

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

**USPOREDBA POSTUPKA TOČNE METODE
POMAKA I INŽENJERSKE METODE POMAKA**

ZAVRŠNI RAD IZ KOLEGIJA
GRAĐEVNA STATIKA 2

Ante Vujević, 0082054497

Mentor: doc. dr. sc. Petra Gidak

Ak. God. 2018./2019.

Zagreb, 27. rujna 2019.

Uvod

Metode pomaka metode su proračuna štapnih sustava u kojima su nepoznanice orijentirane duljine translacijskih pomaka i kutovi zaokreta odabranih točaka sustava nazvanih čvorovima. Proračun nekom od metoda pomaka provodi se na osnovnom sustavu koji oblikujemo dodavanjem zamišljenih veza koje sprječavaju translacijske pomake i zaokrete čvorova. U prvome se koraku proračuna na osnovni sustav nanose zadane sile i sva ostala zadana djelovanja, poput slijeganja ležajeva i temperaturnih promjena. Polje pomaka osnovnog sustava u stanju spriječenih pomaka čvorova odgovarat će tek jednom od mogućih stanja pomaka izvornog sustava. Mogućim ili dopustivim stanjem pomaka nazivamo svako polje pomaka koje zadovoljava uvjete neprekinutosti i stvarne ležajne uvjete. To stanje, u kojem je osnovni sustav, nije, međutim stvarno stanje pomaka izvornog sustava - zamišljene veze prenose na podlogu dio sila koje djeluju na čvorove, pa bez njih čvorovi, izrežemo li ih sustava, neće biti u ravnoteži. Osnovni sustav ćemo dovesti u stvarno stanje pomaka izvornog sustava tako da stanju spriječenih pomaka čvorova pribrojimo stanje prisilnih pomaka čvorova, pri čemu ti pomaci i zaokreti moraju biti takvi da reakcije, koje se zbog njih razvijaju u zamišljenim vezama, ponište reakcije izazvane zadanim djelovanjima. Kada reakcije iščeznu, na čvorove osnovnog sustava djelovat će samo one sile koje djeluju na čvorove izvornog sustava. Budući da su u izvornom sustavu te sile u ravnoteži, bit će u ravnoteži i u osnovnom sustavu. Slijedi da uvjete iščezavanja reakcija u zamišljenim reakcijama možemo izraziti kao uvjete ravnoteže sila i momenata u čvorovima. Rješenje sustava jednadžbi ravnoteže čvorova tražene su, do tada nepoznate duljine pomaka čvorova i kutovi njihovih zaokreta.

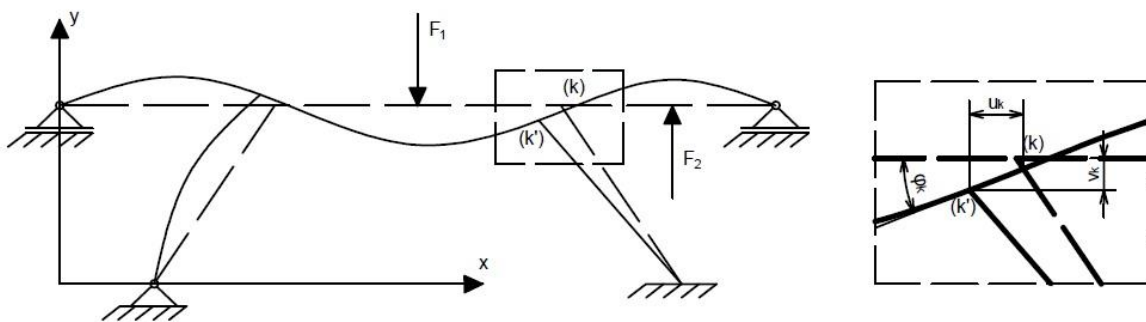
Točna metoda pomaka - opis postupka sa izvodima formula

U prekobrojnim vezama pri proračunu statički neodređenih konstrukcija kao nepoznanice uzimaju se pomaci čvorova. Unutarnje sile u štapovima funkcije su fizikalnih i geometrijskih karakteristika, opterećenja te pomaka krajeva štapova.

Projektirani oblik konstrukcije definira njezinu geometriju odnosno koordinate karakterističnih točaka (čvorova) u kojima se sastaju štapovi. Oblik ravnog štapa može biti prav ili zakrivljen i uvijek spaja dva čvora.

Nakon uklanjanja podupora, tokom građenja, konstrukcija prima na sebe vlastitu težinu i ostala opterećenja, trpi pri tome deformacije i pomiče se u položaj ravnoteže.

Vektor pomaka svake točke konstrukcije određen je s dvije komponente translacijskog pomaka i rotacijom poprečnog presjeka, u odnosu na početni položaj.



Uvode se lokalni i globalni koordinatni sustav u odnosu na koje se definira geometrija konstrukcije u projektiranom obliku i mjere pomaci nakon opterećenja. Osim geometrije u spomenutim koordinatnim sustavima definiraju se opterećenja konstrukcije.

Radi identifikacije štapova kao elemenata konstrukcije koji spajaju čvorove, svi čvorovi se označavaju brojevima. Položaj svakog štapa određen je početnim i krajnjim čvorom koje spaja, a označava se posebnim brojem.

Pri pomaku konstrukcije iz početnog u novi položaj pretpostavlja se da kutovi pod kojima se štapovi sastaju u čvoru ostaju nepromijenjeni. Iz ove pretpostavke proizlazi zaključak da svi štapovi koji su kruto spojeni u jednom čvoru imaju u njemu jednake pomake. Kod štapova koji su na čvor spojeni s jednom ili dvije veze jednakost pomaka vrijedi samo na pravcima veza.

Komponente vektora pomaka osi štapa označavaju se u globalnom sustavu velikim slovima s indeksom koji označava točku na osi štapa ili čvora:

U_i – komponenta vektora pomaka na pravcu osi X

W_i – komponenta vektora pomaka na pravcu osi Y

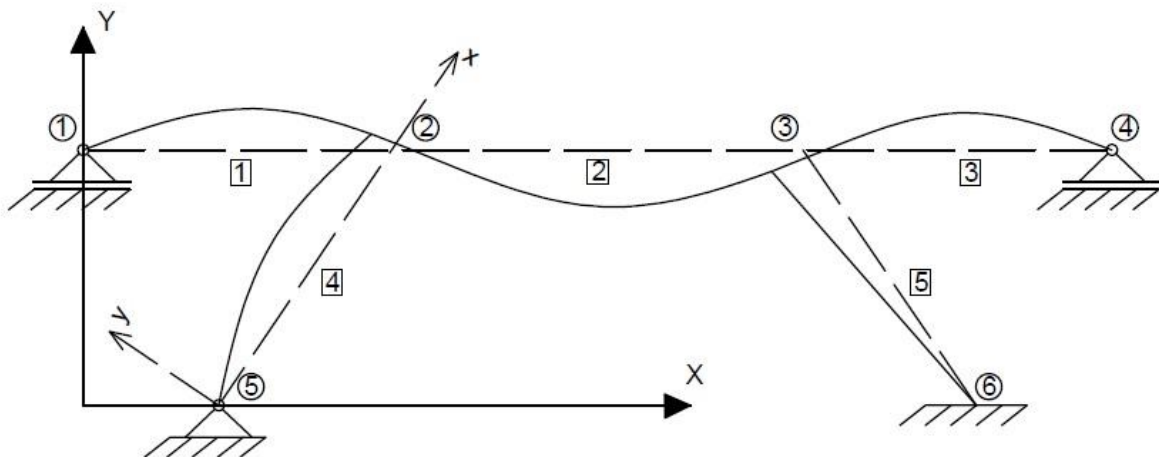
ϕ_i – zaokret poprečnog presjeka oko osi Z

U lokalnome koordinatnom sustavu pomaci krajeva štapova označavaju se malim slovima s dva indeksa. Prvi indeks označava čvor kojem pomak pripada, a drugi indeks broj drugog čvora štapa.

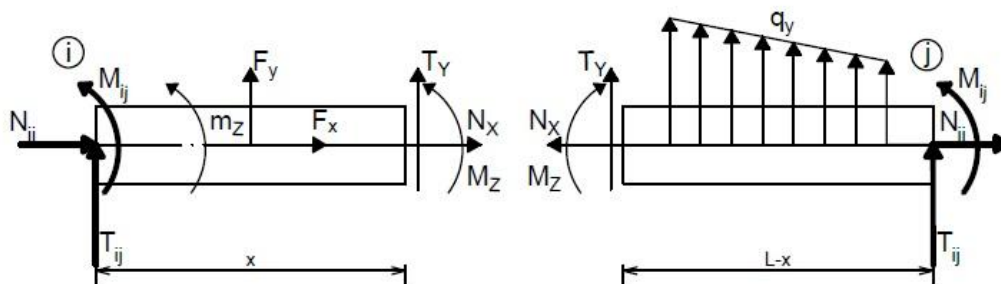
Broj nepoznatih pomaka krajeva štapova jednak je trostrukom broju neovisnih pomaka čvorova. Svi krajevi štapova koji se sastaju u jednom čvoru imaju ukupan broj nepoznanica jednak broju mogućih pomaka tog čvora.

Lokalni koordinatni sustav definiran je za jedan štap tako da se ishodište sustava nalazi u početnom čvoru, a lokalna os x prolazi kroz krajnji čvor štapa. Globalni i lokalni koordinatni sustav moraju biti ekvivalentni što znači da se poklapanje osi jednakih slovničkih oznaka može postići translacijom uz rotaciju oko osi z .

Na slici je prikazana konstrukcija u globalnome koordinatnom sustavu prije i nakon djelovanja opterećenja. Čvorovi su označeni brojevima u krugu, a štapovi brojevima u kvadratu.



Globalni koordinatni sustav služi za definiranje geometrije konstrukcije i u odnosu na njega mjere se apsolutni pomaci točaka. Ishodište i orijentacija globalnog sustava (X, Y, Z) proizvoljni su u odnosu na konstrukciju. Radi jednostavnijeg upisa podataka odabire se takav globalni sustav da se svi čvorovi nalaze u prvome kvadrantu sustava.



Pozitivni predznaci unutarnjih sila u presjeku su određeni izborom lokalnog koordinatnog sustava. Na poprečnom presjeku s pozitivnom normalom, pozitivni smjerovi unutarnjih sila se preklapaju s pozitivnim smjerovima osi lokalnog koordinatnog sustava.

Uvodi se pojam sila na krajevima štapa koje predstavljaju djelovanje čvora na kraj štapa. Predznak sila na krajevima štapa se pretpostavlja pozitivnim ako im se smjer djelovanja poklapa s pozitivnim smjerovima osi lokalnog koordinatnog sustava. Prvi indeks uz oznaku sile na kraju štapa znači broj čvora koji na taj kraj štapa djeluje, a drugi indeks označava čvor na koji je vezan drugi kraj štapa.

Vektori sila i pomaka imaju komponente u lokalnom koordinatnom sustavu x,y,z. Projekcije komponenta pomaka i sila u globalni sustav dobivaju se jednostavnom transformacijom pri rotaciji koordinatnog sustava.

Označimo li vektor pomaka krajeva štapa u globalnom sustavu s $\{\delta_{ij}\}_G$ bit će:

$$\{\delta_{ij}\}_G = [R_{ij}]^T \cdot \{\delta_{ij}\}_L \quad \text{odnosno} \quad \{\delta_{ij}\}_L = [R_{ij}] \cdot \{\delta_{ij}\}_G$$

Uvodimo pojmove matrica transformacije za lokalni koordinatni sustav $[r_{ij}]$ i matrica transformacije za globalni koordinatni sustav $[R_{ij}]$ kojoj su $[r_{ij}]$ i $[0]$ podmatrice.

Prikaz matrice transformacije za lokalni sustav i nul-matrice:

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij} & \sin\alpha_{ij} & 0 \\ -\sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prema tome matrica transformacije za globalni sustav izgleda ovako:

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} [r_{ij}] & 0 \\ 0 & [r_{ij}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij} & \sin\alpha_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{ij} & \sin\alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pridržajne sile na krajevima štapa mogu se izraziti njihovim komponentama na pravcima osi globalnog sustava:

$$\bar{F}_{ij} = (\bar{N}_{ij}, \bar{V}_{ij}, \bar{M}_{ij}, \bar{N}_{ji}, \bar{V}_{ji}, \bar{M}_{ji},)$$

$$\bar{F}_{ij} = [R_{ij}]^T \cdot \{\bar{f}_{ij}\} \quad \text{ili} \quad \{\bar{f}_{ij}\} = [R_{ij}] \cdot \bar{F}_{ij}$$

Gdje je $[R_{ij}]^T$ transponirana matrica transformacije za globalni sustav,

$$[R_{ij}]^{-1} = [R_{ij}]^T = \begin{bmatrix} [r_{ij}]^T & 0 \\ 0 & [r_{ij}]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij} & -\sin\alpha_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{ij} & -\sin\alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdje je $[r_{ij}]^T$,

$$[r_{ij}]^{-1} = [r_{ij}]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij} & -\sin\alpha_{ij} & 0 \\ \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a $\{\bar{f}_{ij}\}$ vektor pridržajnih sila za lokalni sustav sa svojim komponentama:

$$\{\bar{f}_{ij}\} = \{\bar{n}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \bar{m}_{ij}, \bar{n}_{ji}, \bar{v}_{ji}, \bar{m}_{ji}\}.$$

Uvrste li se u jednakost $\{\bar{f}_{ij}\} = [k_{ij}] \cdot \{\delta_{ij}\}_L$ prethodni izrazi za $\{\bar{f}_{ij}\}$ i $\{\delta_{ij}\}_L$, bit će:

$$[R_{ij}] \cdot \bar{F}_{ij} = [k_{ij}] \cdot [R_{ij}] \cdot \{\delta_{ij}\}_G$$

Nakon množenja sa $[R_{ij}]^T$ s lijeve strane dobiva se izraz za vektor sila u globalnome koordinatnom sustavu:

$$\bar{F}_{ij} = [R_{ij}]^T \cdot [k_{ij}] \cdot [R_{ij}] \cdot \{\delta_{ij}\}_L$$

odnosno veza sila i pomaka krajeva štapa u globalnome koordinatnom sustavu. Označi li se dio produkta desne strane sa:

$$[K_{ij}] = [R_{ij}]^T \cdot [k_{ij}] \cdot [R_{ij}]$$

$[K_{ij}]$ nazivamo globalnom matricom štapa sa čvorovima i i j.

Vektor sila na kraju štapa na pravcima globalnih osi (veza sila i pomaka krajeva štapa) jest:

$$\bar{F}_{ij} = [K_{ij}] \cdot \{\delta_{ij}\}_G$$

Globalna matrica krutosti je kao i lokalna simetrična oko glavne dijagonale i pozitivno je definitna. Elementi matrice su generalizirane sile na krajevima štapa na pravcima globalnih koordinatnih osi, uzrokovane jediničnim pomacima krajeva štapa također na pravcima globalnih osi. U primjeru zadatka je korištena gotova formula za globalnu matricu krutosti.

Iz vektorske jednadžbe za sumu djelovanja u svim čvorovima:

$$[K] \cdot \{\delta_i\} + \{\bar{F}\} = 0$$

gdje su:

$\{\delta_i\}$ - nepoznati vektor svih pomaka za globalni koordinatni sustav

$[K]$ - ukupna matrica krutosti za cijeli sustav dobivena zbrajanjem elemenata matrica krutosti za globalni sustav za početni čvor štapa.

kao objašnjenje uzet je primjer riješenog zadatka gdje će matrice krutosti za globalni sustav biti prikazane u sljedećem obliku,

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} [K_{12}]_{LG} & [K_{12}]_{DG} \\ [K_{12}]_{LD} & [K_{12}]_{DD} \end{bmatrix} \quad [K_{23}] = \begin{bmatrix} [K_{23}]_{LG} & [K_{23}]_{DG} \\ [K_{23}]_{LD} & [K_{23}]_{DD} \end{bmatrix} \quad [K_{34}] = \begin{bmatrix} [K_{34}]_{LG} & [K_{34}]_{DG} \\ [K_{34}]_{LD} & [K_{34}]_{DD} \end{bmatrix}$$

Podmatrice $[K_{ij}]_{LG,DG,LD,DD}$ su matrice sustava jednadžbi 3x3 i njih uvrštavamo u ukupnu matricu krutosti za cijeli sustav K, slijedi:

$$[K] = [7 \times 7] = \begin{bmatrix} [K_{12}]_{DD} + [K_{23}]_{LG} & [K_{23}]_{DG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K_{23}]_{LD} & [K_{23}]_{DD} + [K_{34}]_{LG} & (k_{61})_{34} & (k_{62})_{34} & (k_{63})_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_{16})_{34} & (k_{26})_{34} & (k_{36})_{34} & (k_{66})_{34} \end{bmatrix}$$

Pošto su $u_{43}=0$, $v_{43}=0$ u matrici krutosti $[K_{34}]$ nas zanimaju samo komponente 6. reda i 6. stupca prikazane u 3. stupcu i 3. redu, odnosno 7. stupcu i 7. redu matrice $[K]$.

$\{\bar{F}\}$ - ukupni vektor pridržajnih sila za cijeli sustav dobiven zbrajanjem komponenta pridržajnih sila za globalni sustav za početni čvor štapa.

kao objašnjenje uzet je primjer riješenog zadatka gdje ćemo vektore pridržajnih sila za globalni sustav prikazati u sljedećem obliku,

$$\{\bar{F}_{12}\} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{12} \\ \bar{V}_{12} \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{H}_{21} \\ \bar{V}_{21} \\ \bar{M}_{21} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{F}_{23}\} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{23} \\ \bar{V}_{23} \\ \bar{M}_{23} \\ \bar{H}_{32} \\ \bar{V}_{32} \\ \bar{M}_{32} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{F}_{34}\} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{34} \\ \bar{V}_{34} \\ \bar{M}_{34} \\ \bar{H}_{43} = 0 \\ \bar{V}_{43} = 0 \\ \bar{M}_{43} \end{Bmatrix}$$

U čvoru 4 nema vertikalnih ni horizontalnih pomaka pa su pridržajne sile u njemu jednake nuli.

Slijedi izraz za ukupni vektor pridrđajnih sila za cijeli sustav dobiven zbrajanjem komponentata pridrđajnih sila za globalni sustav za početni čvor štapa,

$$\{\bar{F}\} = \begin{pmatrix} \bar{H}_{21} + \bar{H}_{23} \\ \bar{V}_{21} + \bar{V}_{23} \\ \bar{M}_{21} + \bar{M}_{23} \\ \bar{H}_{32} + \bar{H}_{34} \\ \bar{V}_{32} + \bar{V}_{34} \\ \bar{M}_{32} + \bar{M}_{34} \\ \bar{M}_{43} \end{pmatrix}$$

Rješavanjem sustava sa n jednađbi i n nepoznanica dobiva se vektor svih pomaka za globalni koordinatni sustav $\{\delta_i\}$.

Potrebno je još odrediti dijagrame unutarnjih sila. Iz sada poznatih pomaka za globalni koordinatni sustav određuju se globalni vektori pomaka za svaki element sustava,

$$\{\delta_{ij}\}_G = \begin{pmatrix} U_{ij} \\ W_{ij} \\ \phi_{ij} \\ U_{ij} \\ W_{ij} \\ \phi_{ij} \end{pmatrix}$$

Zatim se određuju vektori pomaka u lokalnom sustavu preko matrice transformacije,

$$\{\delta_{ij}\}_L = [R_{ij}] \cdot \{\delta_{ij}\}_G$$

$$\begin{pmatrix} u_{ij} \\ w_{ij} \\ \varphi_{ij} \\ u_{ij} \\ w_{ij} \\ \varphi_{ij} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [r_{ij}] & 0 \\ 0 & [r_{ij}] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{ij} \\ W_{ij} \\ \phi_{ij} \\ U_{ij} \\ W_{ij} \\ \phi_{ij} \end{pmatrix}$$

Konačne sile na krajevima štapa dobivaju se superpozicijom sila za stanje upetosti i stanje slobodnih pomaka prema izrazu:

$$\{f_{ij}\} = [k_{ij}] \cdot \{\delta_{ij}\}_L + \{\bar{f}_{ij}\}$$

$$\{f_{ij}\} = \begin{pmatrix} n_{ij} \\ t_{ij} \\ m_{ij} \\ n_{ji} \\ t_{ji} \\ m_{ji} \end{pmatrix}$$

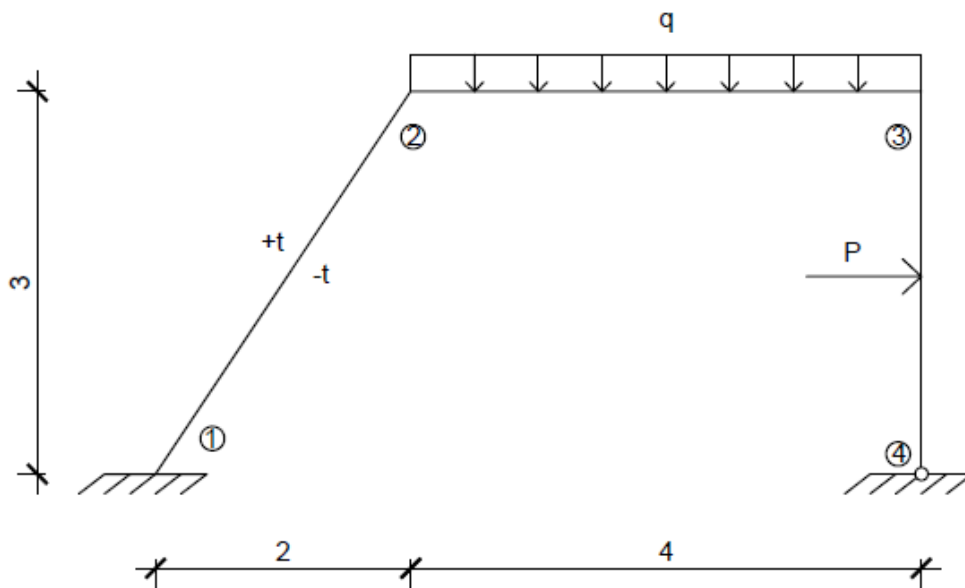
Iz dobivenih vrijednosti sila u lokalnom koordinatnom sustavu određuju se unutarnje sile po konvenciji dijagrama, iz uvjeta ravnoteže $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma M=0$ proizlazi:

$$N(x) = -N_{ij} - \sum_n F_x(n) - \int_0^x q_x \cdot (x_2 - x_1) \cdot dx$$

$$T(x) = T_{ij} + \sum_n F_y(n) + \int_0^x q_y \cdot (x_2 - x_1) \cdot dx$$

$$M(x) = -M_{ij} + T_{ij} \cdot x + \sum_n F_y(n)(x - x_n) + \int_0^x q_y \cdot (x_2 - x_1) \cdot \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot dx$$

Točna metoda pomaka-primjer



Zadano:

$$q = 30 \text{ kN/m}$$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$EI = 162000 \text{ kN/m}$$

$$P = 60 \text{ kN}$$

$$b/h = 0,3/0,6 \text{ m}$$

$$EA = 5400000 \text{ kN}$$

$$t = 16,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 32,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Aksijalne krutosti:

$$k_{12}^a = \frac{EA}{l_{12}} = \frac{EA}{3,6055}$$

$$k_{23}^a = \frac{EA}{l_{23}} = \frac{EA}{4}$$

$$k_{34}^a = \frac{EA}{l_{34}} = \frac{EA}{3}$$

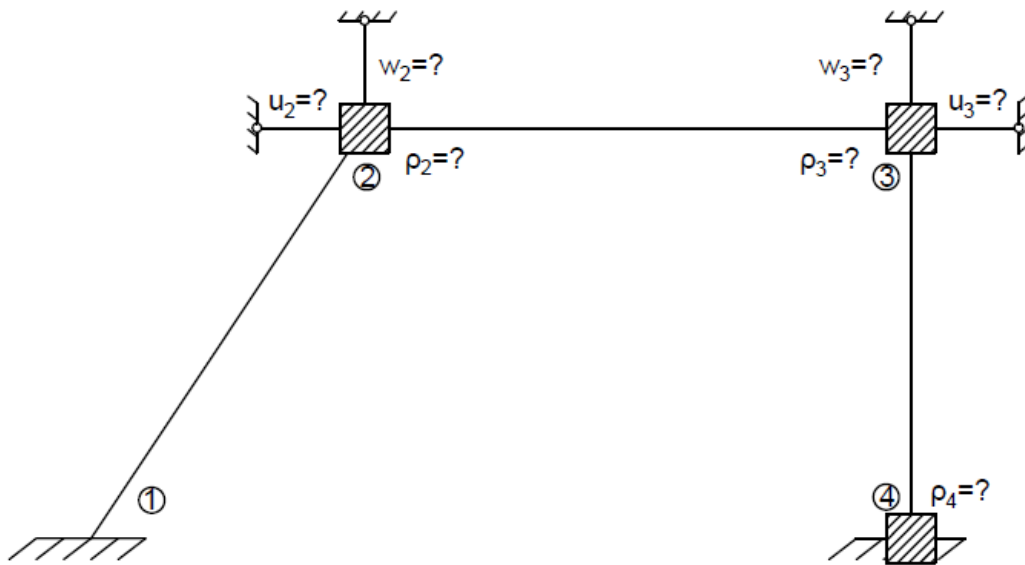
Fleksijske krutosti:

$$k_{12}^t = \frac{EI}{l_{12}} = \frac{EI}{3,6055}$$

$$k_{23}^t = \frac{EI}{l_{23}} = \frac{EI}{4}$$

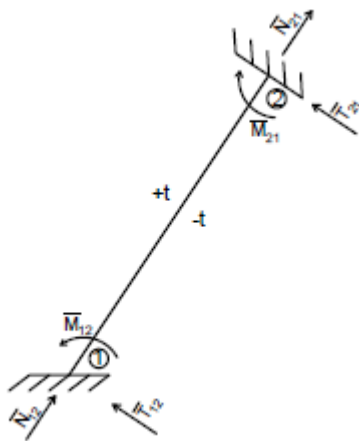
$$k_{34}^t = \frac{EI}{l_{34}} = \frac{EI}{3}$$

Pridržani sustav sa npoznatim poopcenim pomocima



Vektori pridržajnih sila za lokalni koordinatni sustav

Element 1-2



$$\bar{N}_{12} = \bar{N}_{21} = 0$$

$$\bar{M}_{12} = -\frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \cdot EI = -87,48 \text{ kNm}$$

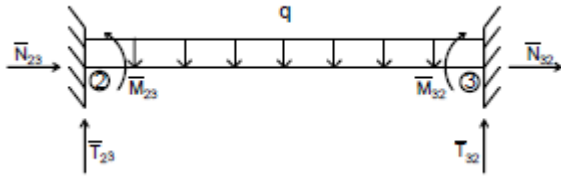
$$\bar{M}_{21} = -\bar{M}_{12} = 87,48 \text{ kNm}$$

$$\bar{T}_{12} = \frac{\bar{M}_{12} + \bar{M}_{21}}{l_{12}} = 0 \text{ kN}$$

$$\bar{T}_{21} = -\bar{T}_{12} = 0 \text{ kN}$$

$$\{\bar{f}_{12}\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{12} \\ \bar{T}_{12} \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{N}_{21} \\ \bar{T}_{21} \\ \bar{M}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -87,48 \\ 0 \\ 0 \\ 87,48 \end{Bmatrix}$$

Element 2-3



$$\bar{N}_{23} = \bar{N}_{32} = 0$$

$$\bar{M}_{23} = \frac{q \cdot l_{23}^2}{12} = \frac{30 \cdot 4^2}{12} = 40 \text{ kNm}$$

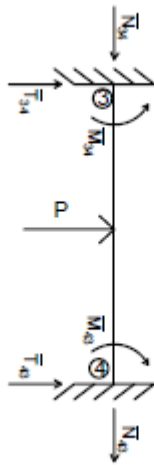
$$\bar{M}_{32} = -\bar{M}_{23} = -40 \text{ kNm}$$

$$\bar{T}_{23} = \frac{\bar{M}_{23} + \bar{M}_{32}}{l_{23}} + \frac{q \cdot l_{23}}{2} = \frac{40}{4} + \frac{-40}{4} + \frac{30 \cdot 4}{2} = 60 \text{ kN}$$

$$\bar{T}_{32} = -\frac{\bar{M}_{23} + \bar{M}_{32}}{l_{23}} + \frac{q \cdot l_{23}}{2} = -\left(\frac{40}{4} + \frac{-40}{4}\right) + \frac{30 \cdot 4}{2} = 60 \text{ kN}$$

$$\{\bar{f}_{23}\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{23} \\ \bar{T}_{23} \\ \bar{M}_{23} \\ \bar{N}_{32} \\ \bar{T}_{32} \\ \bar{M}_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 40 \\ 0 \\ 60 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

Element 3-4



$$\bar{N}_{34} = \bar{N}_{43} = 0$$

$$\bar{M}_{34} = -\frac{P \cdot 3}{8} = -\frac{60 \cdot 3}{8} = -22,5 \text{ kNm}$$

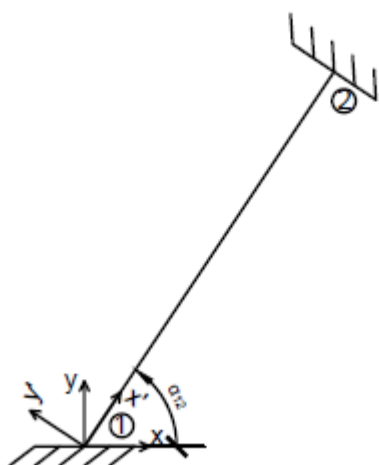
$$\bar{M}_{43} = -\bar{M}_{34} = 22,5 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{34} &= \frac{\bar{M}_{34} + \bar{M}_{43}}{l_{34}} - \frac{P}{2} = \frac{-22,5}{3} + \frac{22,5}{3} - \frac{60}{2} \\ &= -30 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{43} &= -\frac{\bar{M}_{34} + \bar{M}_{43}}{l_{34}} - \frac{P}{2} \\ &= -\left(\frac{-22,5}{3} + \frac{22,5}{3}\right) - \frac{60}{2} \\ &= -30 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\{\bar{f}_{34}\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{34} \\ \bar{T}_{34} \\ \bar{M}_{34} \\ \bar{N}_{43} \\ \bar{T}_{43} \\ \bar{M}_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \\ -22,5 \\ 0 \\ -30 \\ 22,5 \end{Bmatrix}$$

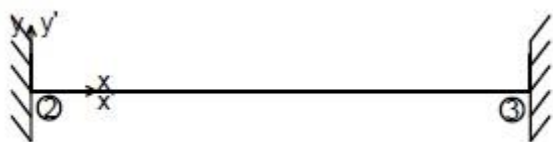
Određivanje kuta α_{ij} između globalne osi x i lokalne osi x'



$$\alpha_{12} = 56,31^\circ$$

$$\sin \alpha_{12} = 0,8321$$

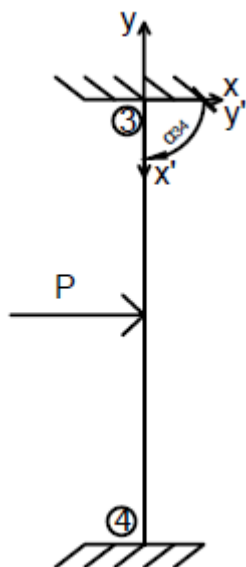
$$\cos \alpha_{12} = 0,5547$$



$$\alpha_{23} = 0^\circ$$

$$\sin \alpha_{23} = 0$$

$$\cos \alpha_{23} = 1$$



$$\alpha_{34} = 270^\circ$$

$$\sin \alpha_{34} = -1$$

$$\cos \alpha_{34} = 0$$

Lokalne matrice transformacije i njihove transponirane matrice te globalne matrice transformacije i njihove transponirane matrice

Za element 1-2

$$[r_{12}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{12} & \sin\alpha_{12} & 0 \\ -\sin\alpha_{12} & \cos\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5547 & 0,8321 & 0 \\ -0,8321 & 0,5547 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[r_{12}]^{-1} = [r_{12}]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{12} & -\sin\alpha_{12} & 0 \\ \sin\alpha_{12} & \cos\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5547 & -0,8321 & 0 \\ 0,8321 & 0,5547 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{12}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{12} & \sin\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_{12} & \cos\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{12} & \sin\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_{12} & \cos\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{12}] = \begin{bmatrix} 0,5547 & 0,8321 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8321 & 0,5547 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5547 & 0,8321 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8321 & 0,5547 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{12}]^{-1} = [R_{12}]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{12} & -\sin\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_{12} & \cos\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{12} & -\sin\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_{12} & \cos\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{12}]^{-1} = [R_{12}]^T = \begin{bmatrix} 0,5547 & -0,8321 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8321 & 0,5547 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5547 & -0,8321 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8321 & 0,5547 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za element 2-3

$$[r_{23}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{23} & \sin\alpha_{23} & 0 \\ -\sin\alpha_{23} & \cos\alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

$$[r_{23}]^{-1} = [r_{23}]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{23} & -\sin\alpha_{23} & 0 \\ \sin\alpha_{23} & \cos\alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] = [r_{23}]$$

$$[R_{23}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{23} & \sin\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_{23} & \cos\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{23} & \sin\alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_{23} & \cos\alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{23}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{23}]^{-1} = [R_{23}]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{23} & -\sin\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_{23} & \cos\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{23} & -\sin\alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_{23} & \cos\alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [R_{23}]$$

$$[R_{23}]^{-1} = [R_{23}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Za element 3-4

$$[r_{34}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{34} & \sin\alpha_{34} & 0 \\ -\sin\alpha_{34} & \cos\alpha_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[r_{34}]^{-1} = [r_{34}]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{34} & -\sin\alpha_{34} & 0 \\ \sin\alpha_{34} & \cos\alpha_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{34}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{34} & \sin\alpha_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_{34} & \cos\alpha_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{34} & \sin\alpha_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_{34} & \cos\alpha_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{34}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{34}]^{-1} = [R_{34}]^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{34} & -\sin\alpha_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_{34} & \cos\alpha_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{34} & -\sin\alpha_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_{34} & \cos\alpha_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{34}]^{-1} = [R_{34}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lokalne matrice krutosti

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{4EI}{l_{12}} & 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} \\ -\frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & 0 & \frac{12EI}{l_{12}^3} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{2EI}{l_{12}} & 0 & -\frac{6EI}{l_{12}^2} & \frac{4EI}{l_{12}} \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} 1497711,829 & 0 & 0 & -1497711,829 & 0 & 0 \\ 0 & 41476,276 & 74771,357 & 0 & -41476,276 & 74771,357 \\ 0 & 74771,357 & 179725,420 & 0 & -74771,357 & 89862,710 \\ -1497711,829 & 0 & 0 & 1497711,829 & 0 & 0 \\ 0 & -41476,276 & -74771,357 & 0 & 41476,276 & -74771,357 \\ 0 & 74771,357 & 89862,710 & 0 & -74771,357 & 179725,420 \end{bmatrix}$$

$$[k_{23}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_{23}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_{23}^3} & \frac{6EI}{l_{23}^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_{23}^3} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_{23}^2} & \frac{4EI}{l_{23}} & 0 & -\frac{6EI}{l_{23}^2} & \frac{2EI}{l_{23}} \\ -\frac{EA}{l_{23}} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_{23}^3} & -\frac{6EI}{l_{23}^2} & 0 & \frac{12EI}{l_{23}^3} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_{23}^2} & \frac{2EI}{l_{23}} & 0 & -\frac{6EI}{l_{23}^2} & \frac{4EI}{l_{23}} \end{bmatrix}$$

$$[k_{23}] = \begin{bmatrix} 1350000 & 0 & 0 & -1350000 & 0 & 0 \\ 0 & 30375 & 60750 & 0 & -30375 & 60750 \\ 0 & 60750 & 162000 & 0 & -60750 & 81000 \\ -1350000 & 0 & 0 & 1350000 & 0 & 0 \\ 0 & -30375 & -60750 & 0 & 30375 & -60750 \\ 0 & 60750 & 81000 & 0 & -60750 & 162000 \end{bmatrix}$$

$$[k_{34}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_{34}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_{34}^3} & \frac{6EI}{l_{34}^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_{34}^3} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_{34}^2} & \frac{4EI}{l_{34}} & 0 & -\frac{6EI}{l_{34}^2} & \frac{2EI}{l_{34}} \\ -\frac{EA}{l_{34}} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_{34}^3} & -\frac{6EI}{l_{34}^2} & 0 & \frac{12EI}{l_{34}^3} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_{34}^2} & \frac{2EI}{l_{34}} & 0 & -\frac{6EI}{l_{34}^2} & \frac{4EI}{l_{34}} \end{bmatrix}$$

$$[k_{34}] = \begin{bmatrix} 1800000 & 0 & 0 & -1800000 & 0 & 0 \\ 0 & 72000 & 108000 & 0 & -72000 & 108000 \\ 0 & 108000 & 162000 & 0 & -108000 & 81000 \\ -1800000 & 0 & 0 & 1800000 & 0 & 0 \\ 0 & -72000 & -108000 & 0 & 72000 & -108000 \\ 0 & 108000 & 81000 & 0 & -108000 & 162000 \end{bmatrix}$$

Globalne matrice krutosti za elemente

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{l_{12}} \cos\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \sin\alpha_{12}^2\right) & \left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} & -\left(\frac{AE}{l_{12}} \cos\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \sin\alpha_{12}^2\right) & -\left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} \\ \left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & \left(\frac{AE}{l_{12}} \sin\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \cos\alpha_{12}^2\right) & \frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} & -\left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & -\left(\frac{AE}{l_{12}} \sin\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \cos\alpha_{12}^2\right) & \frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} \\ -\frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} & \frac{4EI}{l_{12}} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} & \frac{2EI}{l_{12}} \\ -\left(\frac{AE}{l_{12}} \cos\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \sin\alpha_{12}^2\right) & -\left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} & \left(\frac{AE}{l_{12}} \cos\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \sin\alpha_{12}^2\right) & \left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} \\ -\left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & -\left(\frac{AE}{l_{12}} \sin\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \cos\alpha_{12}^2\right) & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} & \left(\frac{AE}{l_{12}} - \frac{12EI}{l_{12}^3}\right) \cos\alpha_{12} \sin\alpha_{12} & \left(\frac{AE}{l_{12}} \sin\alpha_{12}^2 + \frac{12EI}{l_{12}^3} \cos\alpha_{12}^2\right) & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} \\ -\frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} & \frac{2EI}{l_{12}} & \frac{6EI}{l_{12}^2} \sin\alpha_{12} & -\frac{6EI}{l_{12}^2} \cos\alpha_{12} & \frac{4EI}{l_{12}} \end{bmatrix}$$

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} 489551,859 & 672148,630 & -62217,247 & -489551,8590 & -672148,630 & -62217,247 \\ 672148,630 & 1049763,23 & 41475,672 & -672148,630 & -1049763,23 & 41475,672 \\ -62217,247 & 41475,672 & 179725,420 & 62217,247 & -41475,672 & 89862,710 \\ -489551,8590 & -672148,630 & 62217,247 & 489551,859 & 672148,630 & 62217,247 \\ -672148,630 & -1049763,23 & -41475,672 & 672148,630 & 1049763,23 & -41475,672 \\ -62217,247 & 41475,672 & 89862,710 & 62217,247 & -41475,672 & 179725,420 \end{bmatrix}$$

$$[K_{23}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{l_{23}} \cos\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \sin\alpha_{23}^2\right) & \left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & -\frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} & -\left(\frac{AE}{l_{23}} \cos\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \sin\alpha_{23}^2\right) & -\left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & -\frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} \\ \left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & \left(\frac{AE}{l_{23}} \sin\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \cos\alpha_{23}^2\right) & \frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} & -\left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & -\left(\frac{AE}{l_{23}} \sin\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \cos\alpha_{23}^2\right) & \frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} \\ -\frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} & \frac{4EI}{l_{23}} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} & -\frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} & \frac{2EI}{l_{23}} \\ -\left(\frac{AE}{l_{23}} \cos\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \sin\alpha_{23}^2\right) & -\left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} & \left(\frac{AE}{l_{23}} \cos\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \sin\alpha_{23}^2\right) & \left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} \\ -\left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & -\left(\frac{AE}{l_{23}} \sin\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \cos\alpha_{23}^2\right) & -\frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} & \left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{23} \sin\alpha_{23} & \left(\frac{AE}{l_{23}} \sin\alpha_{23}^2 + \frac{12EI}{l_{23}^3} \cos\alpha_{23}^2\right) & -\frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} \\ -\frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} & \frac{2EI}{l_{23}} & \frac{6EI}{l_{23}^2} \sin\alpha_{23} & -\frac{6EI}{l_{23}^2} \cos\alpha_{23} & \frac{4EI}{l_{23}} \end{bmatrix}$$

$$[K_{23}] = \begin{bmatrix} 1350000 & 0 & 0 & -1350000 & 0 & 0 \\ 0 & 30375 & 60750 & 0 & -30375 & 60750 \\ 0 & 60750 & 162000 & 0 & -60750 & 81000 \\ -1350000 & 0 & 0 & 1350000 & 0 & 0 \\ 0 & -30375 & -60750 & 0 & 30375 & -60750 \\ 0 & 60750 & 81000 & 0 & -60750 & 162000 \end{bmatrix}$$

$$[K_{34}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{l_{34}} \cos\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \sin\alpha_{34}^2\right) & \left(\frac{AE}{l_{34}} - \frac{12EI}{l_{34}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & -\frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} & -\left(\frac{AE}{l_{34}} \cos\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \sin\alpha_{34}^2\right) & -\left(\frac{AE}{l_{34}} - \frac{12EI}{l_{34}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & -\frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} \\ \left(\frac{AE}{l_{34}} - \frac{12EI}{l_{34}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & \left(\frac{AE}{l_{34}} \sin\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \cos\alpha_{34}^2\right) & \frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} & -\left(\frac{AE}{l_{23}} - \frac{12EI}{l_{23}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & -\left(\frac{AE}{l_{34}} \sin\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \cos\alpha_{34}^2\right) & \frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} \\ -\frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} & \frac{4EI}{l_{34}} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} & -\frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} & \frac{2EI}{l_{34}} \\ -\left(\frac{AE}{l_{34}} \cos\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \sin\alpha_{34}^2\right) & -\left(\frac{AE}{l_{34}} - \frac{12EI}{l_{34}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} & \left(\frac{AE}{l_{34}} \cos\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \sin\alpha_{34}^2\right) & \left(\frac{AE}{l_{34}} - \frac{12EI}{l_{34}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} \\ -\left(\frac{AE}{l_{34}} - \frac{12EI}{l_{34}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & -\left(\frac{AE}{l_{34}} \sin\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \cos\alpha_{34}^2\right) & -\frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} & \left(\frac{AE}{l_{34}} - \frac{12EI}{l_{34}^3}\right) \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{34} & \left(\frac{AE}{l_{34}} \sin\alpha_{34}^2 + \frac{12EI}{l_{34}^3} \cos\alpha_{34}^2\right) & -\frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} \\ -\frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} & \frac{2EI}{l_{34}} & \frac{6EI}{l_{34}^2} \sin\alpha_{34} & -\frac{6EI}{l_{34}^2} \cos\alpha_{34} & \frac{4EI}{l_{34}} \end{bmatrix}$$

$$[K_{34}] = \begin{bmatrix} 72000 & 0 & 108000 & -72000 & 0 & 108000 \\ 0 & 1800000 & 0 & 0 & -1800000 & 0 \\ 108000 & 0 & 216000 & -108000 & 0 & 108000 \\ -72000 & 0 & -108000 & 72000 & 0 & -108000 \\ 0 & -1800000 & 0 & 0 & 1800000 & 0 \\ 108000 & 0 & 108000 & -108000 & 0 & 216000 \end{bmatrix}$$

Glavni vektori pridržajnih sila

$$\{\bar{F}_{12}\} = [R_{12}]^T \cdot \{\bar{f}_{12}\}$$

$$\{\bar{F}_{12}\} = \begin{bmatrix} 0,5547 & -0,8321 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8321 & 0,5547 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5547 & -0,8321 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8321 & 0,5547 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -87,48 \\ 0 \\ 0 \\ 87,48 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -87,48 \\ 0 \\ 0 \\ 87,48 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{12} \\ \bar{V}_{12} \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{H}_{21} \\ \bar{V}_{21} \\ \bar{M}_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}_{23}\} = [R_{23}]^T \cdot \{\bar{f}_{23}\}$$

$$\{\bar{F}_{23}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 40 \\ 0 \\ 60 \\ -40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 40 \\ 0 \\ 60 \\ -40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{23} \\ \bar{V}_{23} \\ \bar{M}_{23} \\ \bar{H}_{32} \\ \bar{V}_{32} \\ \bar{M}_{32} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}_{34}\} = [R_{34}]^T \cdot \{\bar{f}_{34}\}$$

$$\{\bar{F}_{34}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \\ -22,5 \\ 0 \\ -30 \\ 22,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ -22,5 \\ -30 \\ 0 \\ 22,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{34} \\ \bar{V}_{34} \\ \bar{M}_{34} \\ \bar{H}_{43} \\ \bar{V}_{43} \\ \bar{M}_{43} \end{Bmatrix}$$

Rubni uvjeti:

Za čvor 1

$$u_{12} = w_{12} = \rho_{12} = 0$$

$$u_{12} = u_1, \quad w_{12} = w_1, \quad \rho_{12} = \rho_1,$$

Za čvor 2

$$u_{21} = u_{23} = u_2$$

$$w_{21} = w_{23} = w_2$$

$$\rho_{21} = \rho_{23} = \rho_2$$

Za čvor 3

$$u_{32} = u_{32} = u_3$$

$$w_{32} = w_{32} = w_3$$

$$\rho_{32} = \rho_{32} = \rho_3$$

Za čvor 4

$$u_{43} = u_4 = 0$$

$$w_{43} = w_4 = 0$$

$$\rho_{43} = \rho_4$$

Ukupna globalna matrica krutosti cijelog sustava

$$[K] = \begin{bmatrix} 1839551,859 & 672148,630 & 62217,247 & -1350000 & 0 & 0 & 0 \\ 672148,630 & 1080138,23 & 19274,328 & 0 & -30375 & 60750 & 0 \\ 62217,247 & 19274,328 & 341725,42 & 0 & -60750 & 81000 & 0 \\ -1350000 & 0 & 0 & 1422000 & 0 & 108000 & 108000 \\ 0 & -30375 & -60750 & 0 & 1830375 & -60750 & 0 \\ 0 & 60750 & 81000 & 108000 & -60750 & 378000 & 10800 \\ 0 & 0 & 0 & 108000 & 0 & 108000 & 216000 \end{bmatrix}$$

Ukupni vektor pridržajnih sila

$$\{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_{21} + \bar{H}_{23} \\ \bar{V}_{21} + \bar{V}_{23} \\ \bar{M}_{21} + \bar{M}_{23} \\ \bar{H}_{32} + \bar{H}_{34} \\ \bar{V}_{32} + \bar{V}_{34} \\ \bar{M}_{32} + \bar{M}_{34} \\ \bar{M}_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 127,48 \\ -30 \\ 60 \\ -62,5 \\ 22,5 \end{Bmatrix}$$

Vektorska jednadžba

$$[K] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \rho_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{Bmatrix} + \{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1839551,859 & 672148,630 & 62217,247 & -1350000 & 0 & 0 & 0 \\ 672148,630 & 1080138,23 & 19274,328 & 0 & -30375 & 60750 & 0 \\ 62217,247 & 19274,328 & 341725,42 & 0 & -60750 & 81000 & 0 \\ -1350000 & 0 & 0 & 1422000 & 0 & 108000 & 108000 \\ 0 & -30375 & -60750 & 0 & 1830375 & -60750 & 0 \\ 0 & 60750 & 81000 & 108000 & -60750 & 378000 & 108000 \\ 0 & 0 & 0 & 108000 & 0 & 108000 & 216000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \rho_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 127,48 \\ -30 \\ 60 \\ -62,5 \\ 22,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$u_2 = 1,187591378 \cdot 10^{-3}$$

$$w_2 = -8,032873297 \cdot 10^{-4}$$

$$\rho_3 = -6,315568828 \cdot 10^{-4}$$

$$u_3 = 1,189195347 \cdot 10^{-3}$$

$$w_3 = -5,620592329 \cdot 10^{-5}$$

$$\rho_3 = 3,273912167 \cdot 10^{-4}$$

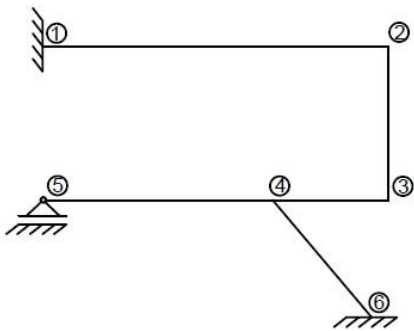
$$\rho_4 = -8,624599484 \cdot 10^{-4}$$

Inženjerska metoda pomaka - opis postupka sa izvodima formula

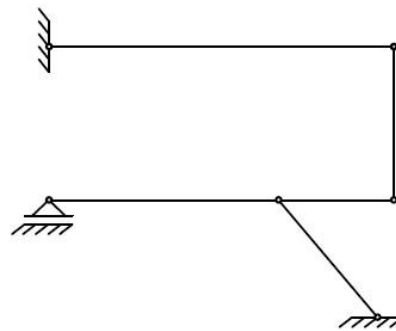
Pomaci čvorova nastaju kao posljedica fleksijske popustljivosti štapova pod djelovanjem vanjskih utjecaja.

Broj neovisnih pomaka čvorova, obzirom na pretpostavku o nepromjenjivosti duljine štapova, može se odrediti pronalaženjem broja kinematskih sloboda mehanizma koji nastaje zamišljenim uvođenjem zglobova na spoju štapa i čvorova. Uvođenje zglobova odgovara eliminaciji fleksijske krutosti štapova, odnosno dovođenju gibanja elastičnog mehanizma čvorova i štapova u gibanje jednostavnog mehanizma s krutim vezama.

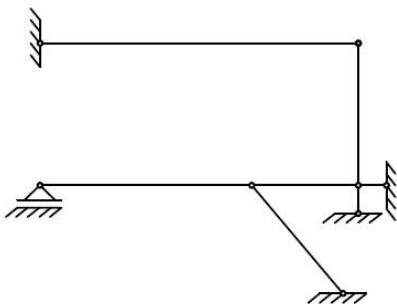
Ukupan broj stanja neovisnih pomaka čvorova u konstrukciji jednak je minimalnom broju veza koje treba dodati jednostavnom mehanizmu da bude kinematski stabilan. Svaki čvor promatran kao kruto tijelo ima slobodu rotacije i translacije kod čega je rotacija čvorova međusobno neovisna dok je translacija ovisna o vezama nastalog kinematskog mehanizma. Broj nepoznatih zaokreta je stoga jednak broju slobodnih čvorova dok je broj neovisnih translatornih pomaka jednak broju veza koje treba mehanizmu dodati da se spriječe translatorni pomaci čvorova.



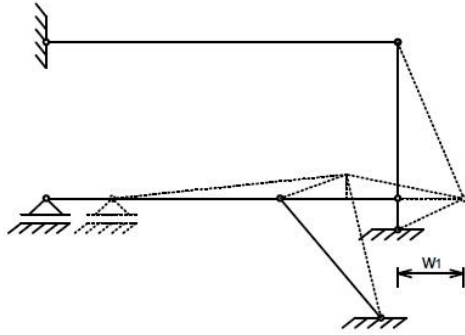
Zadani sustav



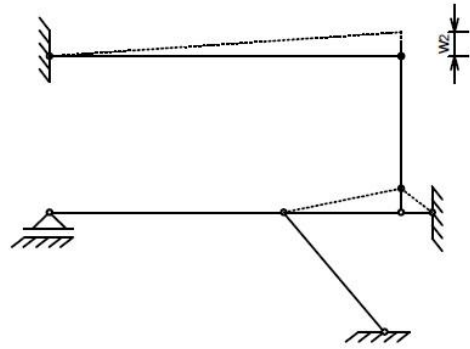
Sustav sa pridodanim čvorovima na krajevima štapova



Sustav sa pridodanim vezama za postizanje kinematske stabilnosti zglobnog mehanizma



Sustav sa oslobođenim horizontalnim pomakom



Sustav sa oslobođenim vertikalnim pomakom

Veze koje sprječavaju translatorne pomake čvora su fiktivne i služe samo kao pomoćno sredstvo za određivanje neovisnih translatornih pomaka čvorova. Uklanjanjem pojedinih fiktivnih veza dolazi do slike odgovarajućih translatornih pomaka koji uz zaokrete čvorova čine nepoznate pomake u konstrukciji. Slika pomaka je šematizirana u smislu da nije prikazana realna slika pomaka već samo mjera pomaka čvora u odnosu na neovisan pomak.

Translatorni pomaci čvorova u globalnom koordinatnom sustavu su funkcije neovisnih pomaka:

$$U_i = U(W_1, W_2, \dots, W_n)$$

$$U_i = U(W_1, W_2, \dots, W_n)$$

a za konstrukciju sa slike translatorni globalni pomaci su:

$$U_3 = U_4 = U_5 = W_1$$

$$V_2 = V_3 = W_2$$

$$V_4 = W_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{46}$$

Tijek proračuna sila na krajevima štapova i unutarnjih sila, inženjerskom metodom pomaka jednak je kao i kod točne metode pomaka.

Koristit ćemo oznake uvedene u točnoj metodi pomaka za neopterećene štapove i pretpostavku zanemarenja promjene duljine štapa bit će $u_{ij}=u_{ji}$. Prema tome sile na krajevima štapa su:

$$n_{ij} = -n_{ji} = k_{ij}^a \cdot (u_{ij} - u_{ji}) = 0$$

$$t_{ij} = \frac{12 \cdot k_{ij}^a \cdot (v_{ij} - v_{ji})}{L_{ij}^2} + \frac{6 \cdot k_{ij}^f (\varphi_{ij} + \varphi_{ji})}{L_{ij}}$$

$$m_{ij} = \frac{6 \cdot k_{ij}^f \cdot (v_{ij} - v_{ji})}{L_{ij}} + 4 \cdot k_{ij}^f \cdot \varphi_{ij} + 2 \cdot k_{ij}^f \cdot \varphi_{ji}$$

$$t_{ji} = -\frac{12 \cdot k_{ij}^a \cdot (v_{ij} - v_{ji})}{L_{ij}^2} - \frac{6 \cdot k_{ij}^f (\varphi_{ij} + \varphi_{ji})}{L_{ij}}$$

$$m_{ji} = \frac{6 \cdot k_{ij}^f \cdot (v_{ij} - v_{ji})}{L_{ij}} + 2 \cdot k_{ij}^f \cdot \varphi_{ij} + 4 \cdot k_{ij}^f \cdot \varphi_{ji}$$

Vektori sila i pomaka na krajevima su:

$$s^{(m)} = \begin{pmatrix} t_{ij} \\ m_{ij} \\ t_{ji} \\ m_{ji} \end{pmatrix} \quad d^m = \begin{pmatrix} v_{ij} \\ \varphi_{ij} \\ v_{ji} \\ \varphi_{ji} \end{pmatrix}$$

Lokalna matrica krutosti $\mathbf{k}^{(m)}$ štapa "m":

$$k^{(m)} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Uzdužne sile u štapovima nisu određene.

Vektor sila na krajevima neopterećenog štapa može se u matričnom zapisu izraziti kao produkt matrice krutosti i vektora pomaka krajeva štapa "m" kojemu je početni čvor (i), a krajnji (j).

$$s^{(m)} = k^{(m)} \cdot d^m \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} s_{ij} \\ s_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{(m)} & k_{ij}^{(m)} \\ k_{ji}^{(m)} & k_{jj}^{(m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{ij} \\ d_{ji} \end{bmatrix}$$

Iz izraza za sile na krajevima štapa mogu se izraziti kao funkcije pomaka krajeva štapa na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} m_{ij} \\ m_{ji} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4L & -6 & 2L \\ 6 & 2L & -6 & 4L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{ij} \\ \varphi_{ij} \\ v_{ji} \\ \varphi_{ji} \end{bmatrix}$$

Prethodna veza između momenata i pomaka na krajevima štapa koristi se u izvornom obliku inženjerske metode pomaka.

Umjesto apsolutnih pomaka krajeva štapa okomito na lokalnu os x uvodi se njihova diferencija $\Delta v_{ij} = v_{ij} - v_{ji}$.

Relativni pomak krajeva štapa okomito na njegovu os ovisi o pomacima čvorova na koji je štap priključen i jednak je:

$$\Delta v_{ij} = -(U_i - U_j) \cdot \sin \alpha_{ij} + (V_i - V_j) \cdot \cos \alpha_{ij}$$

ili kraće pisano:

$$\Delta v_{ij} = -\Delta U_{ij} \cdot \sin \alpha_{ij} + \Delta V_{ij} \cdot \cos \alpha_{ij}$$

Veza između momenata na krajevima štapa i pomaka može se pisati u obliku:

$$\begin{pmatrix} m_{ij} \\ m_{ji} \end{pmatrix} = \frac{E \cdot I}{L^2} \cdot \begin{bmatrix} 4L & 2l & 6 \\ 2L & 4l & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{ij} \\ \varphi_{ji} \\ \Delta v_{ji} \end{pmatrix}$$

Uvođenjem oznaka za štap konstantnog poprečnog presjeka:

$$\frac{4EI}{L} = a_{ij}; \quad \frac{2EI}{L} = b_{ij}; \quad \frac{6EI}{L^2} = c_{ij}; \quad \varphi_{ij} = \phi_i; \quad \varphi_{ji} = \phi_j$$

bit će analitički izraz za moment na krajevima štapa:

$$m_{ij} = a_{ij} \cdot \phi_i + b_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot \Delta v_{ij}$$

$$m_{ji} = a_{ji} \cdot \phi_i + b_{ji} \cdot \phi_j + c_{ji} \cdot \Delta v_{ij}$$

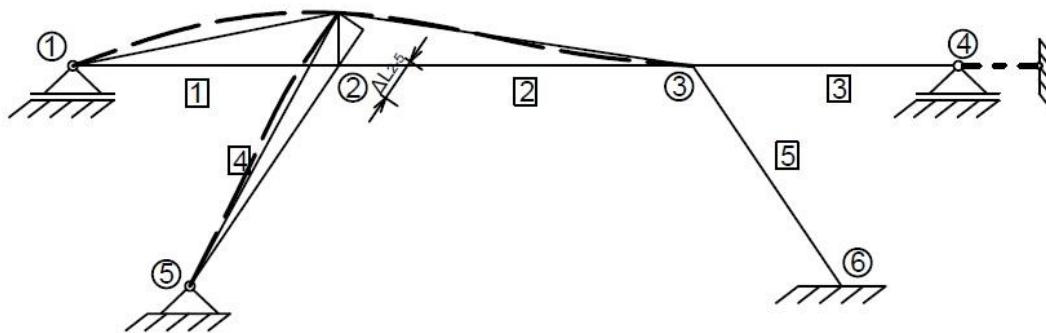
a sile na krajevima štapa okomito na lokalnu os:

$$t_{ij} = -t_{ji} = \frac{m_{ij} + m_{ji}}{L_{ij}} = \frac{a_{ij} + b_{ij}}{L_{ij}} \cdot \phi_i + \frac{a_{ij} + b_{ji}}{L_{ij}} \cdot \phi_j + \frac{c_{ij} + c_{ji}}{L_{ij}} \cdot \Delta v_{ij}$$

U inženjerskoj metodi stanje upetosti se postiže dodavanjem veza koje sprječavaju zaokrete u svim čvorovima i veza koje sprječavaju neovisne translatorne pomake. Sile upetosti se određuju za rubne uvjete koji proizlaze iz uvedene pretpostavke.

Opterećenje pojedinog štapu u inženjerskoj metodi pomaka može proizvesti sile upetosti u drugim štapovima.

Za ilustraciju promatra se konstrukcija sa slike kod koje je zadana promjena temperature u štapu (4). Stanje spriječenih pomaka postiže se dodavanjem veza koje sprječavaju zaokret čvorova (2) i (3) i veze koje sprječava horizontalni pomak ležaja (4), a time i čvorova (1),(2) i (3).



Pri djelovanju temperature na štap (5)-(2) on se produljuje za $\Delta L_{52} = \alpha_t \cdot t_s \cdot L_{52}$.

Vertikalni pomak čvora (2) nije spriječen i on se pomiče sukladno kinematskim vezama zglobnog mehanizma u položaj (2'). Duljina ostalih štapova se ne mijenja, a štap (5)-(2) ima novu duljinu $L + \Delta L$. Kako nije spriječen vertikalni pomak čvora (2), dolazi do relativnih pomaka krajeva štapova ΔL_{ij}^0 .

Momenti upetosti se određuju prema izrazima,

$$m_{ij} = a_{ij} \cdot \phi_i + b_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot \Delta v_{ij}$$

$$m_{ji} = a_{ji} \cdot \phi_i + b_{ji} \cdot \phi_j + c_{ji} \cdot \Delta v_{ij}$$

uz spriječene pomake prema pretpostavkama inženjerske metode pomaka. U globalnome koordinatnom sustavu samo čvor (2) dobiva translatorni pomak:

$$V_2^0 = \frac{\Delta L_{52}}{\sin \alpha_{52}}$$

Relativni pomaci krajeva štapu za stanje upetosti određuju se prema izrazu,

$$\Delta v_{ij} = -\Delta U_{ij} \cdot \sin \alpha_{ij} + \Delta V_{ij} \cdot \cos \alpha_{ij}$$

$$\Delta v_{12}^0 = -\frac{\Delta L_{52}}{\sin \alpha_{52}}; \quad \Delta v_{12}^0 = -\Delta L_{52} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{52}; \quad \Delta v_{23}^0 = \frac{\Delta L_{52}}{\sin \alpha_{52}}$$

Momenti upetosti jesu:

$$\bar{M}_{21} = c_{21}^c \cdot \Delta v_{12}^0; \quad \bar{M}_{23} = \bar{M}_{32} = c_{23} \cdot \Delta v_{23}^0; \quad \bar{M}_{52} = \bar{M}_{25} = c_{25} \cdot \Delta v_{52}^0;$$

Sile upetosti T_{ij} jesu:

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji}}{L_{ij}} + T_{ij}^0 \quad i \quad \bar{T}_{ji} = -\frac{\bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ji}}{L_{ij}} + T_{ji}^0$$

Sile upetosti N_{ij} određuju se iz uvjeta ravnoteže čvorova odnosno dijelova konstrukcije. U štapovima (6)-(2) i (2)-(3) mogu se odrediti iz uvjeta ravnoteže čvora (2), a u štapovima (3)-(6) i (3)-(4) iz ravnoteže čvora (3). Kod toga treba imati na umu da su u oba čvora spriječeni samo zaokreti i neovisni translatorski pomaci.

Sila u pridržajnoj vezi se određuje iz uvjeta ravnoteže ležaja (4) $F_{10} = \bar{N}_{43}$.

Ukupne sile na krajevima štapova dobivaju se superpozicijom sila dobivenih za stanje slobodnih pomaka i sila upetosti za stanje spriječenih pomaka kako slijedi:

$$M_{ij} = m_{ij} + \bar{M}_{ij} \quad i \quad T_{ij} = t_{ij} + \bar{T}_{ij}$$

Nakon uvrštenja izvedenih izraza za momente i poprečne sile od pomaka čvorova jest:

$$M_{ij} = a_{ij} \cdot \phi_i + b_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot [-(U_i - U_j) \cdot \sin \alpha_{ij} + (V_i - V_j) \cdot \cos \alpha_{ij}] + \bar{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = b_{ij} \cdot \phi_i + a_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot [-(U_i - U_j) \cdot \sin \alpha_{ij} + (V_i - V_j) \cdot \cos \alpha_{ij}] + \bar{M}_{ij}$$

U prethodnim izrazima pomaci čvorova U i V izražavaju se preko neovisnih pomaka W_k .

Uzdužne sile N_{ij} i N_{ji} određuju se iz ravnoteže čvorova ili dijelova konstrukcije, slično kao kod uzdužnih sila za stanje upetosti. Broj nepoznatih pomaka, pa prema tome i jednažbi ravnoteže koje treba postaviti, manji je od broja nepoznanica u točnoj metodi pomaka.

Potrebno je postaviti uvjete ravnoteže.

a) Za svaki slobodni čvor konstrukcije postavlja se po jedan uvjet ravnoteže da je suma momenata jednaka nuli. Za čvor (i) jednažba ravnoteže ima oblik:

$$-\sum_{(k)} (m_{ik} + \bar{M}_{ik}) + M_i = 0$$

m_{ik} – moment na kraju (i) štapa (i)-(k) za stanje slobodnih pomaka

\bar{M}_{ik} – moment upetosti na kraju (i) štapa (i)-(k)

M_i – vanjski napadni moment u čvoru (i).

Uvrste li se izvedeni izrazi za momente na krajevima štapova

$$M_{ij} = a_{ij} \cdot \phi_i + b_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot [-(U_i - U_j) \cdot \sin \alpha_{ij} + (V_i - V_j) \cdot \cos \alpha_{ij}] + \bar{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = b_{ij} \cdot \phi_i + a_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot [-(U_i - U_j) \cdot \sin \alpha_{ij} + (V_i - V_j) \cdot \cos \alpha_{ij}] + \bar{M}_{ij}$$

u jednadžbu ravnoteže, bit će:

$$\sum_{(k)} a_{ik} \cdot \phi_i + b_{ik} \cdot \phi_k + c_{ik} \cdot \Delta v_{ik} = M_i - \sum_{(k)} \bar{M}_{ik}$$

b) Osim jednadžbi ravnoteže čvorova $\sum_{(k)} \bar{M}_{ik} + M_i = 0$, treba postaviti još onoliko dodatnih jednadžbi koliko ima neovisnih translatorskih pomaka čvorova.

Za postavljanje dodatnih jednadžbi pretežno se koristi princip virtualnih pomaka za kruto tijelo.

Na sustavu sa spriječenim translatorskim pomacima, na spojevima štapova i čvorova, oslobode se momenti savijanja ukidanjem veza (pridruživanjem zglobova) koje prenose momente.

Oslobađanjem pojedine veze koja spriječava translatorske pomake, dio konstrukcije se pretvara u mehanizam. Dobivenome mehanizmu daje se virtualni pomak tako da se čvorovi pomiču translatorski, a štapovi sukladno vezama mehanizma. Kod tako odabranog virtualnog pomaka rad vrši vanjsko opterećenje i samo momenti na krajevima štapova. Moment oslobođenog para koji djeluje na čvor ne vrši rad na virtualnom pomaku.

Rad oslobođenih unutarnjih sila i vanjskog opterećenja na virtualnim pomacima jednak je nuli, što predstavlja uvjet ravnoteže dijela konstrukcije kojem pripada virtualni pomak.

Uz oznaku zaokreta štapa pri virtualnom pomaku ψ_{ij} i pomaka točke na pravcu sila sa δ_i glasi će jednadžba rada, za k – ti neovisni translatorski pomak;

$$\sum \left[(M_{ij} + M_{ji}) \cdot \psi_{ij}(k) + F_i \cdot \delta_i(k) + \int q(x) \cdot \delta_x(k) \cdot dx + P_i \cdot \delta_i(k) \right]$$

U jednadžbi rada F predstavlja koncentriranu silu na štapu, a P koncentriranu silu u čvoru. Sumacija se vrši preko svih štapova i čvorova koji imaju pomake uzrokovane virtualnim pomakom $W_k^* = 1$.

Pomaci čvorova, u globalnom sustavu, uslijed virtualnog pomaka W_k^* označavaju se sa:

$$U_i^*(k), U_j^*(k), V_i^*(k), V_j^*(k)$$

Zaokret štapa od virtualnog pomaka jest:

$$\psi_{ij}(k) = -\frac{\Delta v_{ij}^*}{L_{ij}} = \frac{1}{L_{ij}} \cdot \left[(U_i^*(k) - U_j^*(k)) \cdot \sin \alpha_{ij} - (V_i^*(k) - V_j^*(k)) \cdot \cos \alpha_{ij} \right]$$

Razlika pomaka čvorova na krajevima štapa u globalnom sustavu označava se sa:

naonk čega može se izraz za zaokret štapa pri virtualnom pomaku $W^*(k)$ pisati u skraćenom obliku:

$$\psi_{ij}(k) = \frac{1}{L_{ij}} \cdot (\Delta U_{ij}^*(k) \cdot \sin \alpha_{ij} + \Delta V_{ij}^*(k) \cdot \cos \alpha_{ij})$$

Pomaci na pravcima vanjskog opterećenja određuju se iz geometrije pomaka štapa. Isti postupak se ponavlja uz oslobađanje veze koje sprječava sljedeći neovisni translatorsni pomak konstrukcije. Konačno se dobiva onoliko dodatnih jednažbi koliko ima neovisnih pomaka.

Nakon rješenja sustava linearnih jednažbi dobivaju se vrijednosti zaokreta i neovisnih translatorsnih pomaka čvorova. Sile na krajevima štapova T_{ij} i M_{ij} računaju se prema izrazima;

$$M_{ij} = m_{ij} + \bar{M}_{ij} \quad \text{i} \quad T_{ij} = t_{ij} + \bar{T}_{ij}$$

$$M_{ij} = a_{ij} \cdot \phi_i + b_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot [-(U_i - U_j) \cdot \sin\alpha_{ij} + (V_i - V_j) \cdot \cos\alpha_{ij}] + \bar{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = b_{ij} \cdot \phi_i + a_{ij} \cdot \phi_j + c_{ij} \cdot [-(U_i - U_j) \cdot \sin\alpha_{ij} + (V_i - V_j) \cdot \cos\alpha_{ij}] + \bar{M}_{ij}$$

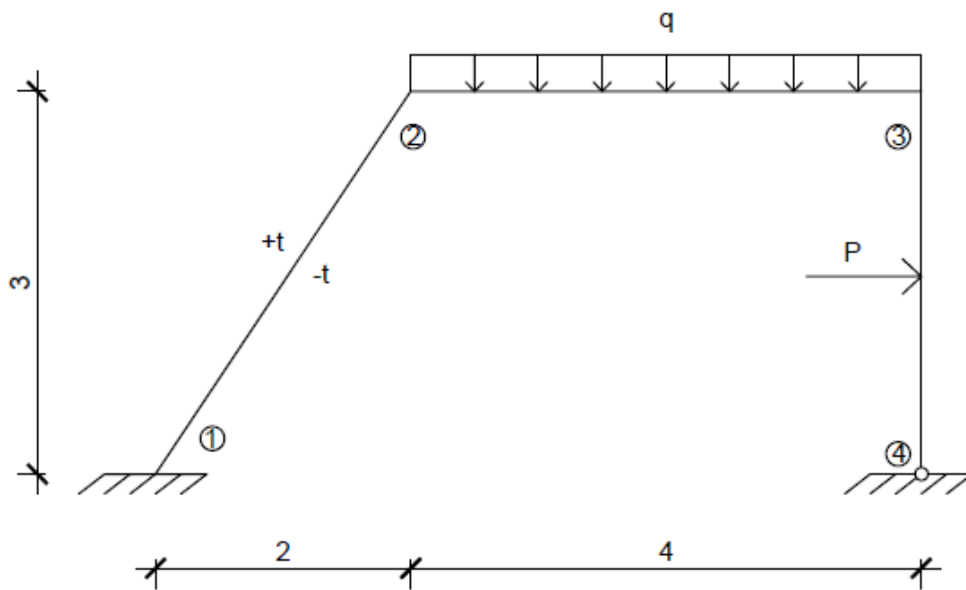
Sile N_{ij} se određuju iz promatranje ravnoteže čvorova ili dijelova konstrukcije. Postoje statički sustavi kod kojih nije moguće iz tih uvjeta odrediti sve sile. Tada nije moguće koristiti inženjersku metodu pomaka, već se proračun provodi točnom metodom pomaka.

Ukoliko se koristi princip virtualnih pomaka za dodatne jednažbe ravnoteže, nije potreban izračun sila \bar{T}_{ij} pa se konačne sile na krajevima štapa računaju nakon izračuna konačnih momenata prema izrazu:

$$T_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} + T_{ij}^0 \quad \text{i} \quad T_{ji} = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} + T_{ji}^0$$

gdje su T_{ij}^0 i T_{ji}^0 sile na statički određenom štapu (prostoj gredi).

Inženjerska metoda pomaka-primjer



Zadano:

$$q = 30 \text{ kN/m}$$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$EI = 162000 \text{ kN/m}$$

$$P = 60 \text{ kN}$$

$$b/h = 0,3/0,6 \text{ m}$$

$$EA = 5400000 \text{ kN}$$

$$t = 16,2 \text{ }^\circ\text{C}$$

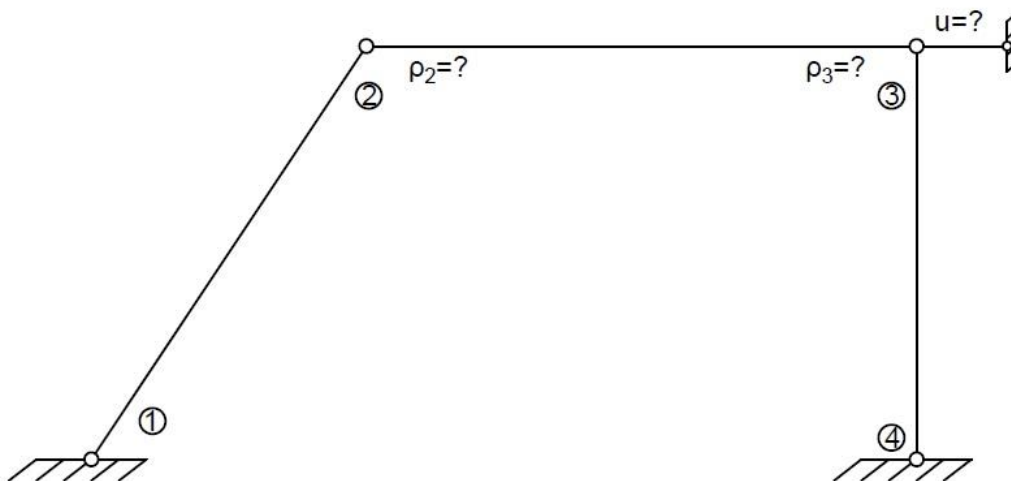
$$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 32,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

Slobodni čvorovi (2) i (3) \Rightarrow nepoznati pomaci: $\varphi_2 = ?$ i $\varphi_3 = ?$

Translatorni nepoznati pomaci

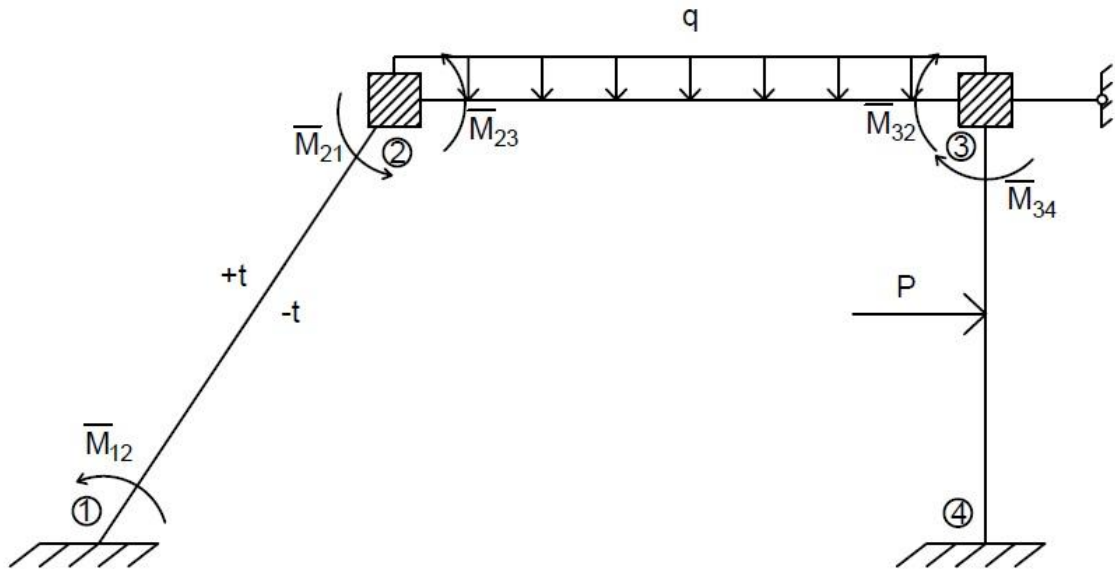
Zglobna shema



Stupanj statičke neodređenosti bez pridržanja:

$$SNS = 2 \cdot \check{C} - \check{S} = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow \text{nepoznati pomak: } \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u} = ?$$

Pridržani sustav



Momenti upetosti

$$\bar{M}_{12} = -\frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \cdot EI = -\frac{1 \cdot 10^{-5} \cdot 32,4}{0,6} \cdot 162000 = -87,48 \text{ kNm}$$

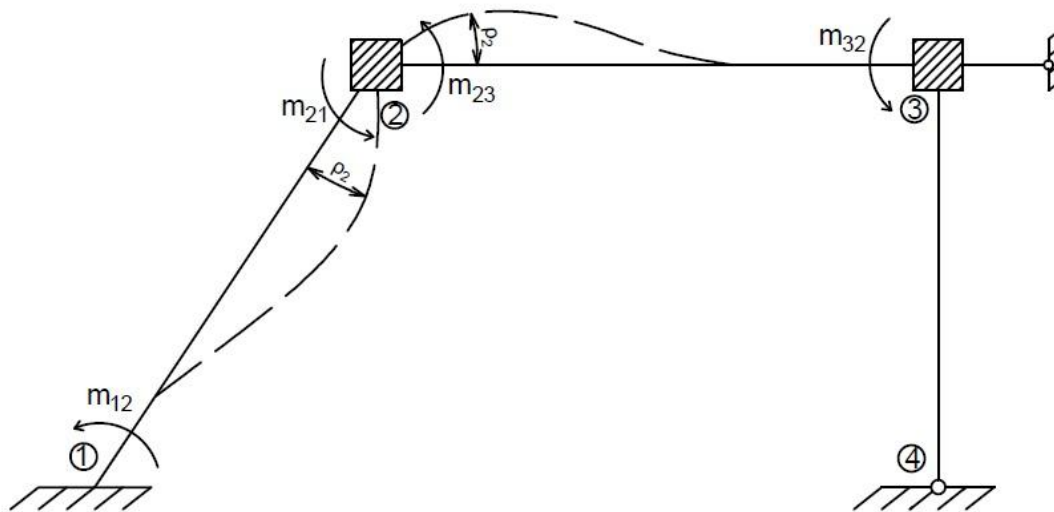
$$\bar{M}_{21} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} \cdot EI = \frac{1 \cdot 10^{-5} \cdot 32,4}{0,6} \cdot 162000 = 87,48 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{23} = \frac{q \cdot l^2}{h} = \frac{30 \cdot 4^2}{0,6} = 40 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{32} = \frac{q \cdot l^2}{h} = -\frac{30 \cdot 4^2}{0,6} = -40 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{34} = -\frac{3 \cdot P \cdot l}{16} = -\frac{3 \cdot 60 \cdot 3}{16} = -33,75 \text{ kNm}$$

+ utjecaj φ_2



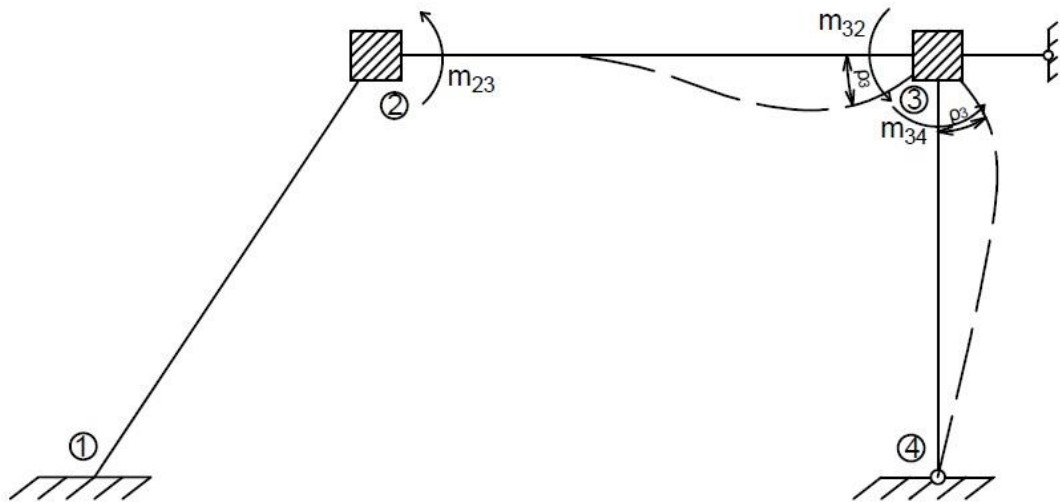
$$m_{12}^{\varphi_2} = 2k_{12} \cdot \varphi_2 = \frac{2EI}{l_{12}} \cdot \varphi_2 = \frac{2EI}{3,6055} \cdot \varphi_2 = 0,5547 \cdot EI \cdot \varphi_2$$

$$m_{21}^{\varphi_2} = 4k_{12} \cdot \varphi_2 = \frac{4EI}{l_{12}} \cdot \varphi_2 = \frac{4EI}{3,6055} \cdot \varphi_2 = 1,1094 \cdot EI \cdot \varphi_2$$

$$m_{23}^{\varphi_2} = 4k_{23} \cdot \varphi_2 = \frac{4EI}{l_{23}} \cdot \varphi_2 = \frac{4EI}{4} \cdot \varphi_2 = EI \cdot \varphi_2$$

$$m_{32}^{\varphi_2} = 2k_{23} \cdot \varphi_2 = \frac{2EI}{l_{23}} \cdot \varphi_2 = \frac{2EI}{4} \cdot \varphi_2 = 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_2$$

+ utjecaj φ_3



$$m_{12}^{\varphi_3} = m_{21}^{\varphi_3} = 0$$

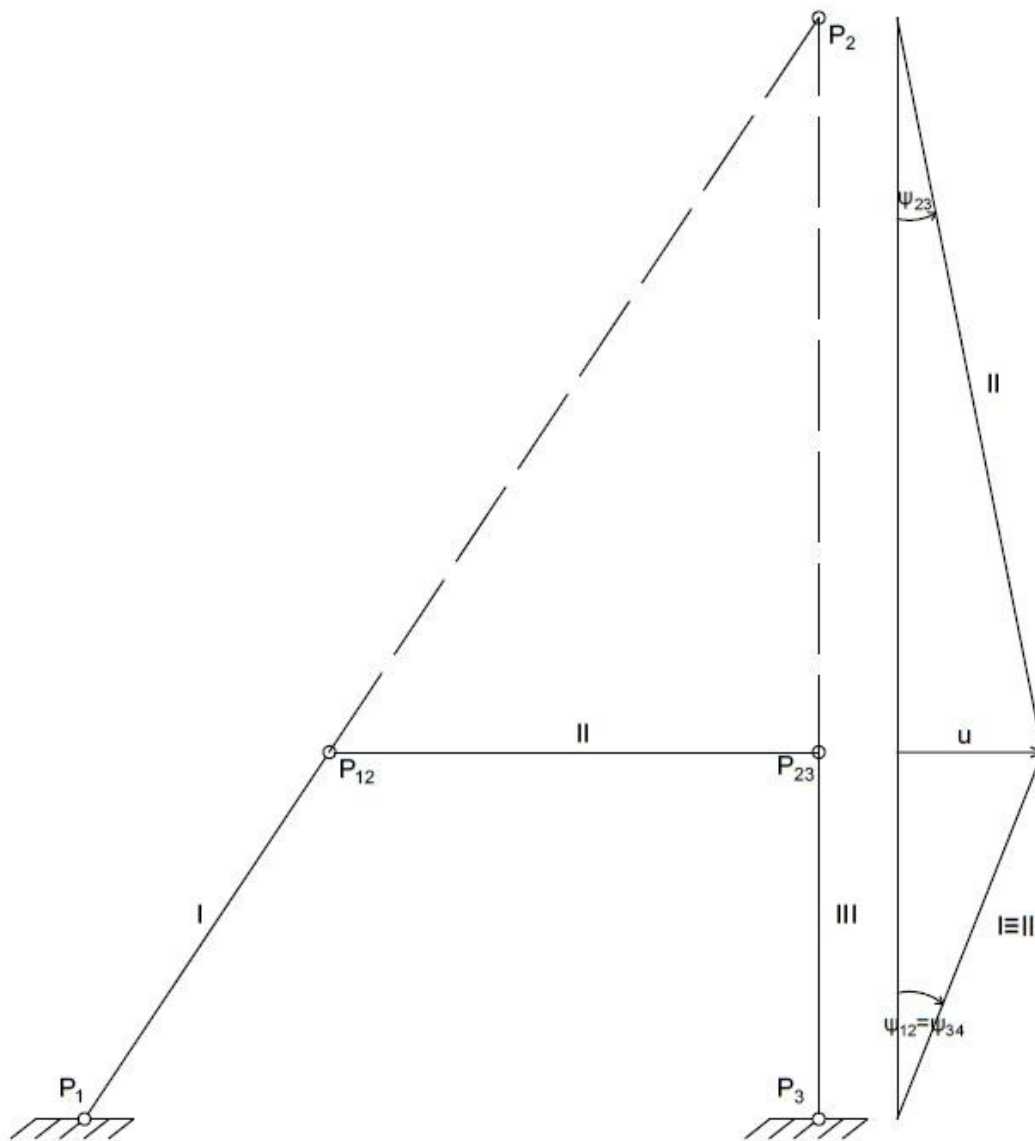
$$m_{23}^{\varphi_3} = 2k_{23} \cdot \varphi_3 = \frac{2EI}{l_{23}} \cdot \varphi_3 = \frac{2EI}{4} \cdot \varphi_3 = 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_3$$

$$m_{32}^{\varphi_3} = 4k_{23} \cdot \varphi_3 = \frac{4EI}{l_{23}} \cdot \varphi_3 = \frac{4EI}{4} \cdot \varphi_3 = EI \cdot \varphi_3$$

$$m_{34}^{\varphi_3} = 3k_{34} \cdot \varphi_3 = \frac{3EI}{l_{34}} \cdot \varphi_3 = \frac{3EI}{3} \cdot \varphi_3 = EI \cdot \varphi_3$$

+ utjecaj translatornog pomaka u

Zglobna shema



$$\psi_{12} = \psi_{34} = -\frac{u}{3}$$

$$\psi_{23} = \frac{u}{6}$$

$$m_{12}^u = m_{21}^u = -6k_{12} \cdot \psi_{12} = \frac{-6EI}{l_{12}} \cdot \psi_{12} = \frac{-6EI}{3,6055} \cdot \left(-\frac{u}{3}\right) = 0,5547 \cdot EI \cdot u$$

$$m_{23}^u = m_{32}^u = -6k_{23} \cdot \psi_{23} = \frac{-6EI}{l_{23}} \cdot \psi_{23} = \frac{-6EI}{4} \cdot \frac{u}{6} = -0,25 \cdot EI \cdot u$$

$$m_{34}^u = -3k_{34} \cdot \psi_{34} = \frac{-3EI}{l_{34}} \cdot \psi_{34} = \frac{-3EI}{3} \cdot \left(-\frac{u}{3}\right) = 0,3333 \cdot EI \cdot u$$

Ukupni momenti

$$M_{ij} = \bar{M}_{ij} + m_{ij}^{\varphi^2} + m_{ij}^{\varphi^3} + m_{ij}^u$$

$$M_{12} = \bar{M}_{12} + m_{12}^{\varphi^2} + m_{12}^{\varphi^3} + m_{12}^u = -87,48 + 0,5547 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 0,5547 \cdot EI \cdot u$$

$$M_{21} = \bar{M}_{21} + m_{21}^{\varphi^2} + m_{21}^{\varphi^3} + m_{21}^u = 87,48 + 1,1094 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 0,5547 \cdot EI \cdot u$$

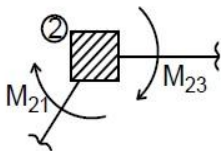
$$M_{23} = \bar{M}_{23} + m_{23}^{\varphi^2} + m_{23}^{\varphi^3} + m_{23}^u = 40 + EI \cdot \varphi_2 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_3 - 0,25 \cdot EI \cdot u$$

$$M_{32} = \bar{M}_{32} + m_{32}^{\varphi^2} + m_{32}^{\varphi^3} + m_{32}^u = -40 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_2 + EI \cdot \varphi_3 - 0,25 \cdot EI \cdot u$$

$$M_{34} = \bar{M}_{34} + m_{34}^{\varphi^2} + m_{34}^{\varphi^3} + m_{34}^u = -33,75 + 0 \cdot \varphi_2 + EI \cdot \varphi_3 + 0,3333 \cdot EI \cdot u$$

Jednadžbe ravnoteže za slobodne čvorove

Jednadžba ravnoteže za čvor (2)

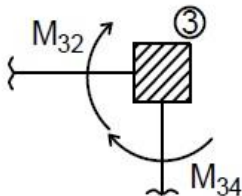


$$\sum M_2 = M_{21} + M_{23} = \bar{M}_{21} + m_{21}^{\varphi^2} + m_{21}^{\varphi^3} + m_{21}^u + \bar{M}_{23} + m_{23}^{\varphi^2} + m_{23}^{\varphi^3} + m_{23}^u = 0$$

$$87,48 + 1,1094 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 0,5547 \cdot EI \cdot u + 40 + EI \cdot \varphi_2 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_3 - 0,25 \cdot EI \cdot u = 0$$

$$\mathbf{127,48 + 2,1094 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_3 + 0,3047 \cdot EI \cdot u = 0}$$

Jednadžba ravnoteže za čvor (3)

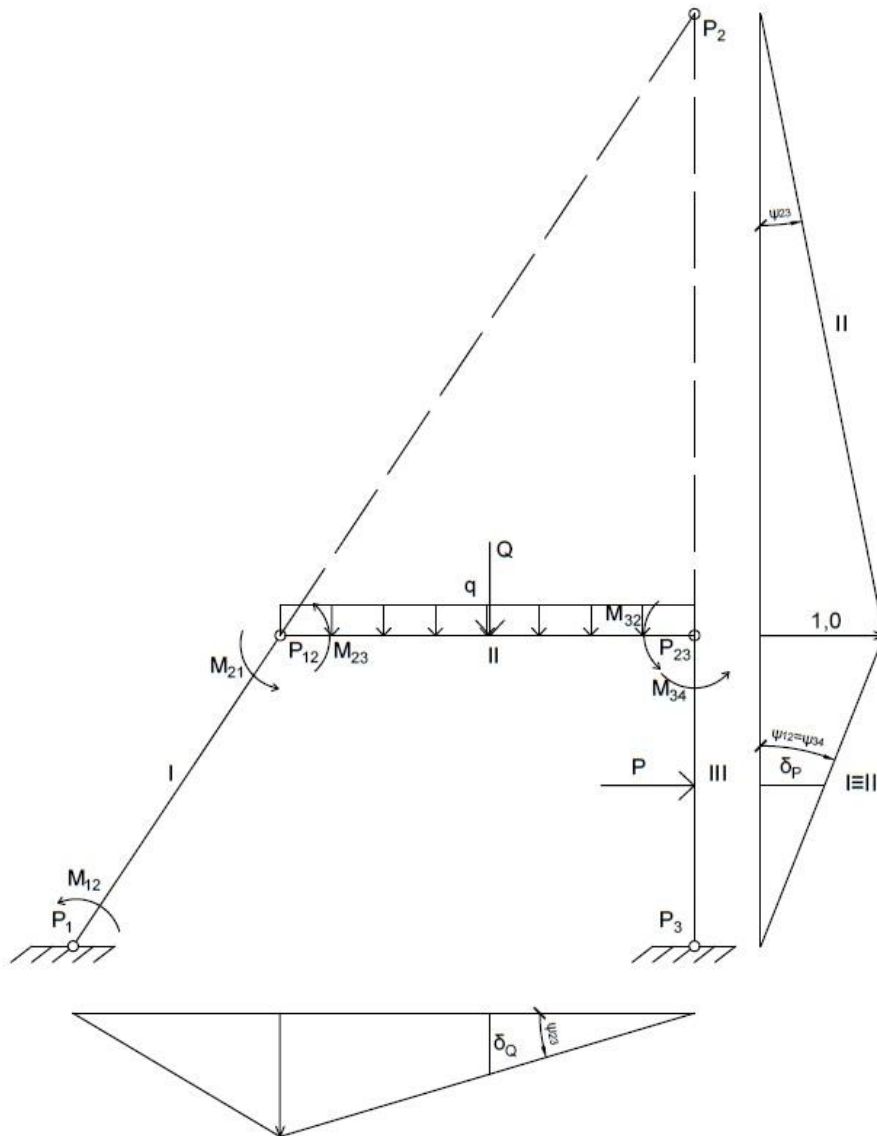


$$\sum M_3 = M_{32} + M_{34} = \bar{M}_{32} + m_{32}^{\varphi^2} + m_{32}^{\varphi^3} + m_{32}^u + \bar{M}_{34} + m_{34}^{\varphi^2} + m_{34}^{\varphi^3} + m_{34}^u = 0$$

$$-40 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_2 + EI \cdot \varphi_3 - 0,25 \cdot EI \cdot u - 33,75 + 0 \cdot \varphi_2 + EI \cdot \varphi_3 + 0,3333 \cdot EI \cdot u = 0$$

$$\mathbf{-73,75 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 2 \cdot EI \cdot \varphi_3 + 0,08333 \cdot EI \cdot u = 0}$$

Jednadžba rada za u



$$\psi_{12} = \psi_{34} = -\frac{1}{3}$$

$$\psi_{23} = \frac{1}{6}$$

$$\delta_P = 0,5$$

$$\delta_Q = |\psi_{23}| \cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\delta_W = +Q \cdot \delta_Q + P \cdot \delta_P + (M_{12} + M_{21}) \cdot \psi_{12} + (M_{23} + M_{32}) \cdot \psi_{23} + M_{34} \cdot \psi_{34} = 0 / \cdot (-1)$$

$$\delta_W = -70 + (0,5547 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 0,3698 \cdot EI \cdot u)$$

$$+ (-0,25 \cdot EI \cdot \varphi_2 - 0,25 \cdot EI \cdot \varphi_3 + 0,1666 \cdot EI \cdot u)$$

$$+ (-11,25 + 0 \cdot \varphi_2 + 0,3333 \cdot \varphi_3 + 0,1111 \cdot EI \cdot u) = 0$$

$$\mathbf{-81,25 + 0,3047 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0,08333 \cdot EI \cdot \varphi_3 + 0,6475 \cdot EI \cdot u = 0}$$

Dobiveni pomaci

$$\varphi_2 = -\frac{97,01367}{EI} = 5,98850 \cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_3 = \frac{54,28917}{EI} = 3,35118 \cdot 10^{-4}$$

$$u = \frac{164,14849}{EI} = 1,01326 \cdot 10^{-3}$$

Ukupni momenti

$$M_{12} = -87,48 + 0,5547 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 0,5547 \cdot EI \cdot u = -50,25 \text{ kNm}$$

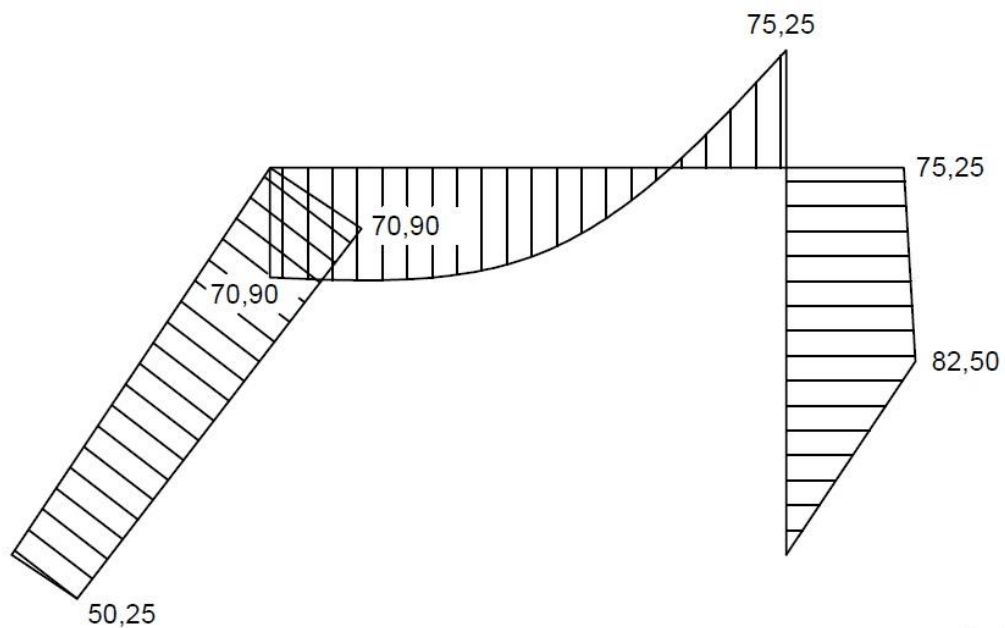
$$M_{21} = 87,48 + 1,1094 \cdot EI \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 0,5547 \cdot EI \cdot u = 70,898 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 40 + EI \cdot \varphi_2 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_3 - 0,25 \cdot EI \cdot u = -70,898 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -40 + 0,5 \cdot EI \cdot \varphi_2 + EI \cdot \varphi_3 - 0,25 \cdot EI \cdot u = -75,2477 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = -33,75 + 0 \cdot \varphi_2 + EI \cdot \varphi_3 + 0,3333 \cdot EI \cdot u = 75,2477 \text{ kNm}$$

M dijagram



Poprečne sile

$$T_{12} = T_{21} = \frac{M_{12} + M_{21}}{l_{12}} = \frac{-50,25 + 70,898}{3,6055} = 5,726 \text{ kN}$$

$$T_{23} = \frac{M_{23} + M_{32}}{l_{23}} + \frac{q \cdot l_{23}}{2} = \frac{-70,89 - 75,24778}{3,6055} + \frac{30 \cdot 4}{2} = 23,46 \text{ kN}$$

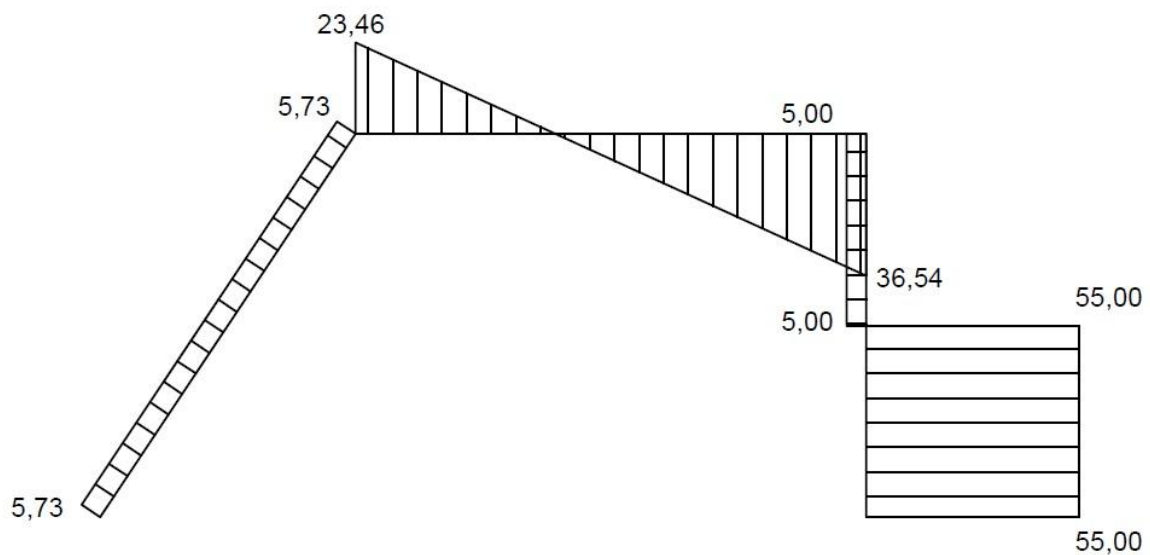
$$T_{32} = T_{23} - q \cdot l_{23} = 23,46 - 30 \cdot 4 = -36,54 \text{ kN}$$

$$T_{35} = -\frac{82,5 - 75}{1,5} = -5 \text{ kN}$$

$$T_{53} = \frac{82,5 - 0}{1,5} = 55 \text{ kN}$$

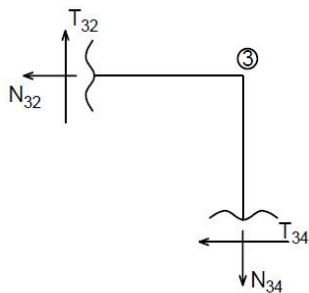
*Točka (5) označava mjesto na sustavu na kojem moment poprima vrijednost 82,50 kNm.

T dijagram



Iz ravnoteže čvorova dobivamo uzdužne sile

Za čvor (3)



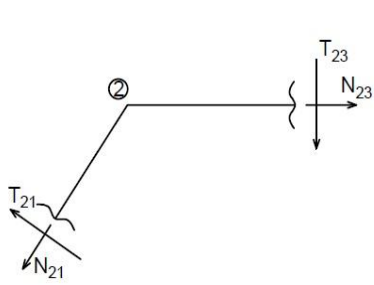
$$\sum F_X = 0$$

$$N_{32} = -T_{34} = 5 \text{ kN} = N_{23}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_{34} = -T_{34} = -36,54 \text{ kN} = N_{43}$$

Za čvor (2)



$$\sum F_Y = 0$$

$$N_{21} \cdot \sin\alpha = T_{21} \cdot \cos\alpha - T_{23}$$

$$N_{21} = \frac{T_{21} \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} - T_{23} = -24,37 \text{ kN}$$

N dijagram

