Prostorni spojeni sistemi

K. F.

(poopćeni) pomaci i stupnjevi slobode tijela u prostoru:

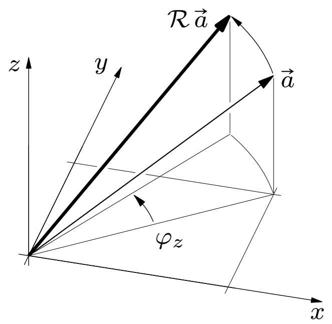
1. pomak po pravcu (translacija):
   - ◇ dva kuta kojima je određen orijentirani pravac (os) i orijentirana duljina pomaka ili
   - ◇ komponente pomaka usporedne s tri pravca/osi ili projekcije pomaka na tri pravca/osi;
2. zaokret oko trenutne osi (rotacija):
   - ◇ dva kuta kojima je određena os i kut zaokreta ili
   - ◇ (u teoriji „malih” pomaka) projekcije zaokreta na tri osi

translacijski pomak točke A, određene radijus–vektorom $\vec{r}_{\mathsf{A}} = \vec{a}$, za vektor $\vec{p}$:

$$\vec{a} \;\mapsto\; \vec{a} + \vec{p}, \qquad \vec{p} \;=\; u\,\vec{\imath} + v\,\vec{\jmath} + w\,\vec{k};$$

◇ pri translaciji tijela sve se njegove točke pomiču za isti vektor $\vec{p}$

rotacijski pomak točke A $(\vec{a} = \vec{r}_{\mathsf{A}})$ oko osi z za kut φ_z (kao primjer):



$\vec{a} \;\mapsto\; \mathcal{R}\,\vec{a}$

u matričnom zapisu:

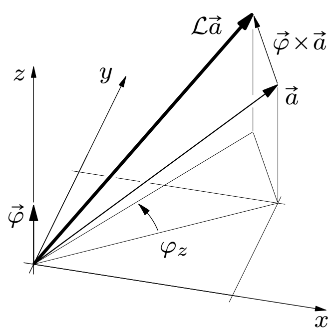
$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \;\mapsto\; \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

ili, sažeto, $\mathbf{a} \;\mapsto\; \mathbf{R}\,\mathbf{a}$

kompozicija rotacija: $\vec{a} \;\mapsto\; \mathcal{R}_2\big(\mathcal{R}_1\,\vec{a}\big)$

$$\mathbf{a} \;\mapsto\; \mathbf{R}_2\big(\mathbf{R}_1\,\mathbf{a}\big) \;=\; \mathbf{R}_2\,\mathbf{R}_1\,\mathbf{a}$$

„rotacijski” pomak u teoriji „malih” pomaka:



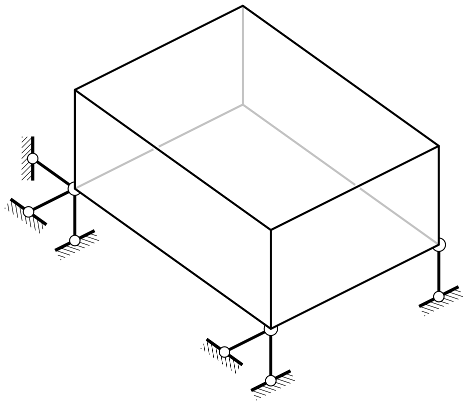
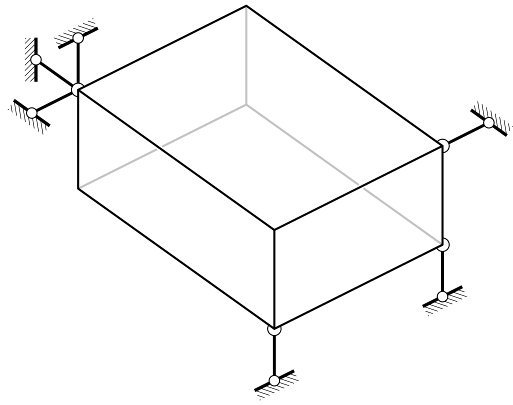
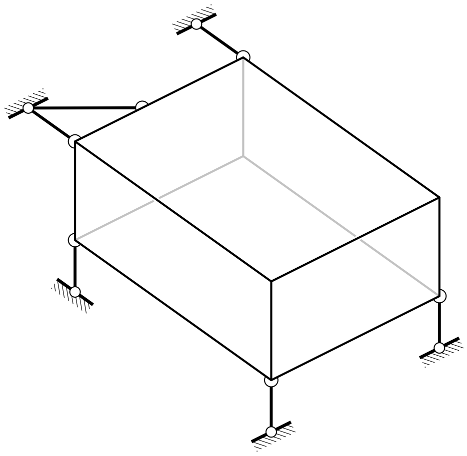
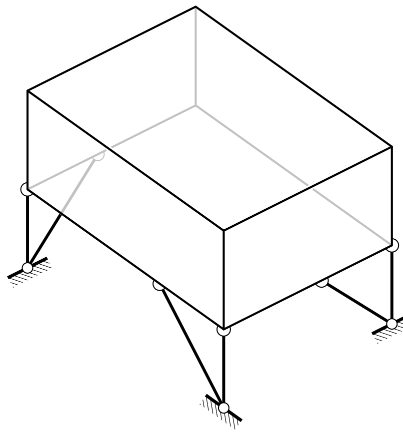
$\vec{a} \;\mapsto\; \mathcal{L}\,\vec{a} \;=\; \vec{a} \,+\, \vec{\varphi}\times\vec{a}$

kompozicija rotacija:

$\vec{a} \;\mapsto\; \mathcal{L}_2\,(\mathcal{L}_1\,\vec{a})$

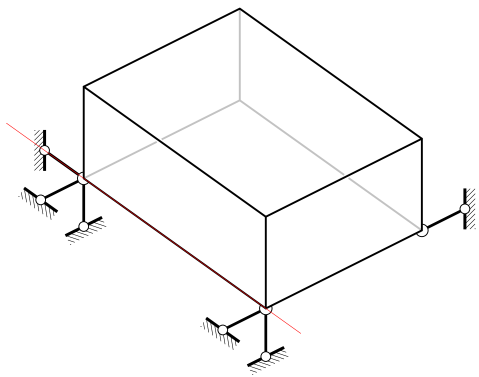
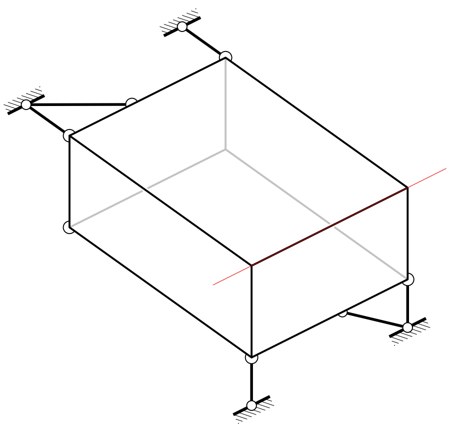
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\,(\mathcal{L}_1\,\vec{a}) \;&=\; \mathcal{L}_2\,(\vec{a} \,+\, \vec{\varphi}_1\times\vec{a}) \\
&=\; (\vec{a} \,+\, \vec{\varphi}_1\times\vec{a}) \,+\, \vec{\varphi}_2\times(\vec{a} \,+\, \vec{\varphi}_1\times\vec{a}) \\
&=\; \vec{a} \,+\, \vec{\varphi}_1\times\vec{a} \,+\, \vec{\varphi}_2\times\vec{a} \,+\, \vec{\varphi}_2\times(\vec{\varphi}_1\times\vec{a}) \\
&=\; \vec{a} \,+\, (\vec{\varphi}_1+\vec{\varphi}_2)\times\vec{a} \,+\, \varphi_2\,\vec{e}_2\times(\varphi_1\,\vec{e}_1\times\vec{a}) \\
&=\; \vec{a} \,+\, (\vec{\varphi}_1+\vec{\varphi}_2)\times\vec{a} \,+\, \underbrace{\varphi_1\,\varphi_2}_{\approxeq\;0}\,\big[\vec{e}_2\times(\vec{e}_1\times\vec{a})\big] \\
&\approxeq\; \vec{a} \,+\, (\vec{\varphi}_1+\vec{\varphi}_2)\times\vec{a} \\
&=\; \vec{a} \,+\, (\vec{\varphi}_2+\vec{\varphi}_1)\times\vec{a} \;=\; \mathcal{L}_1\,(\mathcal{L}_2\,\vec{a})
\end{aligned}$$

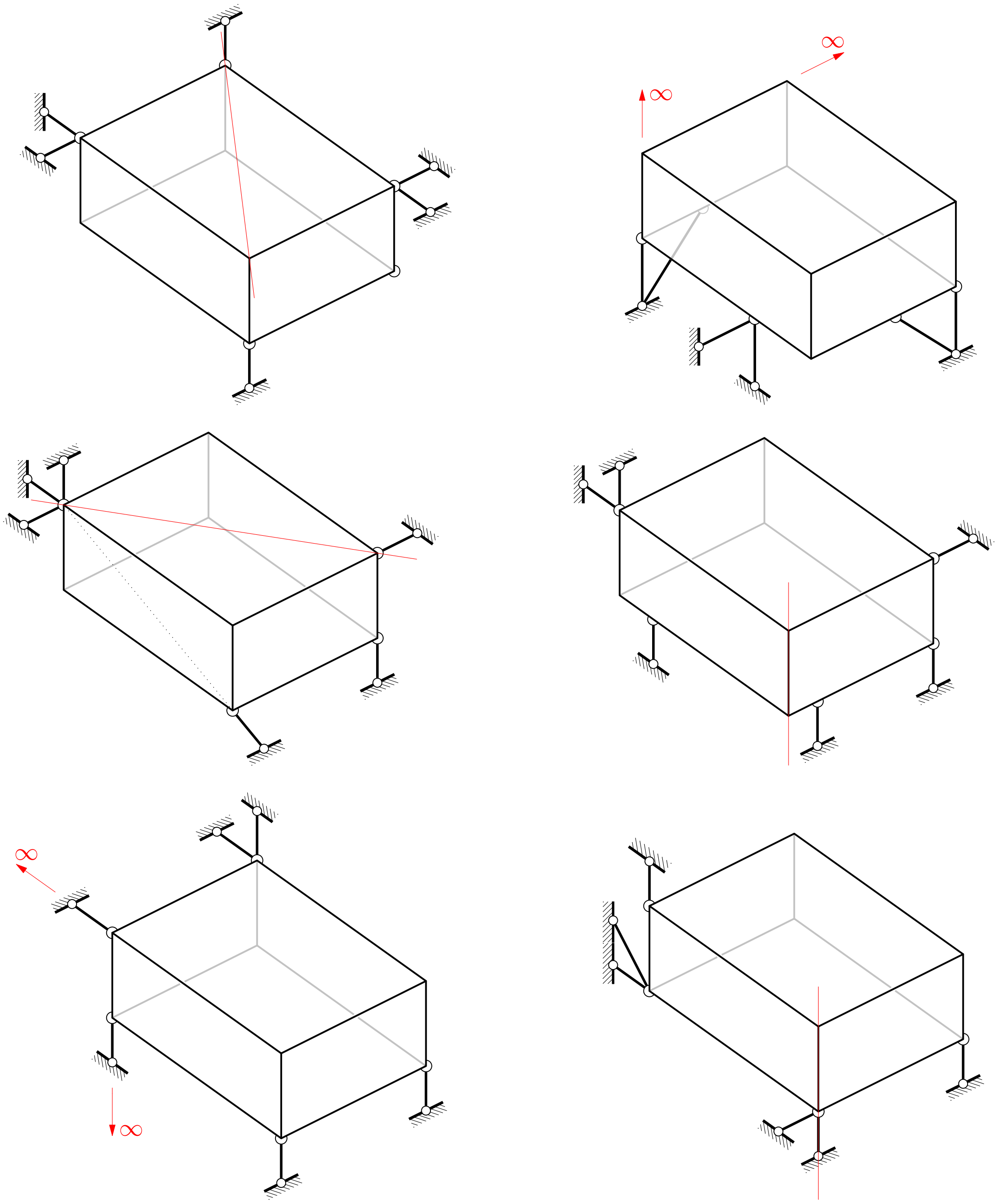
spajanje tijela s podlogom:

neispravan raspored spojeva:

- postoji barem jedna os za projekciju sila ili barem jedna momentna os za koju doprinosi svih sila u spojevima iščezavaju (tzv. prazan uvjet)
- ako osi svih šest zglobnih štapova sijeku jedan pravac (pa i neizmjerno daleko), momenti svih sila u štapovima oko tog pravca iščezavaju (a tijelo se oko tog pravca može zaokrenuti); ako je taj pravac neizmjerno daleko, iščezavaju projekcije sila na os koja je okomita na ravninu koja njime prolazi (a tijelo se može pomaknuti u smjeru osi)



uvjeti ravnoteže tijela u prostoru u vektorskom obliku:

1. iščezavanje zbroja svih sila:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \;=\; \vec{0}$$

2. iščezavanje zbroja svih koncentriranih momenata i momenata svih sila u odnosu na bilo koju točku:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{F_i/\mathsf{T}} \times \vec{F}_i \;+\; \sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{M}_j \;=\; \vec{0} \qquad \left[\text{sažetije:}\;\; \sum_{k=1}^{n+m} \overrightarrow{M}_{/\mathsf{T},k} \;=\; \vec{0}\right]$$

osnovna formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže tijela u prostoru:

1. iščezavanje zbrojeva skalarnih projekcija sila na koordinatne osi:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = 0$$

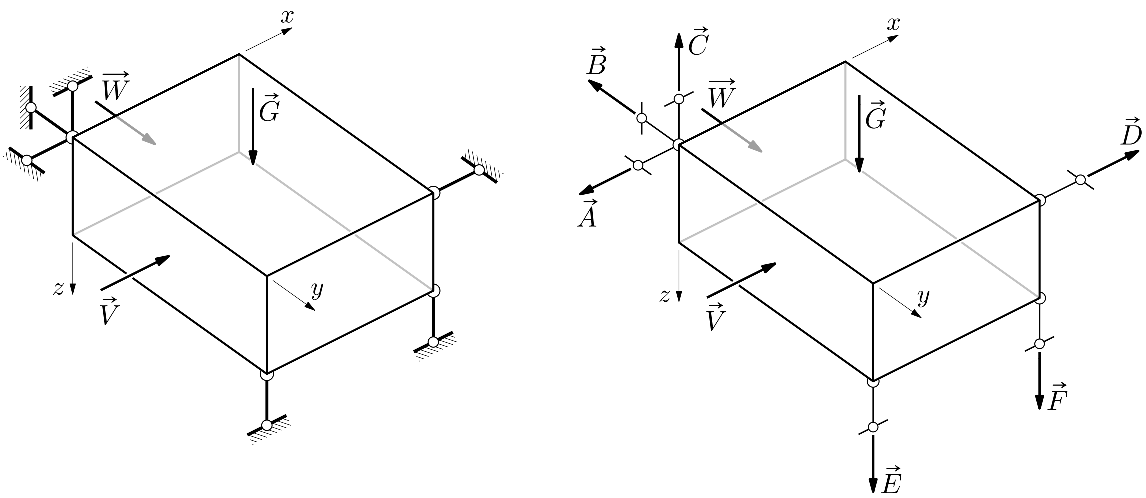
2. iščezavanje zbrojeva vrijednosti momenata oko koordinatnih osi:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i\,F_{i,z} - z_i\,F_{i,y}) + \sum_{j=1}^{m} M_{j,x} = 0 \qquad \left[\,\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,x} = 0\,\right],$$

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i\,F_{i,x} - x_i\,F_{i,z}) + \sum_{j=1}^{m} M_{j,y} = 0 \qquad \left[\,\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,y} = 0\,\right],$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i\,F_{i,y} - y_i\,F_{i,x}) + \sum_{j=1}^{m} M_{j,z} = 0 \qquad \left[\,\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,z} = 0\,\right]$$

izračunavanje sila u spojevima tijela s podlogom:



(1) u jednadžbu $\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0$ ulaze nepoznanice A i D (i poznata vrijednost V)

(2) u jednadžbu $\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0$ ulazi nepoznanica B (i poznata vrijednost W)

(3) u jednadžbu $\sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = 0$ ulaze nepoznanice C, E i F (i poznata vrijednost G)

(4) u jednadžbu $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,x} = 0$ ulaze nepoznanice E i F (i poznate vrijednosti G i W)

(5) u jednadžbu $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,y} = 0$ ulazi nepoznanica F (i poznate vrijednosti G i V)

(6) u jednadžbu $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,z} = 0$ ulazi nepoznanica D (i poznate vrijednosti V i W)

iz (2) neposredno izračunavamo B

iz (5) neposredno izračunavamo F

iz (6) neposredno izračunavamo D

iz (1), uz poznatu D, izračunavamo A

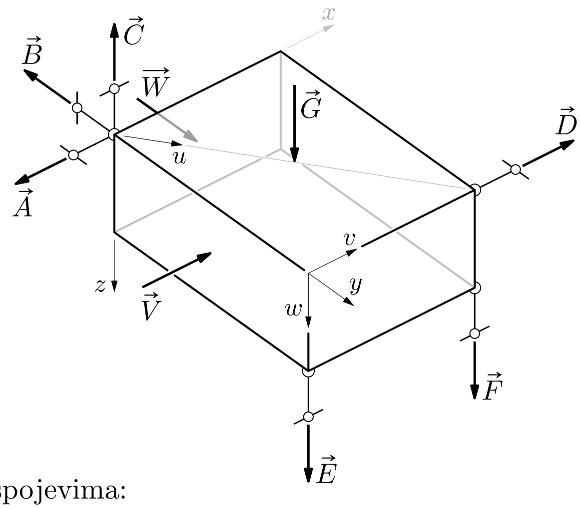
iz (4), uz poznatu F, izračunavamo E

iz (3), uz poznate E i F, izračunavamo C

ostale formulacije skalarnih uvjeta ravnoteže tijela u prostoru:

[nekorektno postavljeni uvjeti: postoje sila ili koncentrirani moment (ili spreg sila) čiji doprinosi svim uvjetima iščezavaju]

- varijacija osnovne formulacije s tri opće osi za projekcije sila i s tri opće momentne osi
  - ◇ osi za projekcije sila ne smiju biti paralelne s jednom ravninom; isto tako, momentne osi ne smiju biti paralelne s jednom (istom ili nekom drugom) ravninom
- projekcije sila na dvije osi i momenti oko četiri osi
- projekcije sila na jednu os i momenti oko pet osi:



  izračunavanje sila u spojevima:

  (1) iz jednadžbe $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,w} = 0$ neposredno izračunavamo A

  (2) iz jednadžbe $\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0$ neposredno izračunavamo B

  (3) iz jednadžbe $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,v} = 0$ neposredno izračunavamo C

  (4) iz jednadžbe $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,z} = 0$ neposredno izračunavamo D

  (5) iz jednadžbe $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,u} = 0$ neposredno izračunavamo E

  (6) iz jednadžbe $\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,y} = 0$ neposredno izračunavamo F

- momenti oko šest osi
  - ◇ osi ne smiju sjeći jedan pravac, pa ni neizmjerno daleko

tipovi zadataka:

I. osnovni zadaci:

1. odrediti vrijednostî sila na šest zadanih pravaca
2. odrediti vrijednostî sila na pet zadanih pravaca i vrijednost momenta oko zadane osi
3. odrediti vrijednostî sila na četiri zadana pravca i vrijednostî momenata oko dviju zadanih osi
4. odrediti vrijednostî sila na tri zadana pravca i vrijednostî momenata oko triju zadanih osi

II. izvedeni zadaci: osim vrijednosti sile na zadanomu pravcu i vrijednosti momenta oko zadane osi mogu se tražiti (1) sila pravac koje prolazi zadanom točkom, (2) sila pravac koje leži u zadanoj ravnini i prolazi zadanom točkom, (3) moment oko osi koja prolazi zadanom točkom te (4) moment oko osi koja leži u zadanoj ravnini i prolazi zadanom točkom

zglobni čvor:

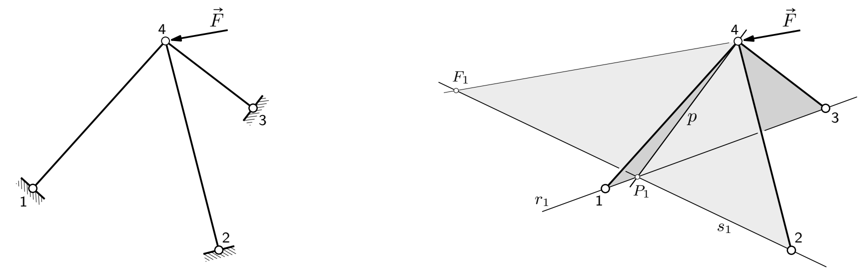
tri zglobna štapa kojima je zglobni čvor spojen s podlogom ne smiju ležati u jednoj ravnini

izračunavanje sila u spojevima — ravnoteža materijalne točke:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = 0$$

nacrtnogeometrijski postupak:

- aksonometrija:



- Mongeova ortogonalna projekcija: