

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

ZAVRŠNI RAD IZ PREDMETA  
GRAĐEVNA STATIKA 2

**KUŠEVIĆEV POSTUPAK IZRAČUNAVANJA  
ZAKRETA I POMAKA**

Studentica: Matea Perišić

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Akadska godina: 2010./2011.

Zagreb, 13. rujna 2011.

## SADRŽAJ:

1. BIOGRAFIJA RAJKA KUŠEVIĆA.....	2
2. UVOD.....	3
3. OSNOVNI POJMOVI I IZRAZI RELAKSACIJSKOG POSTUPKA IZRAČUNAVANJA OKVIRNIH KONSTRUKCIJA.....	4
3.1. Jednostrano upeta greda izložena momentu $M_m$ na nepomičnom ležaju $m$ .....	4
3.2. Pramen štapova kruto spojenih u čvoru $m$ i upetih na suprotnim krajevima $k$ , opterećen momentom $M_m$ u čvoru $m$ .....	5
3.3. Upeto-klizni stup izložen horizontalnoj sili $H$ .....	6
3.4. Niz paralelnih štapova jednakih visina upetih u neizmjereno krute grede, izložen horizontalnoj sili $H$ .....	7
4. ČALIŠEVLJEV POSTUPAK.....	9
5. KUŠEVIĆEV POSTUPAK IZRAČUNAVANJA ZAOKRETA I POMAKA.....	12
5.1. Opis postupka.....	12
5.2. Kratak osvrt na vezu s Čališevljevim postupkom.....	15
6. IZVODI OSNOVNIH IZRAZA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA.....	16
7. PRIMJENA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA NA ZADATKU.....	21
8. PRIKAZ I ANALIZA KORAKA POSREDNOG I NEPOSREDNOG IZRAČUNAVANJA PRIKLJUČNIH MOMENATA.....	37
8.1. Zadatak riješen postupkom posrednog izračunavanja priključnih momenata.....	38
8.2. Zadatak riješen postupkom neposrednog izračunavanja priključnih momenata.....	42
8.3. Usporedba posrednog i neposrednog postupka izračunavanja priključnih momenata.....	45
9. ZAKLJUČAK.....	47
10. LITERATURA.....	48

## 1. BIOGRAFIJA RAJKA KUŠEVIĆA

Rajko Kušević rođen je u Iloku 12. 9. 1894., a umro je u Zagrebu 18. 2. 1966. godine. Diplomirao je 1917. na građevinskom odjelu Tehničke visoke škole u Grazu. Nakon toga u službi je tadašnje Hrvatske zemaljske vlade. U Beč odlazi 1921. na specijalizaciju iz područja čeličnih konstrukcija, a krajem 1922. postaje pristav pri Katedri za mostogradnju na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu. Doktorat stječe 1923. godine. Nakon izbora za docenta 1928. preuzima nastavu iz predmeta Tehnička mehanika na Arhitektonskom odjelu, a 1932. iz predmeta Viša građevna statika na Građevinskom odjelu Tehničkog fakulteta u Zagrebu. Za izvanrednog profesora izabran je 1935. godine, a za redovitog 1941. godine. Objavio je velik broj znanstvenih radova iz područja teorije konstrukcija u domaćim i inozemnim časopisima. Glavni je urednik časopisa Tehnički list od 1923. do 1939. godine. Izabran je 1949. godine za dopisnog člana JAZU (Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti).

Uz članove Zavoda za tehničku mehaniku zagrebačkog Građevinskog fakulteta (K. Čališev, G. Kani, O. Werner) dao je doprinos razvoju iteracijskih postupaka za rješavanje sustava jednadžbi inženjerske metode pomaka u štapnoj statici.



*Slika 1. Rajko Kušević*

## 2. UVOD

Rajko Kušević je u članku u časopisu Naše građevinarstvo [1] izveo izraze za iteracijske postupke rješavanja okvira "posrednim izračunavanjem priključnih momenata štapova iz kutova zaokreta čvorova i štapova" i "neposrednim izračunavanjem priključnih momenata štapova". Iteracija se temelji na relaksaciji fiktivnih veza protiv zaokretanja čvorova i stupova pojedinih etaža.

Konstantin Čališev bio je prvi koji je, početkom dvadesetih godina, primijenio iteracijski postupak u rješavanju okvirnih konstrukcija. Ipak, relaksacijski se postupak izračunavanja tih konstrukcija općenito u stručnoj literaturi povezuje s imenom profesora Crossa, koji ga je ponovno otkrio nekoliko godina kasnije.

Kuševićev postupak "posrednog izračunavanja" inačica je Čališevljevog postupka, dok je postupak "neposrednog izračunavanja" inačica Crossovog postupka.

U ovom ću radu detaljno opisati Kuševićevu metodu "posrednog izračunavanja priključnih momenata štapova iz kutova zaokreta čvorova i štapova", te ju usporediti s Čališevljevim postupkom i postupkom "neposrednog izračunavanja priključnih momenata štapova".

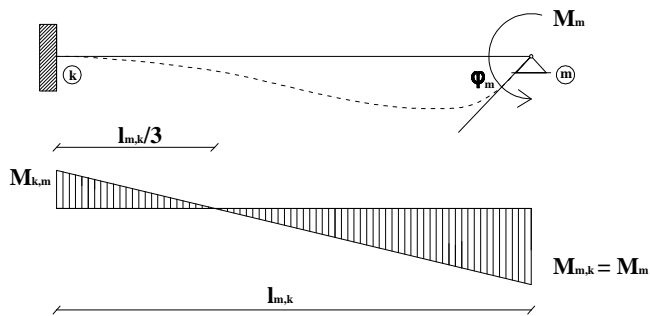
### 3. OSNOVNI POJMOVI I IZRAZI RELAKSACIJSKOG POSTUPKA IZRAČUNAVANJA OKVIRNIH KONSTRUKCIJA

*Dogovor o predznacima:*

- Zaokreti krajeva štapova suprotni od vrtnje kazaljke na satu su pozitivni*
- Momenti na krajevima štapova koji vrte suprotno od vrtnje kazaljke na satu su pozitivni*
- Djelovanje horizontalne sile s lijeva na desno smatra se pozitivnim*

Relaksacijski postupak izračunavanja okvira temelji se na teoriji jednostrano i obostrano upete grede. Ovdje ćemo navesti izraze iz te teorije, koji su potrebni za daljnje izlaganje.

#### 3.1. Jednostrano upeta greda izložena momentu $M_m$ na nepomičnom ležaju $m$



*Slika 2.*

Krutost štapnog elementa  $m-k$ :

$$k_{m,k} = \frac{E_{m,k} I_{m,k}}{l_{m,k}}$$

Momenti savijanja u ležajnim presjecima jednostrano upete grede:

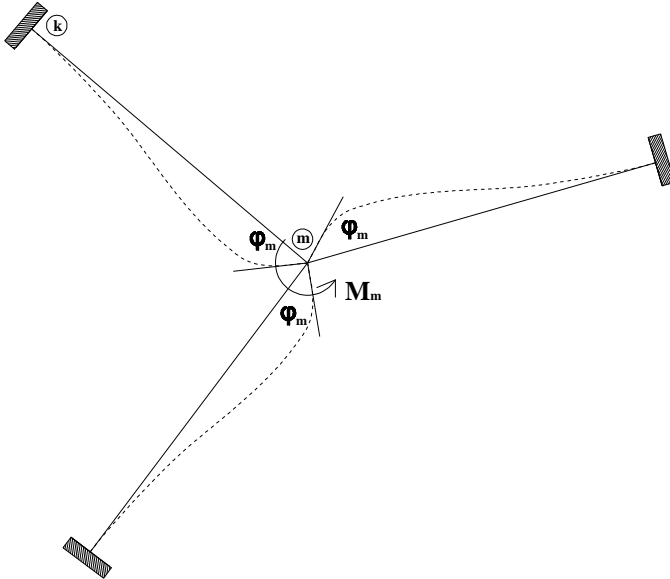
$$M_{m,k} = 4 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m$$

$$M_{k,m} = \frac{1}{2} \cdot M_{m,k} = 2 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m$$

Kut zaokreta presjeka štapnog elementa  $m-k$  u ležaju  $m$ :

$$\varphi_m = \frac{M_m}{4 \cdot k_{m,k}}$$

**3.2. Pramen štapova kruto spojenih u čvoru  $m$  i upetih na suprotnim krajevima  $k$ , opterećen momentom  $M_m$  u čvoru  $m$**



Slika 3.

Krutost čvora:

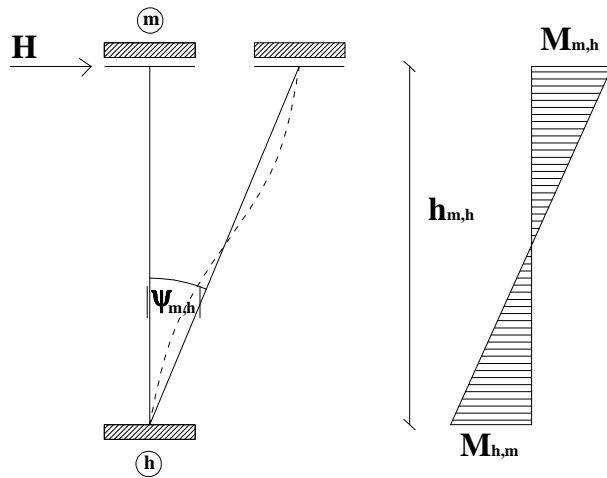
$$\sum_k k_{m,k} = k_m$$

S upotrebom poznatog izraza  $\varphi_m = \frac{M_m}{4 \cdot k_m}$  vrijedi:

$$M_{m,k} = 4 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m = \frac{k_{m,k}}{k_m} \cdot M_m$$

$$M_{k,m} = \frac{1}{2} \cdot M_{m,k} = 2 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m = \frac{k_{m,k}}{2 \cdot k_m} \cdot M_m$$

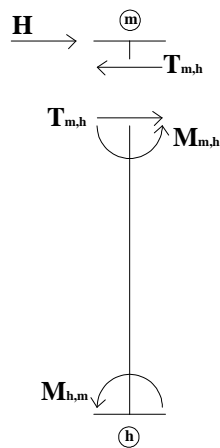
### 3.3. Upeto-klizni stup izložen horizontalnoj sili H



Slika 4.

Moment na dnu stupa zbog sile H:

$$M_r = -H \cdot h_{m,h}$$



Slika 5.

$$H = -T_{m,h}$$

Momenti savijanja na krajevima štapnog elementa:

$$M_{m,h} = M_{h,m} = \frac{T_{m,h} \cdot h_{m,h}}{2}$$

Poprečna sila u presjeku na vrhu štapnog elementa:

$$T_{m,h} = \frac{2 \cdot M_{m,h}}{h_{m,h}}$$

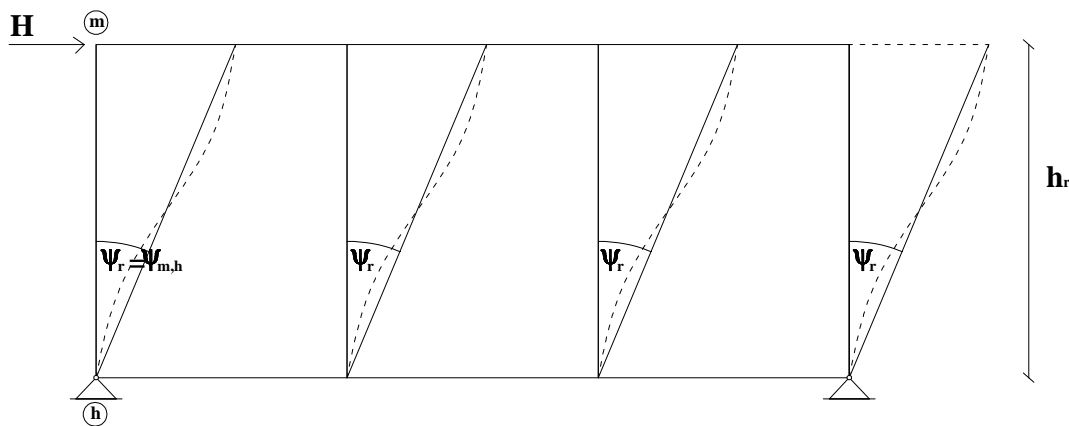
Momenti savijanja u ležajnim presjecima štapnog elementa:

$$M_{m,h} = M_{h,m} = -6 \cdot k_{m,h} \cdot \psi_{m,h}$$

Kut zaokreta štapnog elementa  $m-h$ :

$$\psi_{m,h} = -\frac{M_{m,h}}{6 \cdot k_{m,h}}$$

### 3.4. Niz paralelnih štapova jednakih visina upetih u neizmjereno krute grede, izložen horizontalnoj sili $H$



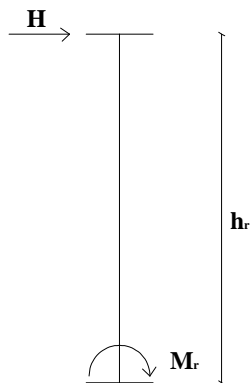
Slika 6.

Krutost etaže  $r$ :

$$\sum_{(m,h) \in r} k_{m,h} = k_r$$

Moment etaže  $r$ :

$$M_r = -H \cdot h_r$$



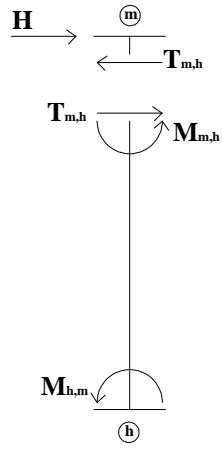
Slika 7.



Potisak etaže  $r$ :

$$H = -\sum_{(m,h) \in r} T_{m,h}$$

$T_{m,h}$  - poprečna sila u presjeku na vrhu štapnog elementa



Slika 8.

S upotrebom poznatog izraza  $\psi_r = \frac{M_r}{12 \cdot k_r}$  vrijedi:

$$M_{m,h} = M_{h,m} = -6 \cdot k_{m,h} \cdot \psi_r = -\frac{k_{m,h}}{k_r} \cdot M_r$$

## 4. ČALIŠEVLJEV POSTUPAK

U uvodu sam napomenula da je postupak "posrednog izračunavanja priključnih momenata štapova iz kutova zaokreta čvorova i štapova" inačica Čališevljevog postupka. Iz tog razloga, prije same teme završnog rada opisat ću izračunavanje priključnih momenata Čališevljevim postupkom.

### Opis postupka

Konstantin Čališev je prvi uveo relaksacijski postupak u proračun statički neodređenih sistema. U članku [1] opisao je način određivanja sporednih naprezanja kod rešetkastih nosača koja nastaju zbog krutosti spojeva u čvorovima, primjenjujući na njih metodu postupnih aproksimacija. U članku [2] postupak je primijenio i na okvirne konstrukcije.

Čališev promatra nepomični sistem u kojem su spriječeni kutovi zaokreta svih čvorova. Translacijski pomaci čvorova također su spriječeni, što je postignuto dodavanjem bočnih pridržanja. Kao osnovni cilj svog postupka smatra određivanje momenata na krajevima pojedinih štapova. Ipak, prvo određuje kutove zaokreta čvorova i stupova, te nakon određivanja njihovih vrijednosti dobiva tražene momente.

Krećemo od čvora gdje možemo pretpostaviti da će kut  $\varphi$  biti najveći, dok je zaokretanje ostalih čvorova spriječeno. U našem slučaju pretpostavit ćemo da je to čvor  $m$ .

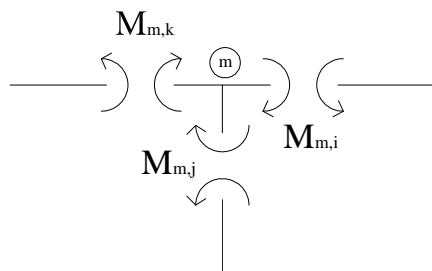
Prema tome, neuravnoteženi moment u čvoru  $m$  obostrano upetog štapnog elementa  $m-k$  dan je izrazom

$$M_{m,k} = 4 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m + 2 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_k + \overline{M}_{m,k}, \quad (1)$$

gdje je prvi pribrojnik doprinos zaokreta čvora  $m$ , a drugi doprinos zaokreta čvora na drugom kraju štapa. S momentom upetosti  $\overline{M}_{m,k}$  uzeli smo u obzir i utjecaj zadanog vanjskog opterećenja.

Iz jednadžbe ravnoteže čvora  $m$ , pri čemu  $k$  označava sve susjedne čvorove, dobivamo da je  $\sum_k (-M_{m,k}) = 0$ . (2)

Momenti koji djeluju na čvor protusmjerni su momentima koji djeluju na krajevima štapova, što je prikazano na slici 9.



Slika 9.

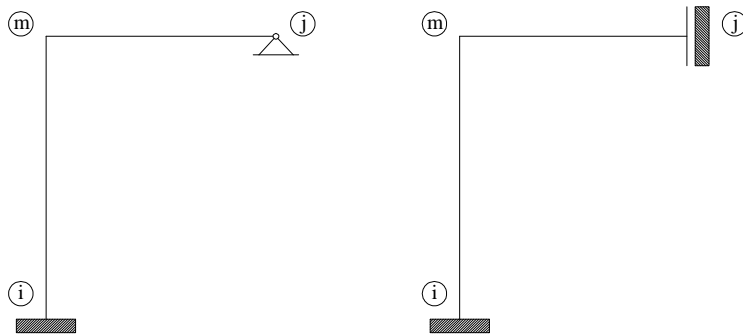
Zaokretanjem čvorova uravnotežujemo neuravnotežene momente u tom čvoru. Iz izraza (1) i (2) slijedi

$$\varphi_m = - \frac{1}{\sum_k 4 \cdot k_{m,k}} \mathfrak{M}_m, \quad (3)$$

gdje je  $\mathfrak{M}_m$  neuravnoteženi moment u čvoru  $m$  prije njegovog prvog zaokretanja. Pri prvom zaokretanju čvora  $m$  uravnotežujemo momente upetosti, dok pri ostalim prenesene momente od prethodnih zaokretanja čvorova. Konačne približne vrijednosti kutova zaokreta dobivamo zbrajanjem njihovih prirasta pri svakom zaokretanju.

Momente dobivamo uvrštavanjem konačnih približnih vrijednosti kutova zaokreta u izraz (1) za momente. U ovom prikazu ograničila sam se na obostrano upete priključne elemente. U slučaju zglobovog ili upeto kliznog ležaja izraz (3) za prirast kuta zaokreta poprima drugi oblik, a time i ostali izrazi.

To ću pokazati u sljedeća dva primjera:

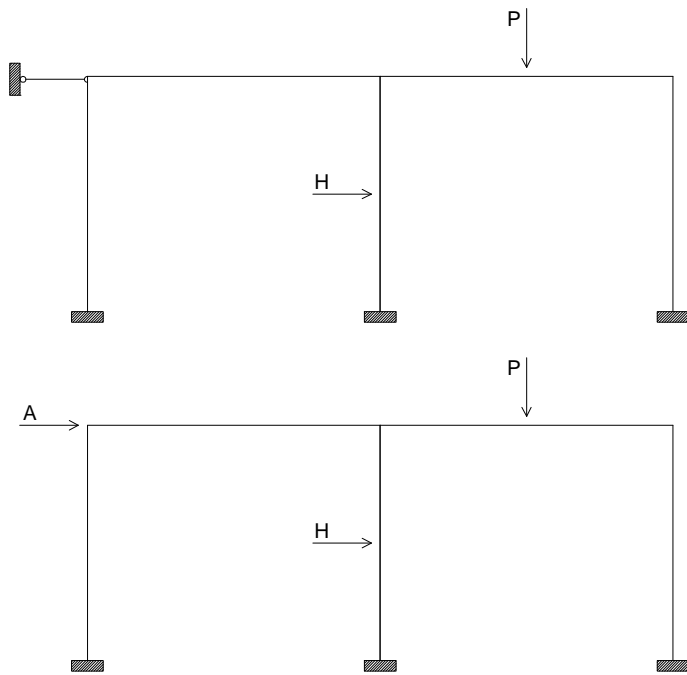


Slika 10.

$$\Delta\varphi_m^n = \frac{\mathfrak{M}_n^{(n-1)}}{4 \cdot k_{m,i} + 3 \cdot k_{m,j}}$$

$$\Delta\varphi_m^n = \frac{\mathfrak{M}_n^{(n-1)}}{4 \cdot k_{m,i} + k_{m,j}}$$

Nakon dobivenih momenata zbog zaokretanja čvorova, potrebno je odrediti momente koji nastaju pod djelovanjem horizontalne sile  $A$ , koja je jednaka i protusmjerna sili u štapu, kojim smo prethodno spriječili translacijski pomak grede. Primjer je prikazan na slici 11.



Slika 11.

Čališev je, umjesto da traži pomake zbog te sile, sam zadao neki pomak  $u$ . Odredio je momente na krajevima štapova koji odgovaraju tom pomaku, te iz njih izračunao odgovarajuću horizontalnu silu  $B$ . Budući da su momenti razmjerni silama, momente koji nastaju radi djelovanja horizontalne sile  $u$  bočnom ukrućenju dobiva množenjem momenata koji odgovaraju danom pomaku  $u$  s razlomkom  $\frac{A}{B}$ . Konačno, prave momente dobiva pribrajanjem ovih momenata momentima zbog zaokretanja čvorova. Zbog toga se ovakva iteracija naziva dvostrukom.

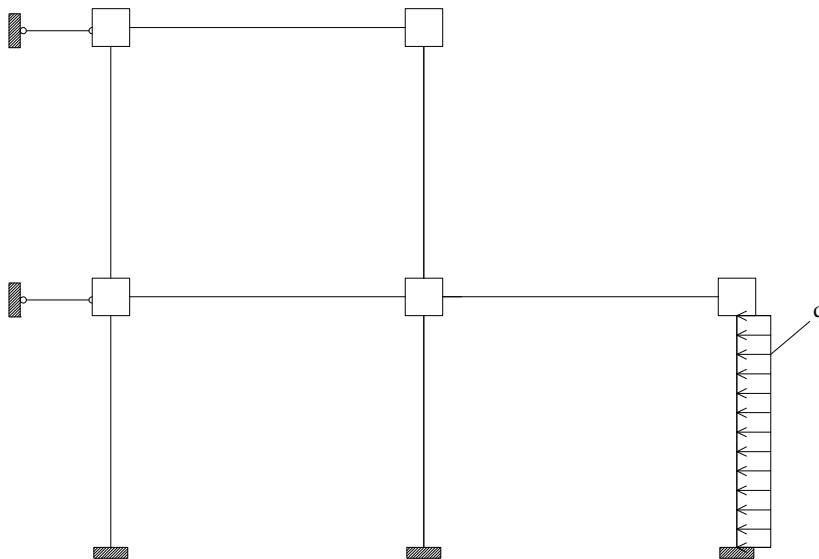
## 5. KUŠEVIĆEV POSTUPAK IZRAČUNAVANJA ZAOKRETA I POMAKA

### 5.1. Opis postupka

Ideja iteracijskog postupka sastoji se u tome da ponavljanjem radnji, odnosno uzastopnim iteracijama, postupno dolazimo da konačnog rješenja. Kušević rješava statički neodređene sisteme s vertikalnim stupovima i s translacijski pomičnim čvorovima. Naizmjenice izračunava priraste kutova zaokreta čvorova i stupova, pa se ovakva iteracija naziva jednostrukom.

Kušević prvo izračunava vrijednosti zaokreta čvorova i stupova pojedinih etaža, a vrijednosti momenata, koji djeluju na krajevima pojedinih štapova, dobiva naknadno tj. posredno. Ciklusi otpuštanja i uspostavljanja fiktivnih pričvršćenja protiv zaokretanja čvorova, u kojima se svaki čvor uravnotežuje po jedanput, izmjenjuju se s ciklusima otpuštanja i uspostavljanja fiktivnih pričvršćenja protiv zaokretanja stupova etaža. U nastavku slijedi detaljan opis.

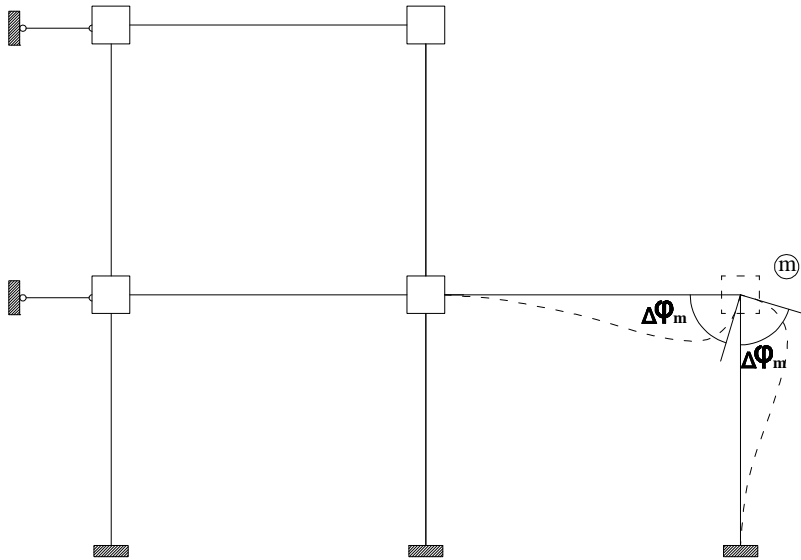
Izvorni sistem Kušević pretvara u nepomični. Dodavanjem fiktivnih veza sprječava kutove zaokreta i translacijske pomake svih čvorova. Nepomični sistem nazivamo osnovnim sistemom.



Slika 12.

Krećemo s rješavanjem osnovnog sistema. Primjer je prikazan na slici 12. Najprije otpuštamo veze protiv zaokretanja čvorova. Zaokrećemo čvor po čvor. Time zadovoljavamo u svakom od njih zasebice uvjet ravnoteže momenata. Treba naglasiti da je pri tome zaokretanje svih ostalih čvorova spriječeno.

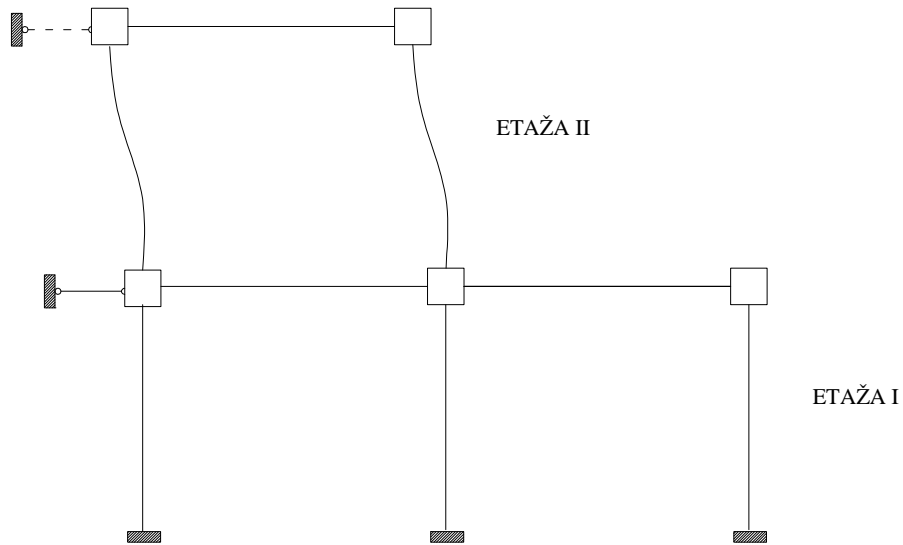
Proračun razmjerno brzo konvergira, posebice ako se kreće od čvora gdje možemo pretpostaviti da će kut zaokreta čvora biti najveći, odnosno sa čvorom u kojemu je intenzitet neuravnoteženog momenta najveći. Čvor od kojega je najbolje započeti iteraciju odabiremo u prvom uravnoteženju prema vrijednostima momenata upetosti, koji se javljaju od utjecaja vanjskog opterećenja nakon što smo upeli sve čvorove. Recimo da je to čvor  $m$  čije smo otpuštanje prikazali na slici 13.



Slika 13.

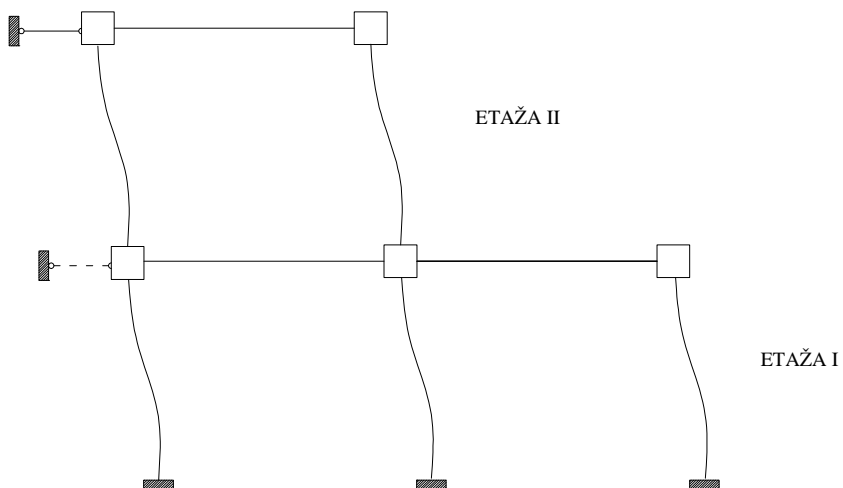
Nadalje, uravnotežujemo i ostale čvorove, čime narušavamo ravnotežu u čvorovima koju smo prethodno ostvarili. Na kraju prvog ciklusa uravnotežavanja svih čvorova dobivamo prve priraste kutova zaokreta čvorova.

Nakon što smo jedanput otpustili i pričvrstili fiktivne veze protiv zaokretanja svih čvorova, otpuštamo fiktivne veze protiv zaokretanja stupova. To je potrebno zbog poprečnih sila na krajevima stupova, koje se javljaju od utjecaja zaokreta čvorova. Čvorovi pojedinih etaža se pomiču, te se stupovi tih etaža zaokreću za neki kut  $\Psi_r$ . Javljaju se momenti na stupovima, zbog čega se oni i deformiraju. Na slici 14. prikazan je izgled sistema nakon relaksacije veza protiv zaokretanja stupova samo jedne etaže.



Slika 14.

Na slici 15. prikazan je sistem nakon uspostavljanja prethodno otpuštenih veza protiv zaokretanja stupova svih etaža.



Slika 15.

U prvom uravnoteženju etaža uzimamo u obzir utjecaj zadanog horizontalnog opterećenja, kao što u prvom uravnoteženju čvorova treba uzeti u obzir utjecaj opterećenja na pojedinim štapovima.

Završili smo s jednim ciklusom uravnoteženja čvorova i jednim ciklusom uravnoteženja stupova, nakon čega smo dobili prve priraste kutova zaokreta čvorova i stupova. Potreban broj ciklusa ovisi o većoj ili manjoj brzini približavanja prirasta kutova zaokreta vrijednosti koja je zanemariva. Zbroj prirasta kutova zaokreta čvorova i stupova iz svakog ciklusa daje konačno rješenje kutova zaokreta iz kojih dobivamo momente.

U daljnjem ću se prikazu ograničiti na okvire s obostrano upetim štapovima, te jednakim visinama stupova u pojedinim etažama. Također sam u primjeni postupka u sljedećim primjerima otpuštala fiktivne veze protiv zaokretanja čvorova i stupova istim redosljedom, jer smatram da ovakvim rješavanjem problema postoji manja mogućnost pogreške, te da je i preglednost računa veća.

## 5.2. Kratak osvrt na vezu s Čališevljevim postupkom

Konstantin Čališev u svojim je člancima istaknuo da će se "pod djelovanjem vanjskih sila čvorovi nosača zaokrenuti u općenitom slučaju za neke kutove  $\varphi$  i uz to pomaknuti za veličinu  $u$ , koja je za sve čvorove grede zajednička", jer "promatramo samo deformaciju uslijed savijanja štapova i zato ne uzimamo u obzir pomaknuća uslijed stlačivanja ili rastezanja štapova", što Kušević isto tako ne uzima u obzir u svom postupku.

Postupci su gotovo identični. Kušević i Čališev prvo izračunavaju pomake sistema kako bi došli do vrijednosti momenata na krajevima štapova. Oba postupka su iteracijska. Jedina je razlika što Kušević u svom postupku dvije iteracije sabire u jednu.

Kušević naizmjenice izračunava priraste kutova zaokreta čvorova i stupova, te ih na kraju uvrštava u izraz za moment

$$M_{m,k} = 4 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m + 2 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_k - 6 \cdot k_{m,k} \cdot \Psi_r + \overline{M}_{m,k} \quad (4)$$

Vidimo da se gornji izraz za moment razlikuje od izraza (1). Razlog tome je što je Čališevljevi u izrazu (1) uzeo u obzir samo zaokretanje čvorova. Nakon što dobije momente zbog zaokretanja čvorova, računa zaokrete stupova i momente koji se zbog njih javljaju. Treba napomenuti da je kod Čališeva pametnije prvo zaokrenuti najvišu etažu, tako da nam zbroj zadanih horizontalnih sila iznad presjeka etaže koju trenutno zaokrećemo bude poznat, dok to kod Kuševićevog postupka nije bitno.

Mogu reći da Kušević bolje obješnjava gibanje sistema pod opterećenjem, jer su zaokreti čvorova i stupova u uzročno-posljedičnoj vezi.



## 6. IZVODI OSNOVNIH IZRAZA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA

Izvodi Kuševićevog postupka razdvojeni su u nastavku u dvije cjeline, odnosno na prvi ciklus i ostale cikluse relaksacije veza protiv zaokretanja čvorova i stupova. Razlog tome je što u prvom ciklusu pri dobivanju krajnjih momenata moramo uzeti u obzir i utjecaj zadanog vanjskog opterećenja, dok u ostalim ciklusima uzimamo u obzir samo utjecaj zaokretanja čvorova i stupova. Upravo zbog toga su ostali ciklusi zapravo identični.

### PRVI CIKLUS RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

Prvo otpuštamo veze protiv zaokretanja čvorova. Zaokrećemo čvor po čvor, zadovoljavajući time u svakom od njih zasebice uvjet ravnoteže momenata. Pri tome su zaokreti svih ostalih čvorova spriječeni. Pri zaokretanju čvora uravnotežujemo neuravnotežene momente u tom čvoru. Time narušavamo ravnotežu u čvorovima koju smo prethodno ostvarili. Neuravnoteženi moment u čvoru  $m$  prije njegova zaokretanja dan je izrazom

$$\mathfrak{M}_m^{(0)} = \sum_k \overline{M}_{m,k} + \sum_k 2 \cdot k_{m,k} \cdot \Delta\varphi_k^{(1)}, \quad (5)$$

gdje prvi pribrojnik predstavlja zbroj momenata upetosti priključnih štapova čvora  $m$ , a drugi pribrojnik je zbroj utjecaja zaokretanja susjednih čvorova uravnoteženih prije čvora  $m$ .

Prirasti kutova zaokreta čvorova ovise o intenzitetu neuravnoteženog momenta i o krutostima priključnih štapnih elemenata  $k_{m,k} = \frac{E_{m,k} I_{m,k}}{l_{m,k}}$ . Sada imamo sve potrebne podatke za dobivanje prirasta kuta zaokreta čvora iz sljedećeg izraza:

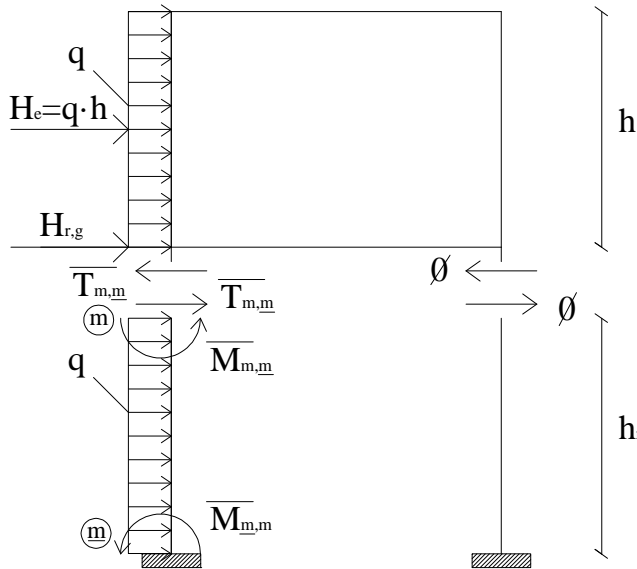
$$\Delta\varphi_m^{(1)} = - \frac{1}{\sum_k 4 \cdot k_{m,k}} \cdot \mathfrak{M}_m^{(0)}. \quad (6)$$

Prirast kuta zaokreta čvora ima negativan predznak jer neuravnoteženi moment u čvoru uravnotežujemo momentom istog iznosa, ali suprotnog smjera.

### PRVI CIKLUS RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA POJEDINIHTAŽA

Nakon što smo jedanput otpustili i pričvrstili fiktivne veze protiv zaokretanja svih čvorova, otpuštamo fiktivne veze protiv zaokretanja stupova. To je potrebno zbog poprečnih sila na krajevima stupova, koje se u prvom ciklusu javljaju od utjecaja zadanog horizontalnog opterećenja i utjecaja prethodnog zaokreta čvorova. Čvorovi pojedinih etaža se pomiču, a stupovi zaokreću.

Prvo ću objasniti utjecaj zadanog horizontalnog opterećenja, kojeg dobivamo presijecanjem stupova pojedinih etaža nepomičnog sistema. Primjer presijecanja jedne etaže prikazan je na slici 16.



Slika 16.

Na isti način presijecamo i ostale etaže.

Izraz za vrijednost ukupne horizontalne sile koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže  $r$  glasi:

$$H_r = H_{r,g} + \sum_{e>r} H_e - \sum_{(m,\underline{m}) \in r} \overline{T_{m,\underline{m}}}. \quad (7)$$

Prvi član  $H_{r,g}$  predstavlja rezultantu zadanih horizontalnih sila koje djeluju na gredi etaže  $r$ , drugi  $\sum_{e>r} H_e$  rezultantu zadanih horizontalnih sila koje djeluju na etažama iznad etaže  $r$ , a posljednji član  $\sum_{(m,\underline{m}) \in r} \overline{T_{m,\underline{m}}}$  zbroj poprečnih sila upetosti na vrhu stupa etaže  $r$ .

Vrijednost poprečne sile upetosti na vrhu stupa ovisi samo o poznatim vrijednostima zadanih opterećenja i dana je izrazom

$$\overline{T_{m,\underline{m}}} = T_{m,\underline{m}}^{(0)} + \frac{1}{h_{m,\underline{m}}} \cdot (\overline{M_{m,\underline{m}}} + \overline{M_{\underline{m},m}}). \quad (8)$$

Oznaka  $T_{m,\underline{m}}^{(0)}$  predstavlja poprečnu silu na prostoj gredi zbog zadanog horizontalnog opterećenja tog stupa, dok izraz  $\frac{1}{h_{m,\underline{m}}} \cdot (\overline{M_{m,\underline{m}}} + \overline{M_{\underline{m},m}})$  predstavlja poprečnu silu na vrhu stupa od utjecaja momenata upetosti istog stupa.

Dobili smo ukupnu horizontalnu silu koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže  $r$ . Iz toga proizlazi da je izraz za moment upetosti etaže  $r$

$$\overline{M_r^{(0)}} = -H_r \cdot h_r. \quad (9)$$

Moment pozitivne sile  $H_r$  u odnosu na dno etaže je negativnog predznaka, što predstavlja predznak u izrazu (9).

Nakon što smo izračunali utjecaj zadanog horizontalnog opterećenja na promjenu momenta etaže, moramo mu još pribrojiti utjecaj prethodnog zaokreta čvorova. Momenti koji su se javili na krajevima stupova od utjecaja zaokreta čvorova  $m$  i  $\underline{m}$

$$\begin{aligned} M'_{m,\underline{m}} + M'_{\underline{m},m} &= 4 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot \Delta\varphi_m^{(1)} + 2 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot \Delta\varphi_m^{(1)} + 4 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot \Delta\varphi_{\underline{m}}^{(1)} + 2 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot \Delta\varphi_{\underline{m}}^{(1)} \\ &= 6 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot (\Delta\varphi_m^{(1)} + \Delta\varphi_{\underline{m}}^{(1)}) \end{aligned} \quad (10)$$

moraju biti uravnoteženi.

Izraz za poprečnu silu na vrhu stupa, koja se javlja zbog momenata na dnu i vrhu stupa nakon zaokreta čvorova  $m$  i  $\underline{m}$ , dobiven je iz izraza (10):

$$T'_{m,\underline{m}} = \frac{6 \cdot k_{m,\underline{m}}}{h_r} \cdot (\Delta\varphi_m^{(1)} + \Delta\varphi_{\underline{m}}^{(1)}). \quad (11)$$

Doprinos utjecaja prethodnog zaokreta čvorova na promjenu momenta etaže dan je izrazom

$$\Delta M_r^{(1)} = [\sum_{(m,\underline{m}) \in r} T'_{m,\underline{m}}] \cdot h_r = \sum_{(m,\underline{m}) \in r} 6 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot (\Delta\varphi_m^{(1)} + \Delta\varphi_{\underline{m}}^{(1)}).$$

Ukupni neuravnoteženi moment etaže  $r$  je zbroj prirasta momenata od utjecaja zadanog horizontalnog opterećenja i utjecaja prethodnog zaokreta čvorova, što prikazuje sljedeći izraz:

$$\mathcal{M}_r^{(0)} = \overline{M}_r^{(0)} + \Delta M_r^{(1)}. \quad (12)$$

Prirasti kutova zaokreta stupova ovise o intenzitetu ukupnog neuravnoteženog momenta etaže i o krutostima stupova te etaže. Sada imamo sve potrebne podatke za dobivanje prirasta kuta zaokreta etaže  $r$  iz sljedećeg izraza:

$$\Delta\Psi_r^{(1)} = \frac{1}{12 \cdot k_r} \cdot \mathcal{M}_r^{(0)}. \quad (13)$$

## OSTALI CIKLUSI RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

Ponavljamo postupak iz prvog ciklusa uravnoteženja čvorova. Jedina razlika je u izrazu za neuravnoteženi moment. Izraz za neuravnoteženi moment u čvoru  $m$  prije njegova zaokretanja u ostalim ciklusima sada glasi

$$\mathfrak{M}_m^{(n_c-1)} = \sum_k 2 \cdot k_{m,k} \cdot \Delta\varphi_k^{(n_c)} - 6 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot \Delta\Psi_r^{(n_c-1)} - 6 \cdot k_{m,\overline{m}} \cdot \Delta\Psi_{r+1}^{(n_c-1)}. \quad (14)$$

Neuravnoteženi moment u čvoru  $m$ , naravno, ne sadrži više momente upetosti kao u prvom ciklusu, ali i dalje sadrži utjecaj zaokretanja susjednih čvorova uravnoteženih u ciklusu  $n_c$  prikazanog kao

$$\sum_k 2 \cdot k_{m,k} \cdot \Delta\varphi_k^{(n_c)}.$$

Sada ne smijemo zaboraviti utjecaj zaokretanja susjednih čvorova koji još nisu uravnoteženi u ciklusu  $n_{\xi}$ , te je on prikazan kao

$$\sum_k 2 \cdot k_{m,k} \cdot \Delta \varphi_k^{(n_{\xi}-1)}.$$

Iz toga je

$$\sum_k 2 \cdot k_{m,k} \cdot \Delta \varphi_k^{(n_{\xi}-1)}$$

zbroj utjecaja zaokretanja susjednih čvorova koji još nisu uravnoteženi u ciklusu  $n_{\xi}$  i onih uravnoteženih u ciklusu  $n_{\xi}$ .

Pošto se ciklusi uravnoteženja čvorova i stupova stalno izmjenjuju, u ostalim ciklusima uravnoteženja čvorova moramo uzeti u obzir i utjecaj zaokretanja etaža. Utjecaj zaokreta etaže  $r$  iz prethodnog ciklusa  $n_{\xi}-1$  predstavlja

$$-6 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot \Delta \Psi_r^{(n_{\xi}-1)},$$

dok je

$$-6 \cdot k_{m,\overline{m}} \cdot \Delta \Psi_{r+1}^{(n_{\xi}-1)}$$

utjecaj zaokreta etaže  $r+1$  iz prethodnog ciklusa  $n_{\xi}-1$ , ako sistem ima više etaža.

Prirast kuta zaokreta čvora određuje se prema izrazu (6) iz prvog ciklusa, samo smo gornje indekse prilagodili ostalim ciklusima uravnoteženja čvorova, te ga računamo prema izrazu

$$\Delta \varphi_m^{(n_{\xi})} = - \frac{1}{\sum_k 4 \cdot k_{m,k}} \cdot \mathfrak{B}_m^{(n_{\xi}-1)}. \quad (15)$$

## OSTALI CIKLUSI RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA POJEDINIH ETAŽA

U ostalim ciklusima na promjenu momenta pojedine etaže utječe samo prethodno zaokretanje čvorova. Neuravnoteženi moment etaže  $r$  više nije zbroj momenata od utjecaja zadanog horizontalnog opterećenja i utjecaja zaokreta čvorova, te sada glasi:

$$\Delta M_r^{(n_s)} = [\sum_{(m,\underline{m}) \in r} T_{m,\underline{m}}^{(n_s)}] \cdot h_r = \sum_{(m,\underline{m}) \in r} 6 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot (\Delta \varphi_m^{(n_s)} + \Delta \varphi_{\underline{m}}^{(n_s)}), \quad (16)$$

odnosno

$$\mathcal{M}_r^{(n_s-1)} = \Delta M_r^{(n_s)}. \quad (17)$$

Prirast kuta zaokreta etaže  $r$  određuje se prema izrazu (13) iz prvog ciklusa, samo smo gornje indekse prilagodili ostalim ciklusima uravnoteženja stupova, te ga računamo prema izrazu:

$$\Delta \Psi_r^{(n_s)} = \frac{1}{12 \cdot k_r} \cdot \mathcal{M}_r^{(n_s-1)}. \quad (18)$$

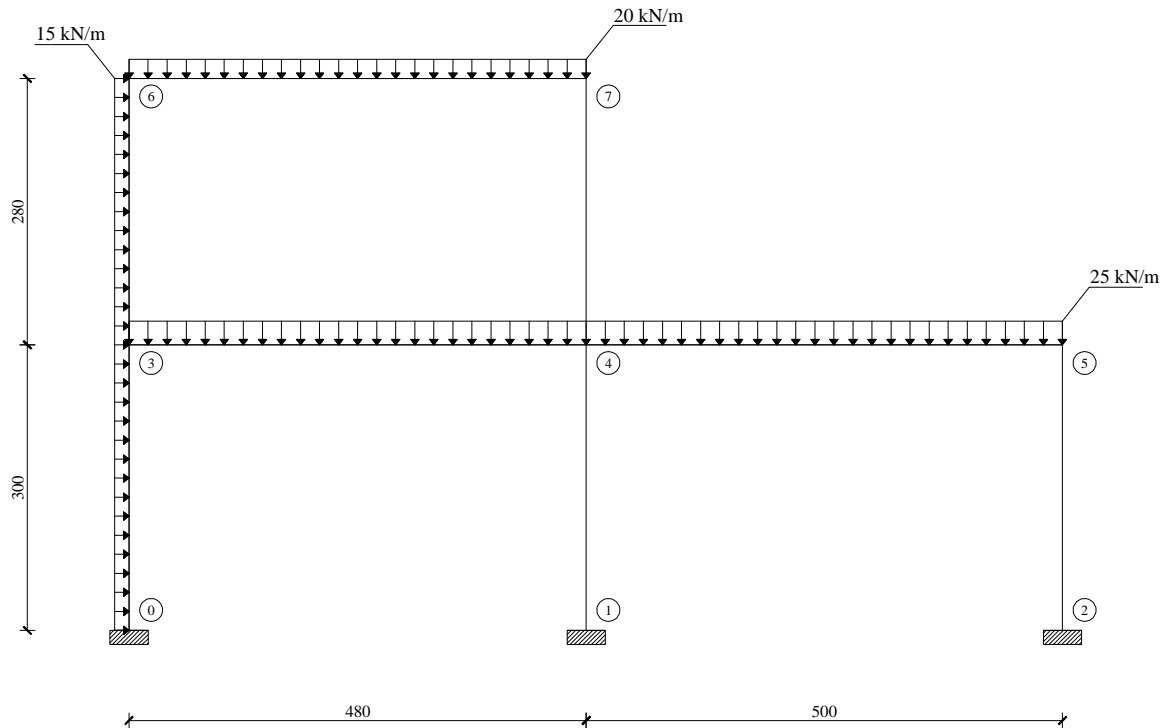
Nakon što smo dovoljno puta ponavljali postupak zaokretanja čvorova i stupova, zbrajamo priraste kutova zaokreta čvorova i stupova, te dobivamo konačne priraste koje uvrštavamo u izraz za moment (4).

*Oznake:*

- $k$  - u uravnoteženju čvorova: susjedni čvorovi čvora  $m$
- $\underline{m}, \overline{m}$  - u uravnoteženju etaža: čvor na dnu stupa ispod čvora  $m$  i čvor na vrhu stupa iznad čvora  $m$
- $r$  - pojedina etaža
- $e$  - etaže iznad etaže  $r$
- $n_{\xi}$  - ciklusi nakon ciklusa prve relaksacije veza protiv zaokretanja čvorova
- $n_s$  - ciklusi nakon ciklusa relaksacije veza protiv zaokretanja stupova etaža

## 7. PRIMJENA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA NA ZADATKU

Za statički neodređen okvir, prikazan na slici 17, treba za zadano opterećenje odrediti dijagram momenata savijanja.



Slika 17.

Dimenzije poprečnih presjeka stupova i greda: - stupovi: 30/30 cm

- greda: 30/60 cm

Krutosti štapova:  $k_{m,k} = \frac{E_{m,k} I_{m,k}}{l_{m,k}}$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ Kn/m}^2$$

Stupovi:

$$I_s = \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 6,750 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$EI_s = 20\,250 \text{ kNm}^2$$

$$k_{30} = k_{41} = k_{52} = \frac{EI_s}{3} = 6750 \text{ kNm}$$

$$k_{63} = k_{74} = \frac{EI_s}{2,8} = 7232,143 \text{ kNm}$$

Grede:

$$I_g = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 5,400 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$EI_g = 162\,000 \text{ kNm}^2$$

$$k_{67} = k_{34} = \frac{EI_g}{4,8} = 33750 \text{ kNm}$$

$$k_{45} = \frac{EI_g}{5,0} = 32400 \text{ kNm}$$

Momenti upetosti:

$$\overline{M}_{03} = \frac{15 \cdot 3^2}{12} = 11,25 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{30} = -11,25 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{14} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{41} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{25} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{52} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{36} = \frac{15 \cdot 2,8^2}{12} = 9,8 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{63} = -9,8 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{47} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{74} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{34} = \frac{25 \cdot 4,8^2}{12} = 48,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{43} = -48,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{45} = \frac{25 \cdot 5^2}{12} = 52,083 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{54} = -52,083 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{67} = \frac{20 \cdot 4,8^2}{12} = 38,4 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{76} = -38,4 \text{ kNm}$$

***1.ciklus***

**RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA**

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_5^{(1)} &= -\frac{1}{4(k_{52}+k_{54})} \cdot (\overline{M}_{52}+\overline{M}_{54}) \\ &= -\frac{0+(-52,083)}{4(6750+32400)} \\ &= 3,326 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_4^{(1)} &= -\frac{1}{4(k_{45}+k_{41}+k_{43}+k_{47})} \cdot (\overline{M}_{45}+\overline{M}_{41}+\overline{M}_{43}+\overline{M}_{47}+2 \cdot k_{45} \cdot \Delta\varphi_4^{(1)}) \\ &= -\frac{52,083+0-48+0+2 \cdot 32400 \cdot 3,326 \cdot 10^{-4}}{4(32400+6750+33750+7232,143)} \\ &= -7,998 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_3^{(1)} &= -\frac{1}{4(k_{34}+k_{30}+k_{36})} \cdot (\overline{M}_{34}+\overline{M}_{30}+\overline{M}_{36}+2 \cdot k_{34} \cdot \Delta\varphi_4^{(1)}) \\ &= -\frac{48-11,25+9,8+2 \cdot 33750 \cdot (-7,998 \cdot 10^{-5})}{4(33750+6750+7232,143)} \\ &= -2,155 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

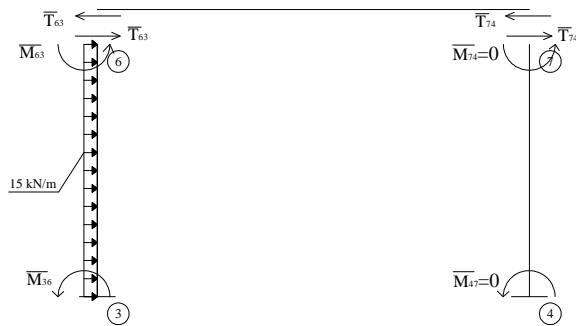
$$\begin{aligned}\Delta\varphi_7^{(1)} &= -\frac{1}{4(k_{74}+k_{76})} \cdot (\overline{M}_{74}+\overline{M}_{76}+2 \cdot k_{74} \cdot \Delta\varphi_4^{(1)}) \\ &= -\frac{0-38,4+2 \cdot 7232,143 \cdot (-7,998 \cdot 10^{-5})}{4(7232,143+33750)} \\ &= -2,413 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_6^{(1)} &= -\frac{1}{4(k_{67}+k_{63})} \cdot (\overline{M}_{67}+\overline{M}_{63}+2 \cdot k_{67} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)}+2 \cdot k_{63} \cdot \Delta\varphi_3^{(1)}) \\ &= -\frac{38,4-9,8+2 \cdot 33750 \cdot 2,413 \cdot 10^{-4}+2 \cdot 7232,143 \cdot (-2,155 \cdot 10^{-4})}{4(33750+7232,143)} \\ &= -2,548 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$



## RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA

## II. etaža



Slika 18.

$$\sum M_3 = 0 \quad h_{II} = 2,8 \text{ m}$$

$$\overline{M}_{36} + \overline{M}_{63} - \overline{T}_{63} \cdot h_{II} - \frac{q \cdot h_{II}^2}{2} = 0$$

$$9,8 - 9,8 \cdot \overline{T}_{63} \cdot 2,8 - \frac{42 \cdot 2,8}{2} = 0$$

$$\overline{T}_{63} = -21,0 \text{ Kn}$$

Vrijednost ukupne horizontalne sile koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže II:

$$H_{II} = -\overline{T}_{63} = -(-21,0) = 21,0 \text{ kN}$$

Moment upetosti etaže II:

$$\overline{M}_{II}^{(0)} = -H_{II} \cdot h_{II} = -21,0 \cdot 2,8 = -58,80 \text{ kNm}$$

Utjecaj zaokreta čvorova stupova u prethodnom ciklusu relaksacije veza protiv zaokretanja čvorova:

$$\begin{aligned} \Delta M_{II}'^{(1)} &= 6 \cdot k_{36} \cdot (\Delta \varphi_3^{(1)} + \Delta \varphi_6^{(1)}) + 6 \cdot k_{47} \cdot (\Delta \varphi_4^{(1)} + \Delta \varphi_7^{(1)}) \\ &= 6 \cdot 7232,143 \cdot (-2,155 \cdot 10^{-4} + (-2,548 \cdot 10^{-4})) + 6 \cdot 7232,143 \cdot (-7,998 \cdot 10^{-5} + 2,413 \cdot 10^{-4}) \\ &= -13,408 \text{ kNm} \end{aligned}$$

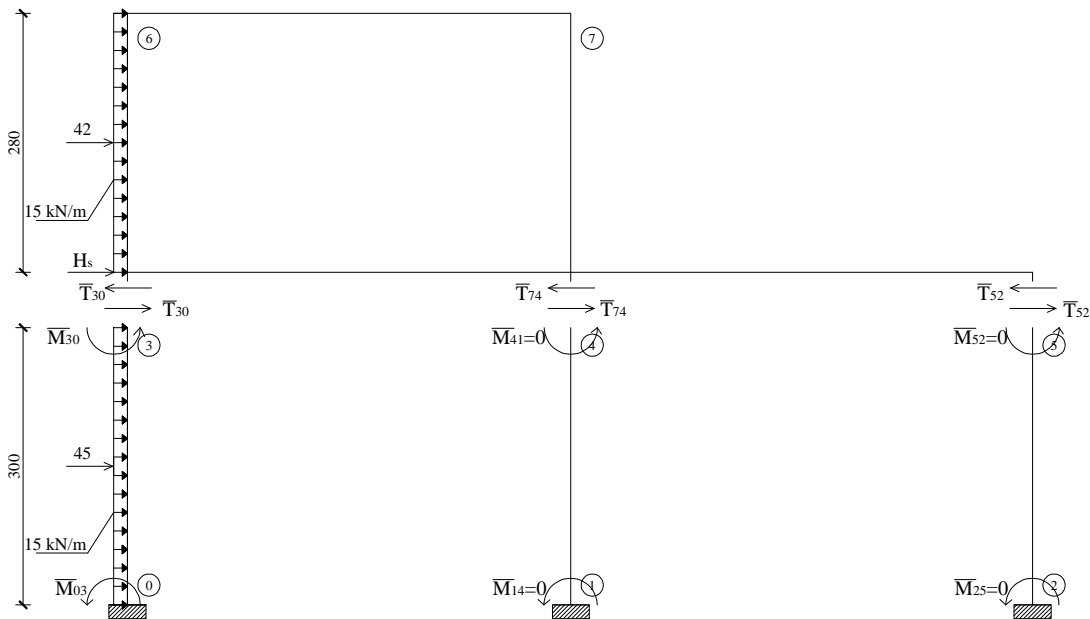
Ukupni neuravnoteženi moment etaže II:

$$\mathcal{M}_{II}^{(0)} = \overline{M}_{II}^{(0)} + \Delta M_{II}'^{(1)} = -58,8 - 13,408 = -72,208 \text{ kNm}$$

Prirast kuta zaokreta etaže II:

$$\Delta \Psi_{II}^{(1)} = \frac{\mathcal{M}_{II}^{(0)}}{12 \cdot (k_{36} + k_{47})} = \frac{-72,208}{12 \cdot 2 \cdot 7232,143} = -4,160 \cdot 10^{-4}$$

## I.etaža



Slika 19.

$$\sum M_0 = 0$$

$$\sum_{e>I} H_e = 42,0 \text{ kN}$$

$$\overline{M_{03}} + \overline{M_{30}} - \overline{T_{30}} \cdot h_1 - \frac{q \cdot h_1^2}{2} = 0$$

$$h_1 = 3,0 \text{ m}$$

$$11,25 - 11,25 \cdot \overline{T_{30}} \cdot 3,0 - \frac{45,0 \cdot 3,0}{2} = 0$$

$$\overline{T_{30}} = -22,5 \text{ kN}$$

Vrijednost ukupne horizontalne sile koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže I:

$$H_I = -\overline{T_{30}} + \sum_{e>I} H_e = -(-22,5) + 42,0 = 64,5 \text{ kN}$$

Moment upetosti etaže I:

$$\overline{M_I^{(0)}} = -H_I \cdot h_1 = -64,5 \cdot 3,0 = -193,5 \text{ kNm}$$

Utjecaj zaokreta čvorova stupova u prethodnom ciklusu relaksacije veza protiv zaokretanja čvorova:

$$\begin{aligned} \Delta M_I^{(1)} &= 6 \cdot k_{03} \cdot \Delta \varphi_3^{(1)} + 6 \cdot k_{14} \cdot \Delta \varphi_4^{(1)} + 6 \cdot k_{25} \cdot \Delta \varphi_5^{(1)} \\ &= 6 \cdot 6750 \cdot (-2,155 \cdot 10^{-4} - 7,998 \cdot 10^{-5} + 3,226 \cdot 10^{-4}) \\ &= 1,503 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Ukupni neuravnoteženi moment etaže I:

$$\mathcal{M}_I^{(0)} = \overline{\mathcal{M}_I^{(0)}} + \Delta \mathcal{M}_I^{(1)} = -193,5 + 1,503 = -191,997 \text{ kNm}$$

Prirast kuta zaokreta etaže I:

$$\Delta \Psi_I^{(1)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(0)}}{12 \cdot (k_{03} + k_{14} + k_{25})} = \frac{-191,997}{12 \cdot 3 \cdot 6750} = -7,901 \cdot 10^{-4}$$

## 2. ciklus

### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_5^{(2)} &= - \frac{1}{4(k_{52} + k_{54})} \cdot (2 \cdot k_{54} \cdot \Delta \varphi_4^{(1)} - 6 \cdot k_{52} \cdot \Delta \Psi_I^{(1)}) \\ &= - \frac{2 \cdot 32400 \cdot (-7,998 \cdot 10^{-5}) - 6 \cdot 6750 \cdot (-7,901 \cdot 10^{-4})}{4(6750 + 32400)} \\ &= -1,712 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_4^{(2)} &= - \frac{1}{4(k_{45} + k_{41} + k_{43} + k_{47})} \cdot (2 \cdot k_{43} \cdot \Delta \varphi_3^{(1)} + 2 \cdot k_{47} \cdot \Delta \varphi_7^{(1)} + 2 \cdot k_{45} \cdot \Delta \varphi_5^{(2)} - 6 \cdot k_{41} \cdot \Delta \Psi_I^{(1)} \\ &\quad - 6 \cdot k_{47} \cdot \Delta \Psi_{II}^{(1)}) \\ &= - \frac{2 \cdot 33750 \cdot (-2,155 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot 2,413 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 32400 \cdot (-1,712 \cdot 10^{-4})}{4(32400 + 6750 + 33750 + 7232,143)} \\ &\quad - \frac{6 \cdot 6750 \cdot (-7,901 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-4,160 \cdot 10^{-4})}{4(32400 + 6750 + 33750 + 7232,143)} \\ &= -8,705 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_3^{(2)} &= - \frac{1}{4(k_{34} + k_{30} + k_{36})} \cdot (2 \cdot k_{36} \cdot \Delta \varphi_6^{(1)} + 2 \cdot k_{34} \cdot \Delta \varphi_4^{(2)} - 6 \cdot k_{30} \cdot \Delta \Psi_I^{(1)} - 6 \cdot k_{36} \cdot \Delta \Psi_{II}^{(1)}) \\ &= - \frac{2 \cdot 7232,143 \cdot (-2,548 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 33750 \cdot (-8,705 \cdot 10^{-5})}{4(33750 + 6750 + 7232,143)} \\ &\quad - \frac{6 \cdot 6750 \cdot (-7,901 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-4,160 \cdot 10^{-4})}{4(33750 + 6750 + 7232,143)} \\ &= -2,121 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_7^{(2)} &= -\frac{1}{4(k_{74}+k_{76})} \cdot (2 \cdot k_{76} \cdot \Delta\varphi_6^{(1)} + 2 \cdot k_{74} \cdot \Delta\varphi_4^{(2)} - 6 \cdot k_{74} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(1)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 33750 \cdot (-2,548 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot (-8,705 \cdot 10^{-5}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-4,160 \cdot 10^{-4})}{4(7232,143+33750)} \\ &= 2,481 \cdot 10^{-6} \\ \Delta\varphi_6^{(2)} &= -\frac{1}{4(k_{67}+k_{63})} \cdot (2 \cdot k_{67} \cdot \Delta\varphi_7^{(2)} + 2 \cdot k_{63} \cdot \Delta\varphi_3^{(2)} - 6 \cdot k_{63} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(1)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 33750 \cdot 2,481 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 7232,143 \cdot (-2,121 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-4,160 \cdot 10^{-4})}{4(33750+7232,143)} \\ &= -9,242 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

## RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA

### II. etaža

Neuravnoteženi moment etaže II:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{II}^{(1)} = \Delta M_{II}^{\prime(2)} &= 6 \cdot k_{36} \cdot (\Delta\varphi_3^{(2)} + \Delta\varphi_6^{(2)}) + 6 \cdot k_{47} \cdot (\Delta\varphi_4^{(2)} + \Delta\varphi_7^{(2)}) \\ &= 6 \cdot 7232,143 \cdot (-2,121 \cdot 10^{-4} - 9,242 \cdot 10^{-5} - 8,705 \cdot 10^{-5} + 2,481 \cdot 10^{-6}) \\ &= -16,884 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Prirast kuta zaokreta etaže II:

$$\Delta\Psi_{II}^{(2)} = \frac{\mathcal{M}_{II}^{(1)}}{12 \cdot (k_{36} + k_{47})} = \frac{-16,884}{12 \cdot 2 \cdot 7232,143} = -9,727 \cdot 10^{-5}$$

### I. etaža

Neuravnoteženi moment etaže I:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_I^{(1)} = \Delta M_I^{\prime(2)} &= 6 \cdot k_{03} \cdot \Delta\varphi_3^{(2)} + 6 \cdot k_{14} \cdot \Delta\varphi_4^{(2)} + 6 \cdot k_{25} \cdot \Delta\varphi_5^{(2)} \\ &= 6 \cdot 6750 \cdot (-2,121 \cdot 10^{-4} - 8,705 \cdot 10^{-5} - 1,712 \cdot 10^{-4}) \\ &= -19,049 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Prirast kuta zaokreta etaže I:

$$\Delta\Psi_I^{(2)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(1)}}{12 \cdot (k_{03} + k_{14} + k_{25})} = \frac{-19,049}{12 \cdot 3 \cdot 6750} = -7,839 \cdot 10^{-5}$$

### 3. ciklus

#### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_5^{(3)} &= -\frac{1}{4(k_{52}+k_{54})} \cdot (2 \cdot k_{54} \cdot \Delta\varphi_4^{(2)} - 6 \cdot k_{52} \cdot \Delta\Psi_I^{(2)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 32400 \cdot (-8,705 \cdot 10^{-5}) - 6 \cdot 6750 \cdot (-7,839 \cdot 10^{-5})}{4(6750+32400)} \\ &= -1,573 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_4^{(3)} &= -\frac{1}{4(k_{45}+k_{41}+k_{43}+k_{47})} \cdot (2 \cdot k_{43} \cdot \Delta\varphi_3^{(2)} + 2 \cdot k_{47} \cdot \Delta\varphi_7^{(2)} + 2 \cdot k_{45} \cdot \Delta\varphi_5^{(3)} - 6 \cdot k_{41} \cdot \Delta\Psi_I^{(2)} \\ &\quad - 6 \cdot k_{47} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(2)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 33750 \cdot (-2,121 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot 2,481 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 32400 \cdot 1,573 \cdot 10^{-5}}{4(32400+6750+33750+7232,143)} \\ &\quad - \frac{6 \cdot 6750 \cdot (-7,839 \cdot 10^{-5}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-9,727 \cdot 10^{-5})}{4(32400+6750+33750+7232,143)} \\ &= 1,830 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_3^{(3)} &= -\frac{1}{4(k_{34}+k_{30}+k_{36})} \cdot (2 \cdot k_{36} \cdot \Delta\varphi_6^{(2)} + 2 \cdot k_{34} \cdot \Delta\varphi_4^{(3)} - 6 \cdot k_{30} \cdot \Delta\Psi_I^{(2)} - 6 \cdot k_{36} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(2)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 7232,143 \cdot (-9,242 \cdot 10^{-5}) + 2 \cdot 33750 \cdot 1,830 \cdot 10^{-5}}{4(33750+6750+7232,143)} \\ &\quad - \frac{6 \cdot 6750 \cdot (-7,839 \cdot 10^{-5}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-9,727 \cdot 10^{-5})}{4(33750+6750+7232,143)} \\ &= -3,820 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_7^{(3)} &= -\frac{1}{4(k_{74}+k_{76})} \cdot (2 \cdot k_{76} \cdot \Delta\varphi_6^{(2)} + 2 \cdot k_{74} \cdot \Delta\varphi_4^{(3)} - 6 \cdot k_{74} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(2)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 33750 \cdot (-9,242 \cdot 10^{-5}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot 1,830 \cdot 10^{-5} - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-9,727 \cdot 10^{-5})}{4(7232,143+33750)} \\ &= 1,069 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_6^{(3)} &= -\frac{1}{4(k_{67}+k_{63})} \cdot (2 \cdot k_{67} \cdot \Delta\varphi_7^{(3)} + 2 \cdot k_{63} \cdot \Delta\varphi_3^{(3)} - 6 \cdot k_{63} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(2)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 33750 \cdot 1,069 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 7232,143 \cdot (-3,820 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-9,727 \cdot 10^{-5})}{4(33750+7232,143)} \\ &= -2,678 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

## RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA

### II.etaža

Neuravnoteženi moment etaže II:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{II}^{(2)} = \Delta M_{II}^{(3)} &= 6 \cdot k_{36} \cdot (\Delta \varphi_3^{(3)} + \Delta \varphi_6^{(3)}) + 6 \cdot k_{47} \cdot (\Delta \varphi_4^{(3)} + \Delta \varphi_7^{(3)}) \\ &= 6 \cdot 7232,143 \cdot (-3,820 \cdot 10^{-5} - 2,678 \cdot 10^{-5} + 1,830 \cdot 10^{-5} + 1,063 \cdot 10^{-5}) \\ &= -1,562 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Prirast kuta zaokreta etaže II:

$$\Delta \psi_{II}^{(3)} = \frac{\mathcal{M}_{II}^{(2)}}{12 \cdot (k_{36} + k_{47})} = \frac{-1,562}{12 \cdot 2 \cdot 7232,143} = -8,999 \cdot 10^{-6}$$

### I.etaža

Neuravnoteženi moment etaže I:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_I^{(2)} = \Delta M_I^{(3)} &= 6 \cdot k_{03} \cdot \Delta \varphi_3^{(3)} + 6 \cdot k_{14} \cdot \Delta \varphi_4^{(3)} + 6 k_{25} \cdot \Delta \varphi_5^{(3)} \\ &= 6 \cdot 6750 \cdot (-3,820 \cdot 10^{-5} + 1,830 \cdot 10^{-5} + 1,573 \cdot 10^{-5}) \\ &= -0,169 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Prirast kuta zaokreta etaže I:

$$\Delta \psi_I^{(3)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(2)}}{12 \cdot (k_{03} + k_{14} + k_{25})} = \frac{-0,169}{12 \cdot 3 \cdot 6750} = -6,955 \cdot 10^{-7}$$

## **4. ciklus**

### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_5^{(4)} &= -\frac{1}{4(k_{52} + k_{54})} \cdot (2 \cdot k_{54} \cdot \Delta \varphi_4^{(3)} - 6 \cdot k_{52} \cdot \Delta \psi_I^{(3)}) \\ &= -\frac{2 \cdot 32400 \cdot 1,830 \cdot 10^{-5} - 6 \cdot 6750 \cdot (-6,955 \cdot 10^{-7})}{4(6750 + 32400)} \\ &= -7,752 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_4^{(4)} &= -\frac{1}{4(k_{45} + k_{41} + k_{43} + k_{47})} \cdot (2 \cdot k_{43} \cdot \Delta \varphi_3^{(3)} + 2 \cdot k_{47} \cdot \Delta \varphi_7^{(3)} + 2 \cdot k_{45} \cdot \Delta \varphi_5^{(4)} - 6 \cdot k_{41} \cdot \Delta \psi_I^{(3)} \\ &\quad - 6 \cdot k_{47} \cdot \Delta \psi_{II}^{(3)})\end{aligned}$$

$$= - \frac{2 \cdot 33750 \cdot (-3,820 \cdot 10^{-5}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot 1,069 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 32400 \cdot (-7,752 \cdot 10^{-6})}{4(32400 + 6750 + 33750 + 7232,143)}$$

$$\frac{-6 \cdot 6750 \cdot (-6,955 \cdot 10^{-7}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-8,999 \cdot 10^{-6})}{4(32400 + 6750 + 33750 + 7232,143)}$$

$$= 7,823 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta\varphi_3^{(4)} = - \frac{1}{4(k_{34} + k_{30} + k_{36})} \cdot (2 \cdot k_{36} \cdot \Delta\varphi_6^{(3)} + 2 \cdot k_{34} \cdot \Delta\varphi_4^{(4)} - 6 \cdot k_{30} \cdot \Delta\Psi_I^{(3)} - 6 \cdot k_{36} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(3)})$$

$$= - \frac{2 \cdot 7232,143 \cdot (-2,678 \cdot 10^{-5}) + 2 \cdot 33750 \cdot 7,823 \cdot 10^{-6}}{4(33750 + 6750 + 7232,143)}$$

$$\frac{-6 \cdot 6750 \cdot (-6,955 \cdot 10^{-7}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-8,999 \cdot 10^{-6})}{4(33750 + 6750 + 7232,143)}$$

$$= -2,930 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta\varphi_7^{(4)} = - \frac{1}{4(k_{74} + k_{76})} \cdot (2 \cdot k_{76} \cdot \Delta\varphi_6^{(3)} + 2 \cdot k_{74} \cdot \Delta\varphi_4^{(4)} - 6 \cdot k_{74} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(3)})$$

$$= - \frac{2 \cdot 33750 \cdot (-2,678 \cdot 10^{-5}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot 7,823 \cdot 10^{-6} - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-8,999 \cdot 10^{-6})}{4(7232,143 + 33750)}$$

$$= 7,955 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta\varphi_6^{(4)} = - \frac{1}{4(k_{67} + k_{63})} \cdot (2 \cdot k_{67} \cdot \Delta\varphi_7^{(4)} + 2 \cdot k_{63} \cdot \Delta\varphi_3^{(4)} - 6 \cdot k_{63} \cdot \Delta\Psi_{II}^{(3)})$$

$$= - \frac{2 \cdot 33750 \cdot 7,955 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 7232,143 \cdot (-2,930 \cdot 10^{-6}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-8,999 \cdot 10^{-6})}{4(33750 + 7232,143)}$$

$$= -5,399 \cdot 10^{-6}$$

## RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA

### II. etaža

Neuravnoteženi moment etaže II:

$$\mathcal{M}_{II}^{(3)} = \Delta M_{II}^{\prime(4)} = 6 \cdot k_{36} \cdot (\Delta\varphi_3^{(4)} + \Delta\varphi_6^{(4)}) + 6 \cdot k_{47} \cdot (\Delta\varphi_4^{(4)} + \Delta\varphi_7^{(4)})$$

$$= 6 \cdot 7232,143 \cdot (-2,930 \cdot 10^{-6} - 5,399 \cdot 10^{-6} + 7,823 \cdot 10^{-6} + 7,955 \cdot 10^{-6})$$

$$= 0,323 \text{ kNm}$$

Prirast kuta zaokreta etaže II:

$$\Delta\Psi_{II}^{(4)} = \frac{\mathcal{M}_{II}^{(3)}}{12 \cdot (k_{36} + k_{47})} = \frac{0,323}{12 \cdot 2 \cdot 7232,143} = 1,861 \cdot 10^{-6}$$

I.etaža

Neuravnoteženi moment etaže I:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_I^{(3)} = \Delta M_I^{(4)} &= 6 \cdot k_{03} \cdot \Delta\varphi_3^{(4)} + 6 \cdot k_{14} \cdot \Delta\varphi_4^{(4)} + 6k_{25} \cdot \Delta\varphi_5^{(4)} \\ &= 6 \cdot 6750 \cdot (-2,930 \cdot 10^{-6} + 7,823 \cdot 10^{-6} - 7,752 \cdot 10^{-6}) \\ &= -0,116 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prirast kuta zaokreta etaže I:

$$\Delta\Psi_I^{(4)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(3)}}{12 \cdot (k_{03} + k_{14} + k_{25})} = \frac{-0,116}{12 \cdot 3 \cdot 6750} = -4,774 \cdot 10^{-7}$$

UKUPNI KUTOVI ZAOKRETA

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= \Delta\varphi_5^{(1)} + \Delta\varphi_5^{(2)} + \Delta\varphi_5^{(3)} + \Delta\varphi_5^{(4)} \\ &= 3,326 \cdot 10^{-4} - 1,712 \cdot 10^{-4} + 1,573 \cdot 10^{-5} - 7,752 \cdot 10^{-6} \\ &= 1,694 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= \Delta\varphi_4^{(1)} + \Delta\varphi_4^{(2)} + \Delta\varphi_4^{(3)} + \Delta\varphi_4^{(4)} \\ &= -7,998 \cdot 10^{-5} - 8,705 \cdot 10^{-5} + 1,830 \cdot 10^{-5} + 7,823 \cdot 10^{-6} \\ &= -1,409 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \Delta\varphi_3^{(1)} + \Delta\varphi_3^{(2)} + \Delta\varphi_3^{(3)} + \Delta\varphi_3^{(4)} \\ &= -2,155 \cdot 10^{-4} - 2,121 \cdot 10^{-4} - 3,820 \cdot 10^{-5} - 2,930 \cdot 10^{-6} \\ &= -4,687 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

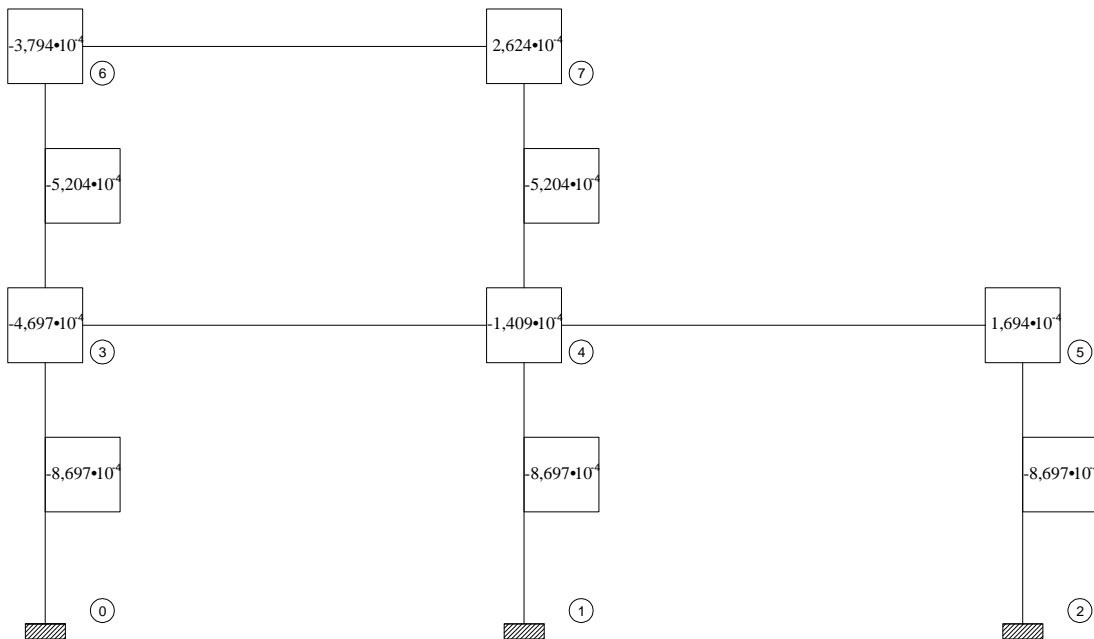
$$\begin{aligned} \varphi_7 &= \Delta\varphi_7^{(1)} + \Delta\varphi_7^{(2)} + \Delta\varphi_7^{(3)} + \Delta\varphi_7^{(4)} \\ &= 2,413 \cdot 10^{-4} + 2,481 \cdot 10^{-6} + 1,069 \cdot 10^{-5} + 7,955 \cdot 10^{-6} \\ &= 2,624 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varphi_6 &= \Delta\varphi_6^{(1)} + \Delta\varphi_6^{(2)} + \Delta\varphi_6^{(3)} + \Delta\varphi_6^{(4)} \\ &= -2,548 \cdot 10^{-4} - 9,242 \cdot 10^{-5} - 2,678 \cdot 10^{-5} - 5,399 \cdot 10^{-6} \\ &= -3,794 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_I &= \Delta\psi_I^{(1)} + \Delta\psi_I^{(2)} + \Delta\psi_I^{(3)} + \Delta\psi_I^{(4)} \\ &= -7,901 \cdot 10^{-4} - 7,839 \cdot 10^{-5} - 6,955 \cdot 10^{-7} - 4,774 \cdot 10^{-7} \\ &= -8,697 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{II} &= \Delta\psi_{II}^{(1)} + \Delta\psi_{II}^{(2)} + \Delta\psi_{II}^{(3)} + \Delta\psi_{II}^{(4)} \\ &= -4,160 \cdot 10^{-4} - 9,727 \cdot 10^{-5} - 8,999 \cdot 10^{-6} + 1,861 \cdot 10^{-6} \\ &= -5,204 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$



Slika 20.

UKUPNI MOMENTI

$$\begin{aligned} M_{03} &= 2 \cdot k_{03} \cdot \varphi_3 - 6 \cdot k_{03} \cdot \Psi_I + \overline{M}_{03} \\ &= 2 \cdot 6750 \cdot (-4,687 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 6750 \cdot (-8,697 \cdot 10^{-4}) + 11,25 \\ &= 40,150 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{30} &= 4 \cdot k_{03} \cdot \varphi_3 - 6 \cdot k_{03} \cdot \Psi_I + \overline{M}_{30} \\ &= 4 \cdot 6750 \cdot (-4,687 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 6750 \cdot (-8,697 \cdot 10^{-4}) - 11,25 \\ &= 11,318 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{14} &= 2 \cdot k_{14} \cdot \varphi_4 - 6 \cdot k_{14} \cdot \Psi_I + \overline{M}_{14} \\ &= 2 \cdot 6750 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 6750 \cdot (-8,697 \cdot 10^{-4}) + 0 \\ &= 33,321 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{41} &= 4 \cdot k_{14} \cdot \varphi_4 - 6 \cdot k_{14} \cdot \Psi_I + \overline{M}_{41} \\ &= 4 \cdot 6750 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 6750 \cdot (-8,697 \cdot 10^{-4}) + 0 \\ &= 31,419 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{25} &= 2 \cdot k_{25} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot k_{25} \cdot \Psi_I + \overline{M}_{25} \\ &= 2 \cdot 6750 \cdot 1,694 \cdot 10^{-4} - 6 \cdot 6750 \cdot (-8,697 \cdot 10^{-4}) + 0 \\ &= 37,510 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{52} &= 4 \cdot k_{25} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot k_{25} \cdot \Psi_I + \overline{M}_{52} \\ &= 4 \cdot 6750 \cdot 1,694 \cdot 10^{-4} - 6 \cdot 6750 \cdot (-8,697 \cdot 10^{-4}) + 0 \\ &= 39,797 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{36} &= 4 \cdot k_{36} \cdot \varphi_3 + 2 \cdot k_{36} \cdot \varphi_6 - 6 \cdot k_{36} \cdot \Psi_{II} + \overline{M}_{36} \\ &= 4 \cdot 7232,143 \cdot (-4,687 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot (-3,794 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-5,204 \cdot 10^{-4}) + 9,8 \\ &= 13,335 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{63} &= 4 \cdot k_{36} \cdot \varphi_6 + 2 \cdot k_{36} \cdot \varphi_3 - 6 \cdot k_{36} \cdot \Psi_{II} + \overline{M}_{63} \\ &= 4 \cdot 7232,143 \cdot (-3,794 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot (-4,687 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-5,204 \cdot 10^{-4}) - 9,8 \\ &= -4,973 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{47} &= 4 \cdot k_{47} \cdot \varphi_4 + 2 \cdot k_{47} \cdot \varphi_7 - 6 \cdot k_{47} \cdot \Psi_{II} + \overline{M}_{47} \\
 &= 4 \cdot 7232,143 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 7232,143 \cdot 2,624 \cdot 10^{-4} - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-5,204 \cdot 10^{-4}) + 0 \\
 &= 22,301 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{74} &= 4 \cdot k_{47} \cdot \varphi_7 + 2 \cdot k_{47} \cdot \varphi_4 - 6 \cdot k_{47} \cdot \Psi_{II} + \overline{M}_{74} \\
 &= 4 \cdot 7232,143 \cdot 2,624 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 7232,143 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) - 6 \cdot 7232,143 \cdot (-5,204 \cdot 10^{-4}) + 0 \\
 &= 28,134 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{34} &= 4 \cdot k_{34} \cdot \varphi_3 + 2 \cdot k_{34} \cdot \varphi_4 + \overline{M}_{34} \\
 &= 4 \cdot 33750 \cdot (-4,687 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 33750 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) + 48,0 \\
 &= 24,785 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{43} &= 4 \cdot k_{34} \cdot \varphi_4 + 2 \cdot k_{34} \cdot \varphi_3 + \overline{M}_{43} \\
 &= 4 \cdot 33750 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 33750 \cdot (-4,687 \cdot 10^{-4}) - 48,0 \\
 &= -98,659 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

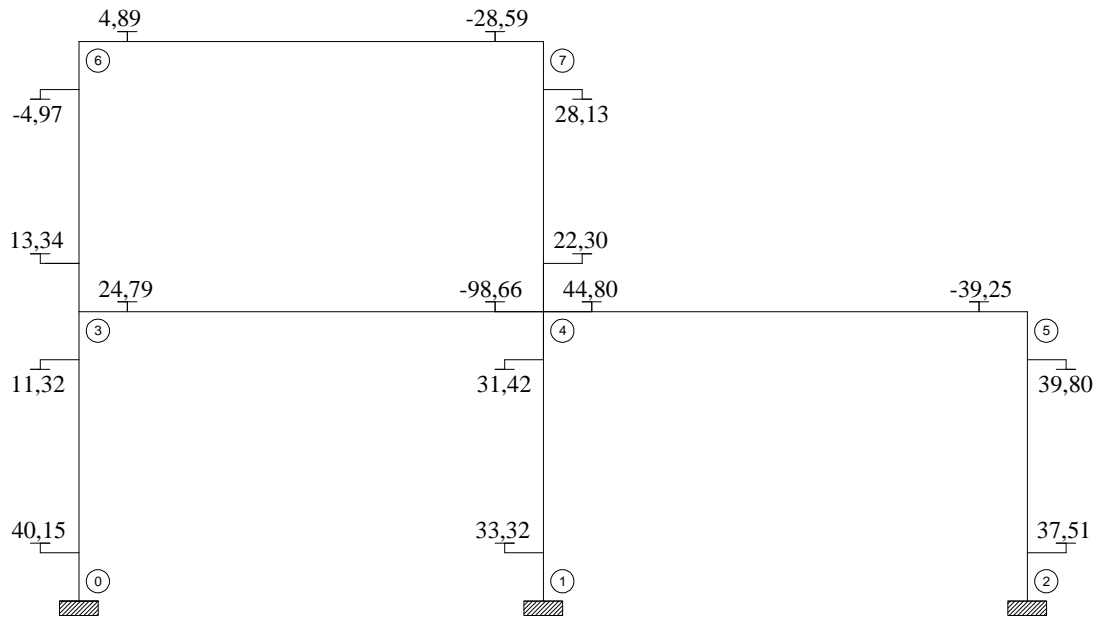
$$\begin{aligned}
 M_{45} &= 4 \cdot k_{45} \cdot \varphi_4 + 2 \cdot k_{45} \cdot \varphi_5 + \overline{M}_{45} \\
 &= 4 \cdot 32400 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 32400 \cdot 1,694 \cdot 10^{-4} + 52,083 \\
 &= 44,799 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{54} &= 4 \cdot k_{45} \cdot \varphi_5 + 2 \cdot k_{45} \cdot \varphi_4 + \overline{M}_{54} \\
 &= 4 \cdot 32400 \cdot 1,694 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 32400 \cdot (-1,409 \cdot 10^{-4}) - 52,083 \\
 &= -39,253 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{67} &= 4 \cdot k_{67} \cdot \varphi_6 + 2 \cdot k_{67} \cdot \varphi_7 + \overline{M}_{67} \\
 &= 4 \cdot 33750 \cdot (-3,794 \cdot 10^{-4}) + 2 \cdot 33750 \cdot 2,624 \cdot 10^{-4} + 38,4 \\
 &= 4,893 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

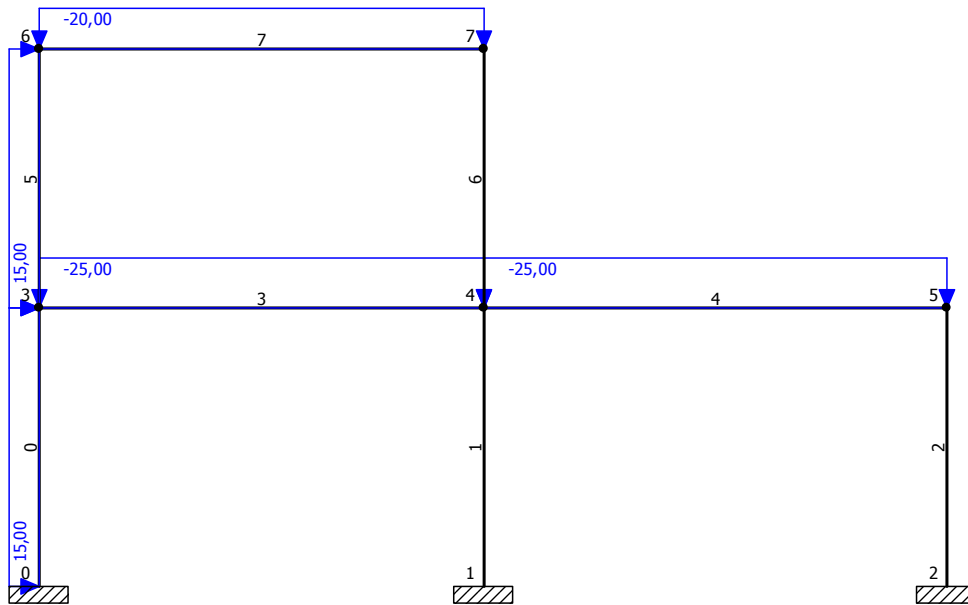
$$\begin{aligned}
 M_{76} &= 4 \cdot k_{67} \cdot \varphi_7 + 2 \cdot k_{67} \cdot \varphi_6 + \overline{M}_{76} \\
 &= 4 \cdot 33750 \cdot 2,624 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 33750 \cdot (-3,794 \cdot 10^{-4}) - 38,4 \\
 &= -28,586 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Prikaz ukupnih momenata na sistemu:

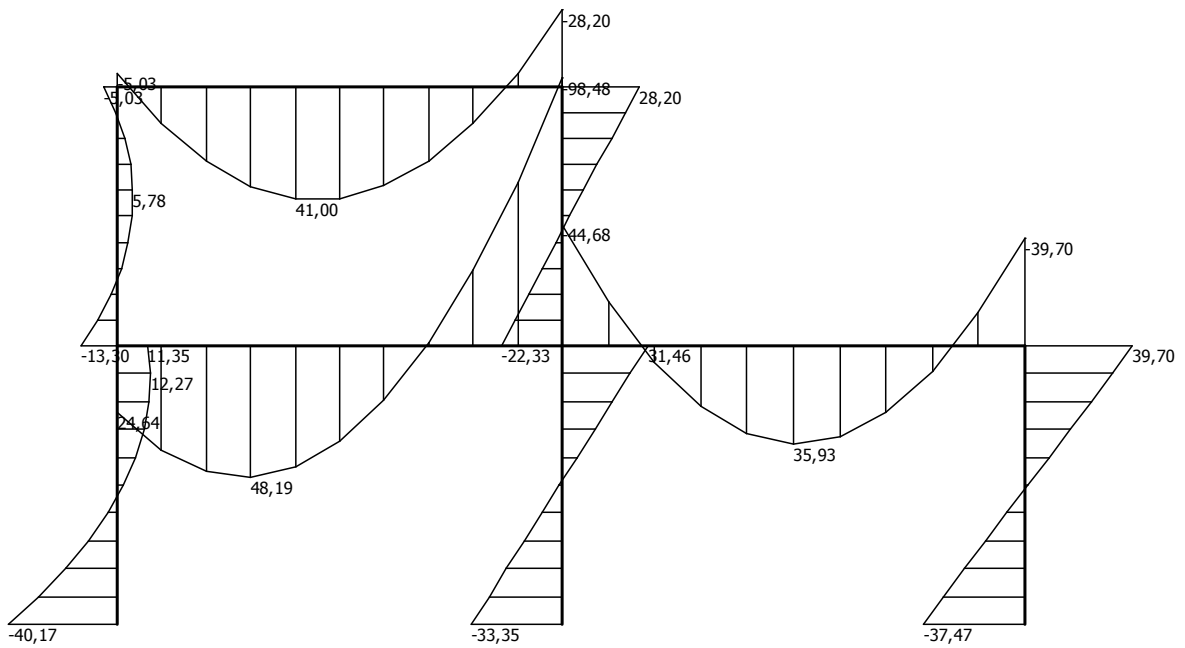


Slika 21.

REZULTAT STATIČKOG PRORAČUNA (LinPro):

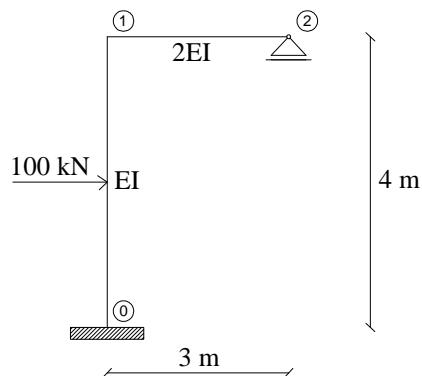


Momentni dijagram:



## 8. PRIKAZ I ANALIZA KORAKA POSREDNOG I NEPOSREDNOG IZRAČUNAVANJA PRIKLJUČNIH MOMENATA

Usporedba će biti prikazana na ovom primjeru:



Slika 22 .

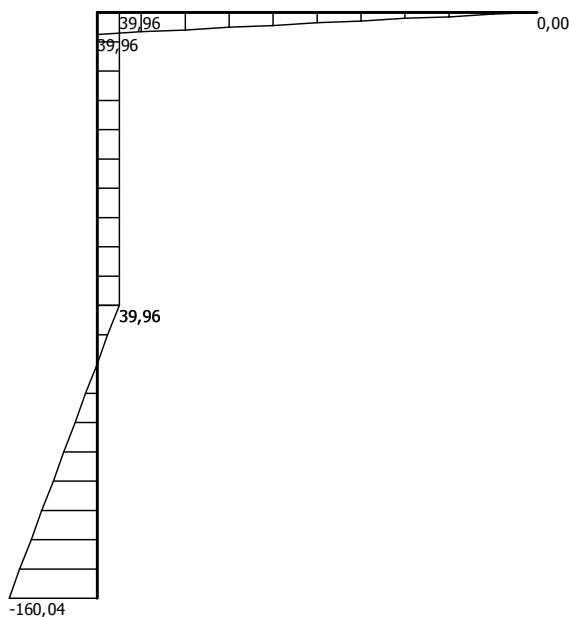
$$EI = 100\,000 \text{ kNm}^2$$

$$k_{01} = \frac{EI}{4,0} = 25000 \text{ kNm}$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{3,0} = 66666,7 \text{ kNm}$$

REZULTAT STATIČKOG PRORAČUNA (LinPro):

Momentni dijagram:



### 8.1. Zadatak riješen postupkom posrednog izračunavanja priključnih momenata

1. ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\overline{M}_{01} = 50,0 \text{ kNm}$$

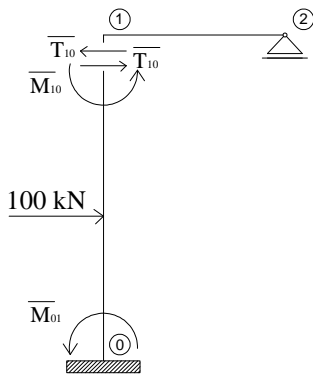
$$\overline{M}_{10} = -50,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{12} = \overline{M}_{21} = 0 \text{ kNm}$$

Prirast kuta zaokreta čvora:

$$\Delta\varphi_1^{(1)} = -\frac{1}{4 \cdot k_{01} + 3 \cdot k_{12}} \cdot (\overline{M}_{10} + \overline{M}_{12}) = \frac{50,0}{300000} = 1,670 \cdot 10^{-4}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:



Slika 23.

$$\sum M_0 = 0$$

$$\overline{M}_{01} + \overline{M}_{10} - \overline{T}_{10} \cdot h_1 - \frac{P \cdot h_1}{2} = 0$$

$$50,0 - 50,0 - \overline{T}_{10} \cdot 4,0 - \frac{100,0 \cdot 4,0}{2} = 0$$

$$\overline{T}_{10} = -50,0 \text{ kN}$$

$$H_1 = -\overline{T}_{10} = 50,0 \text{ kN}$$

$$\overline{M}_1^{(0)} = -H_1 \cdot h_1 = -50,0 \cdot 4,0 = -200,0 \text{ kNm}$$

Promjena momenata na dnu i vrhu stupa zbog prethodnog otpuštanja veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta M_I^{(1)} = 6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \varphi_1^{(1)} = 6 \cdot 25000 \cdot 1,670 \cdot 10^{-4} = 25,050 \text{ kNm}$$

Ukupni neuravnoteženi moment etaže:

$$\mathcal{M}_I^{(0)} = \overline{M}_I^{(0)} + \Delta M_I^{(1)} = -200,0 + 25,050 = -174,950 \text{ kNm}$$

Prirast kuta zaokreta etaže:

$$\Delta \Psi_I^{(1)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(0)}}{12 \cdot k_{10}} = \frac{-174,950}{12 \cdot 25000} = -5,832 \cdot 10^{-4}$$

### 2. ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta \varphi_1^{(2)} = - \frac{1}{4 \cdot k_{01} + 3 \cdot k_{12}} \cdot (-6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \Psi_I^{(1)}) = - \frac{8,748}{300000} = -2,916 \cdot 10^{-4}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I^{(2)} = 6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \varphi_1^{(2)} = 6 \cdot 25000 \cdot (-2,916 \cdot 10^{-4}) = -43,740 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(1)} = \Delta M_I^{(2)} = -43,740 \text{ kNm}$$

$$\Delta \Psi_I^{(2)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(1)}}{12 \cdot k_{10}} = \frac{-43,740}{12 \cdot 25000} = -1,458 \cdot 10^{-4}$$

### 3. ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta \varphi_1^{(3)} = - \frac{1}{4 \cdot k_{01} + 3 \cdot k_{12}} \cdot (-6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \Psi_I^{(2)}) = - \frac{21,87}{300000} = -7,290 \cdot 10^{-5}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I^{(3)} = 6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \varphi_1^{(3)} = 6 \cdot 25000 \cdot (-7,290 \cdot 10^{-5}) = -10,935 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(2)} = \Delta M_I^{(3)} = -10,935 \text{ kNm}$$

$$\Delta \Psi_I^{(3)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(2)}}{12 \cdot k_{10}} = \frac{-10,935}{12 \cdot 25000} = -3,645 \cdot 10^{-5}$$



4.ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta\varphi_1^{(4)} = -\frac{1}{4\cdot k_{01} + 3\cdot k_{12}} \cdot (-6\cdot k_{01} \cdot \Delta\Psi_1^{(3)}) = -\frac{5,468}{300000} = -1,823\cdot 10^{-5}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I'^{(4)} = 6\cdot k_{01} \cdot \Delta\varphi_1^{(4)} = 6\cdot 25000 \cdot (-1,823\cdot 10^{-5}) = -2,735 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(3)} = \Delta M_I'^{(4)} = -2,735 \text{ kNm}$$

$$\Delta\Psi_1^{(4)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(3)}}{12\cdot k_{10}} = \frac{-2,735}{12\cdot 25000} = -9,115\cdot 10^{-5}$$

5.ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta\varphi_1^{(5)} = -\frac{1}{4\cdot k_{01} + 3\cdot k_{12}} \cdot (-6\cdot k_{01} \cdot \Delta\Psi_1^{(4)}) = -\frac{13,673}{300000} = -4,558\cdot 10^{-5}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I'^{(5)} = 6\cdot k_{01} \cdot \Delta\varphi_1^{(5)} = 6\cdot 25000 \cdot (-4,558\cdot 10^{-5}) = -6,836 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(4)} = \Delta M_I'^{(5)} = -6,836 \text{ kNm}$$

$$\Delta\Psi_1^{(5)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(4)}}{12\cdot k_{10}} = \frac{-6,836}{12\cdot 25000} = -2,279\cdot 10^{-5}$$

UKUPNI KUTOVI ZAOKRETA

$$\varphi_1 = -2,613 \cdot 10^{-4}$$

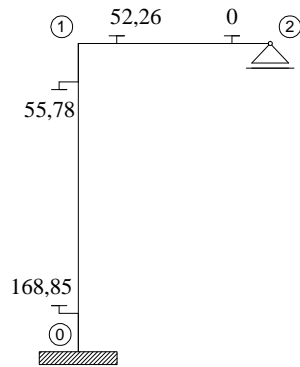
$$\psi_1 = -8,794 \cdot 10^{-4}$$

UKUPNI MOMENTI

$$M_{01} = 2 \cdot k_{01} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot k_{01} \cdot \psi_1 + \overline{M}_{01} = 168,85 \text{ kNm}$$

$$M_{10} = 4 \cdot k_{01} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot k_{01} \cdot \psi_1 + \overline{M}_{10} = 55,78 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 3 \cdot k_{12} \cdot \varphi_1 + \overline{M}_{12} = -52,26 \text{ kNm}$$



Slika 24.

## 8.2. Zadatak riješen postupkom neposrednog izračunavanja priključnih momenata

1. ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\overline{M}_{01} = 50,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{10} = -50,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{12} = \overline{M}_{21} = 0 \text{ kNm}$$

- razdjelni koeficijenti za raspodjelu neuravnoteženog momenta u čvoru:

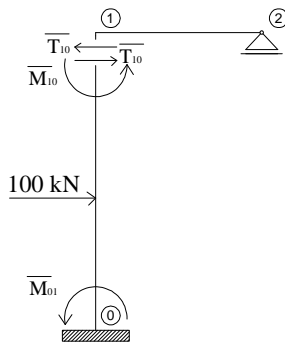
$$\mu_{10} = -\frac{4 \cdot k_{10}}{4 \cdot k_{10} + 3 \cdot k_{12}} = -0,333$$

$$\mu_{12} = -\frac{3 \cdot k_{12}}{4 \cdot k_{10} + 3 \cdot k_{12}} = -0,667$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

- razdjelni koeficijenti za raspodjelu neuravnoteženog momenta pojedine etaže:

$$\nu_1 = -\frac{k_{01}}{2 \cdot k_{01}} = -\frac{1}{2}$$



Slika 25.

$$\sum M_0 = 0$$

$$\overline{M}_{01} + \overline{M}_{10} - \overline{T}_{10} \cdot h_1 - \frac{P \cdot h_1}{2} = 0$$

$$50,0 - 50,0 - \overline{T}_{10} \cdot 4,0 - \frac{100,0 \cdot 4,0}{2} = 0$$

$$\overline{T}_{10} = -50,0 \text{ kN}$$

$$H_I = -\overline{T}_{10} = 50,0 \text{ kN}$$

$$\overline{M}_I^{(0)} = -H_I \cdot h_I = -50,0 \cdot 4,0 = -200,0 \text{ kNm}$$

Neuravnoteženi moment etaže zbog prethodnog otpuštanja čvora:

$$\Delta M_I'^{(1)} = 24,975 \text{ kNm}$$

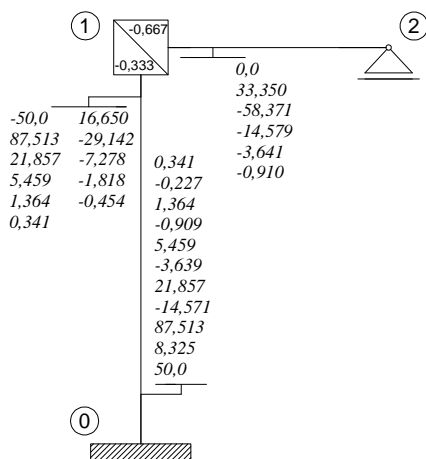
Ukupni neuravnoteženi moment etaže:

$$\mathcal{M}_I^{(0)} = \overline{M}_I^{(0)} + \Delta M_I'^{(1)} = -200,0 + 24,975 = -175,025 \text{ kNm}$$

Raspodjela neuravnoteženih momenata etaže na krajeve stupova te etaže:

$$\Delta M_I^{(1)} = \mathcal{M}_I^{(0)} \cdot v_I = 87,513 \text{ kNm}$$

Neposredno izračunati priključni momenti:



Slika 26.

2.ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(1)} = \Delta M_I'^{(2)} = -43,713 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(2)} = \mathcal{M}_I^{(1)} \cdot v_I = 21,857 \text{ kNm}$$

3.ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(2)} = \Delta M_I'^{(3)} = -10,917 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(3)} = \mathcal{M}_I^{(2)} \cdot v_I = 5,459 \text{ kNm}$$

4.ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(3)} = \Delta M_I'^{(4)} = -2,727 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(4)} = \mathcal{M}_I^{(3)} \cdot v_I = 1,364 \text{ kNm}$$

5.ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(4)} = \Delta M_I'^{(5)} = -0,681 \text{ kNm}$$

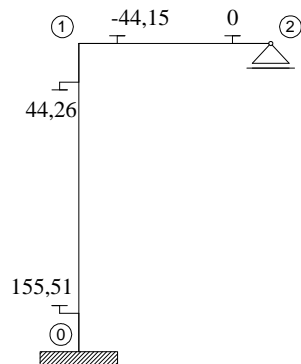
$$\Delta M_I^{(5)} = \mathcal{M}_I^{(4)} \cdot v_I = 0,341 \text{ kNm}$$

UKUPNI MOMENTI

$$M_{01} = 155,51 \text{ kNm}$$

$$M_{10} = 44,26 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = -44,15 \text{ kNm}$$



Slika 27.

### 8.3. Usporedba posrednog i neposrednog izračunavanja priključnih momenata

Bitno je napomenuti da smo kolegica i ja zajedno rješavale primjere riješene u našim završnim radovima. Kolegica je obrađivala Kuševićev postupak neposrednog izračunavanja priključnih momenata, dok sam ja posredno dolazila do vrijednosti momenata na krajevima štapnih elemenata. Paralelno rješavanje istih zadataka na oba načina dalo nam je mogućnost bolje usporedbe postupaka i cjelokupnog shvaćanja Kuševićeve ideje.

Prije usporedbe konačnih rezultata momenata s rezultatima iz statičkog proračuna LinPro, imale smo mogućnost provjere točnosti neuravnoteženih momenata u čvorovima i stupovima prije svakog ciklusa. Upravo zbog toga smo imale potrebnu sigurnost pri rješavanju zadataka, te smo greške odmah uočavale i ispravljale, što je u mojem slučaju jako bitno. Radila sam s razmjerno velikim diferencijskim jednadžbama, pri čijem je rješavanju postojala velika mogućnost pogreške. Rezultati krajnjih momenata neznatno se razlikuju, što je posljedica zaokruživanja brojeva i pomalo različitih iteracijskih računa.

Paralelnim rješavanjem zadatka na posredan i neposredan način, rekle bismo da je postupak neposrednog izračunavanja priključnih momenata zahvalniji postupak u odnosu na postupak posrednog izračunavanja, odnosno metodu pomaka.

Bitna prednost neposrednog postupka je direktno dobivanje baš onih veličina koje se konačno i traže, iako se posrednim izračunavanjem momenata prvo dobivaju pomaci i zaokreti, koji nam daju najjasniju sliku o elastičnom ponašanju sistema.

Oba postupka temelje se na istom principu relaksacije, te se jednostavno izvode iz istih osnovnih izraza koje sam navela u točki 3. Osnovni računi - krutosti štapova, prijenosnih koeficijenata i neuravnoteženih momenata - u oba postupka gotovo su identični. Isto tako, iteracijski račun približno je podjednak po broju računskih operacija, iako se kod neposrednog izračunavanja priključnih momenata iteracijom redovito određuje daleko veći broj veličina nego kod posrednog izračunavanja tih momenata preko deformacijskih veličina.

Isti primjer puno smo brže riješili postupkom neposrednog izračunavanja priključnih momenata, odnosno došli do traženih momenata izvornog sistema. Neposredni postupak provodi se pomoću konstruktivne sheme sistema i nema klasičnog matematičkog postupka, te je i time pogodniji i manje zamoran.

Kod postupka neposrednog izračunavanja priključnih momenata uvođenje zapisivanja momenata u dva stupca daje stupanj preglednosti veći nego kod Crossovog postupka. U lijevom stupcu nalaze se neuravnoteženi momenti, a u desnom momenti koji ih uravnotežuju. Ako na kraju iteracijskog računa uočimo da je došlo do pogreške, odnosno ako su momenti u čvorovima vidljivo neuravnoteženi, potrebna je kontrola računa. Kako bi se što lakše našla prikladna greška, predlažemo da se izvan iteracijskog računa zapisuju i vrijednosti neuravnoteženih momenata čvorova nakon svakog ciklusa relaksacije.

Za sisteme s većim brojem čvorova takav je pomoćni račun od velike važnosti, jer u provjeri iteracijskog računa imamo potvrdu točno, odnosno krivo izračunatih prirasta momenata u pojedinim ciklusima.

Kod posrednog postupka izračunavanja priključnih momenata pomoćni računi nisu potrebni. Pišu se diferencijske jednačbe koje sadrže sve potrebne podatke za dobivanje krajnjih momenata, za razliku od neposrednog postupka u kojem imamo iteracijski račun samo s vrijednostima prirasta momenata. Međutim, rješavanje tih jednačbi je dugotrajan i zamoran posao, pa je i mogućnost pojave greške u računu veća. Stoga, treba biti pažljiv pri postavljanju i rješavanju jednačbi. Ako se uspostavi da je došlo do pogreške u računu, moraju se ponovno računati, a čak i mijenjati, već mukotrpno izračunate diferencijske jednačbe.

Složile smo se da je postupak posrednog izračunavanja priključnih momenata puno pregledniji postupak, te je pomoću njega lakše shvatiti Kuševićevu ideju. Iz tog razloga, pri ponovnom rješavanju problema jednim od ova dva postupka, odlučile bismo se za neposredan postupak dobivanja momenata, iako je za razumijevanje korisno proučiti i posredan postupak.

## 9. ZAKLJUČAK

Opisani postupak izračunavanja zaokreta i pomaka zapravo je Gauss-Seidelov postupak u diferencijskom obliku primijenjen na rješavanje sustava jednadžbi inženjerske metode pomaka:

- jednadžba ravnoteže momenata u čvorovima:

$$\sum_k 4 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m + \sum_k 2 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_k - 6 \cdot k_{m,\underline{m}} \cdot \psi_r - 6 \cdot k_{m,\overline{m}} \cdot \psi_{r+1} + \overline{M}_m = 0$$

za  $m = (1, \dots, n_s)$ ,  $(m, \underline{m}) \in r$  i  $(m, \overline{m}) \in (r+1)$ ;

- jednadžba ravnoteže horizontalnih sila iznad pojedinih etaža:

$$\sum_{(m, \underline{m}) \in r} 12 \cdot k_{m, \underline{m}} \cdot \psi_r - \sum_{(m, \underline{m}) \in r} 6 \cdot k_{m, \underline{m}} \cdot \varphi_m - \sum_{(m, \underline{m}) \in r} 6 \cdot k_{m, \underline{m}} \cdot \varphi_k - \overline{M}_r = 0$$

za  $r = (1, \dots, n_s)$ , ako su u svakoj etaži stupovi jednakih visina.

Glavna zadaća proračunavanja okvirnih konstrukcija je određivanje momenata, koji djeluju na krajevima pojedinih štapova. Određivanje kutova ima zapravo prolazno značenje. Stoga je postupak neposrednog izračunavanja kraći i manje zamoran. Njime Kušević odustaje od postavljanja jednadžbi ravnoteže u diferencijskom obliku, te uvodi razdjelne koeficijente za čvorove i stupove kojima razdjeljuje neuravnotežene momente. Takvim postupkom izravno dolazimo do vrijednosti priključnih momenata, što je i primarni cilj.

Naglasila bih i da Kuševićev postupak posrednog izračunavanja priključnih momenata bolje objašnjava gibanje sistema u odnosu na Čališevljev postupak.



## 10. LITERATURA

- [1] Čališev K.: *O dopunitbenim naprezanjima rešetkastih nosača*, Tehnički list udruženja Jugoslavenskih inženjera i arhitekata 4 (1922) 1/2, 1-6.
- [2] Čališev K.: *Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija*, Tehnički list udruženja Jugoslavenskih inženjera i arhitekata 5 (1923) 17, 125-127; 18/19, 141-143; 20, 151-154; 21, 157-158.
- [3] Fresl K., Gidak P., Hak S.: *Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka*, Građevinar 62 (2010) 10, 959-970.
- [4] Kušević R.: *Relaksacioni postupci izračunavanja okvirnih sistema nosača*, Naše građevinarstvo 8 (1954) 11, 313-320; 12, 329-343.
- [5] Šimović V.: Kušević, Rajko, *Leksikon građevinarstva* (ur. V. Šimović), Masmedia, Zagreb, 2002.