoljeća. Direktno proizlazi iz teorema sigurnosti primijenjivanog na zidane konstrukcije. Ovaj teorem je, kako je profesor Heyman i sam rekao, „kamen na kojem se cijela teorija projektiranja konstrukcija temelji“. Što je najvažnije, poštuje osnovnu nevlačnu osobinu materijala. Još uvijek nije napravljena konstruktivna tvrdnja o elastičnim svojstvima zida. Pitanja/problemi složenog ponašanja konstrukcije i dalje se razmatraju. Zadatak nije lagan, nijedan kompjuterski program neće nam dati jedinstven odgovor, ali problem se prikazuje sa svom očaravajućom složenošću i bogatstvom. Sada je analitičar u situaciji da postavi bitna pitanja i da da odgovore s punim značenjem.

## 5. LITERATURA:

- [1] I. Gukov: *Skripte uz predavanja*, korištene na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, <http://www.grad.hr/gukov/pdf/5-luk.pdf>
- [2] J. Heyman: *Structural Analysis. A Historical Approach*, Cambridge University Press, 1998.
- [3] J. Heyman: *The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture*, Cambridge University Press, 1995.
- [4] S. Huerta: *Historical Constructions*, Guimaraes, Madrid, 2001.
- [5] I. Podhorsky: *Nosive konstrukcije*, Golden Marketing, Zagreb, 2003.
- [6] V. Radonjanin, M. Malešev: *Konstrukcije, materijali i građenje*, [http://www.arhitektura-kmg.net/fajlovi/Zidane\\_konstrukcije.pdf](http://www.arhitektura-kmg.net/fajlovi/Zidane_konstrukcije.pdf)
- [7] V. Šimić: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [8] [http://hr.wikipedia.org/wiki/Luk\\_\(arhitektura\)](http://hr.wikipedia.org/wiki/Luk_(arhitektura))

