SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

USPOREDBA ČALIŠEVLJEVA I CROSSOVA POSTUPKA

ZAVRŠNI RAD IZ PREDMETA

GRAĐEVNA STATIKA 2

Renato Gulić , 0082039796

Mentor : prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

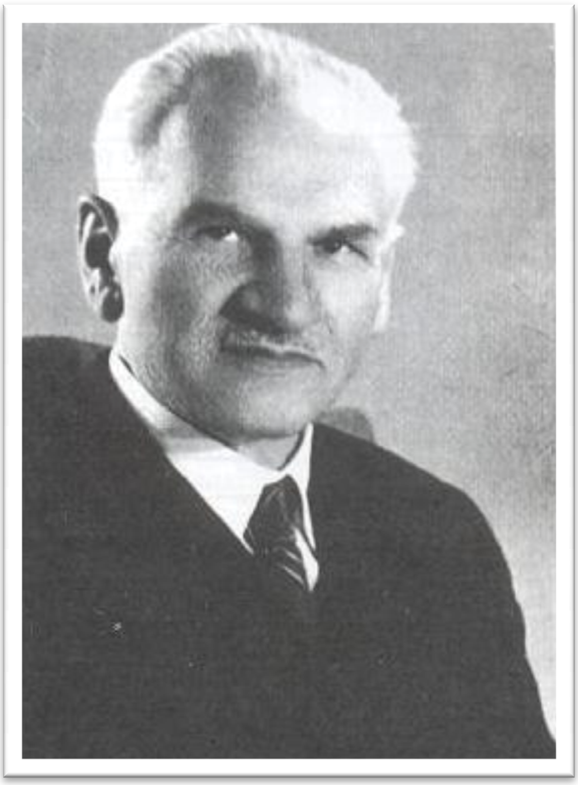
Ak. god. 2010./2011.

Zagreb; 13.rujna 2011.

SADRŽAJ :

1. Konstantin Čališev

1.1. Životopis Konstantina Čališeva



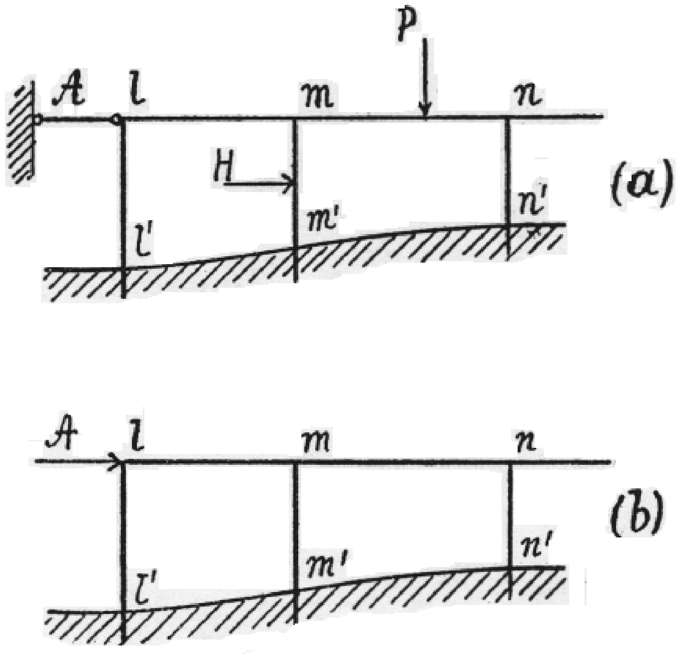
Slika 1 : Konstantin Čališev

Konstantin Čališev (slika 1) rođen je 1888. u Kupjansku u Rusiji. Nakon završetka osnovne škole krenuo je u državnu realnu gimnaziju u Izjumu, gdje je 1906. maturirao. Godine 1911. diplomirao je građevinarstvo na Visokoj tehničkoj školi u Kijevu. Radio je kod proširenja električnih središnjica u Kijevu i Harkovu, a nakon toga se bavio geodetskim poslovima u odjelu za melioraciju zemljišta na poluotoku Krimu. Godine 1913. biran je za nastavnika u visokoj školi prometnih inženjera u Petrogradu, gdje je vodio vježbe iz nauke o čvrstoći i iz mehanike. Za vrijeme svjetskog rata radio je kao stručni tehnički časnik kod popravljanja pruga i mostova, gradnje provizornih mostova i željeznica, a kasnije i na ispitivanju materijala i konstrukcija za zrakoplove kao i ispitivanju statičkih proračuna zrakoplova. Nakon Prvog svjetskog rata ostao je u Kijevu radeći kao asistent na Akademiji znanosti. 1919. godine odlazi u Njemačku na službeno putovanje te se više nikada ne vraća u Rusiju. Nakon kratkog vremena provedenog u Njemačkoj dolazi u Hrvatsku gdje je 1921. godine postao asistentom profesora Stjepana Timošenka, koji je također emigrirao iz Sovjetskog Saveza, na katedri za tehničku mehaniku Tehničke visoke škole u Zagrebu. Doktorirao je u travnju 1922.

disertacijom naziva *Jednostavan način izračunavanja okvirnih nosača*. Zanimljivo je da je on prvi doktorirao nakon što su 1920. izdani propisi za dobivanje doktorata tehničkih znanosti. Iste je godine Čališev razvio jedan od prvih relaksacijskih postupaka rješavanja jednadžbi metode pomaka. Ostao je raditi na Tehničkoj visokoj školi u početku kao docent, a potom kao izvanredni pa redoviti profesor predavajući Nauku o čvrstoći / Otpornost materijala, Ispitivanje gradiva, Teoriju konstrukcija / Građevnu statiku i Teoriju elastičnosti. Od 1956. predavao je i na Arhitektonsko-građevinsko-geodetskom fakultetu. Na predavanjima se, kažu, nikada nije služio bilješkama, a predavanja izbornih kolegija znao je držati makar ih slušao samo jedan student. Do 1958. godine, kada se povukao u mirovinu, vodio je Zavod za ispitivanje gradiva, koji je osnovao Timošenko. Umro je 1970. godine u Zagrebu.

1.2. Čališevljev postupak - općenito

Konstantin Čališev bio je jedan od prvih koji je u svojim člancima uveo jedan relaksacijski postupak u proračun statički neodređenih sistema (slika 2). U principu postupak je vrlo sličan Crossovoj metodi. Razlika je što je Cross radio s momentima na krajevima ležajeva, a Čališev se koristio kutovima zaokreta i translacijskim pomacima. Općenito govoreći Čališev uravnotežuje momente u čvorovima tako da zaokreće čvorove. Dakle znamo da će se zbog djelovanja vanjskih sila na neki nosač njegovi čvorovi zaokrenuti za neke kutove φ , ali će također doći i do translacijskog pomaka tih čvorova za neku veličinu *u*. Taj je pomak *u* za sve čvorove iste grede jednak. Budući da promatramo samo deformaciju zbog savijanja štapova, ne uzimamo u obzir pomake nastale radi stlačivanja ili rastezanja štapova. Prvo određujemo momente na krajevima štapova, koji nastaju zbog djelovanja vanjskih sila, uz pretpostavku da je jedan čvor nosača horizontalnim štapom spojen sa čvrstim tlom, radi čega mu je pomak jednak nuli. Dakle prvo gledamo nepomičan sistem. Nakon toga određujemo momente koji nastaju pod djelovanjem same horizontalne sile koja je jednaka i protusmjerna sili u štapu kojim smo prethodno spojili čvor nosača s tlom. Ako ta dva stanja zbrojimo prema principu superpozicije dobit ćemo stvarno stanje. U slučaju da djeluju samo vertikalne sile pomaknut će se čvorovi u horizontalnom smjeru za neku malu veličinu koju možemo u praksi u mnogim slučajevima zanemariti.



Slika 2 : Primjer iz originalnog članka K. Čališeva

1.3. Čališevljev postupak – definicije i izvodi

Čališev je kao osnovni cilj svog postupka smatrao određivanje momenata koji djeluju na krajevima pojedinih štapova. Pozitivan smjer momenata, kao i kuteva zaokreta uzima se smjer suprotan gibanju kazaljke na satu. Budući da su krajevi štapova kruto spojeni u čvorovima, oni koji su spojeni u istom čvoru zaokrenut će se za isti kut $\varphi_{m,i}=\varphi_m$. Zbog tih zaokreta dolazi do savijanja štapova, pa će ukupni moment na kraju *m* štapa biti dan izrazom

$$M_{m,i} = 4k_{m,i}\varphi_m + 2k_{m,i}\varphi_i + \overline{M}_{m,i} \text{ ,}$$

gdje su $\overline{M}_{m,i}$ momenti upetosti, a $k_{m,i} = \frac{EI_{m,i}}{l_{m,i}}$. Ako promatramo jedan čvor onda na njega djeluju momenti koji su jednaki, ali suprotnog smjera od momenata koji djeluju na krajevima štapova. Iz uvjeta ravnoteže tog čvora dobivamo da je $\sum_i (-M_{m,i}) = 0$, suma vrijedi za sve krajeve štapova koji se spajaju u tom čvoru. Ako u to ubacimo jednadžbu za ukupni moment dobivamo, nakon množenja sa -1,

$$* \qquad \left(\sum_i 4k_{m,i}\right)\varphi_m + \sum_i 2k_{m,i}\varphi_i + \sum_i \overline{M}_{m,i} = 0.$$

Kutove φ odabiremo tako da zadovoljavaju tu jednadžbu za bilo koji čvor konstrukcije. Važno je da ne zaokrećemo sve čvorove odjednom, nego čvor po čvor zadovoljavajući u njemu uvjet ravnoteže. Krećemo od čvora gdje možemo pretpostaviti da će kut φ biti najveći. U našem slučaju pretpostavit ćemo da je to čvor *m*. Budući da je onda samo u njemu dopušteno zakretanje iz jednadžbe za ukupni moment slijedi

$$\varphi_m = -\frac{1}{\sum_i 4k_{m,i}} \sum_i \overline{M}_{m,i}.$$

No ako zaokrenemo samo jedan čvor, automatski smo narušili ravnoteže susjednih čvorova koji su štapovima povezani s tim čvorom. Moment koji se pojavljuje na suprotnom kraju štapa jednak je $2k_{l,m}\varphi_m$. Stoga se onda moramo vratiti u te čvorove pa ponovo njih uravnotežiti. Postupak je dakle iteracijski, odnosno do konačnog rješenja se dolazi postupno. Radi toga nam je φ_m tek prvi korak iteracije pa ga možemo označiti sa $\varphi_m^{(1)}$. Nakon što prođemo kroz ostale čvorove vraćamo se na čvor *m*, gdje je tada približna vrijednost kutova zaokreta u čvoru jednaka $\varphi_m^{(\beta_m)}$, gdje indeks β_m označava da je vrijednost kuta φ_m dobivena nakon β_m uravnoteživanja čvora *m*. Budući da smo prilikom uravnoteživanja susjednih čvorova narušili ravnotežu čvora *m*, suma momenata koja u njemu djeluju neće više biti jednaka nuli, nego

$$** \quad \left(\sum_i 4k_{m,i}\right)\varphi_m^{(\beta_m)} + \sum_i 2k_{m,i}\varphi_i^{(\beta_i)} + \sum_i \bar{M}_{m,i} = m_m^{(\beta_m)}.$$

Moment $m_m^{(\beta_m)}$ nazivamo rezidualnim momentom. Jednadžba za ukupni moment bit će zadovoljena samo s pravim φ_i, pa oduzimanjem (*) od (**) uz $\varphi_i = \varphi_i^{(\beta_i)} + \Delta\varphi_i$, dobivamo

$$\left(4\sum_i k_{m,i}\right)\Delta\varphi_m + \sum_i 2k_{m,i}\Delta\varphi_i = m_m^{(\beta_m)} .$$

Kako bismo čvor *m* ponovno uravnotežili, i dalje moramo spriječiti pomake odnosno zaokretanja svih ostalih čvorova osim onog kojeg uravnotežujemo, u ovom slučaju čvora *m*. Prirast je kuta potreban za uravnoteživanje čvora *m*

$$\Delta\varphi_m^{(\beta_m+1)} = -\frac{1}{\sum_i 4k_{m,i}} m_m^{(\beta_m)}.$$

Približna vrijednost kuta zaokreta čvora *m* nakon što smo ga uravnoteživali β_m+1 puta iznosi:

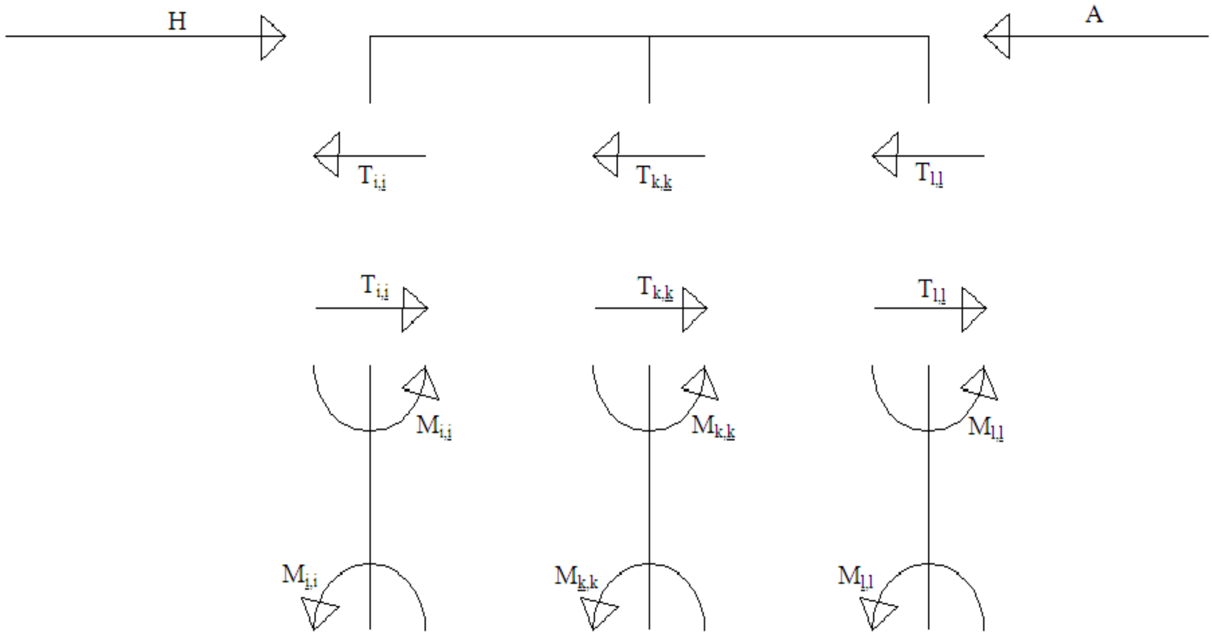
$$\varphi_m^{(\beta_m+1)} = \varphi_m^{(\beta_m)} + \Delta\varphi_m^{(\beta_m+1)} = \varphi_m^{(1)} + \sum_{k=1}^{\beta_m} \Delta\varphi_m^{(k+1)}.$$

U našim slučajevima obično već nakon druge aproksimacije dobivamo dovoljno točan rezultat.

Nakon što smo proučili prvi dio Čališevljevog postupka, krećemo na drugi, odnosno na djelovanje horizontalne sile u čvoru u kojem se u prvom dijelu zadatka nalazio štap koji je sistem činio nepomičnim. Silu u tom štapu dobivamo vrlo jednostavno. Presiječemo konstrukciju vrhovima stupova, te iz uvjeta ravnoteže grede dobivamo vrijednost sile u štapu (slika 3). Rezultantu svih zadanih horizontalnih sila koje djeluju na gredu označimo sa *H*, a poprečne sile koje djeluju u presjecima stupova označavamo sa $T_{i,\underline{i}}$. Vrijednost tih poprečnih sila također vrlo lako odredimo iz uvjeta ravnoteže momenta oko donje točke stupa,

$$*** \quad T_{i,\underline{i}} = \frac{1}{h_{i,\underline{i}}}\left(M_{i,\underline{i}} + M_{\underline{i},i}\right) + T_{i,\underline{i}}^0,$$

gdje je $T_{i,\underline{i}}^0$ vrijednost poprečne sile na odgovarajućem kraju jednostavno oslonjene grede jednakog raspona i s istim opterećenjem.



Slika 3 : Dobivanje horizontalne sile u čvoru

Zaključujemo da je vrijednost sile $A=H-\sum_{(i,\underline{i})} T_{i,\underline{i}}$. Radi djelovanja te sile A dolazi do horizontalnog pomaka čvorova za neku vrijednost u. Budući da se čvor pomaknuo, dolazi i do zaokretanja kutova između stupova i grede. Međutim kako su štapovi u čvorovima međusobno kruto spojeni, ti su zaokreti spriječeni, te kao posljedica toga dolazi do savijanja štapova. Čališev je umjesto da traži pomake zbog sile A, išao obratnom logikom, odnosno sam je zadao neki pomak u, te zatim odredio momente na krajevima štapova koji odgovaraju danom pomaku u. Potom je iz tih momenata izračunao odgovarajuću horizontalnu silu B. Budući da su sile linearne funkcije pomaka, momenti su razmjerni silama. Radi toga prave momente koji nastaju radi djelovanja sile A dobivamo tako da množimo dobivene momente s razlomkom $\frac{A}{B}$. Na taj način dobivamo momente drugog dijela Čališevljevog postupka. Konačno, prave momente dobivamo tako da zbrojimo rezultate ta dva dijela postupka.

Ako imamo konstrukcije s nekoliko katova, odnosno horizontalnih redova, prvi dio postupka je u pravilu isti, pa ga ovdje neću ponavljati. Što se tiče drugog dijela, ima nekoliko specifičnosti. Redom za svaku etažu, tj. gredu, presiječemo sistem ispod grede, te iz uvjeta ravnoteže za taj dio dobivamo

$$A_r = H_{r,g} + \sum_{e>r} H_e - \sum_{(i,\underline{i})\in r} T_{i,\underline{i}} - \sum_{e>r} A_e.$$

$H_{r,g}$ je vrijednost rezultante zadanih horizontalnih sila, ako one postoje, na gredu promatrane etaže. H_e je vrijednost rezultanata zadanih horizontalnih sila koje djeluju na stupove i grede etaže e. U ovom slučaju to znači da se ta suma proteže po svim etažama iznad naše etaže r. Treći pribrojnik je zbroj poprečnih sila u presjecima stupova etaže r koje se računaju kao i kod jednostavnih konstrukcija, što je već objašnjeno, dok je četvrti pribrojnik zbroj sila u zamišljenim štapovima iznad etaže r. Uvijek krećemo od najviše etaže, tako da nam zbroj sila A_e, iznad etaže koju trenutno računamo bude poznat. Ako se naša konstrukcija sastoji od n etaža, svaka se etaža pomakne za neku veličinu u. Čališev je odredio da pretpostavljamo da su nam ti pomaci u=1 za pojedinu etažu, dok ostale etaže smatramo nepomičnim. Pod pretpostavkom pomaka 1 računamo momente na krajevima štapova određene etaže. Tako bi trebali proračunati momente za svaku etažu posebno. Budući da imamo n etaža, imat ćemo n linearnih jednadžbi :

$$A_1 = A_{1,1} u_1 + A_{1,2} u_2 + A_{1,3} u_3 + \cdots A_{1,n} u_n \,,$$

$$A_2 = A_{2,1} u_1 + A_{2,2} u_2 + A_{2,3} u_3 + \cdots A_{2,n} u_n \,,$$

$$\vdots$$

$$A_n = A_{n,1} u_1 + A_{n,2} u_2 + A_{n,3} u_3 + \cdots A_{n,n} u_n \,.$$

Vidljivo je da ako imamo puno katova dolazimo do velikog problema, jer ćemo imati sustav od n jednadžbi čije rješavanje može biti dugo i zamorno. Upravo radi toga Čališev je i ovdje primijenio metodu postupnih aproksimacija, tako da na početku sami odaberemo horizontalni pomak u. Kao pomak u Čališev je prvo uzeo vrijednost koja odgovara apsolutnoj krutosti horizontalnih štapova, jer je u praksi najčešće krutost horizontalnih štapova puno veća od krutosti vertikalnih štapova. Iz toga zaključujemo da će se čvorovi samo pomaknuti, ali se neće zaokrenuti. Ako pretpostavimo da su svi stupovi neke etaže r duljine h_r, kut zaokreta će im biti

$$\Psi_r = -\frac{u_r - u_{r-1}}{h_r}.$$

Ravnotežu horizontalnih sila na dijelu okvira iznad presjeka kroz stupove prikažemo kao

$$\sum_{e \geq r} A_e - \sum_{(i,j) \in r} T_{i,j} = 0.$$

Poprečne sile u stupovima izrazimo preko (***), gdje je $T^0_{i,\underline{i}}$=0, jer sile A_e djeluju u čvorovima. Uz $M_{i,\underline{i}} = M_{\underline{i},i} = -6k_{i,\underline{i}}\Psi_r$, dobivamo

$$\Psi_r = -\frac{1}{12\sum_{(i,\underline{i})\in r} k_{i,\underline{i}}} h_r \sum_{e\geq r} A_e.$$

Uvrštavanjem tih kutova u jednadžbu za momente u stupovima navedenu iznad dobivamo momente upetosti u stupovima, dok u gredama momenata upetosti nema, jer su one apsolutno krute. Naposljetku dodajemo zamišljene štapove kojima smo pridržali konstrukciju, te izračunamo momente koji odgovaraju odabranim deformacijama i krutostima greda. Nakon toga računamo reakcije B. Čališev je predložio da umjesto vrijednosti B uzmemo vrijednost ŋB koja je točnija. ŋ dobivamo metodom najmanjih kvadrata:

$$\sum_i (A_i\text{-}\eta B_i)^2 \quad \rightarrow \quad min\,,$$

pri čemu je ŋ varijabla.

Uvjet je minimuma :

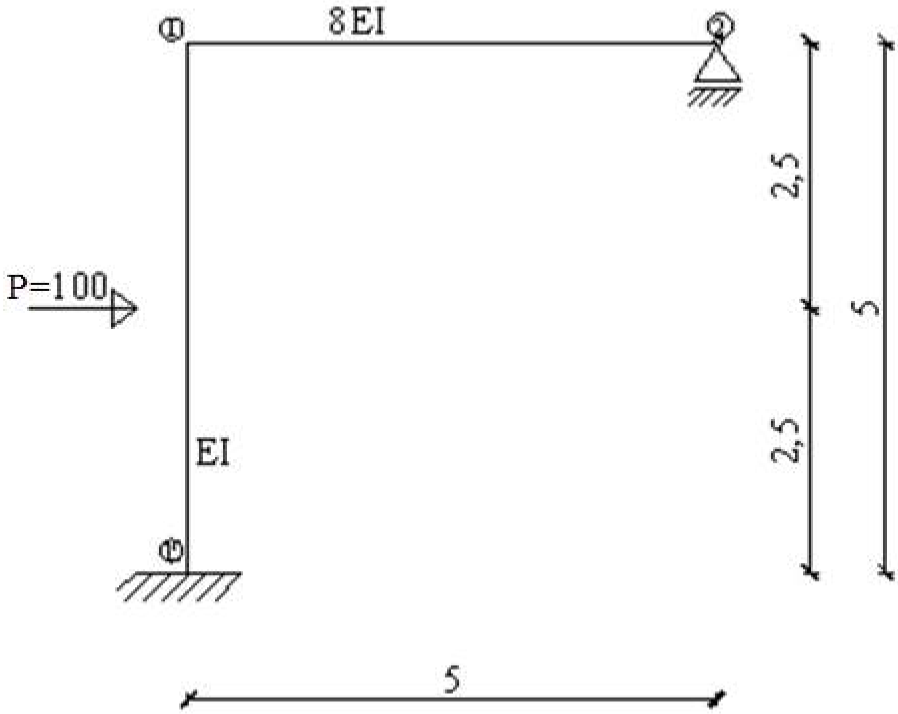
$$\frac{d}{d\eta}\sum_i (A_i\text{-}\eta B_i)^2 = \frac{d}{dn}\sum_i (A_i\text{-}2\eta A_i B_i + \eta^2 B_i^2) = \sum_i (\text{-}2\Delta_i B_i + 2\eta B_i^2) = 0,$$

pa iz $-\sum_i A_i B_i + \eta\sum_i B_i^2 = 0$

slijedi $\eta = \frac{\sum_i A_i B_i}{\sum_i B_i^2}$.

Uglavnom je dobiveno rješenje zadovoljavajuće, međutim, ako su razlike između vrijednosti A_i i ŋB_i prevelike, postupak treba ponoviti sa silama vrijednosti kojih su $\Delta A_i = A_i$ - ŋB_i pa rezultate pribrojiti prethodnima.

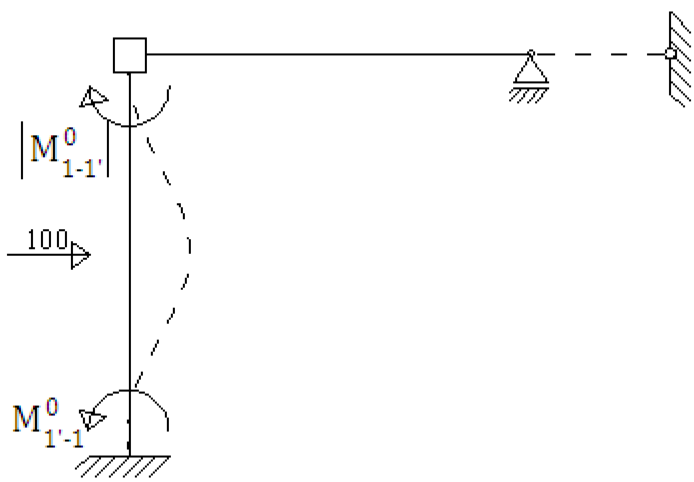
1.4. Čališevljev postupak – primjer



-dimenzije 30/60 cm

-E = $3 \cdot 10^7$ kN/m^2

-EI = 162 000 kNm^2



$$M^0_{1\text{-}1'} = -100 \cdot \frac{2.5 \cdot 2.5^2}{5^2} = -62.5 \text{ kNm}$$

$$M^0_{1'\text{-}1} = 62.5 \text{ kNm}$$

$$M^0_{1\text{-}2} = 0$$

Čališev se u svojim primjerima koristio umjesto kutem φ veličinom $N=2E\varphi$, pa ću se i ja njome koristiti prilikom prikazivanja njegova postupka.

$EI = EI_0$

$\frac{EI_{1\text{-}1'}}{l_{1\text{-}1'} \cdot EI_0} = \frac{EI}{5 \cdot EI_0} = 0.2$

$\frac{EI_{1\text{-}2}}{l_{1\text{-}2} \cdot EI_0} = \frac{8 \cdot EI}{5 \cdot EI_0} = 1.6$

$2\sum \frac{EI}{l \cdot EI_0} = 2 \cdot (0.2 + 1.6) = 2 \cdot 1.8 = 3.6$

-za jednostrano upetu gredu :

$2\sum \frac{EI}{l \cdot EI_0} - \frac{1}{2} \frac{EI_{1-2}}{l_{1-2} EI_0} = 3.6 - \frac{1}{2} \cdot 1.6 = 3.6 - 0.8 = 2.8$

			1. APROKSIMACIJA	
štapovi	$\frac{EI}{l \cdot EI_0}$ $2\sum \frac{EI}{l \cdot EI_0} - \frac{1}{2} \frac{EI_{1-2}}{l_{1-2} EI_0}$	M_0	N'	$M'_{mn} = \frac{EI}{lEI_0} \cdot (2N'_m + N'_n)$
1-1' 1-2	0.2 1.6 2.8	-62.5 0 -62.5	22.32	8.93 53.57 -62.5 0

$N' = -\frac{M_0}{2\sum \frac{EI}{l \cdot EI_0} - \frac{1}{2} \frac{EI_{1-2}}{l_{1-2} EI_0}} = \frac{62.5}{2.8} = 22.32$

$M'_{1-1'} = \frac{EI_{1-1'}}{l_{1-1'} \cdot EI_0} \cdot (2 \cdot N' + 0) = 0.2 \cdot (2 \cdot 22.32) = 8.93$ kNm

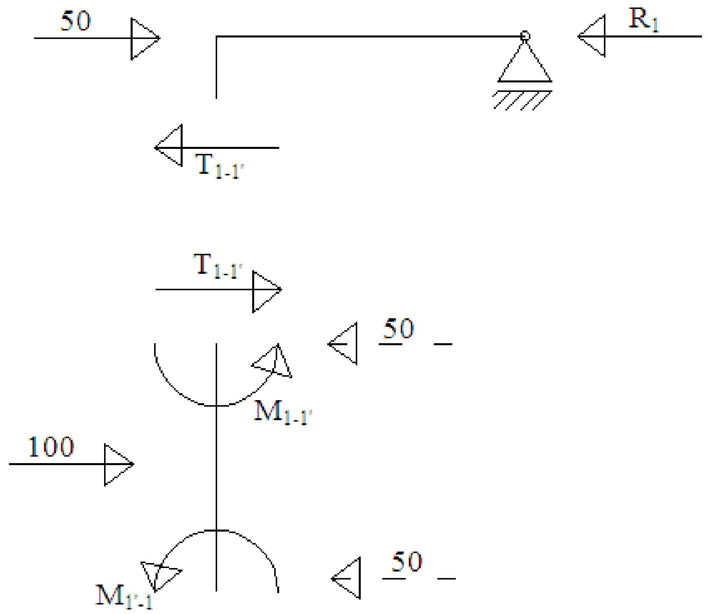
$M'_{1-2} = \left[\frac{EI_{1-2}}{l_{1-2} \cdot EI_0} - \frac{1}{4} \frac{EI_{1-2}}{l_{1-2} \cdot EI_0}\right] (2 \cdot N' + 0) = \left[1.6 - \frac{1}{4} \cdot 1.6\right] (2 \cdot 22.32) = 1.2 \cdot 44.64$

$= 53.57$ kNm

$M_{1-1'} = M^0_{1-1'} + M'_{1-1'} = -62.5 + 8.93 = -53.57$ kNm

$M_{1-2} = M^0_{1-2} + M'_{1-2} = 0 + 53.57 = 53.57$ kNm

$M_{1'-1} = M^0_{1'-1} + \frac{EI_{1-1'}}{l_{1-1'} \cdot EI_0} \cdot N' = 62.5 + 0.2 \cdot 22.32 = 66.96$ kNm



$$T_{1-1'} = \frac{M_{1-1'} + M_{1'-1}}{5}$$

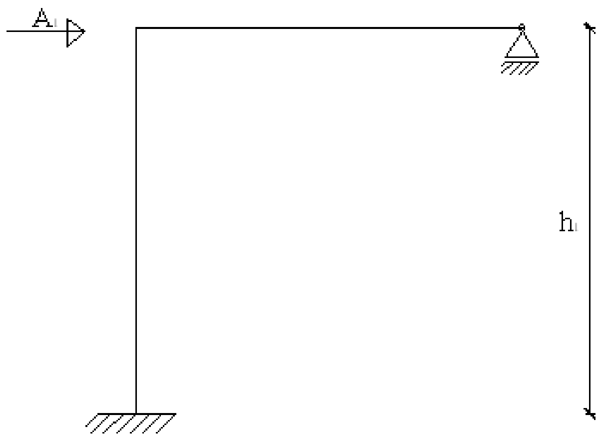
$$T_{1-1'} = 2.68\ kN$$

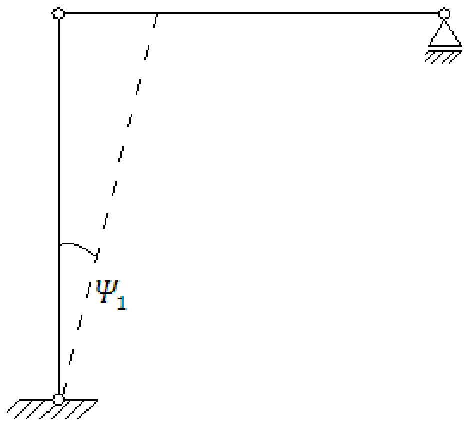
$$R_1 = 50 - 2.68 = 47.32\ kN$$

-opterećenje horizontalnom silom

$$\overrightarrow{A_1} = -\overrightarrow{R_1}$$

A_1 = 47.32 kN





$$\Psi_1 = \frac{-1}{12\sum_{(i,j)\in 1} k_{ij}} \cdot h_1 \cdot \sum_{e\geq 1} A_e$$

$$\sum_{(i,j)\in 1} k_{ij} = k_{1-1'} = \frac{EI_{1-1'}}{h_1 \cdot EI_0} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\sum_{e\geq 1} A_e = A_1 = 47.32\ \text{kN}$$

$$\Psi_1 = \frac{-1}{12\cdot 0.2} \cdot 5 \cdot 47.32 = -98.583$$

$$\overline{M}_{1-1'} = \overline{M}_{1'-1} = -6 \cdot \frac{EI_{1-1'}}{h_1 \cdot EI_0} \cdot \Psi_1 = -6 \cdot 0.2 \cdot (-98.583) = 118.30 \text{ kNm}$$

			1. APROKSIMACIJA	
štapovi	$\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{l \cdot EI_0}}$ $2\sum \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{l \cdot EI_0}} - \frac{1}{2}\frac{EI_{1-2}}{l_{1-2}EI_0}$	$\overline{\mathrm{M}}$	N'	$M'_{mn} = \frac{EI}{lEI_0} \cdot (2N'_m + N'_n)$
1-1'	0.2	118.30		-16.9
1-2	<u>1.6</u>	<u>0</u>	-42.25	-101.4
	2.8	118.30		<u>+118.30</u>
				0

$$N_{1'-1} = N_{2-1} = 0$$

$$N' = \frac{-\overline{M}}{2\sum \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{l \cdot EI_0}} - \frac{1}{2}\frac{EI_{1-2}}{l_{1-2}EI_0}} = \frac{-118.30}{2.8} = -42.25$$

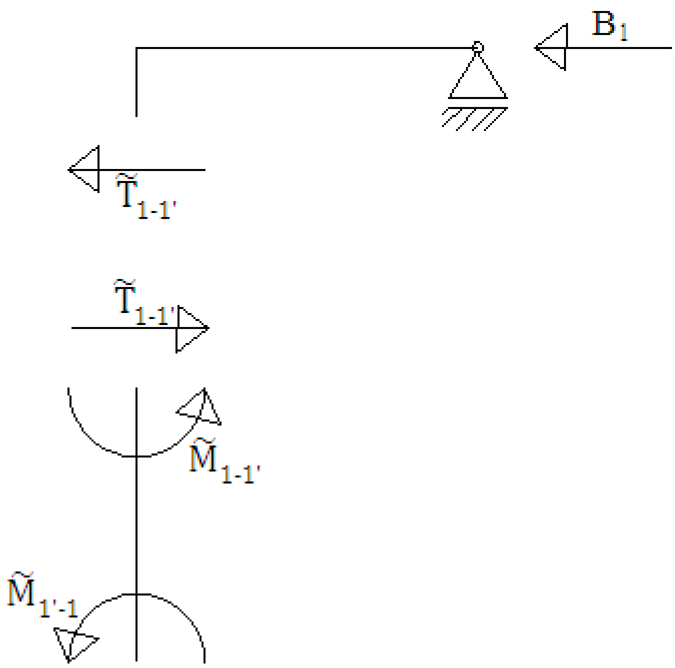
$$\widetilde{M}'_{1-1'} = \frac{EI_{1-1'}}{l_{1-1'} \cdot EI_0} \cdot (2 \cdot N' + 0) = 0.2 \cdot (2 \cdot (-42.25)) = -16.9 \text{ kNm}$$

$$\widetilde{M}'_{1-2} = \left[\frac{EI_{1-2}}{l_{1-2} \cdot EI_0} - \frac{1}{4}\frac{EI_{1-2}}{l_{1-2} \cdot EI_0}\right](2 \cdot N' + 0) = \left[1.6 - \frac{1}{4} \cdot 1.6\right](2 \cdot (-42.25)) = -101.4 \text{ kNm}$$

$$\widetilde{M}_{1-1'} = \overline{M}_{1-1'} + \widetilde{M}'_{1-1'} = 118.30 - 16.9 = 101.4 \text{ kNm}$$

$$\widetilde{M}_{1-2} = \overline{M}_{1-2} + \widetilde{M}'_{1-2} = 0 - 101.4 = -101.4 \text{ kNm}$$

$$\widetilde{M}_{1'-1} = \overline{M}_{1'-1} + \frac{EI_{1-1'}}{l_{1-1'} \cdot EI_0} \cdot N' = 118.30 + 0.2 \cdot (-42.25) = 109.85 \text{ kNm}$$



$\tilde{T}_{1-1'} = \frac{\tilde{M}_{1-1'} + \tilde{M}_{1'-1}}{5}$

$\tilde{T}_{1-1'} = 42.25$ kN

B_1 = -42.25 kN

-korekcijski koeficijent :

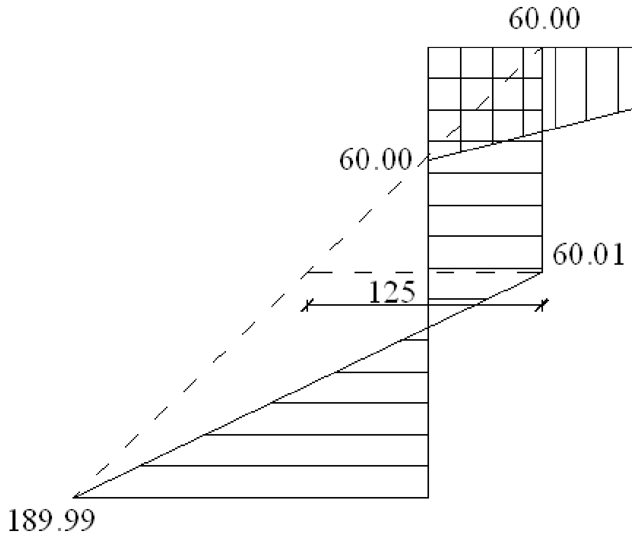
$\eta = \frac{A_1}{B_1} = \frac{47.32}{42.25} = 1.12$

$M_{1-1'}^{(k)} = M_{1-1'} + \eta \tilde{M}_{1-1'} = -53.57 + 1.12 \cdot 101.4 = 60.00$ kNm

$M_{1'-1}^{(k)} = M_{1'-1} + \eta \tilde{M}_{1'-1} = 66.96 + 1.12 \cdot 109.85 = 189.99$ kNm

$M_{1-2}^{(k)} = M_{1-2} + \eta \tilde{M}_{1-2} = 53.57 + 1.12 \cdot (-101.4) = -60.00$ kNm

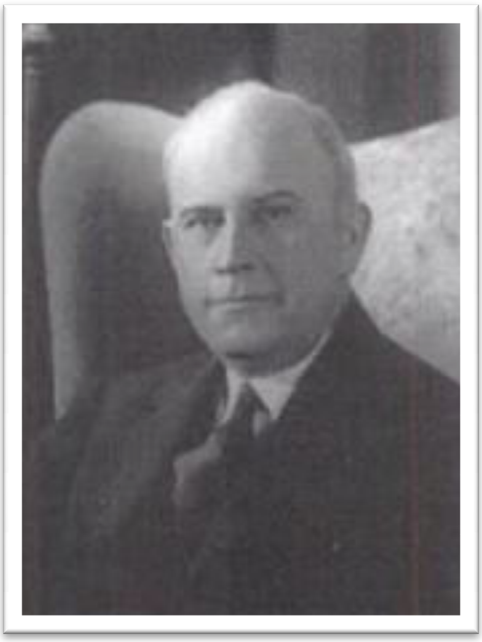
-M dijagram :



$M_P = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{100 \cdot 5}{4} = 125$ kNm

2. Hardy Cross

2.1. Životopis Hardyia Crossa



Slika 4 : Hardy Cross

Hardy Cross (slika 4) rođen je 1885. u državi Virginija u Sjedinjenim Američkim Državama, a umro je 1959. Prvu diplomu dobio je iz engleskog jezika na Sveučilištu Hampden-Sydney 1902. godine. Tamo je počeo svoju učiteljsku karijeru predavajući engleski. Nakon što je diplomirao 1903. nastavio je još 3 godine predavati na Akademiji Norfolk. Građevinu je diplomirao 1908. godine na Tehnološkom institutu u Massachusettsu, te se nakon toga priključio odjelu za mostove Missouri Pacific željeznica u St. Louisu. Tamo je proveo svega godinu dana, nakon čega se vratio u Akademiju Norfolk 1910. Nakon jedne godine diplomskog studija na Harvardu postao je magistar građevinarsta 1911. S novostečenim znanjima na Harvardu odlučio je postati asistent profesor građevine na Sveučilištu Brown, gdje je podučavao sedam godina. Godine 1921. prihvatio je ponudu Sveučilišta Illinois gdje je postao profesor iz područja konstrukcije. Tamo je proveo svoje najkreativnije godine te stekao ugled kao profesor. Nažalost patio je od gluhoće, međutim nije dopustio da ga to sputava već je to okretao u svoju korist koliko je god mogao. Studenti su uskoro shvatili da je radi njegove gluhoće vrlo teško improvizirati odgovore, te su ili odgovarali izričito ako su znali odgovor ili su priznali da ne znaju. Predavao je bez ikakvih bilježaka, a njegova predavanja su uvijek bila proračunata da proizvedu određenu atmosferu. Ponekad je znao ranije napustiti predavaonicu jer nitko nije pokušao riješiti određeni problem. Nakon tog demonstrativnog napuštanja predavanja znao je pitati nekog tko je gledao njegov izlazak : "Što misliš kako su to doživjeli?". Cross je smatrao da je predavaonica, kao prvo, mjesto za razvijanje genijalnosti i samopouzdanja. Za njega je Sveučilište mjesto gdje se rade mnoge intelektualne pogreške koje se onda uče ispraviti. Zajedno s N.D. Morganom, koji je nadopunio njegovo prvo djelo, izdao je knjigu *Continuous Frames of Reinforced Concrete (Kontinuirani okviri od armiranog betona)* 1932. Nadopunio je svoje geometrijske metode rješenja problema cjevovoda nastalih u općem dizajnu opskrbe vodom. Te metode bile su upotrijebljene za rješavanje sličnih sustava kao npr. plinovoda. Za svoje radove primio je brojna odlikovanja kao što su : priznanje Američkog društva za obrazovanje inženjera (1944.), priznanje Američkog Instituta za beton (1935.), Zlatnu medalju Instituta za Građevinske Inženjere Velike Britanije (1959.) te mnoge druge. Godine 1937. preselio se u Yale gdje je postao profesor i predsjednik Odjela građevinarstva. Godinu nakon umirovljenja 1951. izdao je kratku knjigu svojih "otkrića", koju je uredio Robert C. Goodpasture, *Engineers and Ivory Towers (Inženjeri i kule od bjelokosti).* Naposljetku valja spomenuti i njegov nama najvažniji rad, metodu distribucije momenata, koja će biti detaljnije prikazana u ovom radu. Ovu metodu razvio je za vrijeme svog rada na Harvardu. Iz svega navedenog da se zaključiti da je Hardy Cross za vrijeme života stekao međunarodnu reputaciju, međutim zašto se onda danas zna tako malo o njemu, te je u biti nepoznat ljudima? Mnogi razlog tome vide u razvoju računalne tehnologije s kojom su se pojavili i programi koji nam lako rješavaju probleme kojima se on bavio.

2.2 Crossov postupak – općenito

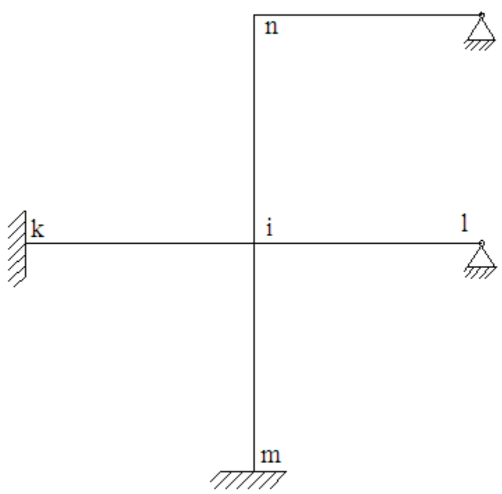
Crossova metoda ili metoda distribucije momenata je relaksacijski odnosno iteracijski postupak rješavanja sistema. Ideja iteracijskog postupka sastoji se u tome da uzastopnim iteracijama polagano dolazimo do konačnog rješenja. Upravo je u tome prednost ove metode naspram metode pomaka. Ako imamo velik broj nepoznanica, a samim time i velik broj jednadžbi u metodi pomaka ona postaje vrlo teška i zamorna, dok se Crossovim postupkom bavimo uravnoteživanjem momenata u čvorovima, te se često može doći do prihvatljivog rješenja već u drugoj iteraciji! Cross je krenuo od činjenice oslobađanja po jednog čvora, znači oslobađanja mogućnosti zakretanja u tom čvoru. Obično krećemo od čvora koji je najneuravnoteženiji, u inače nepomičnom sistemu u kojem su pomaci spriječeni. Nakon otpuštanja čvora u njemu uravnotežujemo momente priključenih štapova dobivene na osnovnom sistemu uz naravno dodatak vanjskih momenata ako postoje u tom čvoru. Dio tih momenata koji nastaju uravnoteživanjem na krajevima štapova potrebno je prebaciti na suprotne krajeve štapova. Razdioba neuravnoteženog momenta u čvorovima provodi se pomoću razdjelnih koeficijenata koji se dobivaju iz omjera krutosti pojedinog štapa i zbroja krutosti svih štapova spojenih u čvoru, dok se dio tih momenata na suprotan kraj štapa prebacuje pomoću prijenosnih koeficijenata. Pretpostavljamo da je svaki puta oslobođena potpuna upetost jednog čvora, ali da je zadržana potpuna upetost susjednih čvorova. Nakon što smo završili s postupkom uravnoteživanja u jednom čvoru ponovno ga upnemo, a postupak ponavljamo na sljedećem čvoru. Tako se "vrtimo" u krug sve dok na svim čvorovima neuravnoteženi moment ne postane približno nula, ovisno o točnosti s kojom radimo. Konačne momente na upetim krajevima dobivamo tako da zbrojimo momente upetosti, raspodijeljene momente i prenesene momente. Crossova metoda je u pravilu rađena za konstrukcije sa spriječenim translacijskim pomacima čvorova. No može se i primijeniti na konstrukcijske sustave s dopuštenim translacijskim pomacima čvorova i to tako da se u prvoj fazi rješavanja dodaju veze koje sprječavaju neovisne translacijske pomake. Iz uvjeta da u tim dodanim vezama nema sila dolazimo do jednadžbi iz kojih se izračunavaju stvarni pomaci, a zatim i konačne vrijednosti momenata u štapovima. Naravno tih jednadžbi će biti onoliko koliko smo veza dodali.

2.3. Crossov postupak – definicije i izvodi

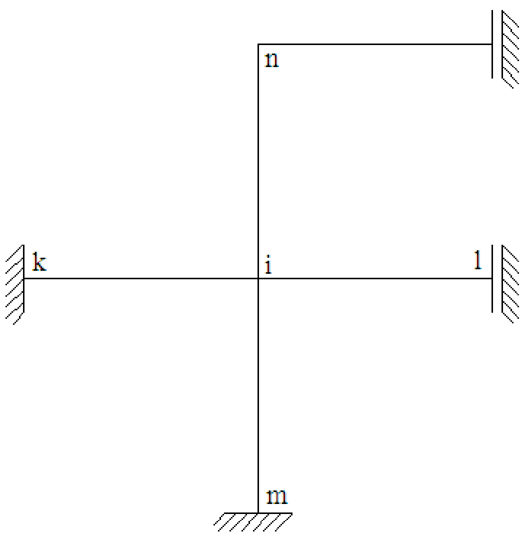
Kao što sam već napisao, Cross je krenuo od činjenice oslobađanja po jednog čvora, znači oslobađanja mogućnosti zakretanja u tom čvoru. Promatramo obostrano upetu gredu konstantnog poprečnog presjeka. Ako znamo koliki nam je prirast kuta zaokreta čvora *i*, kojeg označimo sa : $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, možemo ga prikazati kao:

$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{\sum_{j_i} 4k_{(i,j_i)}} \ .$$

No kao što znamo grede nisu uvijek obostrano upete, pa prirast kuta zaokreta može poprimiti drugi oblik, koji ću pokazati u sljedeća dva primjera :



$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{4(k_{ik}+k_{im}+k_{in})+3k_{il}}$$



$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{4(k_{ik}+k_{im}+k_{in})+k_{il}}$$

Vratimo se na obostranu upetu gredu. Tada će prirast momenta na kraju i elementa (i,j_i) biti :

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = 4 \cdot k_{(i,j_i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} \quad .$$

Kod uravnoteženja čvora i svi ostali čvorovi su nepomični i njihovi zaokreti su spriječeni. Uvrštavanjem izraza za $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$ dobivamo

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \frac{4 \cdot k_{(i,j_i)}}{\sum_{j_i} 4k_{(i,j_i)}} \cdot m_i^{(n_i)},$$

gdje je $m_i^{(n_i)}$neuravnoteženi rezidualni moment. Zbroj koeficijenata krutosti svih elemenata koji su priključeni u čvor i nazvat ćemo koeficijentom krutosti čvora i i označiti sa

$$k_i = \sum_{j_i} 4k_{(i,j_i)} \quad .$$

Razdjelni koeficijent u nekom čvoru dobivamo tako da podijelimo koeficijent krutosti određenog elementa s koeficijentom krutosti tog čvora

$$\mu_{i,j_i} = \frac{4k_{(i,j_i)}}{k_i} \, .$$

Dobiveni broj je razdjelni koeficijent za taj element. Taj postupak ponovimo onoliko puta koliko je elemenata spojeno u određenom čvoru. Dakle za svaki element ćemo dobiti drugačiji razdjelni koeficijent. Oni se mogu podudarati ukoliko su koeficijenti krutosti elemenata jednaki.

Razdjelni koeficijent za jednostrano upetu gredu iznosit će $\mu_{i,j_i} = \frac{3k_{(i,j_i)}}{k_i}$, dok za gredu koja s jedne strane ima upeto klizni ležaj, on iznosi $\mu_{i,j_i} = \frac{k_{(i,j_i)}}{k_i}$, pri čemu i u k_i krutost $k_{(i,j_i)}$ ulazi pomnožena sa 3, odnosno sa 1.

Budući da je koeficijent krutosti čvora i jednak zbroju svih koeficijenata krutosti elemenata spojenih u dotični čvor, suma razdjelnih koeficijenata u čvorovima mora biti jednaka 1:

$$\sum_{j_i} \mu_{(i,j_i)} = 1.$$

Uvrštavanjem razdjelnog koeficijenta u jednadžbu za prirast vrijednosti momenta na kraju elementa dobivamo

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mu_{(i,j_i)} \cdot m_i^{(n_i)}.$$

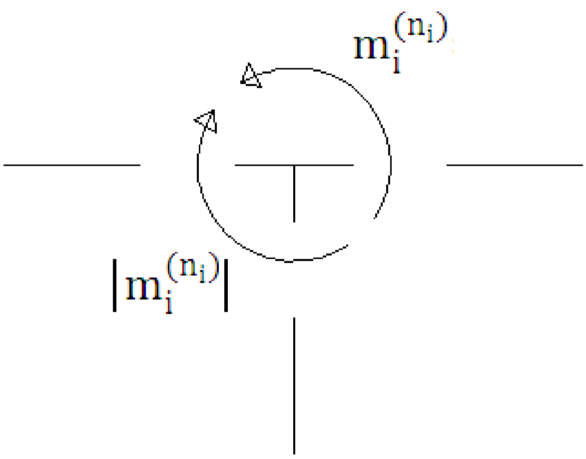
Budući da je suma razdjelnih koeficijenata jednaka 1, sumiranjem prirasta momenata dobivamo

$$\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = m_i^{(n_i)},$$

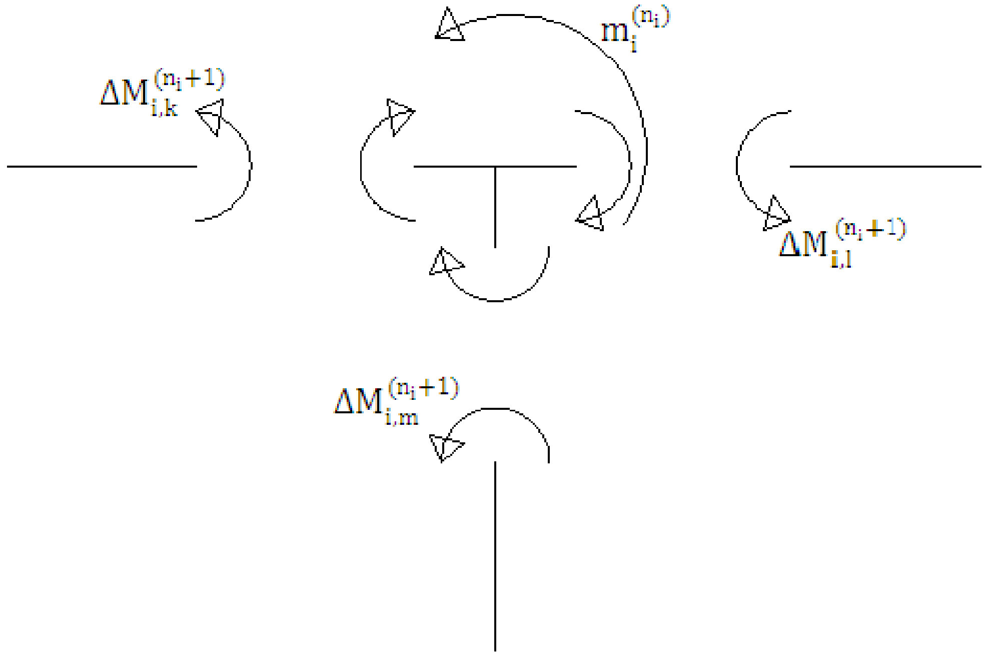
odnosno, prebacivanjem svega na jednu stranu jednadžbe,

$$-\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} + m_i^{(n_i)} = 0.$$

Iz toga zaključujemo da čvor *i* možemo uravnotežiti tako da na njega dodamo moment istog intenziteta rezidualnom momentu, ali suprotnog smisla vrtnje (slika 5), te ga razdijelimo u omjeru njihovih krutosti na priključne elemente (slika 6).



Slika 5 : Uravnoteživanje čvora

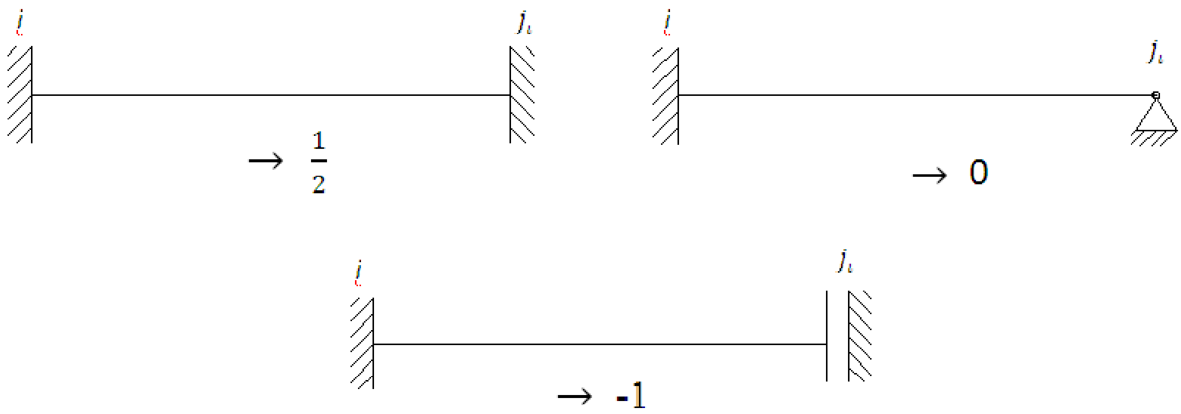


Slika 6 : Uravnoteživanje čvora pridruženim momentima na elementima

Upravo radi toga Crossov postupak nazivamo još i postupak razdiobe momenata ili postupak raspodjele momenata. Nakon što smo razdijelili moment kojim smo uravnotežili čvor po elementima, potrebno je prenijeti dio tog momenta i na drugi kraj elementa. Taj dio koji prenosimo na drugi kraj elementa dobivamo pomoću prijenosnih koeficijenata. Ako se kraj *i* elementa (i,j_i) zaokrene za kut $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, na drugom kraju elementa, j_i, pojavit će se moment vrijednosti :

$$\Delta M_{j_i,i}=2\cdot k_{(i,j_i)}\cdot\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}=\frac{1}{2}\cdot\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)}.$$

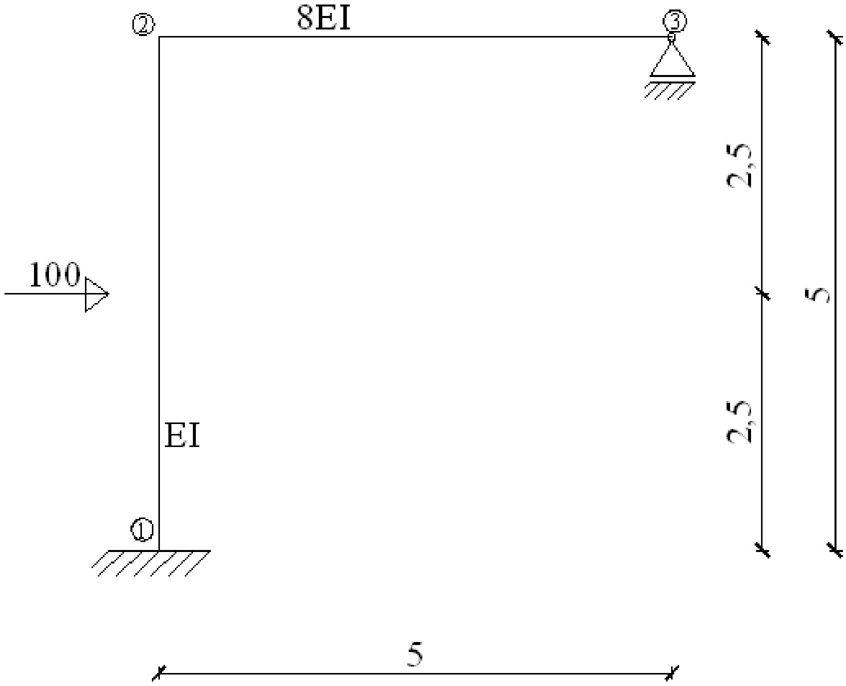
Iz toga zaključujemo da je prijenosi koeficijent jednak $\frac{1}{2}$. Dakle nakon što smo uravnotežili čvor *i*, na drugi kraj elementa dodajemo moment koji je jednak polovini vrijednosti momenta s kraja *i*. Prijenosni koeficijent za jednostrano upetu gredu jednak je 0, dok za gredu koja na jednom kraju ima upeto klizni ležaj on iznosi -1 (slika 7).



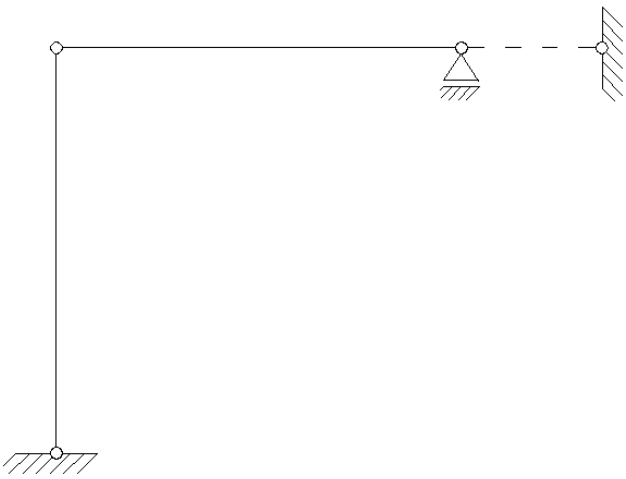
Slika 7 : prijenosni koeficijenti

Uvijek je najbolje krenuti uravnoteživati čvor u kojem je rezidualni moment najveći. Postupak nastavljamo sve dok vrijednost neuravnoteženih momenata ili vrijednosti momenata koje se prenose ne postanu toliko male da se mogu zanemariti. U slučajevima koje radimo na kolegiju Građevna statika 2 uglavnom je potrebno proći čvorovima dva do tri puta za dovoljno točan rezultat. Kada su vrijednosti toliko male da ih možemo zanemariti, jednostavno zbrojimo momente na krajevima elemenata: momente upetosti, raspodijeljene momente i prenesene momente. Dobiveni momenti su nam konačni momenti u krajevima elemenata.

2.4. Crossov postupak – primjer

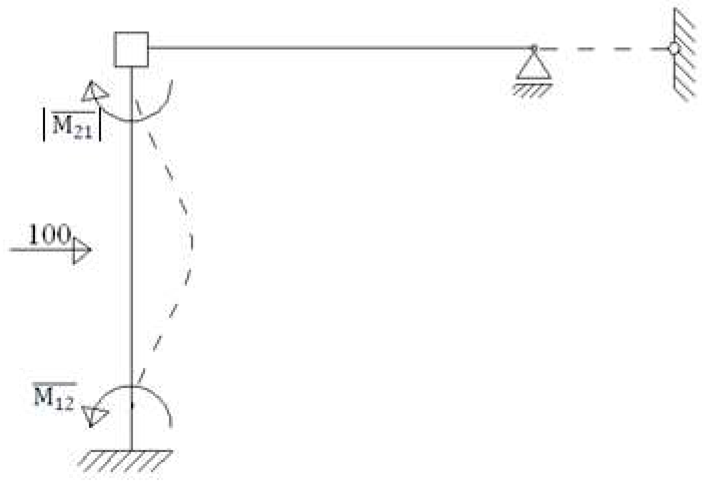


-zglobna shema



S = 6-3-2 = 1

$u_3 = u = ?$



$\overline{M_{12}} = 100 \cdot \frac{2.5 \cdot 2.5^2}{5^2} = 62.5$ kNm

$\overline{M_{21}} = -100 \cdot \frac{2.5^2 \cdot 2.5}{5^2} = -62.5$ kNm

- reducirane krutosti ($EI = EI_0$) :

$k_{12}^{*} = \frac{EI}{5EI_0} = 0.2$

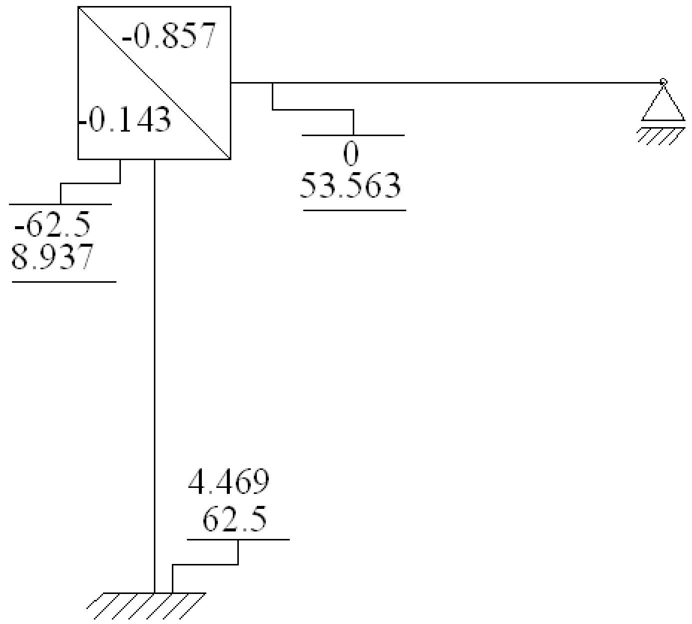
$k_{23}^{*} = \frac{8EI}{5EI_0} = 1.6$

- razdjelni koeficijenti :

$a_{21}^{*} = 4k_{12}^{*} = 0.8$ - $\mu_{21} = \frac{-0.8}{5.6} = -0.143$

$a_{23}^{*} = 3k_{23}^{*} = 4.8$ - $\mu_{23} = \frac{-4.8}{5.6} = -0.857$ → $\sum -1$

$A_2 = 5.6$

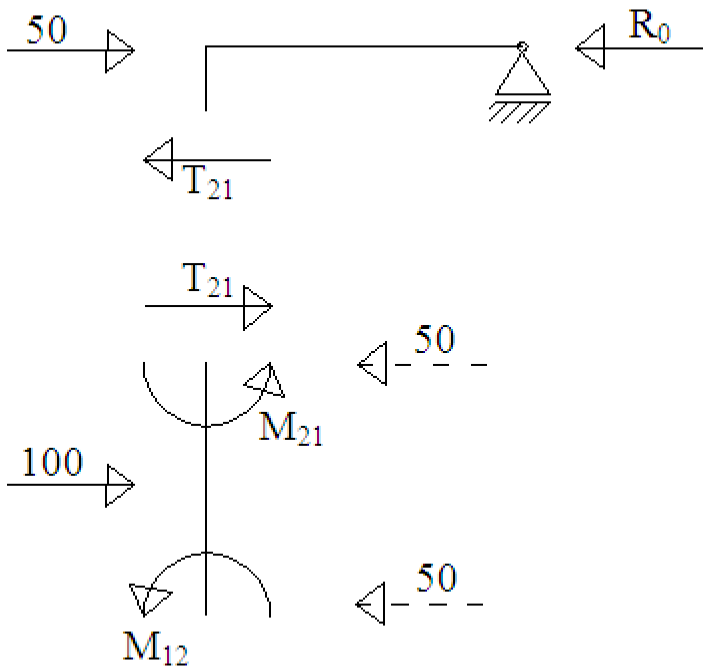


$M_{12} = 66.969$ kNm

$M_{21} = -53.563$ kNm

$M_{23} = 53.563$ kNm

$M_{32} = 0$



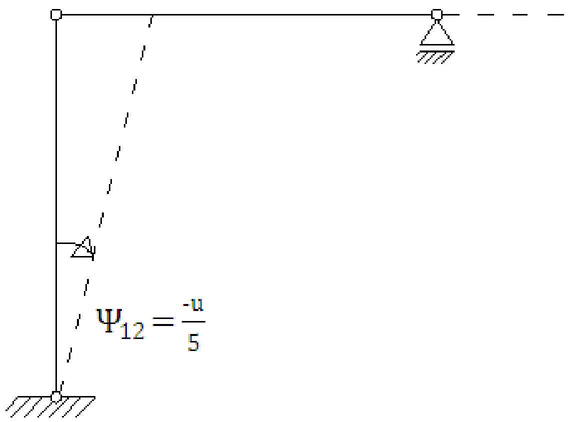
$T_{21} = \frac{M_{12}+M_{21}}{5}$

$T_{21} = 2.681$ kN

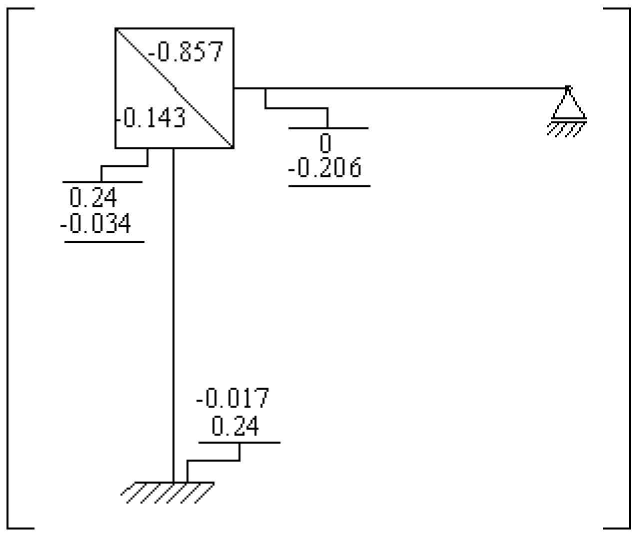
$R_0 = 50 - T_{21}$

$R_0 = 47.32$ kN

+u



$$m^u_{12} = m^u_{21} = -6 \cdot k_{12} \cdot \frac{-u}{5} = -6 \cdot 0.2 \cdot \frac{-u}{5} = 0.24u$$



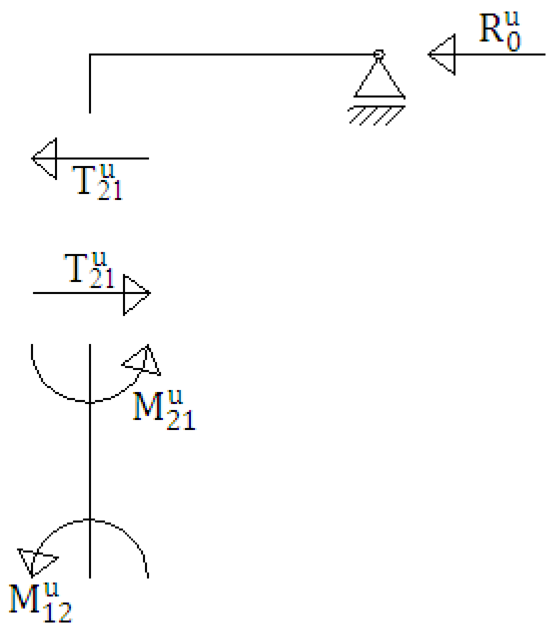
x u

$M^u_{12} = 0.223u$

$M^u_{21} = 0.206u$

$M^u_{23} = -0.206u$

$M^u_{32} = 0$



$$T^u_{21} = \frac{M^u_{12} + M^u_{21}}{5}$$

$T^u_{21} = 0.086u$

$R^u_0 = -0.086u$

$R = R_0 + R_0^u = 0$

$47.32 - 0.086u = 0$

<u>u = 550.233</u>

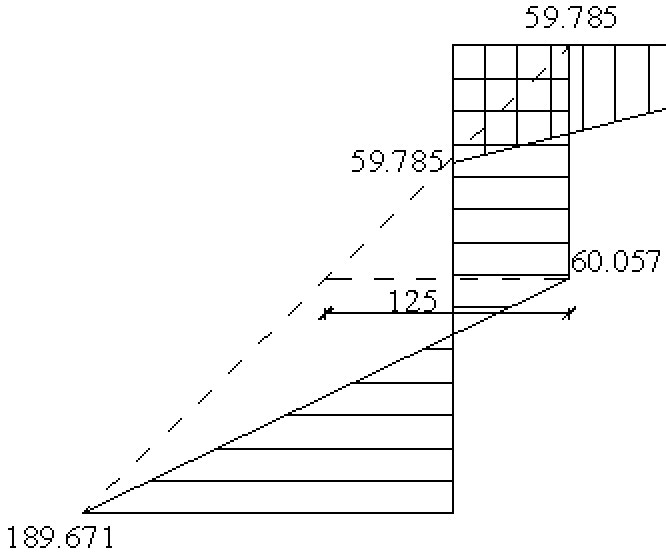
$M_{12} = 66.969 + 0.223u = 189.671$ kNm

$M_{21} = -53.563 + 0.206u = 59.785$ kNm

$M_{23} = 53.563 - 0.206u = 59.785$ kNm

$M_{32} = 0$

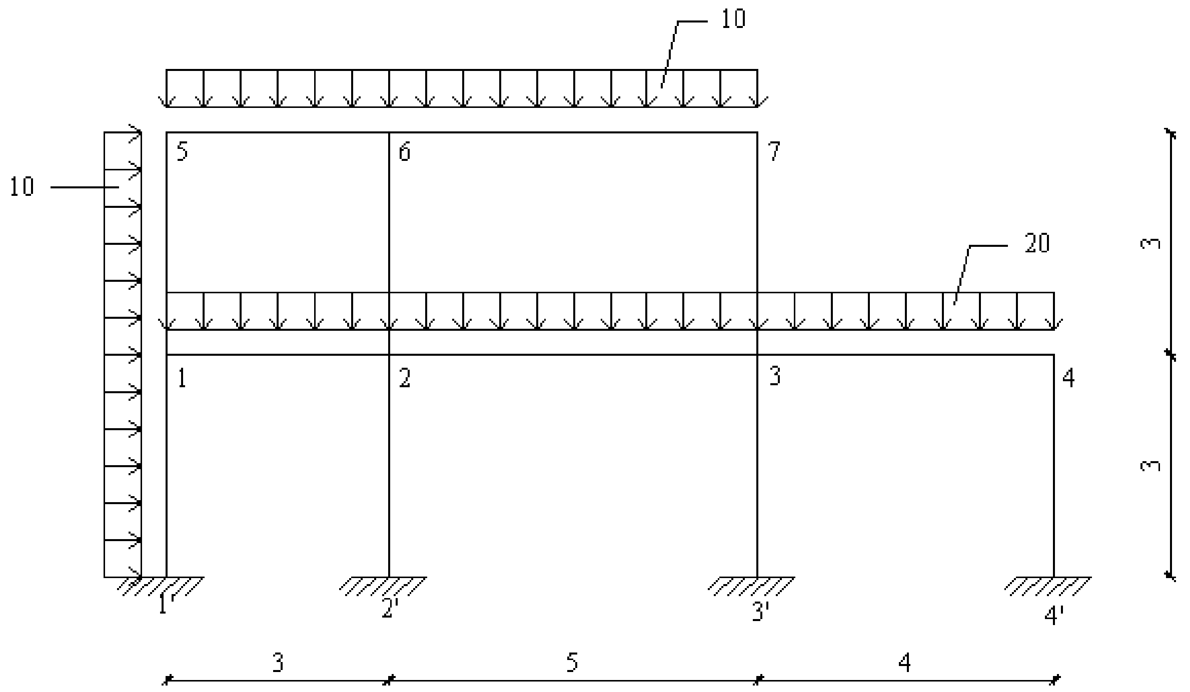
-M dijagram :



$M_P = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{100 \cdot 5}{4} = 125$ kNm

3. Usporedba metoda Čališeva i Crossa

3.1. Čališevljev postupak



-stupovi

$E=3\cdot10^7$ kN/m^2 , b/h=30/30 cm

$I_S=\frac{0.3\cdot0.3^3}{12}=0.000675$ m^4

$E\cdot I_S=3\cdot10^7\cdot\frac{0.3\cdot0.3^3}{12}=20\,250$ kNm^2

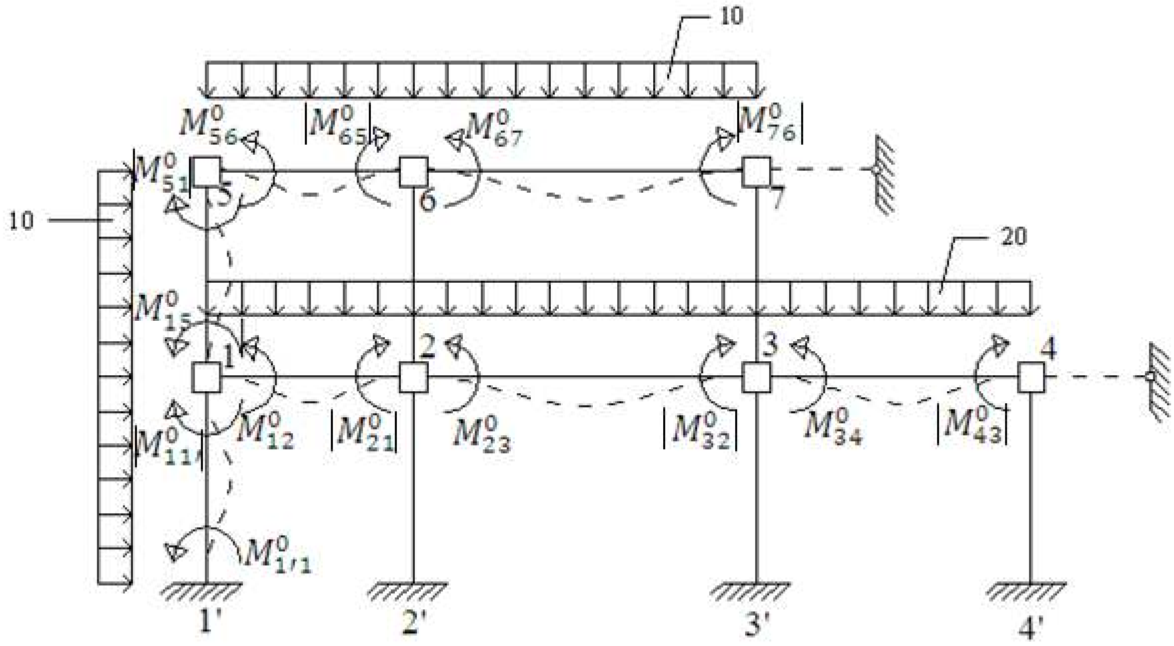
-grede

$E=3\cdot10^7$ kN/m^2 , b/h=30/60 cm

$I_G=\frac{0.3\cdot0.6^3}{12}=0.0054$ m^4

$E\cdot I_G=3\cdot10^7\cdot\frac{0.3\cdot0.6^3}{12}=162\,250$ kNm^2

-pridržani sistem :



-momenti upetosti :

$M^0_{1'1} = M^0_{15} = M^0_{56} = \frac{10 \cdot 3^2}{12} = 7.5$ kNm

$M^0_{11'} = M^0_{51} = M^0_{65} = \frac{10 \cdot 3^2}{12} = -7.5$ kNm

$M^0_{12} = \frac{20 \cdot 3^2}{12} = 15$ kNm

$M^0_{21} = -\frac{20 \cdot 3^2}{12} = -15$ kNm

$M^0_{23} = \frac{20 \cdot 5^2}{12} = 41.67$ kNm

$M^0_{32} = -\frac{20 \cdot 5^2}{12} = -41.67$ kNm

$M^0_{34} = \frac{20 \cdot 4^2}{12} = 26.67$ kNm

$M^0_{43} = -\frac{20 \cdot 4^2}{12} = -26.67$ kNm

$M^0_{67} = \frac{10 \cdot 5^2}{12} = 20.83$ kNm

$M^0_{76} = -\frac{10 \cdot 5^2}{12} = -20.83$ kNm

$$\frac{I_{11'}}{l_{11'}} = \frac{I_{22'}}{l_{22'}} = \frac{I_{33'}}{l_{33'}} = \frac{I_{44'}}{l_{44'}} = \frac{I_{15}}{l_{15}} = \frac{I_{26}}{l_{26}} = \frac{I_{37}}{l_{37}} = \frac{0.000675}{3} = 0.000225 \text{ m}^3$$

$$\frac{I_{12}}{l_{12}} = \frac{I_{56}}{l_{56}} = \frac{0.0054}{3} = 0.0018 \text{ m}^3$$

$$\frac{I_{23}}{l_{23}} = \frac{I_{67}}{l_{67}} = \frac{I_{37}}{l_{37}} = \frac{0.0054}{5} = 0.00108 \text{ m}^3$$

$$\frac{I_{34}}{l_{34}} = \frac{0.0054}{4} = 0.00135 \text{ m}^3$$

1	2	3	4	5	6
			1. APROKSIMACIJA		
štapovi	$\frac{I}{l}\cdot 10^4$ $2\sum\frac{I}{l}\cdot 10^4$	M^0 (kNm)	promjena momenta	N'	$M'_{mn} = \frac{I}{l}(2N'_{mn} + N'_{nm})$
1-1' 1-5 1-2	2.25 2.25 18 45.0	-7.5 7.5 15.0 15.0	 -7.2 7.8	 -0.17	-0.77 -0.74 -13.32 15.0 0.17
2-2' 2-6 2-1 2-3	2.25 2.25 18 10.8 66.6	0 0 -15 41.67 26.67	- - - -	 -0.40	-1.8 -2.25 -17.46 -7.13 26.67 -1.97
3-3' 3-7 3-2 3-4	2.25 2.25 10.8 13.5 57.6	0 0 -41.67 26.67 -15.0	 -4.32 11.48 -7.84	 0.14	0.63 2.59 -1.30 15.26 -15.0 2.18
4-4' 4-3	2.25 13.5 31.5	0 -26.67 -26.67	- -	 0.85	3.83 24.84 -26.67 2.0
5-1 5-6	2.25 18 40.5	-7.5 7.5 0	-0.38 -0.38	 0.01	-0.34 -3.24 0 -3.58
6-2 6-5 6-7	2.25 18 10.8 62.1	0 -7.5 20.83 13.33	-0.9 0.18 12.61	 -0.20	-1.8 -7.02 5.08 13.33 9.59
7-3 7-6	2.25 10.8 26.1	0 -20.83 -20.83	0.32 -2.16 -22.67	 0.87	4.23 16.63 -20.83 0.03

7	8	9	10
2. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	ΔN'	N''=N'+ΔN'	$M''_{mn} = \frac{I}{l}(2N''_{mn} + N''_{nm})$
0.540 0.710	-0.016	-0.186	-0.837 -0.614 -13.356 15.0 0.193
- - - -	0.030	-0.370	-1.665 -2.522 -16.668 -6.793 26.67 -0.978
0.324 -0.851 1.653	-0.029	0.111	0.500 2.628 -1.598 13.622 -15.0 0.152
- -	-0.063	0.787	3.542 22.748 -26.67 -0.380
-0.036 -3.616	0.089	0.099	0.027 -3.294 0 -3.267
0.068 1.602 11.260	-0.181	-0.381	-2.547 -11.934 1.987 13.330 0.836
-0.065 -1.955 -1.990	0.076	0.946	4.507 16.319 -20.83 -0.004

11	12	13	14
3. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	ΔN''	N'''=N''+ΔN''	$M'''_{mn} = \frac{I}{l}(2N'''_{mn} + N'''_{nm})$
0.270 0.463	-0.010	-0.196	-0.882 -0.477 -13.446 15.0 0.195
- - - -	0.015	-0.355	-1.598 -2.538 -16.308 -6.556 26.67 -0.330
0.162 0.162 0.476	-0.008	0.103	0.464 2.628 -1.609 13.568 -15.0 0.051
- -	0.012	0.799	3.596 22.964 -26.67 -0.110
-0.023 -3.29	0.081	0.180	0.369 -1.044 0 -0.675
0.034 1.458 2.328	-0.037	-0.418	-2.680 -11.808 1.361 13.33 0.203
-0.018 -0.400 -0.422	0.016	0.962	4.561 16.265 -20.83 -0.004

$M_{mn} = M^0_{mn} + M'''_{mn}$

$M_{11'} = -7.5 - 0.882 = -8.382$ kNm

$M_{15} = 7.023$ kNm

$M_{12} = 1.554$ kNm

$M_{22'} = -1.598$ kNm

$M_{26} = -2.538$ kNm

$M_{21} = -31.308$ kNm

$M_{23} = 35.114$ kNm

$M_{33'} = 0.464$ kNm

$M_{37} = 2.628$ kNm

$M_{32} = -43.279$ kNm

$M_{34} = 40.238$ kNm

$M_{44'} = 3.596$ kNm

$M_{43} = -3.706$ kNm

$M_{51} = -7.131$ kNm

$M_{56} = 6.456$ kNm

$M_{62} = -2.680$ kNm

$M_{65} = -19.308$ kNm

$M_{67} = 22.191$ kNm

$M_{73} = 4.561$ kNm

$M_{76} = -4.565$ kNm

-ležajni momenti :

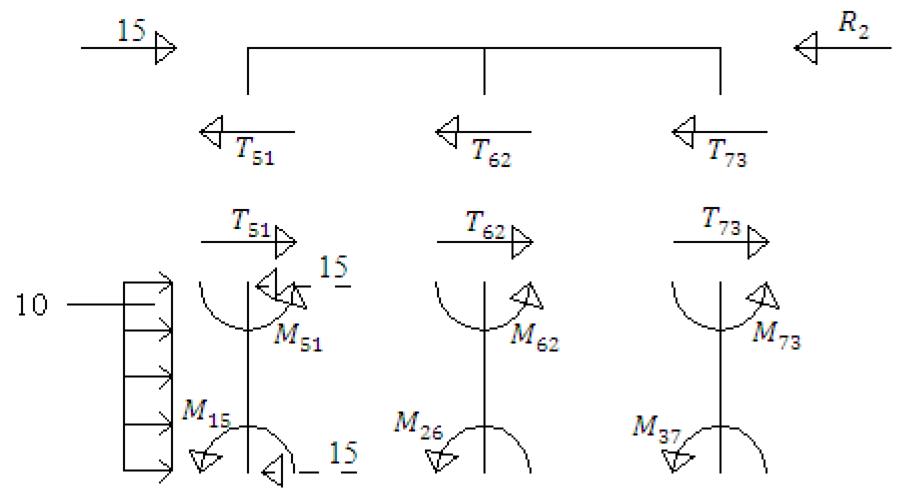
$M_{1'1} = M_{1'1}^{0} + \frac{I_{1'1}}{l_{1'1}} \cdot N_{1'1}'''$

$M_{1'1} = 7.5 + 2.25 \cdot (-0.196) = 7.059$ kNm

$M_{2'2} = 0 + 2.25 \cdot (-0.355) = -0.789$ kNm

$M_{3'3} = 0 + 2.25 \cdot 0.103 = 0.232$ kNm

$M_{4'4} = 0 + 2.25 \cdot 0.799 = 1.798$ kNm



$T_{ij} = \frac{M_{ij}+M_{ji}}{3}$

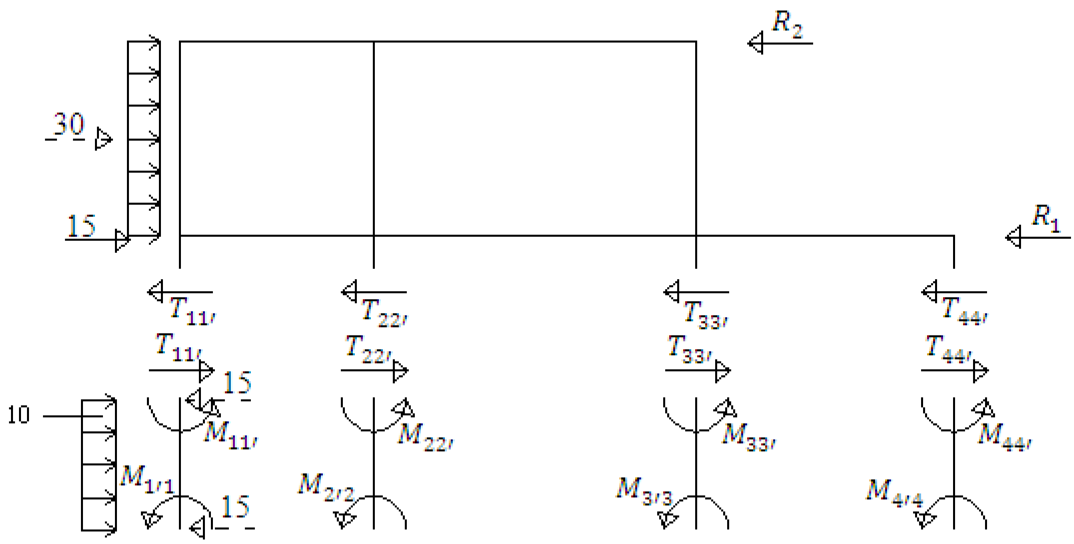
$T_{51} = -0.036\text{kN}$

$T_{62} = -1.739\text{kN}$

$T_{73} = 2.396 \text{ kN}$

$R_2 = -(T_{51} + T_{62} + T_{73}) + 15$

$R_2 = 14.379 \text{ kN}$



$T_{ij} = \frac{M_{ij}+M_{ji}}{3}$

$T_{11'} = -0.441 \text{ kN}$

$T_{22'} = -0.799 \text{ kN}$

$T_{33'} = 0.232 \text{ kN}$

$T_{44'} = 1.798 \text{ kN}$

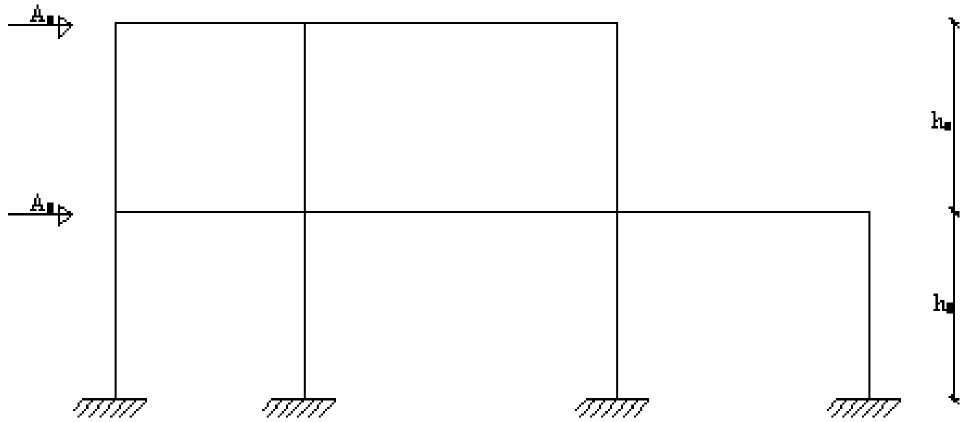
$R_1 = -(R_2 + T_{11'} + T_{22'} + T_{33'} + T_{44'}) + 15 + 30$

$R_1 = 29.831 \text{ kN}$

-zamjenjujuće horizontalne sile u ravnini greda → protusmjerne silama u pridržanjima :

$\overrightarrow{A_1} = -\overrightarrow{R_1} \quad \rightarrow \quad A_1 = 29.831$ kN

$\overrightarrow{A_2} = -\overrightarrow{R_2} \quad \rightarrow \quad A_2 = 14.379$ kN



-pretpostavka apsolutno krutih greda

-odgovarajući kutovi zaokreta stupova etaže :

$\Psi_1 = -\frac{1}{12\sum_{(i,j)\in 1} k_{ij}} \cdot h_1 \cdot \sum_{e\geq 1} A_e$

$\sum_{(ij)\in 1} k_{ij} = k_{11'} + k_{22'} + k_{33'} + k_{44'} = 4 \cdot \frac{EI_S}{h_1} = 4 \cdot \frac{20250}{3} = 27\ 000$ kNm

$\sum_{e\geq 1} A_e = A_1 + A_2 = 44.21$ kN

$\Psi_1 = -\frac{1}{12 \cdot 27000} \cdot 3 \cdot 44.21 = -0.000409351$

$\Psi_2 = -\frac{1}{12\sum_{(i,j)\in 2} k_{ij}} \cdot h_2 \cdot \sum_{e\geq 2} A_e$

$\sum_{(ij)\in 2} k_{ij} = k_{15} + k_{26} + k_{37} = 3 \cdot \frac{EI_S}{h_2} = 3 \cdot \frac{20250}{3} = 20\ 250$ kNm

$\sum_{e\geq 2} A_e = A_2 = 14.39$ kN

$\Psi_1 = -\frac{1}{12 \cdot 20250} \cdot 3 \cdot 14.379 = -0.000177518$

-momenti upetosti stupova uslijed kutova Ψ_1 i Ψ_2

ETAŽA 1 :

$\overline{M_{11'}} = \overline{M_{1'1}} = \overline{M_{22'}} = \overline{M_{2'2}} = \overline{M_{33'}} = \overline{M_{3'3}} = \overline{M_{44'}} = \overline{M_{4'4}} = -6 \cdot \frac{EI_S}{h_1} \cdot \Psi_1$

$= -6 \cdot \frac{20250}{3} \cdot (-0.000409351) = 16.579$ kNm

ETAŽA 2 :

$$\overline{M_{15}} = \overline{M_{51}} = \overline{M_{26}} = \overline{M_{62}} = \overline{M_{37}} = \overline{M_{73}} = -6 \cdot \frac{EI_S}{h_2} \cdot \Psi_2$$

$$= -6 \cdot \frac{20250}{3} \cdot (-0.000177518) = 7.189 \text{ kNm}$$

1	2	3	4	5	6
štapovi	$\frac{I}{l} \cdot 10^4$ $2\sum \frac{I}{l} \cdot 10^4$	$\overline{M}$ (kNm)	1. APROKSIMACIJA		
			promjena momenta	N'	$\widetilde{M}'_{mn} = \frac{I}{l}(2N'_{mn} + N'_{nm})$
1-1' 1-5 1-2	2.25 2.25 18 45.0	16.579 7.189 0 23.768	 -6.426 17.342	-0.385	-1.733 -2.084 -20.286 23.768 -0.335
2-2' 2-6 2-1 2-3	2.25 2.25 18 10.8 66.6	16.579 7.189 0 0 23.768	- - - -	-0.357	-1.607 -1.737 -19.782 -10.109 23.768 -9.467
3-3' 3-7 3-2 3-4	2.25 2.25 10.8 13.5 57.6	16.579 7.189 0 0 23.768	 -3.856 -7.101 12.811	-0.222	-0.999 -1.521 -8.651 -13.095 23.768 -0.498
4-4' 4-3	2.25 13.5 31.5	16.579 0 16.579	- -	-0.526	-2.367 -17.199 16.579 -2.987
5-1 5-6	2.25 18 40.5	7.189 0 7.189	-0.866 6.323	-0.156	-1.568 -6.660 7.189 -1.039
6-2 6-5 6-7	2.25 18 10.8 62.1	7.189 0 0 7.189	-0.803 -2.808 3.578	-0.058	-1.064 -4.896 -3.758 7.189 -2.529
7-3 7-6	2.25 10.8 26.1	7.189 0 7.189	-0.500 -0.626 6.063	-0.232	-1.544 -5.638 7.189 0.007

7	8	9	10
2. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	ΔN'	N''=N'+ΔN'	$\widetilde{M}''_{mn} = \frac{I}{l}(2N''_{mn} + N''_{nm})$
2.556 2.221	-0.049	-0.434	-1.953 -2.241 -19.494 23.768 0.080
- - - -	0.142	-0.215	-0.968 -1.037 -15.552 -7.477 23.768 -1.266
1.534 1.283 2.319	-0.040	-0.262	-1.179 -1.719 -7.981 -12.893 23.768 -0.004
- -	0.095	-0.431	-1.940 -15.174 16.579 -0.535
-0.110 -1.149	0.028	-0.128	-1.553 -5.166 7.189 0.470
0.320 0.504 -1.705	0.027	-0.031	-0.623 -3.420 -3.262 7.189 -0.116
-0.090 0.292 0.209	-0.008	-0.240	-1.670 -5.519 7.189 0.000

11	12	13	14
3. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	ΔN''	N'''=N''+ΔN''	$\widetilde{M}'''_{mn} = \frac{I}{l}(2N'''_{mn} + N'''_{nm})$
0.342 0.422	-0.009	-0.443	-1.994 -2.306 -19.476 23.768 -0.008
- - - -	0.019	-0.196	-0.882 -0.943 -15.030 -7.139 23.768 -0.226
0.205 0.230 0.431	-0.007	-0.269	-1.211 -1.807 -7.927 -12.852 23.768 -0.029
- -	0.017	-0.414	-1.863 -14.810 16.579 -0.094
-0.020 0.450	-0.011	-0.139	-1.622 -5.490 7.189 0.077
0.043 -0.198 -0.271	0.004	-0.027	-0.563 -3.474 -3.445 7.189 -0.293
-0.016 0.043 0.027	-0.001	-0.265	-1.798 -6.016 7.189 -0.625

$\widetilde{M}_{mn} = \overline{M}_{mn} + \widetilde{M}'''_{mn}$

$\widetilde{M}_{11'} = 16.579 - 1.994 = 14.585$ kNm

$\widetilde{M}_{15} = 4.883$ kNm

$\widetilde{M}_{12} = -19.476$ kNm

$\widetilde{M}_{22'} = 15.697$ kNm

$\widetilde{M}_{26} = 6.246$ kNm

$\widetilde{M}_{21} = -15.030$ kNm

$\widetilde{M}_{23} = -7.139$ kNm

$\widetilde{M}_{33'} = 15.368$ kNm

$\widetilde{M}_{37} = 5.382$ kNm

$\widetilde{M}_{32} = -7.927$ kNm

$\widetilde{M}_{34} = -12.852$ kNm

$\widetilde{M}_{44'} = 14.716$ kNm

$\widetilde{M}_{43} = -14.810$ kNm

$\widetilde{M}_{51} = 5.567$ kNm

$\widetilde{M}_{56} = -5.490$ kNm

$\widetilde{M}_{62} = 6.626$ kNm

$\widetilde{M}_{65} = -3.474$ kNm

$\widetilde{M}_{67} = -3.445$ kNm

$\widetilde{M}_{73} = 5.391$ kNm

$\widetilde{M}_{76} = -6.016$ kNm

-ležajni momenti :

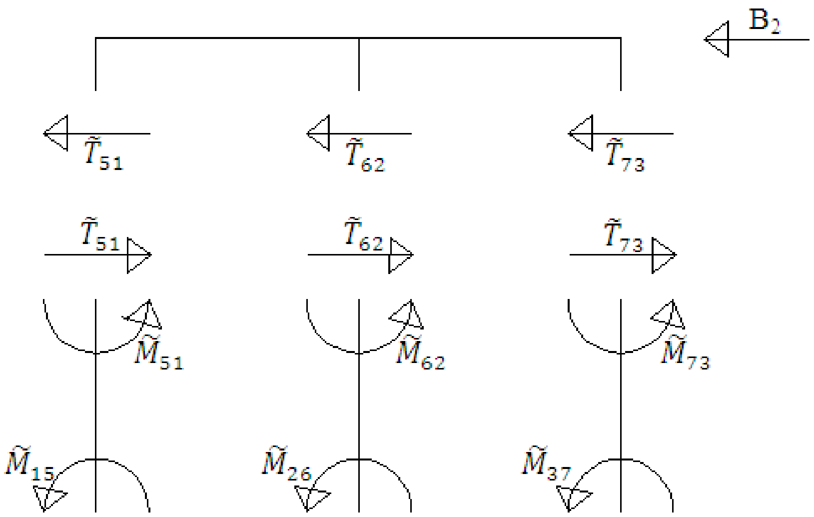
$\widetilde{M}_{1'1} = \overline{M}_{1'1} + \frac{I_{1'1}}{l_{1'1}} \cdot N'''_{1'1}$

$\widetilde{M}_{1'1} = 16.579 + 2.25 \cdot (-0.443) = 15.582$ kNm

$\widetilde{M}_{2'2} = 16.579 + 2.25 \cdot (-0.196) = 16.138$ kNm

$\widetilde{M}_{3'3} = 16.579 + 2.25 \cdot (-0.269) = 15.974$ kNm

$\widetilde{M}_{4'4} = 16.579 + 2.25 \cdot (-0.414) = 15.648$ kNm



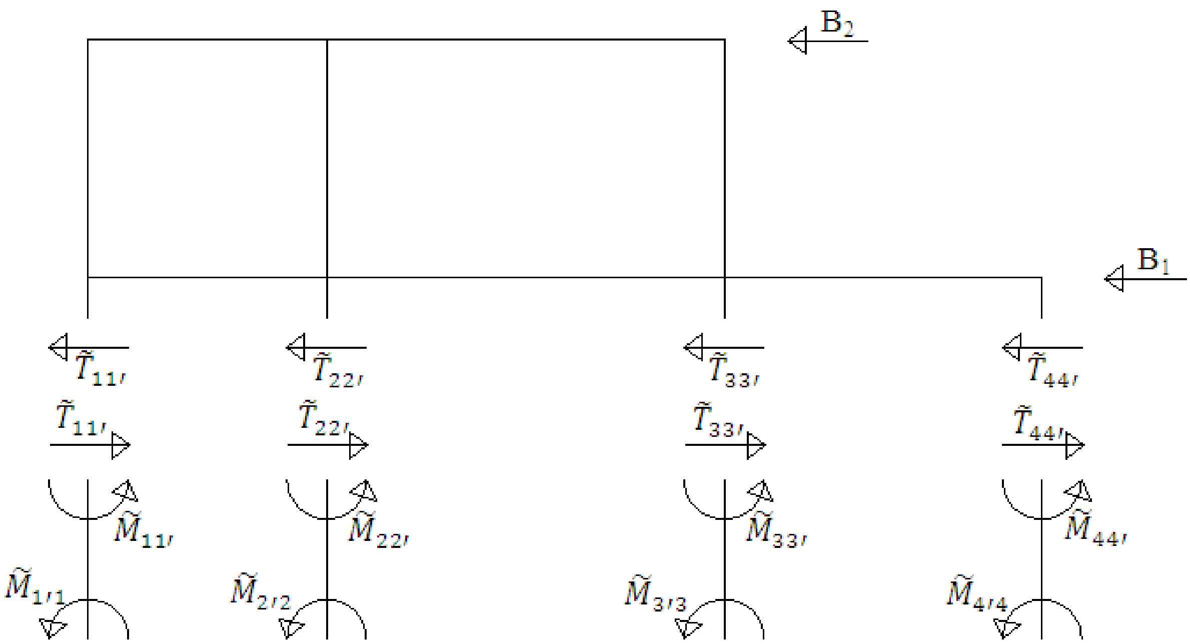
$\tilde{T}_{ij} = \frac{\tilde{M}_{ij}+\tilde{M}_{ji}}{3}$

$\tilde{T}_{51} = 3.483$ kN

$\tilde{T}_{62} = 4.291$ kN

$\tilde{T}_{73} = 3.591$ kN

$B_2 = -(\tilde{T}_{51} + \tilde{T}_{62} + \tilde{T}_{73}) = -11.365$ kN



$\tilde{T}_{ij} = \frac{\tilde{M}_{ij}+\tilde{M}_{ji}}{3}$

$\tilde{T}_{11'} = 10.056$ kN

$\tilde{T}_{22'} = 10.612$ kN

$\tilde{T}_{33'} = 10.447$ kN

$\tilde{T}_{44'} = 10.121$ kN

$B_1 = -(\tilde{T}_{11'} + \tilde{T}_{22'} + \tilde{T}_{33'} + \tilde{T}_{44'} + B_2)$

$B_1 = -29.871$ kN

-korekcijski faktor :

$$\eta = \frac{A_1 \cdot |B_1| + A_2 \cdot |B_2|}{B_1^2 + B_2^2} = \frac{29.831 \cdot 29.871 + 14.379 \cdot 11.365}{29.871^2 + 11.365^2} = 1.032$$

-konačni rezultati :

$$M_{mn}^{(k)} = M_{mn} + \widetilde{M}_{mn} \cdot \eta$$

$$M_{11'}^{(k)} = M_{11'} + \widetilde{M}_{11'} \cdot \eta = 6.670 \text{ kNm}$$

$$M_{15}^{(k)} = 12.062 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^{(k)} = -18.545 \text{ kNm}$$

$$M_{22'}^{(k)} = 14.601 \text{ kNm}$$

$$M_{26}^{(k)} = 3.908 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^{(k)} = -46.819 \text{ kNm}$$

$$M_{23}^{(k)} = 27.747 \text{ kNm}$$

$$M_{33'}^{(k)} = 16.324 \text{ kNm}$$

$$M_{37}^{(k)} = 8.182 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^{(k)} = -51.460 \text{ kNm}$$

$$M_{34}^{(k)} = 26.975 \text{ kNm}$$

$$M_{44'}^{(k)} = 18.783 \text{ kNm}$$

$$M_{43}^{(k)} = -18.990 \text{ kNm}$$

$$M_{51}^{(k)} = -1.386 \text{ kNm}$$

$$M_{56}^{(k)} = 0.790 \text{ kNm}$$

$$M_{62}^{(k)} = 4.158 \text{ kNm}$$

$M_{65}^{(k)} = -22.893$ kNm

$M_{67}^{(k)} = 18.636$ kNm

$M_{73}^{(k)} = 10.125$ kNm

$M_{76}^{(k)} = -10.774$ kNm

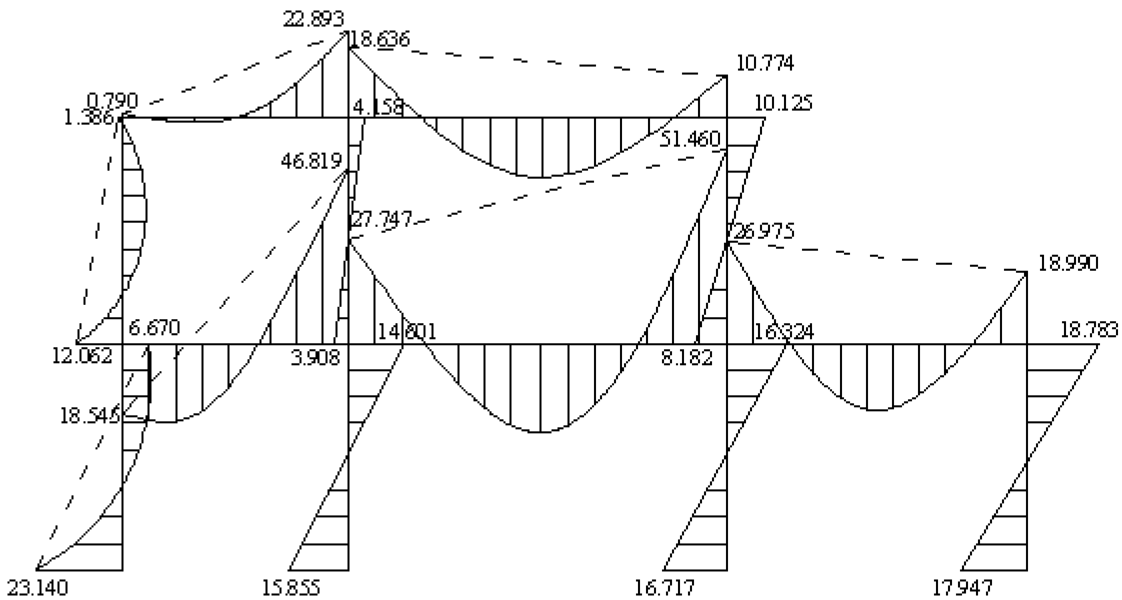
$M_{1'1}^{(k)} = 23.140$ kNm

$M_{2'2}^{(k)} = 15.855$ kNm

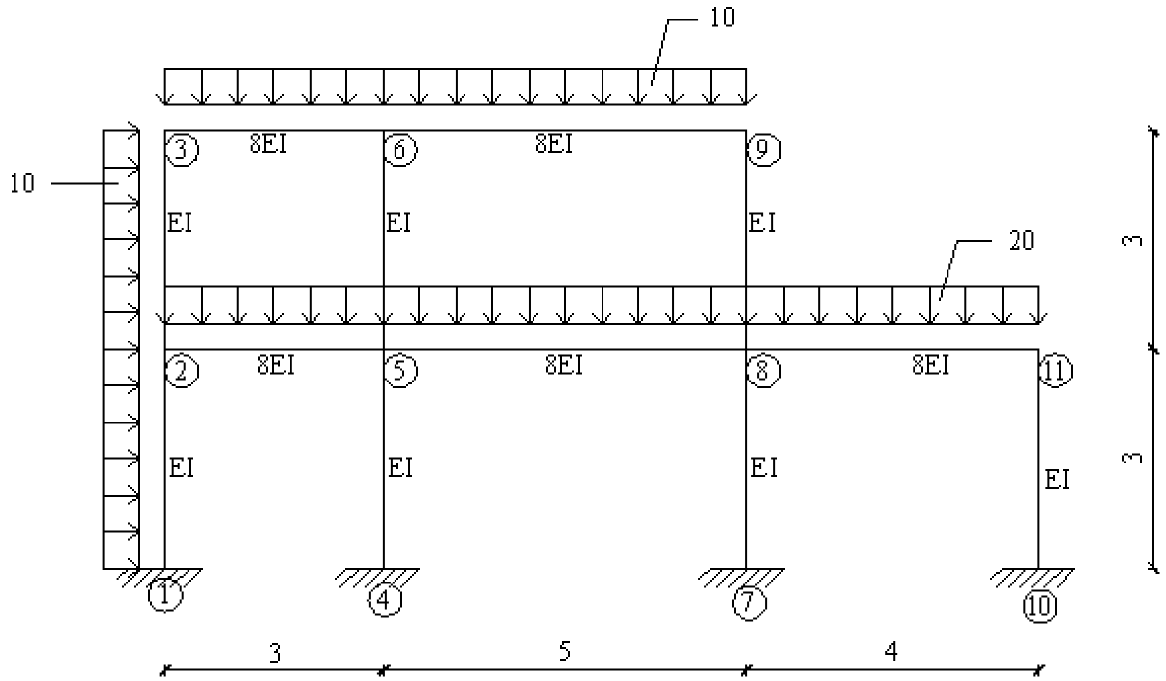
$M_{3'3}^{(k)} = 16.717$ kNm

$M_{4'4}^{(k)} = 17.947$ kNm

-M dijagram :



3.2. Crossov postupak



-stupovi 30/30 cm

-grede 30/60 cm

-E = $3 \cdot 10^7$ kN/m^2

-EI_s = 20 250 kNm^2

-EI_g = 162 000 kNm^2

$\varphi_2 = ?$, $\varphi_3 = ?$, $\varphi_5 = ?$, $\varphi_6 = ?$, $\varphi_8 = ?$, $\varphi_9 = ?$, $\varphi_{11} = ?$

-reducirane krutosti ($EI=EI_0$) :

$k^*_{12}=\frac{EI}{3EI_0}=0.33=k^*_{23} = k^*_{45} = k^*_{56} = k^*_{78} = k^*_{89} = k^*_{1011}$

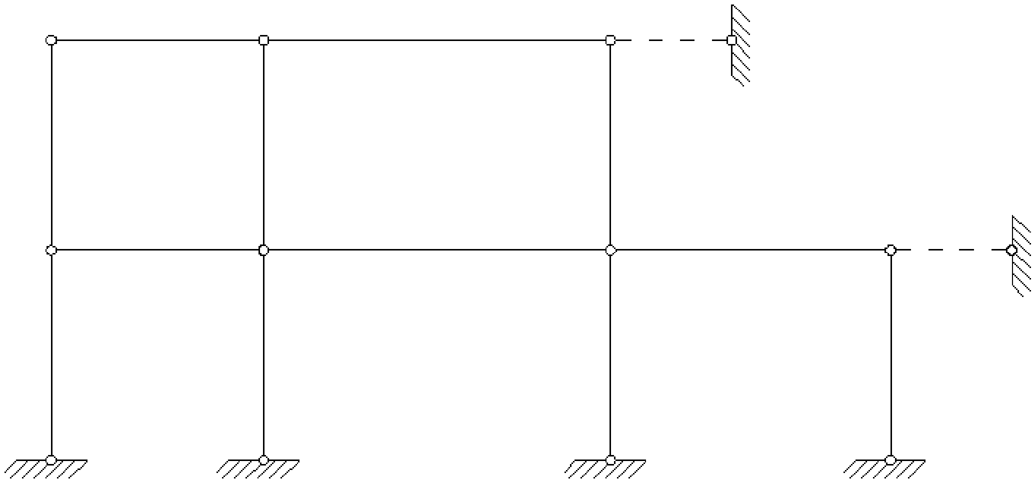
$k^*_{25}=\frac{8EI}{3EI_0}=2.67=k^*_{36}$

$k^*_{58}=\frac{8EI}{5EI_0}=1.6=k^*_{69}$

$k^*_{811}=\frac{8EI}{4EI_0}=2$

-zglobna shema

S=$3 \cdot 12 - 8 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 36 - 8 - 6 - 8 - 12 = 2$



$u_9 = ?$

$u_{11} = ?$

-razdjelni koeficijenti :

*čvor 2 $a^*_{21} = 4k^*_{12} = 1.33$ - $\mu_{21}=\frac{-1.33}{13.33}=-0.10$

$a^*_{25} = 4k^*_{25} = 10.67$ - $\mu_{25}=\frac{-10.67}{13.33}=-0.80$

$a^*_{23} = 4k^*_{23} = 1.33$ - $\mu_{23}=\frac{-1.33}{13.33}=-0.10$ $\rightarrow$ $\sum$ -1

$A_2 = 13.33$

*čvor 3 $a^*_{32} = 4k^*_{32} = 1.33$ - $\mu_{32}=\frac{-1.33}{12}=-0.11$

$a^*_{36} = 4k^*_{36} = 10.67$ - $\mu_{36}=\frac{-10.67}{12}=-0.89$ $\rightarrow$ $\sum$ -1

$A_3 = 12$

*čvor 5 $a^*_{52} = 4k^*_{52} = 10.67$ - $\mu_{52}=-0.54$

$a^*_{54} = 4k^*_{54} = 1.33$ - $\mu_{54}=-0.07$

$a^*_{58} = 4k^*_{58} = 6.4$ - $\mu_{58}=-0.32$

$a^*_{56} = 4k^*_{56} = 1.33$ - $\mu_{56}=-0.07$ $\rightarrow$ $\sum$ -1

$A_5 = 19.73$

*čvor 6 $a^*_{63} = 4k^*_{63} = 10.67$ - $\mu_{63}=-0.58$

$a^*_{65} = 4k^*_{65} = 1.33$ - $\mu_{65}=-0.07$

$a^*_{69} = 4k^*_{69} = 6.4$ - $\mu_{69}=-0.35$ $\rightarrow$ $\sum$ -1

$A_6 = 18.4$

*čvor 8 $a^*_{85} = 4k^*_{85} = 6.4$ - μ_{85}=-0.38

$a^*_{87} = 4k^*_{87} = 1.33$ - μ_{87}=-0.08

$a^*_{811} = 4k^*_{811} = 8$ - μ_{811}=-0.46

$a^*_{89} = 4k^*_{89} = 1.33$ - μ_{89}=-0.08 → $\sum$-1

$A_8 = 17.07$

*čvor 9 $a^*_{96} = 4k^*_{96} = 6.4$ - μ_{96}=-0.83

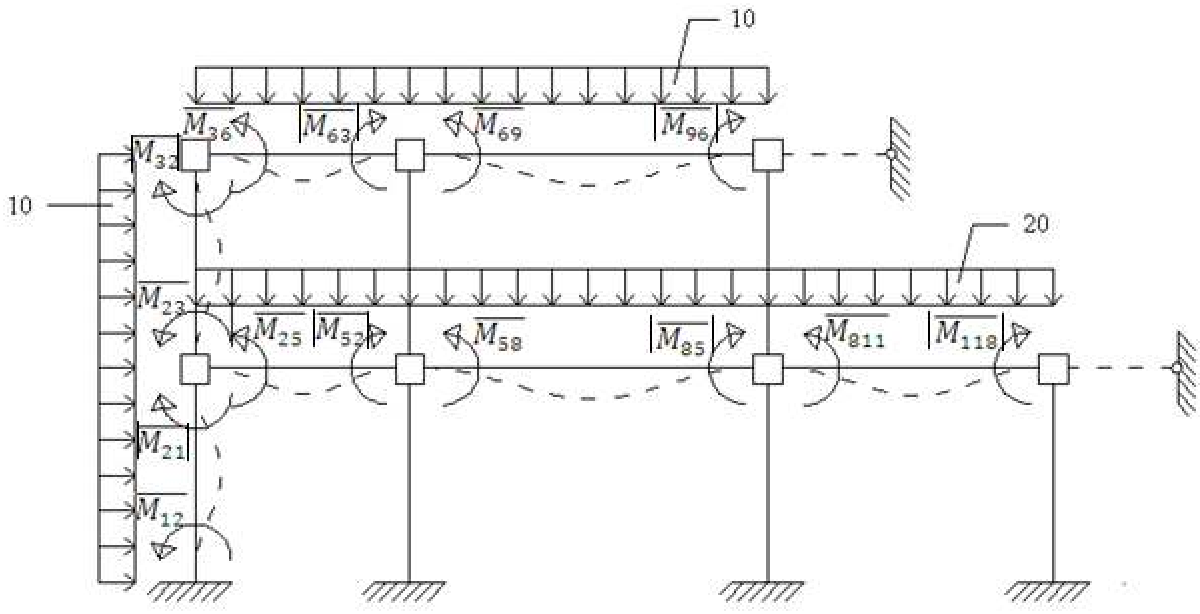
$a^*_{98} = 4k^*_{98} = 1.33$ - μ_{98}=-0.17 → $\sum$-1

$A_9 = 7.73$

*čvor 11 $a^*_{118} = 4k^*_{118} = 8$ - μ_{118}=-0.86

$a^*_{1110} = 4k^*_{1110} = 1.33$ - μ_{1110}=-0.14 → $\sum$-1

$A_3 = 9.33$



$$\overline{M_{12}} = \overline{M_{23}} = \overline{M_{36}} = \frac{10\cdot 3^2}{12} = 7.5 \text{ kNm}$$

$$\overline{M_{21}} = \overline{M_{32}} = \overline{M_{63}} = -\frac{10\cdot 3^2}{12} = -7.5 \text{ kNm}$$

$$\overline{M_{69}} = \frac{10\cdot 5^2}{12} = 20.83 \text{ kNm}$$

$$\overline{M_{96}} = -\frac{10\cdot 5^2}{12} = -20.83 \text{ kNm}$$

$\overline{M_{25}} = \frac{20 \cdot 3^2}{12} = 15 \text{ kNm}$

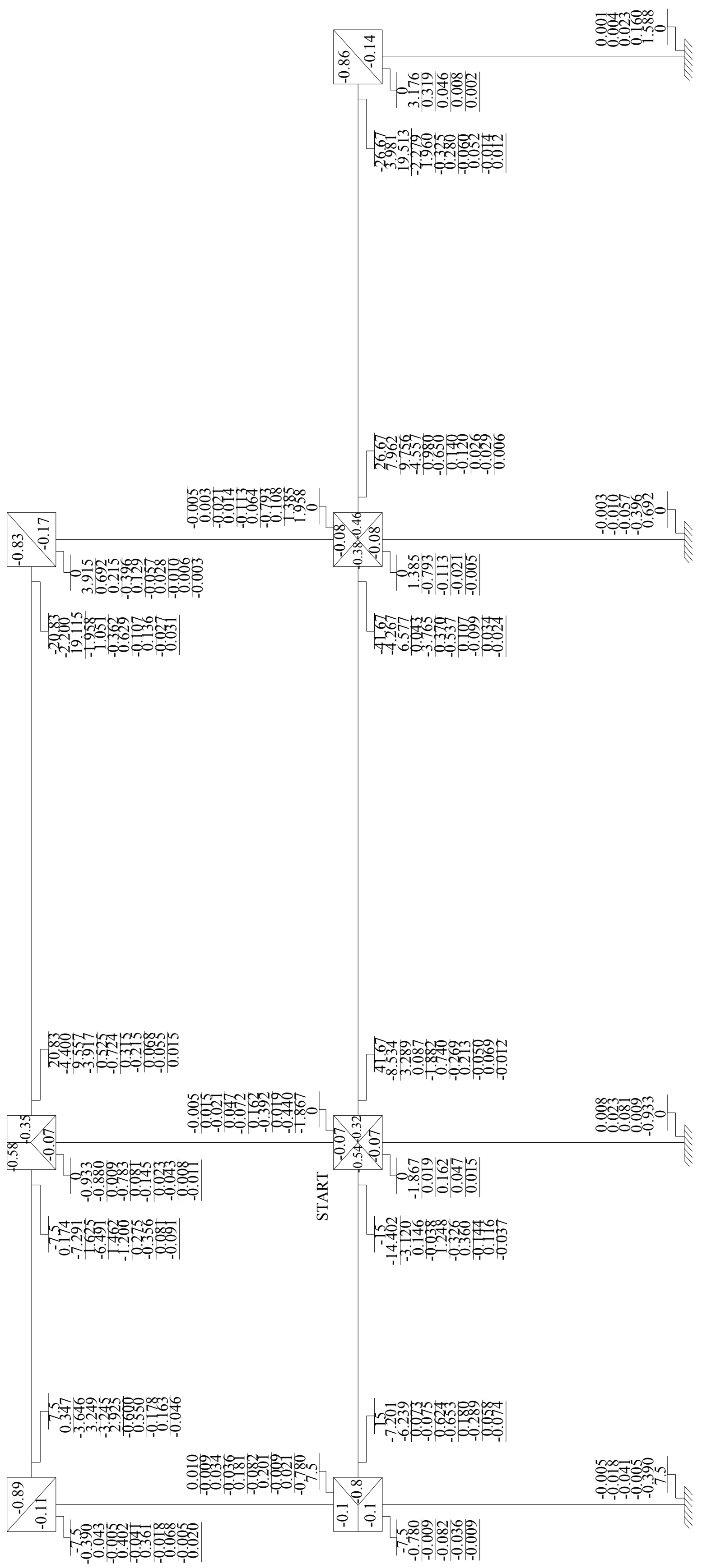
$\overline{M_{52}} = -\frac{20 \cdot 3^2}{12} = -15 \text{ kNm}$

$\overline{M_{58}} = \frac{20 \cdot 5^2}{12} = 41.67 \text{ kNm}$

$\overline{M_{85}} = -\frac{20 \cdot 5^2}{12} = -41.67 \text{ kNm}$

$\overline{M_{811}} = \frac{20 \cdot 4^2}{12} = 26.67 \text{ kNm}$

$\overline{M_{118}} = -\frac{20 \cdot 4^2}{12} = -26.67 \text{ kNm}$


START

$M_{12} = 7.041$ kNm , $M_{21} = -8.416$ kNm

$M_{23} = 7.021$ kNm , $M_{32} = -7.065$ kNm

$M_{25} = 1.404$ kNm , $M_{52} = -31.160$ kNm

$M_{36} = 7.065$ kNm , $M_{63} = -19.312$ kNm

$M_{45} = -0.812$ kNm , $M_{54} = -1.624$ kNm

$M_{58} = 35.333$ kNm , $M_{85} = -43.231$ kNm

$M_{56} = -2.549$ kNm , $M_{65} = -2.674$ kNm

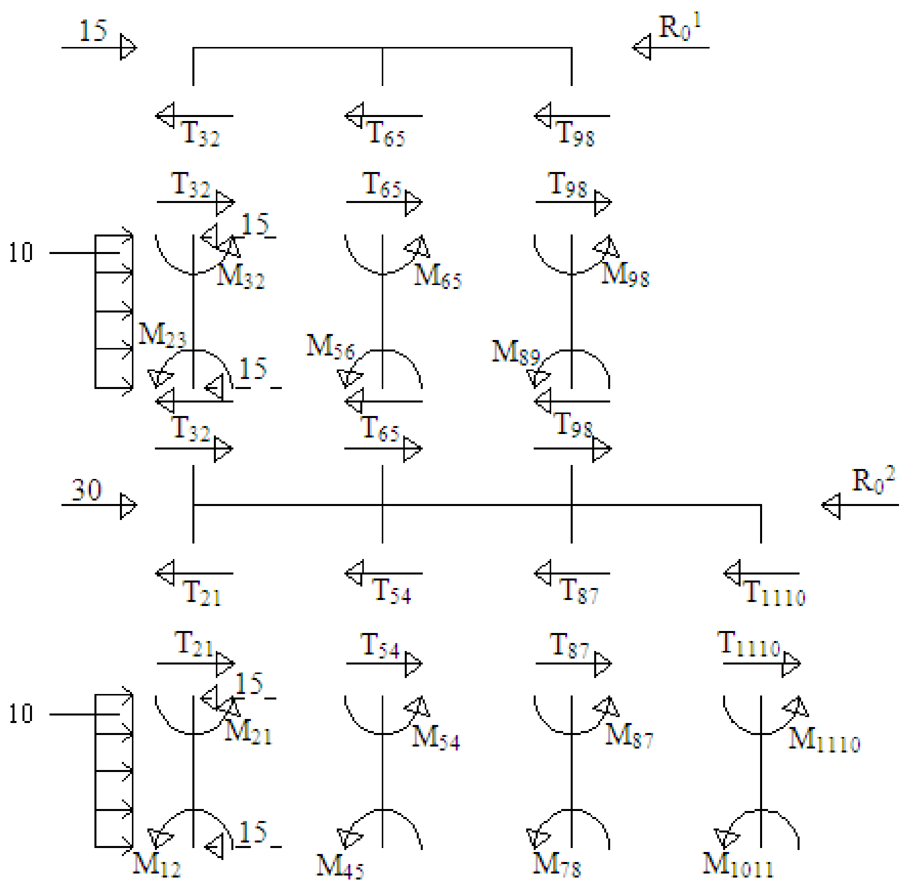
$M_{69} = 21.984$ kNm , $M_{96} = -4.522$ kNm

$M_{89} = 2.600$ kNm , $M_{98} = 4.519$ kNm

$M_{78} = 0.226$ kNm , $M_{87} = 0.453$ kNm

$M_{811} = 40.178$ kNm , $M_{118} = -3.550$ kNm

$M_{1011} = 1.776$ kNm , $M_{1110} = 3.551$ kNm



$$T_{ij} = \frac{M_{ij}+M_{ji}}{3}$$

$T_{32} = -0.015$ kN

$T_{65} = -1.741$ kN

$T_{98} = 2.373$ kN

$T_{21} = -0.458$ kN

$T_{54} = -0.812$ kN

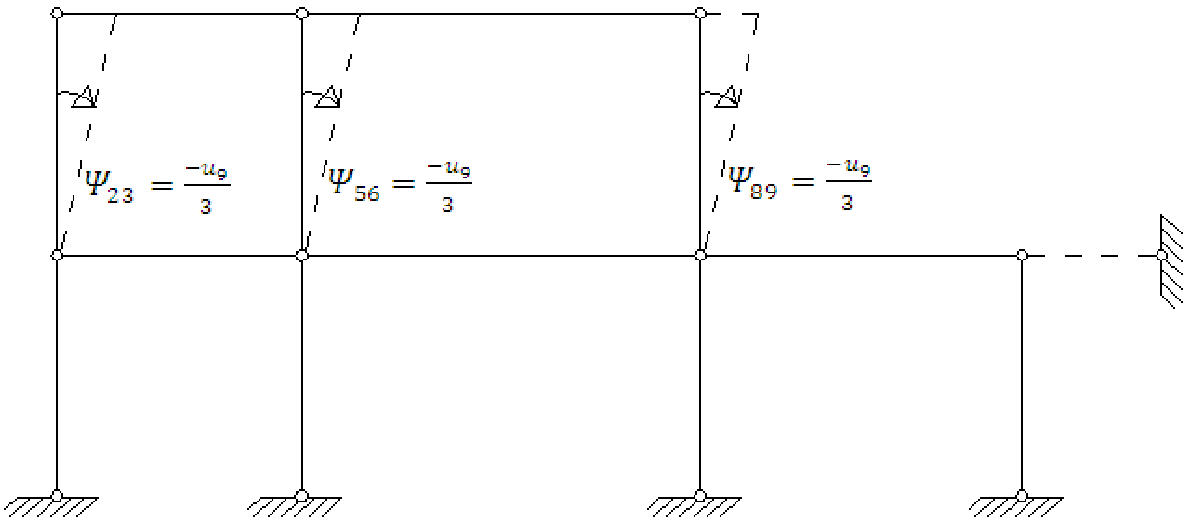
$T_{87} = 0.226$ kN

$T_{1110} = 1.776$ kN

$R_0^1 = -(T_{32} + T_{65} + T_{98}) + 15 = 14.383\ \mathrm{kN}$

$R_0^2 = T_{32} + T_{65} + T_{98} - (T_{21} + T_{54} + T_{87} + T_{1110}) + 30 = 29.885\ \mathrm{kN}$

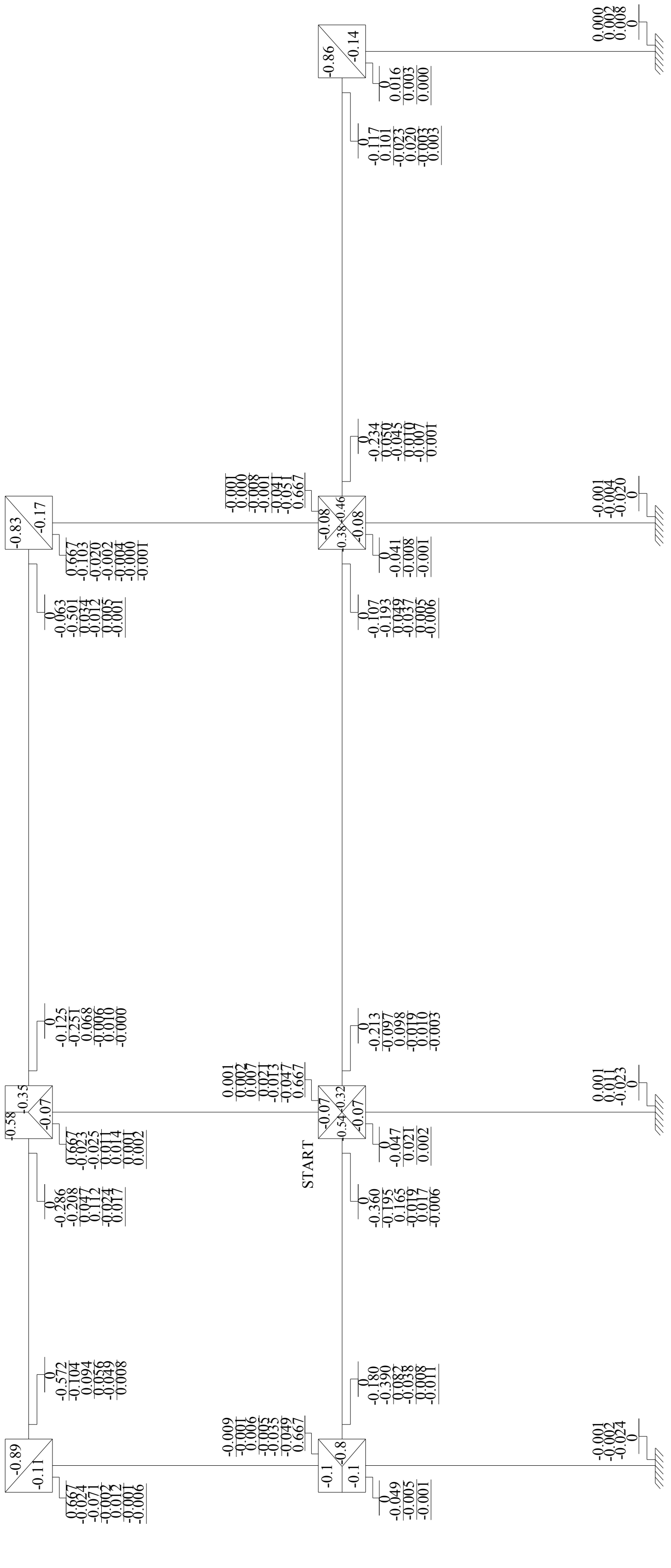
$+u_9$



$m_{23}^{u_9} = m_{32}^{u_9} = -6 \cdot k_{23} \cdot \Psi_{23} = -6 \cdot 0.33 \cdot \frac{-u_9}{3} = 0.667u_9$

$m_{56}^{u_9} = m_{65}^{u_9} = -6 \cdot k_{56} \cdot \Psi_{56} = -6 \cdot 0.33 \cdot \frac{-u_9}{3} = 0.667u_9$

$m_{89}^{u_9} = m_{98}^{u_9} = -6 \cdot k_{89} \cdot \Psi_{89} = -6 \cdot 0.33 \cdot \frac{-u_9}{3} = 0.667u_9$


START

$M_{12}^{u_9} = -0.027u_9$, $M_{21}^{u_9} = -0.055u_9$

$M_{23}^{u_9} = 0.583u_9$, $M_{32}^{u_9} = 0.575u_9$

$M_{25}^{u_9} = -0.529u_9$, $M_{52}^{u_9} = -0.392u_9$

$M_{36}^{u_9} = -0.575u_9$, $M_{63}^{u_9} = -0.342u_9$

$M_{45}^{u_9} = -0.011u_9$, $M_{54}^{u_9} = -0.024u_9$

$M_{58}^{u_9} = -0.221u_9$, $M_{85}^{u_9} = -0.289u_9$

$M_{56}^{u_9} = 0.637u_9$, $M_{65}^{u_9} = 0.647u_9$

$M_{69}^{u_9} = -0.304u_9$, $M_{96}^{u_9} = -0.538u_9$

$M_{89}^{u_9} = 0.565u_9$, $M_{98}^{u_9} = 0.538u_9$

$M_{78}^{u_9} = -0.025u_9$, $M_{87}^{u_9} = -0.050u_9$

$M_{811}^{u_9} = -0.226u_9$, $M_{118}^{u_9} = -0.019u_9$

$M_{1011}^{u_9} = 0.010u_9$, $M_{1110}^{u_9} = 0.019u_9$

$T_{ij}^{u_9} = \frac{M_{ij}^{u_9}+M_{ji}^{u_9}}{3}$

$T_{32}^{u_9} = 0.386u_9$

$T_{65}^{u_9} = 0.428u_9$

$T_{98}^{u_9} = 0.368u_9$

$T_{21}^{u_9} = -0.027u_9$

$T_{54}^{u_9} = -0.012u_9$

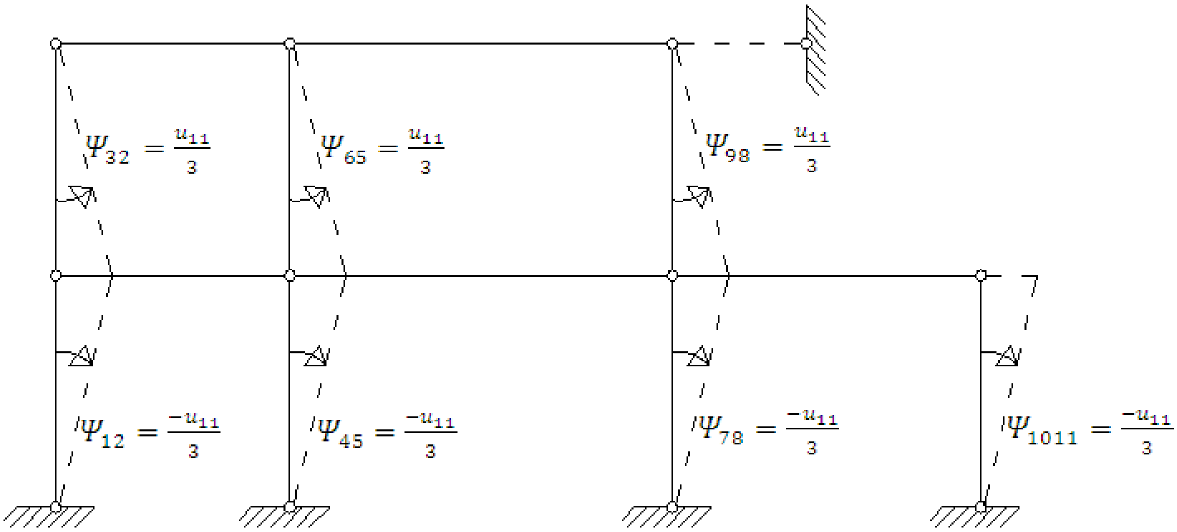
$T_{87}^{u_9} = -0.025u_9$

$T_{1110}^{u_9} = 0.010u_9$

$R_{u_9}^{1} = -(T_{32} + T_{65} + T_{98}) = -1.182u_9$

$R_{u_9}^{2} = T_{32} + T_{65} + T_{98} - (T_{21} + T_{54} + T_{87} + T_{1110}) = 1.236u_9$

$+u_{11}$

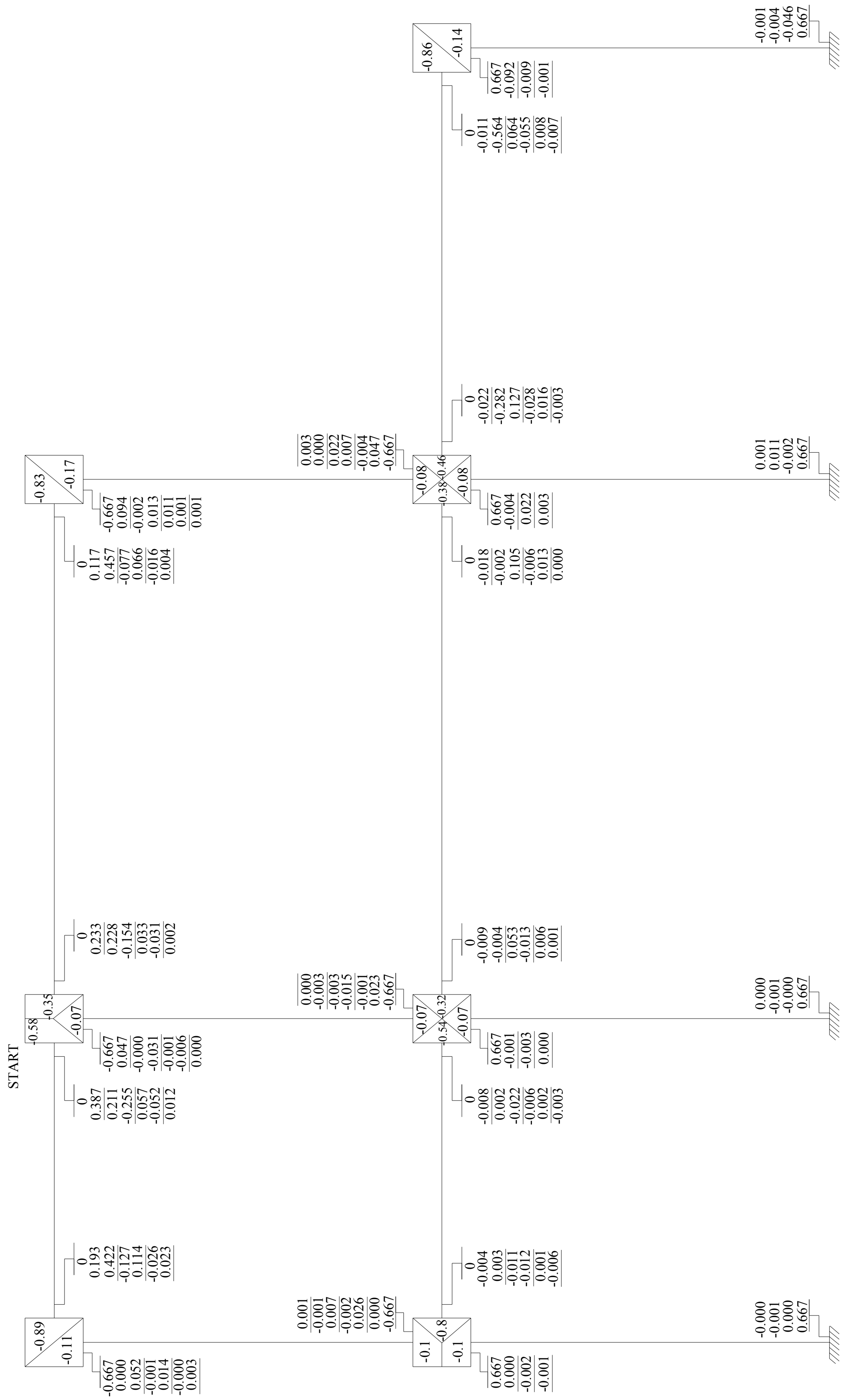


$$m_{12}^{u_{11}} = m_{21}^{u_{11}} = -6 \cdot k_{12} \cdot \Psi_{12} = -6 \cdot 0.33 \cdot \frac{-u_{11}}{3} = 0.667u_{11}$$

$$m_{45}^{u_{11}} = m_{54}^{u_{11}} = m_{78}^{u_{11}} = m_{87}^{u_{11}} = m_{1011}^{u_{11}} = m_{1110}^{u_{11}} = 0.667u_{11}$$

$$m_{32}^{u_{11}} = m_{23}^{u_{11}} = -6 \cdot k_{23} \cdot \Psi_{23} = -6 \cdot 0.33 \cdot \frac{u_{11}}{3} = -0.667u_{11}$$

$$m_{56}^{u_{11}} = m_{65}^{u_{11}} = m_{89}^{u_{11}} = m_{98}^{u_{11}} = -0.667u_{11}$$


START

$M_{12}^{u_{11}} = 0.666u_{11}$, $M_{21}^{u_{11}} = 0.664u_{11}$

$M_{23}^{u_{11}} = -0.637u_{11}$, $M_{32}^{u_{11}} = -0.599u_{11}$

$M_{25}^{u_{11}} = -0.029u_{11}$, $M_{52}^{u_{11}} = -0.032u_{11}$

$M_{36}^{u_{11}} = 0.599u_{11}$, $M_{63}^{u_{11}} = 0.348u_{11}$

$M_{45}^{u_{11}} = 0.666u_{11}$, $M_{54}^{u_{11}} = 0.663u_{11}$

$M_{58}^{u_{11}} = 0.034u_{11}$, $M_{85}^{u_{11}} = 0.092u_{11}$

$M_{56}^{u_{11}} = -0.666u_{11}$, $M_{65}^{u_{11}} = -0.658u_{11}$

$M_{69}^{u_{11}} = 0.309u_{11}$, $M_{96}^{u_{11}} = 0.551u_{11}$

$M_{89}^{u_{11}} = -0.592u_{11}$, $M_{98}^{u_{11}} = -0.550u_{11}$

$M_{78}^{u_{11}} = 0.677u_{11}$, $M_{87}^{u_{11}} = 0.688u_{11}$

$M_{811}^{u_{11}} = -0.189u_{11}$, $M_{118}^{u_{11}} = -0.565u_{11}$

$M_{1011}^{u_{11}} = 0.616u_{11}$, $M_{1110}^{u_{11}} = 0.565u_{11}$

$T_{ij}^{u_{11}} = \frac{M_{ij}^{u_{11}} + M_{ji}^{u_{11}}}{3}$

$T_{32}^{u_{11}} = -0.412u_{11}$

$T_{65}^{u_{11}} = -0.441u_{11}$

$T_{98}^{u_{11}} = -0.381u_{11}$

$T_{21}^{u_{11}} = 0.443u_{11}$

$T_{54}^{u_{11}} = 0.443u_{11}$

$T_{87}^{u_{11}} = 0.455u_{11}$

$T_{1110}^{u_{11}} = 0.394u_{11}$

$R_{u_{11}}^{1} = -(T_{32} + T_{65} + T_{98}) = 1.234u_{11}$

$R_{u_{11}}^{2} = T_{32} + T_{65} + T_{98} - (T_{21} + T_{54} + T_{87} + T_{1110}) = -2.969u_{11}$

$R_1^0 + R_1^{u_9} + R_1^{u_{11}} = 0$

$R_2^0 + R_2^{u_9} + R_2^{u_{11}} = 0$

$14.383 - 1.182u_9 + 1.234u_{11} = 0$

$29.885 + 1.236u_9 - 2.969u_{11} = 0$

$u_9 = 40.109$

$u_{11} = 26.763$

$M_{ij} = M_{ij} + M_{ij}^{u_9} + M_{ij}^{u_{11}}$

$M_{12} = 23.782$ kNm , $M_{21} = 7.149$ kNm

$M_{23} = 13.357$ kNm , $M_{32} = -0.033$ kNm

$M_{25} = -20.590$ kNm , $M_{52} = -47.739$ kNm

$M_{36} = 0.033$ kNm , $M_{63} = -23.715$ kNm

$M_{45} = 16.571$ kNm , $M_{54} = 15.157$ kNm

$M_{58} = 27.379$ kNm , $M_{85} = -52.361$ kNm

$M_{56} = 5.176$ kNm , $M_{65} = 5.667$ kNm

$M_{69} = 18.061$ kNm , $M_{96} = -11.355$ kNm

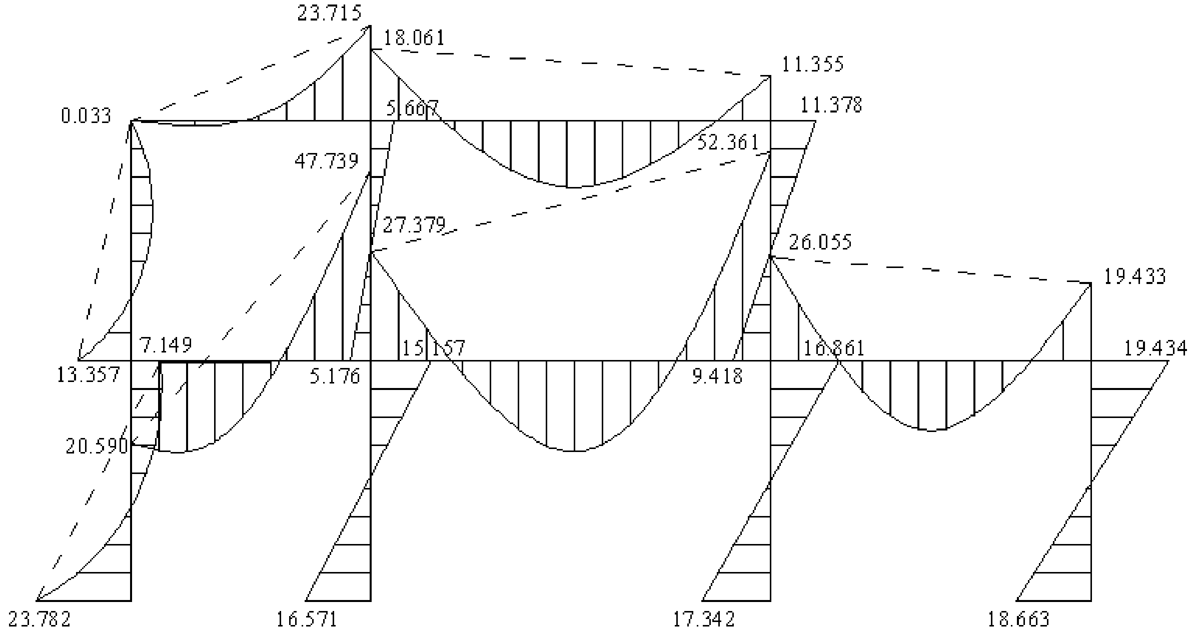
$M_{89} = 9.148$ kNm , $M_{98} = 11.378$ kNm

$M_{78} = 17.342$ kNm , $M_{87} = 16.861$ kNm

$M_{811} = 26.055$ kNm , $M_{118} = -19.433$ kNm

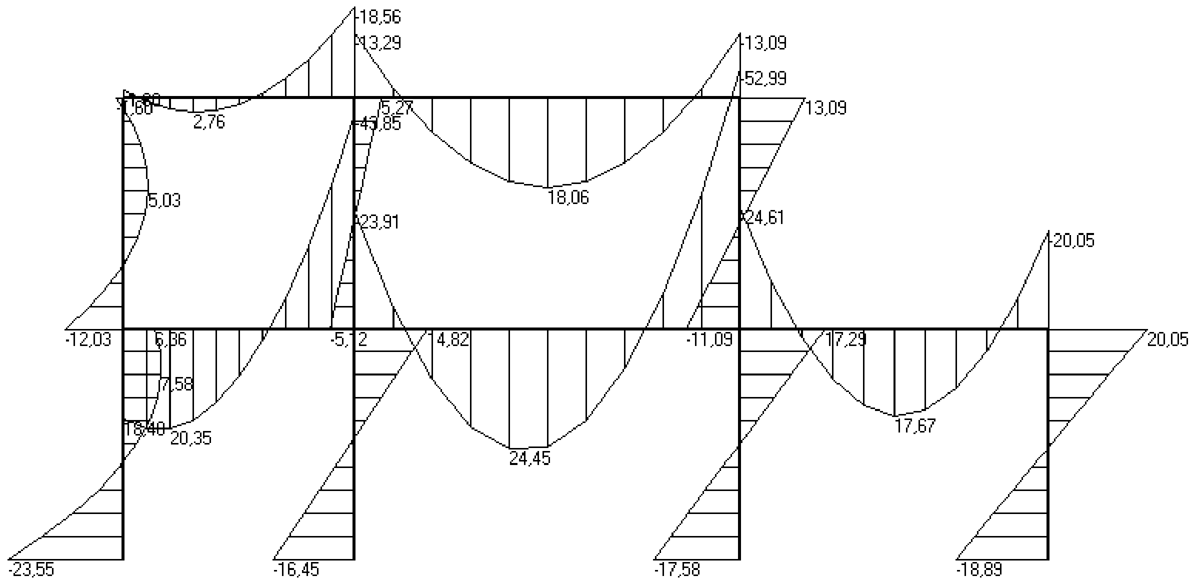
$M_{1011} = 18.663$ kNm , $M_{1110} = 19.434$ kNm

-M dijagram :


23.715
18.061
11.355
0.033
5.667
11.378
47.739
52.361
27.379
26.055
19.433
7.149
15.157
16.861
19.434
13.357
5.176
9.418
20.590
23.782
16.571
17.342
18.663

3.3 Rješenje iz programa LinPro

-M dijagram :



3. Zaključak

Nakon detaljnog opisa postupaka Čališevljeva i Crossa, dolazim do zaključka da je Cross doista usavršio i unaprijedio metodu Čališeva. Rješavajući isti primjer na oba načina, mogu zaključiti da je Čališevljev postupak dosta zamorniji i teži. Usporedimo li broj aproksimacija kod rješavanja istog zadatka na oba načina - kod Crossa sam izvršio 5 aproksimacija dok kod Čališevljeva postupka 3 - dalo bi se zaključiti da je Čališevljeva metoda upravo radi toga lakša i brža. No upravo suprotno, sama činjenica da mi je vremenski gledano za 5 aproksimacija kod Crossa trebalo manje vremena nego za 3 kod Čališeva govori u prilog tome. Drugi razlog zašto sam zaključio da je Crossova metoda jednostavnija je i preglednost rješavanja. Dok je kod Crossa sve vrlo pregledno i jasno vidljivo budući da se zadatak u biti rješava na samoj konstrukciji, kod Čališevljeva postupka sve je dosta nepregledno i mogao bih reći "ugurano" u jednu tablicu. Upravo radi toga smatram da je kod Crossa puno manja mogućnost pogreške kod rješavanja.

Usporedbom konačnih momentnih dijagrama nakon rješavanja istog zadatka pomoću obje metode, dobio sam vrlo slične rezultate s odstupanjima u pojedinim čvorovima od oko 1 kNm. Uspoređujući te rezultate s rezultatima koje sam dobio riješivši zadatak u programu LinPro na računalu, vidljivo je da su obje metode vrlo precizne, što naravno ovisi o broju aproksimacija. Što ih je više, približavamo se točnijem rješenju. Zbog toga smatram da je Crossovim postupkom lakše doći do točnijeg rješenja, jer u istom vremenskom intervalu možemo izvršiti više aproksimacija.

Literatura

- Čališev, K.: Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija, Tehnički list Udruženja jugoslavenskih inženjera i arhitekta 5, Zagreb, 1923., 17, 125-127; 18/19, 141-143; 20, 151-154; 21, 157-158
- Leonard K. Eaton, "Hardy Cross and the 'Moment Distribution Method'", Nexus Network Journal, vol. 3, no.3, 2001.
- Spomenica Tehničkom fakultetu Hrvatskog Sveučilišta u Zagrebu, urednik Prof. Ing. Stjepan Horvat, Zagreb, 1943.
- Bilješke i skice s predavanja, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, kolegij Građevna statika 2, Zagreb, 2008., www.grad.unizg.hr/nastava/gs
- www.wikipedia.org/wiki/Hardy_Cross