

# Pokušaji poopćenja verižnoga poligona i ponešto još...

## Poznate činjenice

- (1) Silu u prostoru možemo rastaviti u dvije komponente na zadanim pravcima ako (i samo ako) su ti pravci i pravac njezina djelovanja konkurentni i koplanarni (sijeku se u jednoj točki i u jednoj su ravnini).
- (2) Pri sastavljanju verižnoga poligona dvije sile rastavljamo u po dvije komponente tako da jedna komponenta jedne sile poništi jednu komponentu druge sile. Te dvije komponente moraju djelovati na istomu pravcu, imati jednake intenzitete i suprotan smisao djelovanja.

## Zamjena triju mimosmjernih sila dvjema mimosmjernim silama

Tri ćemo zadane sile označiti sa  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$  i  $\vec{S}_3$ , a pravce na kojima djeluju sa  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  (slika 1.a.; na ovoj i sljedećim slikama: lijevo plan položaja, desno poligon sila).

Na pravcima  $s_1$  i  $s_2$  odabiremo točke  $A_1$  i  $A_2$  te ih spajamo pravcem  $s_{1,2}$ . Pravcima  $s_1$  i  $s_{1,2}$  postavljamo ravninu  $\sigma_1$ , a pravcima  $s_2$  i  $s_{1,2}$  ravninu  $\sigma_2$ ; pravac  $s_{1,2}$  presječnica je ravnina  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  (slika 1.b.). U tim ćemo ravninama sile  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  rastaviti u po dvije komponente,  $\vec{S}_1 = \vec{S}_{1,1} + \vec{S}_{1,2}$  i  $\vec{S}_2 = \vec{S}_{2,1} + \vec{S}_{2,2}$ , pri čemu ćemo po jednu komponentu svake sile, komponente  $\vec{S}_{1,2}$  i  $\vec{S}_{2,1}$ , uzeti na pravcu  $s_{1,2}$ .

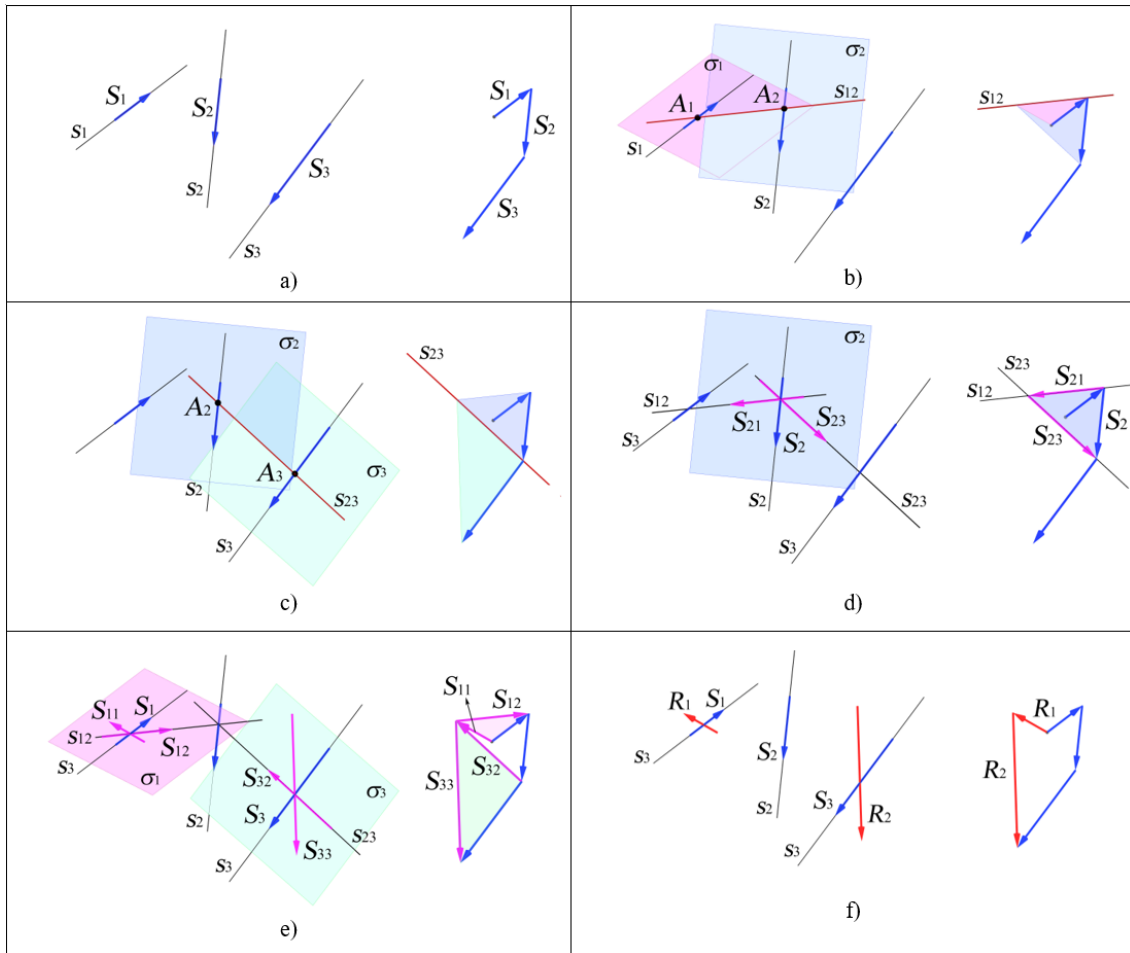
Točkom  $A_2$  i pravcem  $s_3$  postavljamo ravninu  $\sigma_3$ . Presječnica  $s_{2,3}$  ravnina  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$  spojnica je točke  $A_2$  i probodišta  $A_3$  pravca  $s_3$  i ravnine  $\sigma_2$  (slika 1.c.). Na pravcu  $s_{2,3}$  ležat će komponenta  $\vec{S}_{2,2}$  sile  $\vec{S}_2$  i komponenta  $\vec{S}_{3,1}$  sile  $\vec{S}_3$ .

Dakle, silu  $\vec{S}_2$  smo rastavili u komponente  $\vec{S}_{2,1}$  i  $\vec{S}_{2,3}$  na pravcima  $s_{1,2}$  i  $s_{2,3}$  (slika 1.d.). (Pravci  $s_{1,2}$  i  $s_{2,3}$  presječnice su ravnine  $\sigma_2$  s ravninama  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$ , pa leže u ravnini  $\sigma_2$ , a u njoj je i pravac  $s_2$  na kojemu djeluje sila  $\vec{S}_2$ . Sva se tri pravca sijeku u točki  $A_2$ .)

Nakon rastava sile  $\vec{S}_2$  određene su jedna komponenta rastava sile  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_{1,2} = -\vec{S}_{2,1}$ , i jedna komponenta rastava sile  $\vec{S}_3$ ,  $\vec{S}_{3,2} = -\vec{S}_{2,3}$ . Komponenta  $\vec{S}_{1,2}$  na pravcu je  $s_{1,2}$ , pa stoga i u ravnini  $\sigma_1$ , u kojoj sada možemo odrediti i drugu komponentu sile  $\vec{S}_1$ :  $\vec{S}_{1,1} = \vec{S}_1 - \vec{S}_{1,2}$ . Komponentu  $\vec{S}_{3,3}$  sile  $\vec{S}_3$ , koju rastavljamo u ravnini  $\sigma_3$ , određujemo na sličan način (slika 1.e.).

Budući da smo »verižni poligon« sastavili tako da se sile  $\vec{S}_{1,2}$  i  $\vec{S}_{2,1}$  i sile  $\vec{S}_{2,3}$  i  $\vec{S}_{3,2}$  međusobno poništavaju, preostale su sile  $\vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{S}_{3,3}$ . Drugim riječima, sile  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$  i  $\vec{S}_3$  zamijenili smo silama  $\vec{R}_1 = \vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{R}_2 = \vec{S}_{3,3}$  (slika 1.f.).

U općemu slučaju »klasični« postupak, kojim sastavljamo verižni poligon u ravnini, ne možemo nastaviti, jer ni pravac djelovanja sile  $\vec{S}_{1,1}$  ni pravac djelovanja sile  $\vec{S}_{3,3}$  ne sijeku pravac djelovanja neke četvrte sile. Možemo, međutim, neku četvrtu silu pridružiti silama  $\vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{S}_{3,3}$  pa te tri sile na opisani način zamijeniti dvjema silama. I tako dalje...



Slika 1.

### Zamjena sile silom kroz točku i silom u ravni

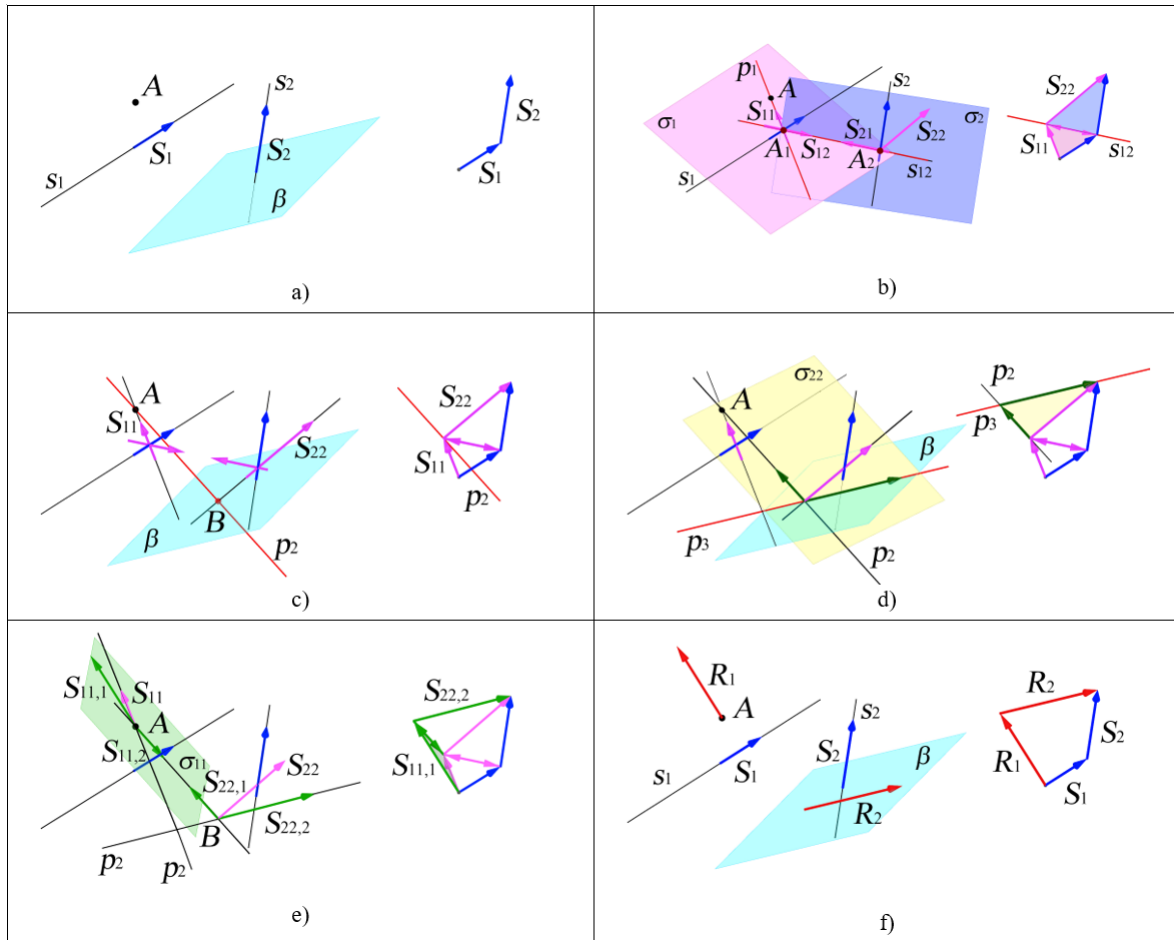
Zadanom točkom  $A$  i pravcem  $s$  djelovanja sile  $\vec{S}$  postavljamo ravninu  $\sigma$ . Jedna komponenta sile  $\vec{S}$  ležat će na presječnici  $r$  ravnine  $\sigma$  i zadane ravnine  $\beta$ , a druga na spojnici  $p$  točke  $A$  i probodišta  $P$  pravca  $s$  i ravnine  $\beta$  (to jest, sjecišta pravaca  $r$  i  $s$ ).

### Zamjena dviju mimosmjernih sila silom kroz točku i silom u ravni

*Prvi način.* Svaka se sila zasebice zamjenjuje silom kroz točku i silom u ravni te se nalaze rezultanta sila u točki i rezultanta sila u ravni.

*Drugi način.* Pravce djelovanja sila  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  označit ćemo, kao i prije, sa  $s_1$  i  $s_2$  (slika 2.a.).

Zadanom točkom  $A$  i pravcem  $s_1$  postavljamo ravninu  $\sigma_1$ . Probodište  $A_2$  pravca  $s_2$  i ravnine  $\sigma_1$  pravcem  $s_{1,2}$  spajamo s odabranom točkom  $A_1$  pravca  $s_1$ . Na pravcu  $s_{1,2}$  ležat će komponenta  $\vec{S}_{1,2}$  sile  $\vec{S}_1$  i komponenta  $\vec{S}_{2,1}$  sile  $\vec{S}_2$ . Druga komponenta sile  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_{1,1}$ , ležat će na spojnici  $p_1$  točaka  $A$  i  $A_1$ . Nakon rastava sile  $\vec{S}_1$  rastavljamo silu  $\vec{S}_2$  u ravni  $\sigma_2$ , postavljenoj pravcima  $s_2$  i  $s_{1,2}$ , uzevši pritom da je jedna njezina komponenta  $\vec{S}_{2,1} = -\vec{S}_{1,2}$ . Time smo sile  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  zamijenili silama  $\vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{S}_{2,2}$  (slika 2.b.).



Slika 2.

Pravac  $p_1$ , na kojemu djeluje sila  $\vec{S}_{1,1}$ , prolazi zadanom točkom  $A$ . Pravac  $s_{2,2}$ , na kojemu djeluje sila  $\vec{S}_{2,2}$ , probada zadanu ravninu  $\beta$  u točki  $B$ . Spojnica točaka  $A$  i  $B$  pravac je  $p_2$  (slika 2.c.).

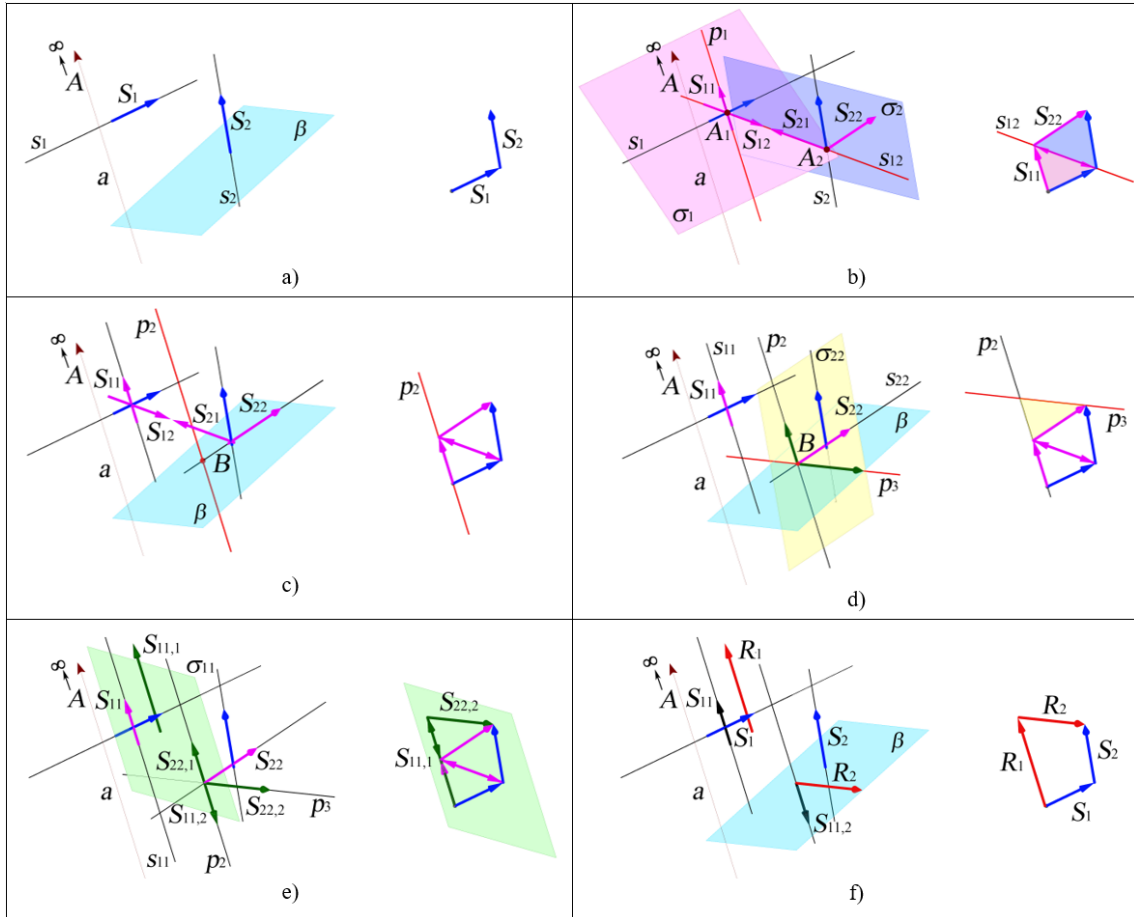
Pravcima  $s_{2,2}$  i  $p_2$  postavljamo ravninu  $\sigma_{2,2}$ . Ravnine  $\sigma_{2,2}$  i  $\beta$  sijeku se u pravcu  $p_3$ . Silu  $\vec{S}_{2,2}$  rastavljamo u komponente  $\vec{S}_{2,2,1}$  i  $\vec{S}_{2,2,2}$  na pravcima  $p_2$  i  $p_3$  (slika 2.d.). Silu  $\vec{S}_{1,1}$  potom u ravnini  $\sigma_{1,1}$ , određenoj pravcima  $p_1$  i  $p_2$ , rastavljamo u komponente  $\vec{S}_{1,1,1}$  i  $\vec{S}_{1,1,2}$  tako da je  $\vec{S}_{1,1,2} = -\vec{S}_{2,2,1}$  (slika 2.e.).

Na kraju postupka preostaju sila  $\vec{R}_1 = \vec{S}_{1,1,1}$ , koja prolazi točkom  $A$ , i sila  $\vec{R}_2 = \vec{S}_{2,2,2}$ , koja leži u ravnini  $\beta$  (slika 2.f.).

Sila  $\vec{R}_1$  može se potom rastaviti u tri komponente koje prolaze točkom  $A$ , dok se sila  $\vec{R}_2$  može rastaviti u tri komponente u ravnini  $\beta$ . Posebno, točka  $A$  može biti jedan vrh tetraedra kojemu nasuprotna stranica leži u ravnini  $\beta$ .

### Dva posebna slučaja

*Prvi:* točka  $A$  neizmjerljivo je daleka točka pravca  $a$  (slika 3.a.). To znači da par mimo-smjernih sila zamjenjujemo silom usporednom s pravcem  $a$  i silom u ravnini  $\beta$ .



Slika 3.

Ravninu  $\sigma_1$ , u kojoj silu  $\vec{S}_1$  rastavljemo u komponente  $\vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{S}_{1,2}$ , postavljamo sada pravcem  $s_1$  i pravcem  $p_1$  koji odabranom točkom  $A_1$  pravca  $s_1$  prolazi usporedno s pravcem  $a$  — ta je ravnina, prema tome, usporedna s pravcem  $a$ . Ravnina  $\sigma_2$ , u kojoj silu  $\vec{S}_2$  rastavljemo u  $\vec{S}_{2,1}$  i  $\vec{S}_{2,2}$ , određena je, kao i u općemu slučaju, pravcem  $s_2$  i spojnicom  $s_{1,2}$  točke  $A_1$  i probodišta  $A_2$  pravca  $s_2$  i ravnine  $\sigma_1$  (slika 3.b.).

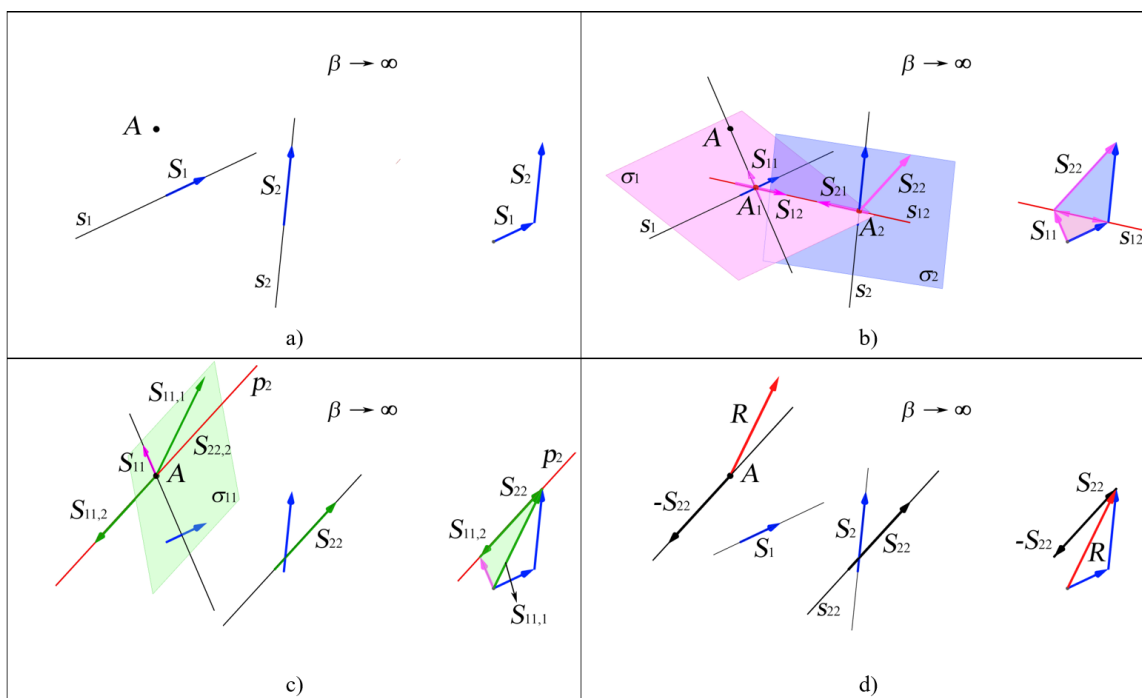
Spojница  $p_2$  neizmjerljivo daleke točke  $A$  i probodišta  $B$  pravca  $s_{2,2}$  (na kojemu je »preostala« komponenta  $\vec{S}_{2,2}$  sile  $\vec{S}_2$ ) i ravnine  $\beta$  u ovom je slučaju usporedna s pravcima  $a$  i  $p_1$  (na kojemu je »preostala« komponenta  $\vec{S}_{1,1}$  sile  $\vec{S}_1$ ) (slika 3.c.).

Kao i prije, silu  $\vec{S}_{2,2}$  rastavljamo u komponente  $\vec{S}_{2,2,1}$  na pravcu  $p_2$  i  $\vec{S}_{2,2,2}$  na presječnici  $p_3$  ravnine  $\beta$  i ravnine  $\sigma_{2,2}$  određene pravcima  $p_2$  i  $s_{2,2}$  (slika 3.d.).

Silu  $\vec{S}_{1,1}$  u komponente rastavljamo u ravnini  $\sigma_{1,1}$  određenoj pravcima  $p_1$  i  $p_2$ . Komponenta  $\vec{S}_{1,1,2} = -\vec{S}_{2,2,1}$  na pravcu je  $p_2$  koji je usporedan s pravcem  $p_1$  na kojemu djeluje sila  $\vec{S}_{1,1}$ , pa će i komponenta  $\vec{S}_{1,1,1}$  biti na pravcu usporednom s tim pravcem (slika 3.e.). Pravac djelovanja sile  $\vec{S}_{1,1,1}$  možemo odrediti pomoću klasičnoga ravninskog verižnog poligona (u ravnini  $\sigma_{1,1}$ ).

Pravac djelovanja sile  $\vec{S}_{1,1,1} = \vec{R}_1$  usporedan je s pravcem  $p_1$ , a time i s pravcem  $a$ . Druga preostala sila  $\vec{S}_{2,2,2} = \vec{R}_2$  leži u ravnini  $\beta$  (slika 3.f.).

Drugi slučaj: ravnina  $\beta$  neizmjereno je daleka ravnina prostora (slika 4.a.). Prvi koraci, zamjena sila  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  silama  $\vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{S}_{2,2}$ , isto su kao u općemu slučaju (slika 4.b.).



Slika 4.

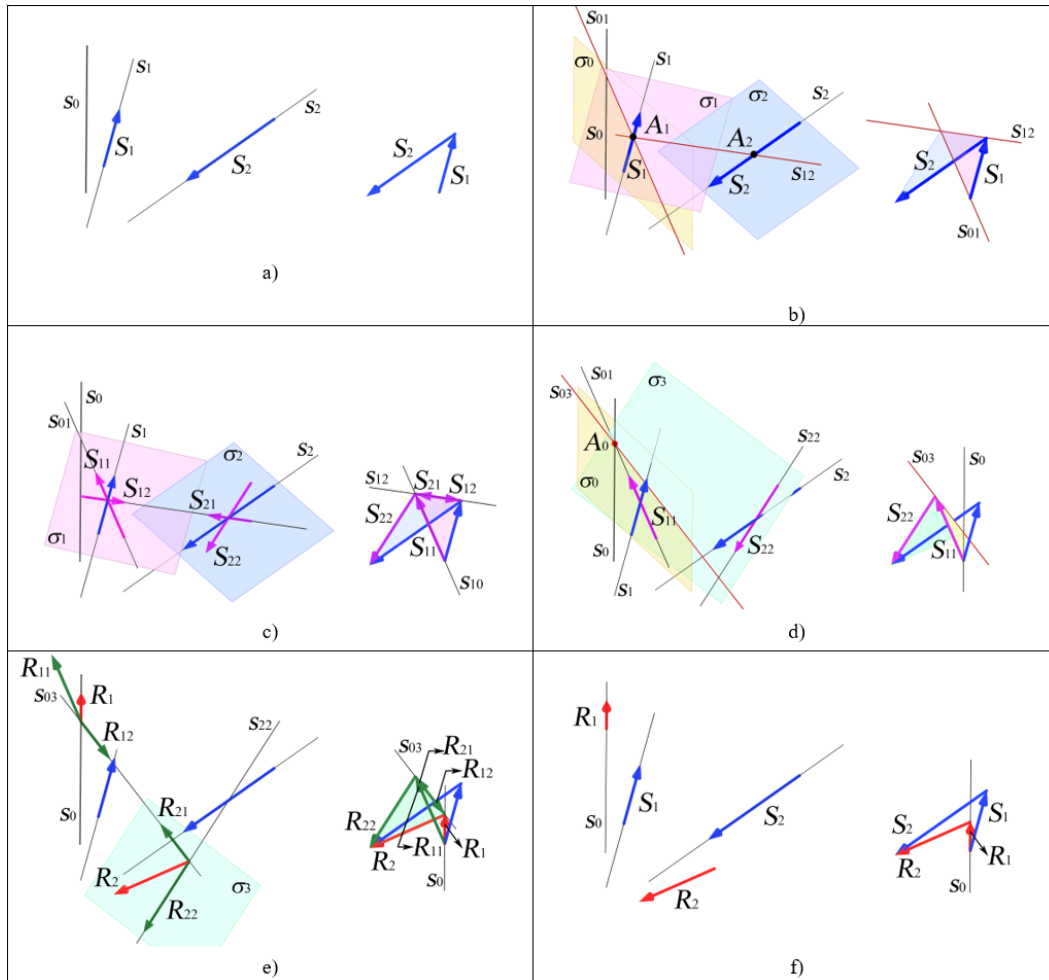
Probodište  $B$  pravca  $s_{2,2}$ , na kojemu djeluje sila  $\vec{S}_{2,2}$ , i neizmjereno daleke ravnine  $\beta$  neizmjereno je daleka točka toga pravca, pa će spojnica  $p_2$  točaka  $A$  i  $B$ , na kojoj je komponenta  $\vec{S}_{2,2,1}$  sile  $\vec{S}_{2,2}$ , biti s njim usporedna (slika 4.c.). Budući da je  $p_3$  presječna ravnina  $\sigma_{2,2}$  i neizmjereno daleke ravnine  $\beta$ , bit će to neizmjereno daleki pravac, pa će i komponenta  $\vec{S}_{2,2,2}$  sile  $\vec{S}_{2,2}$  biti neizmjereno daleko. Takvu silu na crtežu ne možemo neposredno prikazati. Međutim, iz  $\vec{S}_{2,2} = \vec{S}_{2,2,1} + \vec{S}_{2,2,2}$  slijedi  $\vec{S}_{2,2,2} = \vec{S}_{2,2} - \vec{S}_{2,2,1}$ , a kako sile  $\vec{S}_{2,2}$  i  $-\vec{S}_{2,2,1}$  djeluju na usporednim pravcima i kako su jednakih indentiziteta, a suprotna smisla djelovanja, tvore spreg sila. Silu na neizmjereno daleku pravcu možemo, prema tome, prikazati spregom sila.

Uzmemo li, kao i u općemu slučaju, da je  $\vec{S}_{1,1,2} = -\vec{S}_{2,2,1}$ , slijedi da u ovom posebnom slučaju sile  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  možemo zamijeniti silom  $\vec{R}_1 = \vec{S}_{1,1,1}$  i spregom  $(\vec{S}_{1,1,2}, \vec{S}_{2,2})$  (slike 4.c. i d.).

### Zamjena dviju mimosmjernih sila dvjema silama, od kojih je jedna na zadanu pravcu

Zadani ćemo pravac označiti sa  $s_0$ , a pravce djelovanja sila  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  sa  $s_1$  i  $s_2$  (slika 5.a.).

Na pravcima  $s_1$  i  $s_2$  odabiremo točke  $A_1$  i  $A_2$  te ih spajamo pravcem  $s_{1,2}$ . Točkom  $A_1$  i pravcem  $s_0$  postavljamo ravninu  $\sigma_0$ , pravcima  $s_1$  i  $s_{1,2}$  ravninu  $\sigma_1$ , a pravcima  $s_2$  i  $s_{1,2}$  ravninu  $\sigma_2$ . Presječna ravnina  $\sigma_0$  i  $\sigma_1$  pravac je  $s_{0,1}$  (slika 5.b.).



Slika 5.

(Drugi mogući redoslijed početka: Na pravcima  $s_0$  i  $s_1$  odabiremo točke  $A_0$  i  $A_1$  te ih spajamo pravcem  $s_{0,1}$ . Pravcima  $s_0$  i  $s_{0,1}$  postavljamo ravninu  $\sigma_0$ , pravcima  $s_1$  i  $s_{0,1}$  ravninu  $\sigma_1$ , a točkom  $A_1$  i pravcem  $s_2$  ravninu  $\sigma_2$ . Presječna ravnina  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  pravac je  $s_{1,2}$ .)

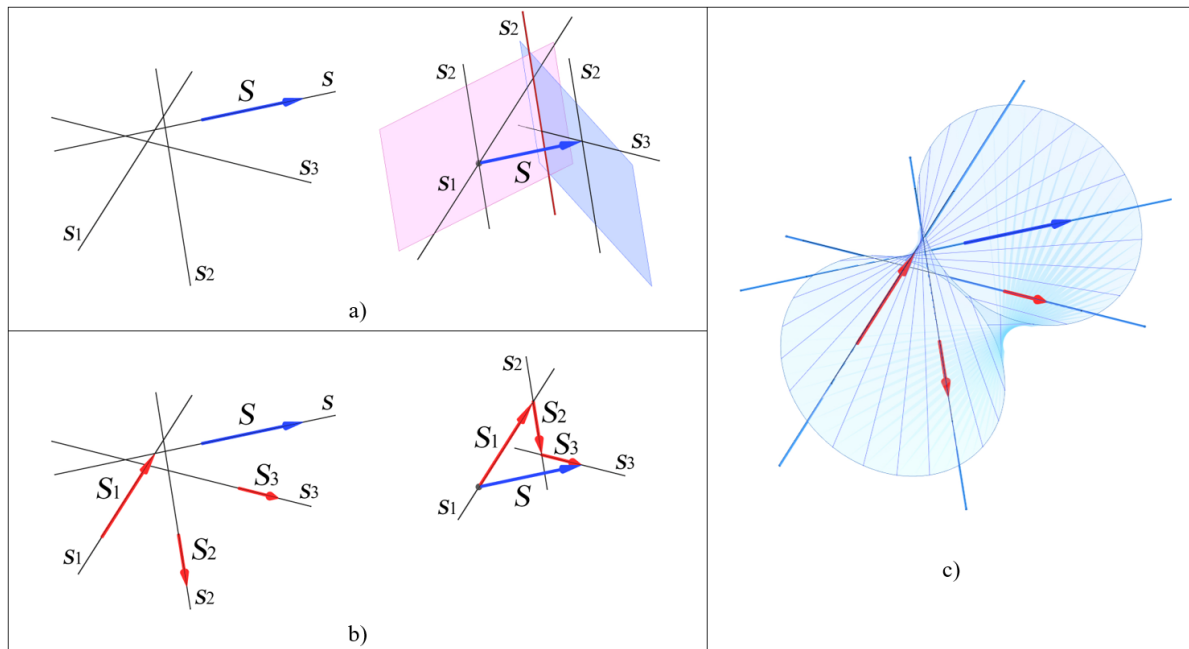
Silu  $\vec{S}_1$  rastavljamo u komponente  $\vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{S}_{1,2}$  na pravcima  $s_{0,1}$  i  $s_{1,2}$ . Uzmemo li da je  $\vec{S}_{2,1} = -\vec{S}_{1,2}$ , određena je i komponenta  $\vec{S}_{2,2}$  sile  $\vec{S}_2$  (u ravnini  $\sigma_2$ ). Time smo sile  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  zamijenili silama  $\vec{S}_{1,1}$  i  $\vec{S}_{2,2}$  (slika 5.c.).

Pravac  $s_{0,1}$ , na kojemu djeluje sila  $\vec{S}_{1,1}$ , siječe zadani pravac  $s_0$  u točki  $A_0$ . Točkom  $A_0$  i pravcem  $s_{2,2}$ , na kojemu djeluje sila  $\vec{S}_{2,2}$ , postavljamo ravninu  $\sigma_3$ . Presječna ravnina  $\sigma_0$  i  $\sigma_3$  pravac je  $s_{0,3}$  (slika 5.d.).

Pravci  $s_0$ ,  $s_{0,1}$  i  $s_{0,3}$  u ravnini su  $\sigma_0$ . Stoga je sila  $\vec{R}_1$  na zadanomu pravcu  $s_0$  određena uvjetima da je jedna njezina komponenta sila  $\vec{R}_{1,1} = \vec{S}_{1,1}$  (na pravcu  $s_{0,1}$ ) i da druga njezina komponenta,  $\vec{R}_{1,2}$ , djeluje na pravcu  $s_{0,3}$ . (Tim je uvjetima, naravno, određena i sila  $\vec{R}_{1,2}$ .) Sila  $\vec{R}_2$  rezultanta je sila  $\vec{R}_{2,1} = -\vec{R}_{1,2}$  i  $\vec{S}_{2,2}$ . Kako te dvije sile djeluju na pravcima  $s_{2,2}$  i  $s_{0,3}$  koji leže u ravnini  $\sigma_3$ , u toj je ravnini i sila  $\vec{R}_2$  (slika 5.e. i f.).

## Rastavljanje sile na izvodnici jednokrlnoga hiperboloida ili hiperboličkoga paraboloida u sile na tri izvodnice istoga sistema

Pravac djelovanja zadane sile  $\vec{S}$  označit ćemo sa  $s$ , a ostala tri pravca sa  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  (slika 6.a. lijevo).



Slika 6.

Budući da su pravci djelovanja svih sila poznati/zadani, rastavljanje provodimo u poligonu sila. Početnom i krajnjom točkom sile  $\vec{S}$  postavljamo pravce  $s_1$  i  $s_3$  usporedne s pravcima  $s_1$  i  $s_3$  u planu položaja.

Svakom se točkom prostora može postaviti transverzala dvaju mimosmjernih pravaca. To, dakako, vrijedi i za neizmjereno daleke točke, što znači da se može naći transverzala dvaju pravaca koja je usporedna s trećim mimosmjernim pravcem. Dakle, prostorni poligon sila možemo zatvoriti pravcem  $s_2$  usporednim s istoimenim pravcem plana položaja (slika 6.a. desno). Stranicama poligona sila na pravcima  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  određene su sile  $\vec{S}_1$ ,  $\vec{S}_2$  i  $\vec{S}_3$  koje djeluju na pravcima  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  u planu položaja (slika 6.b.).

Konstrukcija transverzale mimosmjernih pravaca  $p_1$  i  $p_2$  usporedne s pravcem  $p_3$ :

Pravcima  $p_1$  i  $p_2$  postavljamo ravnine  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  usporedne s pravcem  $p_3$  (ravнина je usporedna s pravcem ako sadrži pravac s njim). Tražena transverzala presječna je ravčina  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .