

Primljen / Received: 11.6.2019.

Ispravljen / Corrected: 26.8.2019.

Prihvaćen / Accepted: 28.8.2019.

Dostupno online / Available online: 10.10.2019.

Pravčasta geometrija i prostorna grafostatika

Autori:



Dr.sc. **Iva Kodrnja**, mag. math.
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
Zavod za matematiku
ikodrnja@grad.hr



Maja Baniček, mag.ing.aedif.
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
Zavod za tehničku mehaniku
mbanicek@grad.hr



Prof.dr.sc. **Krešimir Fresl**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
Zavod za tehničku mehaniku
fresl@grad.hr

Prethodno priopćenje

Iva Kodrnja, Maja Baniček, Krešimir Fresl

Pravčasta geometrija i prostorna grafostatika

Budući da su sile koje djeluju na tijelo u prostoru, bilo da nas zanimaju uvjeti kretanja ili mirovanja (ravnoteže) toga tijela, vektorske veličine vezane za određene pravce djelovanja, tako da se sustav sila može povezati sa skupom pravaca u prostoru, u radu je ukratko prikazana matematička osnova pravčaste geometrije koja kao osnovni element uzima pravac. Primjenom pravčaste geometrije dokazana je poznata tvrdnja da se sustav sila u prostoru, ako su one u općemu položaju, može svesti na dvije sile na recipročnim pravcima. Prikazana je i vizualizacija te tvrdnje metodom prostorne grafostatike.

Ključne riječi:

prošireni euklidski prostor, polaritet, ništični sustav, pravčasti prostor, Plückerove koordinate, linearni kompleks

Preliminary note

Iva Kodrnja, Maja Baniček, Krešimir Fresl

Line geometry and 3D graphic statics

The mathematical basis for the line geometry, with the line as its basic element, is presented in the paper because the forces that act on a body in space - whether we are interested in conditions of movement or immobility (balance) of that body - are vectorial values related to specific lines of action, so that the system of forces can be linked to the set of lines in space. The application of line geometry has proven the known claim that the system of forces in space, provided the forces are in a general position, can be reduced to two forces on reciprocal lines. The visualisation of this claim via the 3D graphic statics is also presented.

Key words:

extended Euclidean space, polarity, null system, line system, Plücker coordinates, linear complex

Vorherige Mitteilung

Iva Kodrnja, Maja Baniček, Krešimir Fresl

Projektive Geometrie und räumliche Graphostatik

Da die Kräfte, die auf einen Körper im Raum einwirken, unabhängig davon, ob wir an den Bedingungen der Bewegung oder der Ruhe (Gleichgewicht) dieses Körpers interessiert sind, Vektorgrößen sind, die auf bestimmte Wirkrichtungen bezogen sind, so dass das Kräftesystem auf eine Reihe von Richtungen im Raum bezogen werden kann, wird in dieser Arbeit in kurzen Zügen die mathematische Basis der projektiven Geometrie dargestellt, die als Grundelement die Richtung annimmt. Es ist allgemein bekannt, dass das Kräftesystem im Raum, wenn die Kräfte sich in einer allgemeinen Position befinden, unter Anwendung der projektiven Geometrie auf zwei Kräfte in wechselseitigen Richtungen reduziert werden kann. Die Visualisierung dieser Behauptung durch die Methode der räumlichen Graphostatik wird ebenfalls dargestellt.

Schlüsselwörter:

erweiterter euklidischer Raum, Polarität, Nullsystem, projektiver Raum, Plücker-Koordinaten, linearer Komplex

1. Uvod

Pravčasta geometrija grana je geometrije u kojoj je glavni element pravac, te proučava tvorevine poput linearnih kompleksa, kongruencija i pravčastih ploha, sastavljene od beskonačno mnogo pravaca. Može se reći da je ishodište pravčaste geometrije u statici i kinematici krutih tijela, ponajprije u činjenici da sile koje djeluju na različitim, iako usporednim pravcima imaju različite učinke te da rotacije oko različitih, iako usporednih osi dovode tijelo u različite položaje.

A. F. Möbius je u radu [1] iz 1833. godine pokazao da se opći sustav sila u prostoru može zamijeniti dvjema silama na pridruženim pravcima ništičnoga sustava, nazvanima recipročnim pravcima. Ništični je sustav vrsta polariteta koje je kao preslikavanje projektivne ravnine definirane konikama analizirao već G. Desargues u 16. stoljeću sintetičkom metodom, dok su prostorne polaritete definirane kvadrikama opisali G. Monge krajem 18. stoljeća te u 19. stoljeću njegov student J. V. Poncelet, koji se smatra osnivačem projektivne geometrije [2]. Möbiusova su razmatranja analitičko-geometrijske naravi, no terminologija kojom smo opisali njegove rezultate i koju danas za to rabimo, potječe od J. Plückera (slika 1. desno) i njegovoga rada [3] iz 1865. godine. Taj rad predstavlja rođenje pravčaste geometrije.

Ipak, takav bi novitet bio nemoguć bez matematičara H. Grassmanna (slika 1. lijevo). On je pokazao da se, pa i kako se, osim točaka, i druge figure prostora, u ovom slučaju pravci, mogu prikazati koordinatama, za razliku od njihove uobičajene definicije kao skupa točaka koji zadovoljavaju neku jednadžbu (ili više njih), te se njegova knjiga [4] iz 1848. godine smatra temeljem geometrijske (i linearne) algebre. Neovisno o Plückeru, prikaz pravaca s pomoću šest koordinata uveo je i A. Cayley u radu [5] iz 1860. godine.



Slika 1. Hermann Grassmann (1809. - 1877.) (lijevo) i Julius Plücker (1801. - 1868.) (desno), preuzeto s [6, 7]

Plücker je bio i fizičar i matematičar, poput većine matematičara tog doba; njegova teorija pravčastoga prostora nastala je inspirirana mehanikom, te je u sljedećemu radu [8] iz 1866. godine povezo sustave sila s linearnim kompleksima.

Spomenut ćemo i F. Kleina, jednog od najvećih geometričara 19. stoljeća, i njegov osvrt [9] na spomenute Plückerove radove, iz 1871. godine, u kojemu je razjasnio neke nedoumice te još dublje povezo geometriju pravčastoga prostora i mehaniku krutih tijela.

Iako je ishodište pravčaste geometrije u mehanici, ona se u svojem razvoju udaljila od mehanike, a njezini se rezultati nisu primjenjivali u rješavanju praktičnih zadataka. Istodobno s pravčastom geometrijom, ali neovisno o njoj, radovima W. J. M. Rankinea [10], J. C. Maxwella [11, 12], C. Culmanna [13] i L. Cremona [14] razvila se grafostatika, začeta u radovima S. Stevina (paralelogram i trokut sila, slutnja verižnoga poligona) s kraja šesnaestoga i P. Varignonova (verižni poligon) s kraja sedamnaestoga stoljeća. Iako su Maxwell i Cremona dokaze valjanosti konstrukcije recipročnih likova (plana položaja/ verižnoga poligona i poligona sila) proveli u prostoru tretirajući te ravninske likove kao projekcije dualnih poliedara (vrhovi jednoga leže na stranama drugog, i obratno (par dualnih tetraedara otkrio je Möbius [1]), postupci grafostatike ograničeni su na ravninu. Unatoč tom ograničenju, grafostatika je u posljednjoj trećini devetnaestoga i prvoj trećini dvadesetoga stoljeća bila vrlo popularno oruđe građevinskih inženjera.

Tri su moguća razloga zašto grafostatika u ono vrijeme nije, osim u rijetkim slučajevima [15, 16], proširena na prostor. Grafičke konstrukcije mnogo su složenije, jer se provode na projekcijama prostornih sustava na ravnine (potrebne su barem dvije projekcije), a predočivanje stvarnih prostornih odnosa ("vraćanje" s crteža u prostor) može biti teško, nekima katkad i nemoguće. Uz to, isključimo li slučaj ravnoteže, za razliku od sustava sila u ravnini, koji se uvijek može svesti ili na rezultantu ili na rezultirajući moment (spreg sila), u prostoru postoji i treća mogućnost: rezultirajuće djelovanje sastavljeno od rezultirajuće sile i rezultirajućega momenta (u odnosu na odabranu točku); samo ako je rezultirajući moment okomit na rezultirajuću silu, sustav je svodiv na rezultantu.

Razvoj računala i alata za računalnu grafiku i modeliranje u tri dimenzije oživio je zanimanje za grafostatiku i, posebice, za njezino proširenje u prostor. U brojnim radovima posvećenima prostornoj grafostatici mogu se uočiti dva glavna pristupa, poliedarski i vektorski. U poliedarskom pristupu sile se prikazuju stranama poliedara okomitima na pravce njihova djelovanja, a njihovi su intenziteti jednaki plošinama tih strana [17, 18]. Vektorski je pristup izravno proširenje ravninske grafostatike: sile se prikazuju vektorima [19]. Time je očuvano jedno od najvažnijih svojstava grafostatike – zor. Naime, "nova" računalna grafostatika namijenjena je ponajprije oblikovanju konstrukcija – nalaženju slobodnih, ali uravnoteženih oblika [20]. Projektivnogeometrijske teorijske osnove konstruiranja recipročnih dijagrama prikazane su u [21].

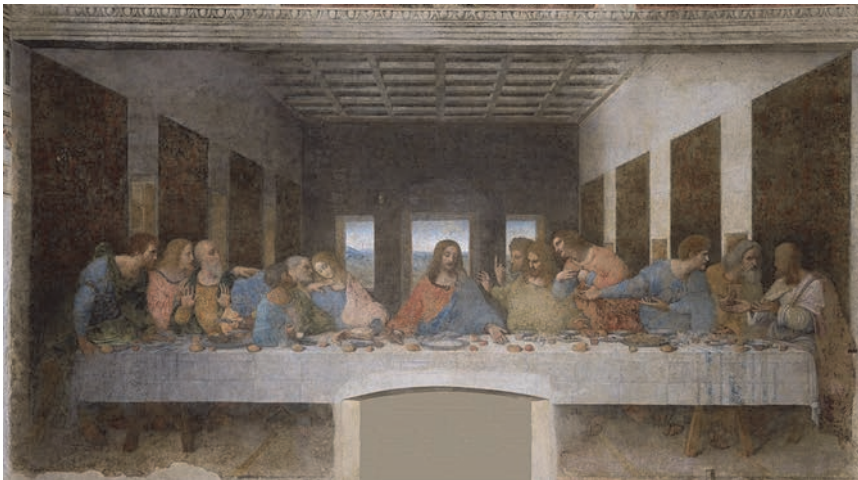
Pravčasta geometrija pruža mogući treći pristup prostornoj grafostatici. Kao što radovi Möbiusa, Plückera i Cayleya pokazuju, pravčasta je geometrija teorijska podloga konstrukcijskonogeometrijskih postupaka baratanja silama, a, s druge strane, uz Grassmannovu algebru, omogućava

neposredan prijevod tih postupaka u algebarske izraze te potom u programski kod.

Geometrija pravčastoga prostora opisana je u trećemu poglavlju, a projektivnogeometrijske osnove, nužne za njezino uvođenje, sažeto su prikazane u drugom poglavlju. Kao primjer primjene pravčaste geometrije u statici, u četvrtomu je poglavlju dokazana poznata tvrdnja da se opći sustav sila u prostoru može zamijeniti dvjema silama, a prikazano je i grafostatičko rješenje.

2. Projektivno proširenje euklidskoga prostora

Geometrija na koju smo navikli još od najranijega školovanja, u kojoj smo učili osnovne konstrukcije ravninskih figura ravnalom i šestarom te kasnije, u ravnini ali i u prostoru, rješavali složenije probleme primjenom analitičke metode, jest euklidska geometrija. U tom je okruženju prirodno definirati pojmove kao što su udaljenost, kut, paralelnost, okomitost. No, postoje i drugačije geometrije, a ona koju ćemo proučavati navedene pojmove ne sadrži, niti su predmet njezinoga istraživanja, a za konstruktivne postupke dovoljno je koristiti se samo ravnalom. Projektivna geometrija razvijala se postupno od 15. stoljeća, te je bila predmet istraživanja mnogih znanstvenika. Motivacija za takvu vrstu geometrije proizašla je iz umjetnosti, ponajviše zahvaljujući razvoju geometrijskih pravila centralne projekcije (perspektive) koja je neizostavni sastojak brojnih renesansnih djela [22]. Kao što vidimo na poznatom Da Vincijevu remek-djelu *Posljednja večera* (slika 2.), glavna je karakteristika te projekcije da se paralelni pravci prostora na slici sijeku u konačnosti.



Slika 2. Leonardo da Vinci: *Posljednja večera*, (1495.-1498.), preuzeto s [23]

2.1. Projektivni prostor

Iako je u literaturi, a i povijesno, detaljno i temeljito najviše proučavana projektivna ravnina, te zatim uvedeno njezino poopćenje na n dimenzija [22, 24], ovdje ćemo se baviti isključivo trodimenzionalnim projektivnim prostorom. Stoga ćemo oznaku "trodimenzionalni" u nastavku izostaviti.

Osnovni elementi projektivnoga prostora su, kao i u euklidskomu prostoru, točke, pravci i ravnine, te među njima definirana *relacija incidencije*, odnosno pripadnosti. Na primjer, kažemo da je točka A incidentna s pravcem p ako točka A leži na pravcu p , i simetrično, pravac p je incidentan s točkom A ako pravac p prolazi točkom A .

Uz ova tri skupa osnovnih elemenata i relacije incidencije, zadaje se i niz aksioma kojima je osigurano da imamo "dovoljno" osnovnih elemenata te kojima je formalno opisana relacija incidencije [24]. Tako definirana struktura naziva se *projektivnim prostorom*.

Na primjer, aksiom A6 [24] osigurava da postoje elementi izvan ravnine:

Aksiom A6: *Ako su A, B i C tri nekolinearne točke (nisu sve tri incidentne s istim pravcem), tada postoji barem jedna točka D koja ne leži u ravnini određenoj točkama A, B i C (nisu sve četiri incidentne s istom ravninom).*

Dualnost je iznimno važan pojam projektivne geometrije, koji su u 19. stoljeću gotovo istodobno otkrili J. V. Poncelet i J. D. Gergonne, a koji u projektivnomu prostoru glasi:

Načelo dualnosti projektivnoga prostora: *Zamijenimo li u nekoj istinitoj tvrdnji projektivne geometrije prostora pojam točka dualnim pojmom ravnina, i obrnuto, a pojmove pravca i incidencije ostavimo nepromijenjenima, dobit ćemo ponovo istinitu tvrdnju projektivne geometrije prostora. Takve se dvije tvrdnje nazivaju dualnim tvrdnjama.*

Primjerice, tvrdnja dualna aksiomu A6 glasi: *Ako su α, β i γ tri ravnine koje se ne sijeku u pravcu (nisu sve tri incidentne s istim pravcem), tada postoji barem jedna ravnina δ koja ne prolazi točkom u kojoj se sijeku ravnine α, β i γ (nisu sve četiri incidentne s istom točkom).*

2.2. Prošireni euklidski prostor

Kad imamo neku apstraktnu strukturu, kao što je navedeno aksiomatsko utemeljenje projektivnoga prostora, želimo naći njezinu realizaciju, odnosno *model* te strukture.

Od samoga je početka matematičarima bilo u interesu povezati standardni euklidski prostor i projektivni prostor. Sada ćemo opisati njihovu konstrukciju proširenja [24], koja se i dandanas rabi te se, između ostaloga, na njoj temelji izučavanje nacrtna geometrije [25]. Označimo s E^3 realan euklidski prostor.

Svakom pravcu u E^3 dodajemo, to jest nadopunjavamo ga jednom *beskonačno dalekom* (nepravom, idealnom) *točkom*. Za neki pravac ta je nadodana točka njegovo sjecište sa svakim pravcem s kojim je on paralelan. Svakoj ravnini u E^3 dodajemo, to jest nadopunjavamo je jednim *beskonačno dalekim* (nepravim, idealnim) *pravcem*. Na tom se beskonačno dalekomu pravcu neke određene ravnine nalaze sve beskonačno daleke točke

pravaca koji leže u toj ravnini, te je on presječnica te ravnine sa svakom njoj paralelnom ravninom.

Naposljetku, cijelom prostoru \mathbf{E}^3 dodajemo jednu *beskonačno daleku* (nepravu, idealnu) ravninu. U toj se ravnini nalaze svi beskonačno daleki pravci svih ravnina u \mathbf{E}^3 te beskonačno daleke točke svih pravaca u \mathbf{E}^3 .

Tako definirano proširenje zadovoljava sve aksiome projektivnoga prostora, te je to model projektivnoga prostora, projektivno realno proširenje euklidskoga prostora, a nazivamo ga *proširenim euklidskim prostorom* koji ćemo označavati s $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$. Napomenimo da su u $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ konačni i beskonačni elementi ravnopravni.

2.3. Analitički model; homogene koordinate

Budući da aksiomatski pristup dopušta samo konstrukcijske postupke ravnalom, a nama je za naš cilj potrebno i jače oruđe, u $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ ćemo uvesti koordinatizaciju točaka [24].

U euklidskom prostoru \mathbf{E}^3 imamo standardni Kartezijev koordinatni sustav, u kojemu je ishodište točka $O(0, 0, 0)$ te imamo tri okomite koordinatne osi (apscisa ili os x_1 , ordinata ili os x_2 i aplikata ili os x_3), na kojima zadajemo i jedinične dužine. Svakoj točki prostora \mathbf{E}^3 pridružene su tada tri koordinate (x_1, x_2, x_3) koje predstavljaju njezine ortogonalne projekcije na koordinatne osi. Takve koordinate nazivamo *afinim koordinatama točke*.

Točkama proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ dodajemo još jednu koordinatu, obično na početak, pa je točka u $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ zadana sa četiri koordinate x_0, x_1, x_2, x_3 , pri čemu ne smiju sva četiri broja x_i biti jednaka 0 te mora vrijediti:

$$\lambda(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3) = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3), \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

odnosno točka je dana kao klasa uređenih četvorki realnih brojeva $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ koje se nazivaju *homogenim koordinatama točke*.

Beskonačne daleke točke one su za koje je $x_0 = 0$ te ih, primjenom jednadžbe (1), možemo prikazati u obliku $\left(0 : 1 : \frac{x_2}{x_1} : \frac{x_3}{x_1}\right)$, iz čega vidimo da leže u jednoj ravnini jer čine dvoparametarski skup.

Za konačne je točke $x_0 \neq 0$, obično uzimamo $x_0 = 1$, te ih možemo jednoznačno poistovjetiti s točkama prostora \mathbf{E}^3 tako da iz homogenih koordinata $(1 : x_1 : x_2 : x_3)$ točke prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ pročitamo affine koordinate (x_1, x_2, x_3) te iste točke promatrane kao točke prostora \mathbf{E}^3 .

U analitičkoj geometriji prostora \mathbf{E}^3 ravninu promatramo kao skup točaka, te je obično zadajemo jednadžbom

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D \quad (2)$$

Iz te se jednadžbe vidi da ravnina siječe koordinatne osi u točkama $\left(\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{D}{B}, 0\right)$ i $\left(0, 0, \frac{D}{C}\right)$, pa bismo mogli pomisliti da uređenu trojku brojeva $\left(\frac{D}{A}, \frac{D}{B}, \frac{D}{C}\right)$ možemo uzeti kao koordinate ravnine, no dolazi do problema s ravninama kroz ishodište, koje bi tada sve imale istu koordinatu $(0, 0, 0)$.

S druge strane, u projektivnomu proširenju $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ ravnina je dualna točki, te uvodimo homogene koordinate na skup ravnina tako da svakoj ravnini pridružujemo klasu uređenih četvorki realnih brojeva $(v_0 : v_1 : v_2 : v_3)$ tako da nisu sva četiri broja $v_i \in \mathbb{R}$ istovremeno jednaka 0 te da vrijedi:

$$\lambda(v_0 : v_1 : v_2 : v_3) = (\lambda v_0 : \lambda v_1 : \lambda v_2 : \lambda v_3) = (v_0 : v_1 : v_2 : v_3), \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Uvjet incidencije točke $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ i ravnine $\mathbf{v} = (v_0 : v_1 : v_2 : v_3)$, obje zadane svojim homogenim koordinatama, glasi:

$$x_0 v_0 + x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0 \quad (4)$$

te je iz izraza (4) vidljiva dualnost projektivne geometrije prostora.

Također, iz (4) vidimo da beskonačno daleka ravnina ima koordinate $(v_0 : 0 : 0 : 0)$, pri čemu je $v_0 \neq 0$, dok su ravnine u konačnosti jednoznačno određene, pri čemu je uređena trojka (v_1, v_2, v_3) njihov normalni vektor, a ravnine kroz ishodište karakterizira $v_0 = 0$.

2.4. Algebarska geometrija projektivnoga prostora

Točke proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ imaju homogene koordinate kao u jednadžbi (1) i pridruživanjem:

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (1 : x_1 : x_2 : x_3) \quad (5)$$

trodimenzionalni je vektorski prostor \mathbb{R}^3 uložen u $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ kao njegov potprostor.

Da bi definicija djelovanja polinoma f u četiri varijable s realnim koeficijentima na homogenim koordinatama točke projektivnog prostora imala smisla, uzevši u obzir jednadžbu (1), zahtijevamo da vrijedi:

$$f(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3) = \lambda^4 f(x_0 : x_1 : x_2 : x_3), \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Polinome za koje vrijedi svojstvo (6) nazivamo *homogenim polinomima* stupnja 4, a za točku $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ kažemo da je *nultočka homogenog polinoma* f ako je $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$.

Skupovi u $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ definirani kao skupovi nultočaka jednoga ili više polinoma nazivaju se *algebarskim skupovima* [26]. Posebno, algebarski skupovi definirani jednom jednadžbom nazivaju se *algebarskim plohamama* [25].

2.5. Polariteti i ništični sustavi proširenoga euklidskog prostora

U projektivnomu prostoru poznajemo dvije glavne vrste preslikavanja [24]. Prva su automorfizmi prostora, bijekcije prostora na samoga sebe koje čuvaju incidenciju - svakoj je točki pridružena točno jedna točka, a slike su kolinearnih točaka također kolinearne točke. Takva preslikavanja projektivnih prostora nazivaju se *projektivnim kolineacijama*. Njihovo

djelovanje na pravcima i ravninama određeno je djelovanjem na točkama, budući da je pravac razapet s dvije, a ravnina s tri točke, te svojstvo čuvanja incidencije ima za posljedicu da će slika pravca biti pravac, a slika ravnine ponovno ravnina.

Grupi svih projektivnih kolineacija proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ (taj je skup grupa jer su inverz i kompozicija kolineacija ponovno kolineacije) odgovara grupa svih regularnih realnih matrica tipa 4×4 , točnije ta je grupa izomorfnu njezinom kvocijentu po grupi realnih dijagonalnih matrica tipa 4×4 , budući da svaka takva matrica inducira jediničnu kolineaciju (identitetu). Dakle, grupa kolineacija proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ je projektivna linearna grupa, $\text{PGL}_4(\mathbb{R}) = \text{GL}_4(\mathbb{R})/\lambda\mathbb{R}^4$.

Točke i ravnine su dualne u projektivnom prostoru, pa drugu vrstu preslikavanja projektivnih prostora čine preslikavanja koja bijektivno točkama pridružuju ravnine te čuvaju incidenciju. Takva preslikavanja projektivnoga prostora nazivamo *projektivnim korelacijama*. Svakomu je pravcu, kao spojnici dviju točaka, korelacijom pridružen pravac koji je presječnica dviju ravnina u koje se početne dvije točke preslikaju. Inverz korelacije ponovno je korelacija, dok je kompozicija dviju korelacija kolineacija.

Za sve točke koje leže u ravnini koja je korelativna slika neke točke A kažemo da su *konjugirane* točki A, a za one točke koje su incidentne sa svojom slikom kažemo da su *samokonjugirane*. Za pravce koji su pridruženi korelacijom kažemo da su konjugirani.

Korelacije koje su involutorne, što znači da komponirane same sa sobom daju jediničnu kolineaciju (identitetu) nazivamo *polaritetima* [24, 27, 28].

2.5.1. Analitički pristup

Prikažimo točku $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ vektorom $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ i analogno ravninu $v = (v_0 : v_1 : v_2 : v_3)$ vektorom $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)^T$. Sada jednadžbu uvjeta incidencije točke i ravnine (4) možemo zapisati u matricnom obliku:

$$x^T v = 0 \text{ ili } v^T x = 0 \quad (7)$$

Pretpostavimo da je q korelacija proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$. Tada možemo preslikavanje skupa točaka na skup ravnina (koje ćemo označavati s v' da naznačimo da su elementi kodomene ovog preslikavanja) prikazati regularnom realnom matricom tipa 4×4 [28]:

$$q \dots v' = Ax, \det(A) \neq 0 \quad (8)$$

Jasno je da je preslikavanje sa skupa ravnina na skup točaka također dano nekom regularnom matricom tipa 4×4 :

$$q' \dots x' = Bv, \det(B) \neq 0 \quad (9)$$

Budući da korelacija čuva incidenciju, zbog (7), (8) i (9) imamo:

$$(Ax)^T Bv = 0 /^T \quad (10)$$

$$v^T (B^T A)x = 0.$$

Iz toga slijedi da je $B = A^{-T}$, odnosno za korelaciju kojoj preslikavanje skupa točaka na skup ravnina prikazujemo pomoću matrice A, preslikavanje sa skupa ravnina na skup točaka prikazano je matricom A^{-T} .

Za polaritet q , odnosno za involutornu korelaciju, vrijedi $q' \circ q = \pi$, gdje je π jedinična kolineacija, pa iz (7), (8) i (9) imamo $\pi \dots x' = A^{-T}x$, te zbog homogenosti koordinata točaka dobivamo $A^{-T}A = \lambda \text{Id}$ iz čega mora slijediti $\lambda = \pm 1$. U slučaju $\lambda = 1$, matrica A je simetrična $A = A^T$, dok je u slučaju $\lambda = -1$, matrica antisimetrična $A = -A^T$.

Postoje tri vrste polariteta definiranih simetričnim matricama [28]. Oni se dijele s obzirom na postojanje samokonjugiranih točaka. Za neku točku x, njoj konjugirane točke bit će one točke y koje zadovoljavaju izraz (11)

$$y^T Ax = 0 \quad (11)$$

dok su samokonjugirane točke rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x^T Ax = 0 \quad (12)$$

koja definira kvadriku u prostoru $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$.

Polaritet zadan antisimetričnom matricom naziva se *ništičnim sustavom* (*nulpolaritetom*). U ništičnom sustavu sve su točke samokonjugirane; točku nazivamo *ništištem* njoj pridružene ravnine, a ravninu njezinom *ništičnom ravninom* [29]. Ako pravac prolazi kroz dvije točke, tada mu je pridruženi pravac presječnica njihovih ništičnih ravnina. Pravac koji prolazi točkom i sadržan je u njezinoj ništičnoj ravnini pridružen je samome sebi. Takve pravce nazivamo *ništičnim pravcima* ili *ništičnim zrakama* ili *nulpravcima*.

3. Pravčasti prostor

U potpoglavlju 2.3 vidjeli smo da u proširenomu euklidskom prostoru $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ možemo točke i, dualno, ravnine prikazati koordinatama, čime te skupove gledamo kao "glavne" elemente, dok su pravci izvedeni elementi, te na njih možemo gledati na dva dualna načina. Prvo, pravac možemo gledati kao spojnicu dviju točaka, odnosno kao skup točaka razapet tim dvjema točkama. Projektivnim rječnikom, pravac je nositelj niza točaka koje sadrži. Dualno, ako su ravnine osnovni elementi, pravac je izveden kao presječnica dviju ravnina. Projektivnim rječnikom, pravac je nositelj pramena svih ravnina prostora koje ga sadrže. Ako želimo promatrati geometrijsku interpretaciju proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ u kojoj je pravac osnovni element, zakoračili smo u geometriju pravčastoga prostora.

Skup svih pravaca proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$, zajedno s relacijom incidencije, to jest geometrijskom strukturom naslijeđenom iz projektivnoga prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$, nazivamo *pravčastim prostorom*.

U proširenomu euklidskom prostoru $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ koji je trodimenzionalan, točke, i dualno ravnine, možemo opisati s tri realne koordinate; to su troparametarski skupovi, odnosno kažemo da točka i ravnina u prostoru $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ ima ∞^3 . Pravaca ima više! Svakom točkom prostora prolazi ∞^2 pravaca (rječnikom projektivne geometrije: svaka je točka vrh snopa pravaca). No, kako pravac sadrži ∞ točaka, pripada u ∞ snopova. Stoga u prostoru $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ ima $\infty^3 \cdot \infty^2 / \infty^1 = \infty^4$ pravaca.

U proširenomu su euklidskom prostoru $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ objekti od interesa neprekinuto povezani skupovi točaka, točnije krivulje (skupovi od ∞^1 neprekinuto povezanih točaka, odnosno jednoparametarski skupovi točaka) i plohe (skupovi od ∞^2 neprekinuto povezanih točaka, odnosno dvoparametarski skupovi točaka). Analogno, u pravčastomu prostoru imamo tri vrste proučavanih objekata [28, 29]:

- **pravčasta ploha:** skup od ∞^1 neprekinuto povezanih pravaca, jednoparametarski skup,
- **kongruencija:** skup od ∞^2 neprekinuto povezanih pravaca, dvoparametarski skup,
- **kompleks:** skup od ∞^3 neprekinuto povezanih pravaca, troparametarski skup.

Pravčaste plohe su, kao što je navedeno, plohe i u točkovnom smislu, te su detaljno proučavane kao plohe davno prije no što se pojavio pojam pravčastoga prostora. S druge strane, kongruencije i kompleksi nisu ni približno toliko proučavani. Jedan od razloga zasigurno je činjenica da kompleksi i kongruencije, gledani kao skupovi točaka, ispunjavaju cijeli prostor, to jest sadrže sve točke prostora, što uvelike komplicira mogućnosti njihova predočivanja.

Kompleksi i kongruencije su se kao objekti proučavanja pojavili tek u 19. stoljeću kada je J. Plücker u svojem radu [3] po uzoru na Grassmannovu koordinatizaciju linearnih r -dimenzionalnih potprostora vektorskih prostora dimenzije n , $r < n$, uzeo pravac kao temeljni objekt geometrije te mu dao koordinate i posljedično, gledajući linearne i kvadratne jednadžbe u tim pravčastim koordinatama, definirao komplekse i kongruencije pravaca.

3.1. Plückerove koordinate pravca

Biranje koordinatnoga sustava u proširenomu euklidskom prostoru $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ ekvivalentno je biranju baze prostora \mathbb{R}^4 . Pretpostavimo da vektori e_0, \dots, e_3 čine bazu za \mathbb{R}^4 . Vanjski produkt dva vektora operacija je koja tim dvama vektorima pridružuje vektor u vektorskomu prostoru koji ćemo označiti s $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$, te za dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^4$ njihov vanjski produkt označavamo s $x \wedge y$. Operacija vanjskoga produkta mora zadovoljavati sljedeća dva svojstva, koja moraju vrijediti za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^4$ i za sve realne brojeve α, β :

$$x \wedge (\alpha y + \beta z) = \alpha x \wedge y + \beta x \wedge z \text{ i } (\alpha x + \beta y) \wedge z = \alpha x \wedge z + \beta y \wedge z \quad (13)$$

što znači da je ta operacija *bilinearna*, to jest linearna u oba argumenta, te

$$x \wedge y = -y \wedge x \quad (14)$$

odnosno operacija je *antikomutativna* [4].

Zahtjevi bilinearnosti (13) i antikomutativnosti (14) jedinstveno određuju šesterodimenzionalni vektorski prostor $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$ ([28], lema 2.1.1), te je njegova baza sastavljena od sljedećih šest vektora:

$$e_0 \wedge e_1, e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2 \quad (15)$$

Ako točku od $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ prikažemo kao uređenu četvorku realnih brojeva, odnosno u vektorskomu obliku $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, tada je možemo prikazati u bazi za \mathbb{R}^4 s $x = \sum_{i=0}^3 x_i e_i$, te će vanjski produkt dviju točaka i prikazan u bazi (15) biti

$$x \wedge y = (x_0 y_1 - x_1 y_0) e_0 \wedge e_1 + (x_0 y_2 - x_2 y_0) e_0 \wedge e_2 + (x_0 y_3 - x_3 y_0) e_0 \wedge e_3 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_2 \wedge e_3 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_3 \wedge e_1 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_1 \wedge e_2 \quad (16)$$

Koeficijente iz (16) možemo interpretirati kao poddeterminante tipa 2×2 matrice 2×4

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Označimo li s l_{ij} koeficijent uz vektor baze $e_i \wedge e_j$ iz prikaza (16), tada će svi elementi oblika

$$L = (l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{23}, l_{31}, l_{12}) \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4 \quad (18)$$

odgovarati nekomu pravcu u $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ ako i samo ako vrijedi ([28], prema 2.1.2):

$$l_{01} l_{23} + l_{02} l_{31} + l_{03} l_{12} = 0 \quad (19)$$

Jednadžba (19) naziva se *Plückerovim identitetom*.

Ako je pravac dan kao spojnica dviju točaka, koeficijente vektora $x \wedge y$ iz raspisa (16) nazivamo *Plückerovim koordinatama pravca*. Odabравši neke druge dvije točke koje također leže na pravcu L , svi će se koeficijenti novoga zapisa razlikovati od onih iz (18) za isti skalarni faktor ([28], prema 2.1.2.). Stoga Plückerove koordinate pravca zapisujemo u homogenomu obliku

$$(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12}) = (I, \bar{I}) \quad (20)$$

pri čemu je $I = (l_{01}, l_{02}, l_{03})$ i $\bar{I} = (l_{23}, l_{31}, l_{12})$.

Ako je pravac L zadan kao presječnica dviju ravnina, koje možemo prikazati njihovim homogenim koordinatama kao u (3), odnosno kao vektore $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ i u \mathbb{R}^4 , tada kao u (16) možemo definirati njihov vanjski produkt u $\Lambda^2 \mathbb{R}^4$, te taj vektor označavamo

$$(I^*_{01}, I^*_{02}, I^*_{03}, I^*_{23}, I^*_{31}, I^*_{12}) = u \wedge v \quad (21)$$

Dualne Plückerove koordinate pravca L (osne koordinate) dane su s $(l_{01}^*, l_{02}^*, l_{03}^*, l_{23}^*, l_{31}^*, l_{12}^*)$ te vrijedi ([28], lema 2.1.4):

$$(l_{01}^*, l_{02}^*, l_{03}^*, l_{23}^*, l_{31}^*, l_{12}^*) = (l_{23}^*, l_{31}^*, l_{12}^*, l_{01}^*, l_{02}^*, l_{03}^*) = (\bar{l}, l) \quad (22)$$

pri čemu su Plückerove koordinate pravca L dane s (l, \bar{l}) kao u (20).

3.2. Kleinov model

U prethodnomu poglavlju 3.1 svakomu pravcu prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ pridružili smo uređenu homogenu šestorku brojeva (20), no od svih mogućih homogenih šestorki realnih brojeva, samo one koje zadovoljavaju relaciju (19) odgovaraju pravcima prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$. Time je određeno ulaganje skupa pravaca u realni projektivni peterodimenzionalan prostor $\mathbf{P}^5(\mathbb{R})$ kojim pravcu pridružujemo onu točku prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ koja odgovara njegovim Plückerovim koordinatama. To je preslikavanje prvi uspostavio Felix Klein, te se to preslikavanje naziva *Kleinovim preslikavanjem*.

Uvjet (19) homogena je kvadratna jednačba u Plückerovim koordinatama, te definira kvadriku u $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ koja se naziva *Kleinovom kvadrikom* i označava s M_2^4 . Važan je sljedeći teorem ([28], teorem 2.1.6):

Pravci proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ su, preko Kleinova preslikavanja, u obostrano jednoznačnoj vezi s točkama Kleinove kvadrike $M_2^4 \subset \mathbf{P}^5(\mathbb{R})$.

Time je nađen točkovni model pravčastoga prostora.

3.3. Linearni kompleksi i ništični sustavi

U poglavlju 2.5.1. analitički smo opisali ništični sustav, polaritet u kojemu su sve točke samokonjugirane, odnosno leže u svojim ništičnim ravninama, kao polaritet zadan antisimetričnom matricom A tipa 4×4 . Za takvu matricu $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 3}$ vrijedi $a_{ii} = 0$ i $a_{ij} = -a_{ji}$ i pa je ona definirana sa šest parametara $a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$. Uvodimo sljedeće oznake:

$$\bar{\mathbf{a}} = (a_{01}, a_{02}, a_{03}) \quad \mathbf{a} = (a_{23}, a_{31}, a_{12}) \quad (23)$$

Ništični je pravac onaj pravac koji je pridružen samome sebi. To su oni pravci koji leže u ništičnoj ravnini neke svoje točke. Ako je neki pravac spojnica dviju konjugiranih točaka, tada svaka od njih leži i u svojoj ništičnoj ravnini i u ništičnoj ravnini one druge točke. Stoga slika njihove spojnice, koja je presječnica njihovih ništičnih ravnina, mora sadržavati obje te točke, odnosno možemo reći da je neki pravac ništičan ako i samo ako je spojnica dviju konjugiranih točaka.

Svakom točkom prostora prolazi jedan pramen ništičnih zraka koji čine svi pravci kroz tu točku koji leže u njezinoj ništičnoj ravnini. Takvih pravaca u prostoru ima ∞^3 , te oni čine linearni kompleks [29]. Pokažimo sada analitičkom metodom postojanje toga kompleksa. Karakterizirajmo ništične pravce analitički koristeći se homogenim koordinatama pravca $L = (l, \bar{l})$ kao u (20):

Pravac L ništični je pravac ništičnoga sustava zadanoga matricom $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 3}$ ako i samo ako vrijedi:

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0 \quad (24)$$

Dokaz ove tvrdnje čisto je računski nakon što uzmemo pravac kao spojnicu dviju konjugiranih točaka te iskoristimo uvjet konjugiranosti točaka (13) i definiciju homogenih koordinata pravca kao vanjskoga produkta dviju točaka (16) ([28], lema 3.1.2.). Slika $L' = (l', \bar{l}')$ pravca L pri ništičnomu sustavu zadanom matricom $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 3}$ dana je s izrazom (25):

$$(l', \bar{l}') = (\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}) (l, \bar{l}) - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{l}}) (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) \quad (25)$$

te par pridruženih pravaca L i L' nazivamo *recipročnim parom pravaca*.

Jednačba (24) linearna je jednačba u Plückerovim koordinatama pravca, te skup pravaca L koji zadovoljavaju tu jednačbu nazivamo *linearnim kompleksom pravaca*, a vektor $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ *homogenim koordinatnim vektorom* linearnoga kompleksa.

Ako vektor $(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$ odgovara nekomu pravcu prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$, odnosno zadovoljava Plückerov identitet (19), tada linearni kompleks nazivamo *singularnim linearnim kompleksom*. Uvjet (24) govori nam da sadrži one pravce prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ koji sijeku dani pravac $(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$, koji tada ima naziv *os singularnoga kompleksa*. U tom slučaju vektor $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ nije povezan s ništičnim sustavom, budući da antisimetrična matrica koju bismo izgradili iz njegovih koeficijenata kao $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 3}$ zbog (19) ne bi bila regularna, odnosno ne može definirati ništični sustav.

Ako vektor $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ definira ništični sustav, odnosno ne odgovara pravcu prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$, tada linearni kompleks \mathcal{L} nazivamo *regularnim linearnim kompleksom*.

3.3.1. Geometrija ništičnoga sustava

Regularni linearni kompleks \mathcal{L} pridružen ništičnomu sustavu sadrži sve ništične pravce toga linearnog sustava. Svaki preostali pravac prostora L , koji nije u \mathcal{L} , ima svoj recipročni pravac L' i tada ništična ravnina svake točke pravca L sadrži pravac L' i obratno, svakoj je ravnini kroz pravac L ništište na pravcu L' .

Pravac prostora kojemu je recipročni pravac neki beskonačno daleki pravac nazivamo *promjerom* ništičnoga sustava. Tada ravnine koje prolaze promjerom imaju za ništište neku beskonačno daleku točku. Takve ravnine nazivamo *promjernim ravninama*. Svaki promjer mora ići kroz ništište beskonačno daleke ravnine te stoga ništični sustav ima ∞^2 promjera koji su svi međusobno usporedni [29].

Neka je ništični sustav zadan homogenim linearnim vektorom $(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$. Ako je pravac $L = (l, \bar{l})$ promjer, tada možemo uzeti $\mathbf{l} = \mathbf{a}$ jer iz (23) i činjenice da je $\bar{l}' = (0, 0, 0)$ slijedi izraz (26):

$$\mathbf{l} = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{l}}}{\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}} \mathbf{a} \quad (26)$$

Svakoj točki promjera pridružena je ništična ravnina koja prolazi njemu recipročnim beskonačno dalekim pravcem, te slijedi da je svakomu promjeru pridruženi pramen međusobno paralelnih ravnina. Onaj promjer koji je okomit na njemu pridruženi pramen paralelnih ravnina zovemo *osi ništičnoga sustava*.

Vrijedi sljedeća tvrdnja ([28], teoremi 3.1.6. i 3.1.9.): Os ništičnoga sustava dana je u Plückerovim koordinatama s

$$(a, \bar{a} - (a \cdot \bar{a} / a^2) a) \quad (27)$$

pri čemu je (a, \bar{a}) homogeni linearni vektor ništičnoga sustava.

4. Primjena u statici

Plückerovim koordinatama pravca proširenoga euklidskog prostora $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ možemo dati geometrijsku interpretaciju primjenom standardne metrike euklidskoga prostora \mathbf{E}^3 na elementima u konačnosti i algebarske strukture vektorskoga prostora \mathbb{R}^3 .

Interpretiramo li uređene trojke $\mathbf{l} = (l_{01}, l_{02}, l_{03})$ i $\bar{\mathbf{l}} = (l_{23}, l_{31}, l_{12})$ Plückerovih koordinata pravca $L = (\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$ kao vektore prostora \mathbb{R}^3 , Plückerov identitet (19), koji možemo zapisati u obliku $\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0$, izražava uvjet ortogonalnosti tih dvaju vektora.

Beskonačno daleka točka pravca $L = (\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$ presjek je pravca i beskonačno daleke ravnine. Izračunamo li njezine homogene koordinate pomoću Plückerovih koordinata pravca i homogenih koordinata beskonačno daleke ravnine $(1:0:0:0)$, dobivamo $(0:l_{01}:l_{02}:l_{03})$. To u kontekstu prostora \mathbb{R}^3 govori da pravac L ima smjer određen vektorom \mathbf{l} , jer ga u toj beskonačno dalekoj točki sijeku svi s njim paralelni pravci.

Zadamo li sada pravac kao spojnicu konačne točke $x = (1:x_1:x_2:x_3)$ i beskonačno daleke točke $(0:l_{01}:l_{02}:l_{03})$ dobit ćemo vektorsku jednakost u \mathbb{R}^3 :

$$\bar{\mathbf{l}} = x \cdot \mathbf{l} \quad (28)$$

gdje je $x = (x_1:x_2:x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektor afinity koordinata točke x . Slijedi: *Ako je \mathbf{S} sila na pravcu $\|L\|$, intenziteta i s hvatištem u točki x , tada je $\bar{\mathbf{l}}$ vektor momenta te sile u odnosu na ishodište.*

Drugim riječima, silu možemo prikazati u obliku izraza (29):

$$\mathbf{S} = (s, \bar{s}) \quad (29)$$

gdje je s vektor sile, a \bar{s} vektor njezina momenta u odnosu na ishodište. Prikaz (29) zovemo *koordinatama sile \mathbf{S}* . Koordinate sile nisu homogene, budući da silu određuje, osim pravca djelovanja, još i njezina vrijednost (intenzitet i orijentacija, određena predznakom), pa na svakomu pravcu prostora imamo ∞^1 sila te ukupno ∞^5 sila u prostoru.

4.1. Statička ekvivalencija i linearni kompleksi

Ako je dan sustav sila (s_p, \bar{s}_p) , u prostoru, tada je neki drugi sustav sila (g_p, \bar{g}_p) njemu ekvivalentan ako je zadovoljeno:

$$\sum s_i = \sum g_i \text{ i } \sum \bar{s}_i = \sum \bar{g}_i \quad (30)$$

Neka je dan sustav sila (s_p, \bar{s}_p) , u prostoru i neka je $(r, \bar{r}) = (\sum s_p, \sum \bar{s}_p)$. Sustav sila nazivamo *općim* ako vrijedi

$$r \neq (0, 0, 0) \text{ i } r \cdot \bar{r} \neq 0 \quad (31)$$

U tom općem slučaju sustav se ne može svesti na jednu silu (rezultantu), jer drugi uvjet govori da vektor (r, \bar{r}) ne ispunjava Plückerov identitet (19), odnosno ne odgovara niti jednomu pravcu u prostoru, pa rezultirajuće djelovanje (u odnosu na ishodište) sadrži rezultirajuću silu i rezultirajući moment (u odnosu na ishodište). Ako drugi uvjet nije zadovoljen, to jest ako je $r \cdot \bar{r} = 0$ ili, geometrijski, ako su vektor sile i vektor momenta međusobno okomiti, sustav je svodiv na rezultantu. Ako ni prvi ni drugi uvjet nisu zadovoljeni, dvije su mogućnosti: ako je $\bar{r} = (0, 0, 0)$ sustav je uravnotežen, a ako je $\bar{r} \neq (0, 0, 0)$, sustav se svodi na spreg s vektorom momenta \bar{r} .

Moment sile $S = (s, \bar{s})$ u odnosu na točku p , s afinity koordinatama $p = (p_1, p_2, p_3)$ dan je izrazom (32):

$$\bar{s}_p = \bar{s} - p \times s \quad (32)$$

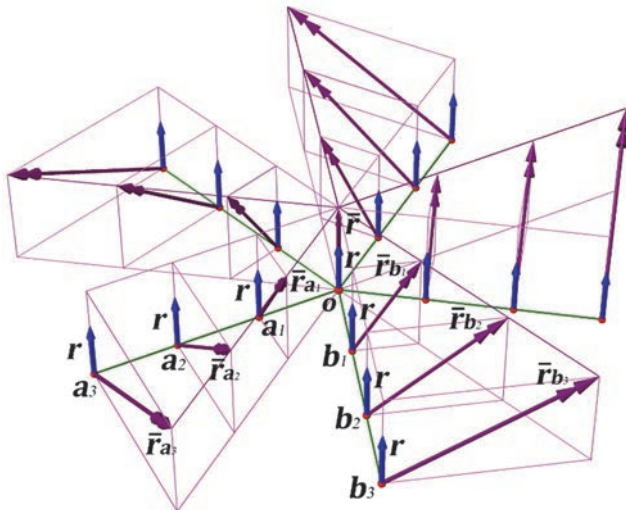
Iz počela je statike (primjerice, [30]) poznato da se za izračunavanje rezultirajućega momenta sustava sila (s_p, \bar{s}_p) u odnosu na točku može upotrijebiti izraz (32) ako se u njemu (s, \bar{s}) zamijeni s (r, \bar{r}) .

Iz izraza (32) vidljivo je da se rezultirajući momenti u odnosu na različite točke prostora mogu razlikovati samo za komponentu okomitu na pravac djelovanja rezultirajuće sile. Vektorski umnožak usporednih vektora iščezava, pa će rezultirajući momenti u odnosu na točke nekog pravca usporednoga s pravcem djelovanja rezultirajuće sile biti jednaki, ali će se rezultirajući momenti u odnosu na točke na različitim usporednim pravcima razlikovati.

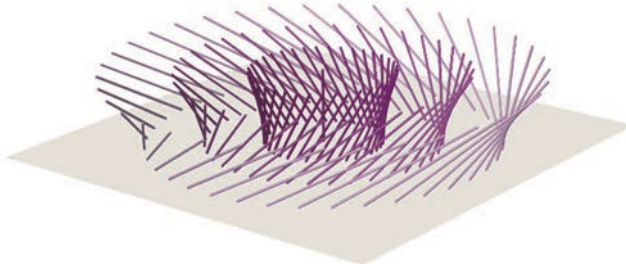
Budući da svi rezultirajući momenti imaju jednake komponente usporedne s rezultirajućom silom, najmanji će intenzitet imati rezultirajući momenti usporedni s njom, to jest momenti koji nemaju komponente okomite na nju. Točke u odnosu na koje su rezultirajući momenti usporedni s rezultirajućom silom leže na pravcu koji je usporedan s njom (i s njima), a naziva se *centralnom osi* [30]. Za razliku od sila koje su kao vektori "vezane" za pravce djelovanja, momenti su slobodni vektori, ali je pogodno zamišljati ih i crtati s "hvatištima" u točkama na koje se odnose. Zamišljenim poljem rezultirajućih momenata "upravlja" rotacijska simetrija oko centralne osi.

Rezultirajući moment u odnosu na neku točku p neke ravnine okomite na centralnu os (koja nije probodište osi \mathbf{o} i te ravnine) rastavit ćemo u komponentu u toj ravnini i komponentu okomitu na nju. Komponenta u ravnini, osim što je okomita na centralnu os, okomita je i na spojnicu probodišta \mathbf{o} i točke p . Rekli smo već da su komponente svih rezultirajućih momenata, okomite na ravninu, jednake. Intenziteti pak komponenata u ravnini povećavaju se proporcionalno udaljenosti njihovih "hvatišta"

od probodišta \mathbf{o} , ali su jednaki u svim točkama neke kružnice sa središtem u \mathbf{o} . Svi rezultirajući momenti u odnosu na točke te kružnice imaju isti nagib (slika 3.), koji ovisi o omjeru intenziteta rezultirajuće sile i rezultirajućega momenta (u odnosu na točku \mathbf{o}) te o polumjeru kružnice – povećanjem polumjera nagibi se smanjuju. Nacrtamo li rezultirajuće momente s "hvatištima" u točkama kružnice, vidjet ćemo da leže na jednom sustavu izvodnica rotacijskoga hiperboloida kojemu je os centralna os, a ta kružnica grlena kružnica (slika 4.), dok su njihove komponente u ravnini na tangentama kružnice.



Slika 3. Rezultirajuća djelovanja u odnosu na točke ravnine okomite na centralnu os



Slika 4. Kongruencija pravaca na kojima leže rezultirajući momenti u odnosu na točke ravnine postavimo li momente u pripadne točke

Translatiramo li promatranu ravninu u smjeru osi, dobit ćemo istu sliku (slika 5.). Pravci na kojima leže rezultirajući momenti u odnosu na točke ravnine (postavimo li momente u pripadne točke) tvore kongruenciju koja sadrži izvodnice jednoga sustava niza rotacijskih hiperboloida s istom osi i koncentričnim grlenim kružnicama (slika 4.), a pravci rezultirajućih momenata u odnosu na sve točke prostora kompleksa. (Programske funkcije za crtanje slika 3., 4. i 5. napisane su u programskom paketu *SageMath* [31].)

U potpoglavlju 3.3 opisano je kako se vektoru $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ može pridružiti ništični sustav i regularni linearni kompleks, no to nije upravo spomenuti kompleks (koji, ustvari, i nije linearan).

Vrijednost momenta sile $(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}})$ oko osi $(\tilde{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}})$ (– pravca $(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}})$ na kojemu je odabrana orijentacija, definirana je izrazom (33):

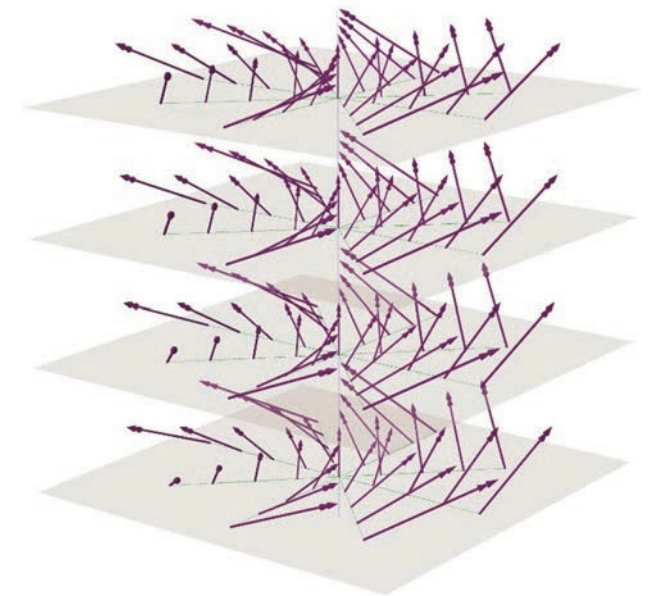
$$m((\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}})(\tilde{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}})) = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{c}}\|} (\mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{s}) \quad (33)$$

a vrijednost momenta sustava sila $(\mathbf{s}_p, \tilde{\mathbf{s}}_p)$, oko te osi možemo izračunati prema istomu izrazu, zamijenimo li $(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}})$, rezultirajućim djelovanjem sustava $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$.

Uvjet je iščezavanja momenta sustava sila \mathbf{s} rezultirajućim djelovanjem $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ oko osi $(\tilde{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}})$

$$\mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (34)$$

Zamijenimo li u tom izrazu $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ s $(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})$ i $(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}})$ s $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$, prepoznat ćemo izraz (24) kojim smo karakterizirali ništične pravce ništičnoga sustava, a time i pravce regularnoga linearnog kompleksa. Prema tome, kompleks \mathcal{R} sadrži sve pravce prostora, shvaćene kao osi, oko kojih moment sustava sila $(\mathbf{s}_p, \tilde{\mathbf{s}}_p)$, iščezava, pa je upravo stoga za te pravce Möbius u [1] odabrao naziv ništični pravci. Os ništičnoga sustava (27) centralna je os sustava sila.



Slika 5. Rezultirajući momenti u odnosu na točke usporednih ravnina okomitih na centralnu os

Da bi se predočio kompleks \mathcal{R} , u "hvatištu" svakoga rezultirajućeg momenta (slike 3., 4. i 5.) treba zamisliti ravninu okomitu na njega. Ta je ravnina ništična ravnina "hvatišta", a "hvatište" je njezino ništište. Pramen pravaca u toj ravnini koji prolazi "hvatištem" pramen je ništičnih pravaca; pravci toga pramena jedini su ništični pravci u tom "hvatištu" i u toj ravnini. Da ništični pravci moraju biti u toj ravnini, možemo pokazati na sljedeći način: rezultirajući moment možemo zamijeniti spregom sila u ravnini; moment sprega oko nekog pravca iščezava samo ako

obje sile sprega sijeku pravac. Budući da rezultirajuće djelovanje osim momenta sadrži i rezultirajuću silu, njezin će moment oko nekog pravca iščeznuti samo ako ga siječe.

Vrijedi i sljedeća tvrdnja ([28], propozicija 3.4.8.):

Opći sustav sila, koji se može svesti na rezultirajuće djelovanje (r, \bar{r}) , statički je ekvivalentan sustavu od dvije sile, takvom da te sile leže na recipročnom paru pravaca u odnosu na regularni linearni kompleks \mathcal{R} .

Dokažimo tu tvrdnju.

Odaberemo li jedan pravac prostora koji ne pripada linearnom kompleksu \mathcal{R} , a takvih u prostoru ima beskonačno mnogo, i kojemu recipročan pravac u ništičnom sustavu definiranom vektorom (r, \bar{r}) nije beskonačno daleki pravac, te označimo s $L = (l, \bar{l})$, njegove Plückerove koordinate, tada za taj pravac vrijedi zbog (24) da je $\theta = \bar{m} \cdot l + m \cdot \bar{l} \neq 0$. Ako stavimo $\varphi = r \cdot \bar{r}$, bit će $\varphi \neq 0$. Tada primjenom (25) nalazimo Plückerove koordinate njemu recipročnoga pravca i one imaju oblik $(l', \bar{l}') = \varphi(l, \bar{l}) - \theta(r, \bar{r})$.

Konačno, ekvivalencija početnoga sustava te sustava koji se sastoji od dvije sile na recipročnim pravcima L i L' dana je izrazom (35):

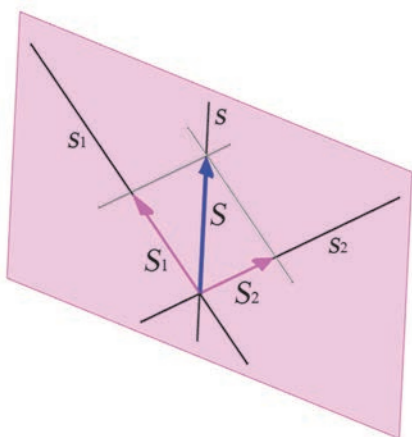
$$(r, \bar{r}) = \frac{\varphi}{\theta}(l, \bar{l}) - \frac{1}{\theta}(l', \bar{l}') \tag{35}$$

4.2. Primjena prostornih konstrukcijskogeometrijskih postupaka

U radu [32] opisali smo neke konstrukcijskogeometrijske postupke zamjene sustava sila ekvivalentnim sustavima sila, koji djelomično proširuju konstrukciju verižnog poligona na prostorne probleme.

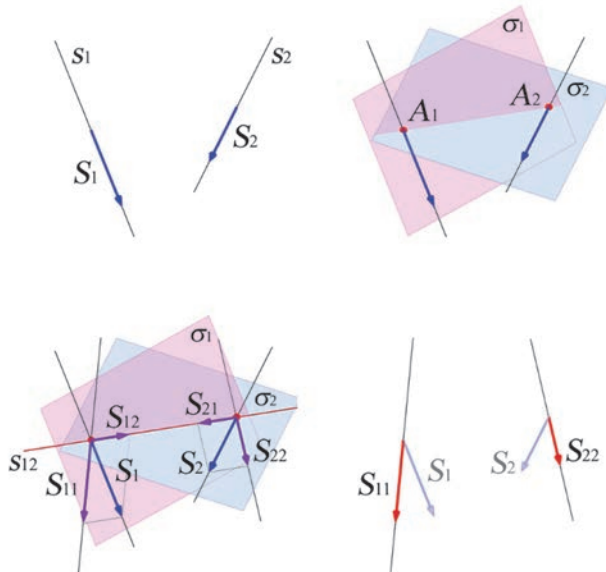
Geometrijske se konstrukcije temelje na dva načela:

Načelo 1: *Silu u prostoru možemo rastaviti u dvije komponente na zadanim pravcima ako i samo ako su pravac djelovanja sile i dva zadana pravca komplanarni i konkurentni (slika 6.).* U tom slučaju sustav od jedne sile definira singularni linearni kompleks koji sadrži sve pravce koji sijeku pravac djelovanja sile.



Slika 6. Rastavljanje sile S u komponente S_1 i S_2 pomoću pravila paralelograma

Načelo 2: *Pri sastavljanju verižnoga poligona, dvije sile rastavljamo svaku u dvije komponente tako da jedna komponenta prve sile poništi jednu komponentu druge sile. Te dvije komponente leže na istomu pravcu, imaju jednake intenzitete i suprotan smisao djelovanja (slika 7.).*



Slika 7. Zamjena sustava dviju sila

Prema načelu 1., sile i komponente u koje je rastavljamo moraju ležati u istoj ravnini. Stoga na pravcima s_1 i s_2 na kojima djeluju sile S_1 i S_2 , odabiremo po volji točke A_1 i A_2 , po jednu na svakom pravcu. Silu S_1 po načelu 1. rastavljamo u točki A_1 u komponente S_{11} i S_{12} i koje leže u ravnini σ_1 određenoj točkom A_2 i pravcem s_1 , a silu S_2 u točki A_2 u komponente S_{21} i S_{22} koje leže u ravnini σ_2 određenoj točkom A_1 i pravcem s_2 , i to tako da se ponište komponente S_{12} i S_{21} , koje uzimamo na presječnici tih dviju ravnina.

4.2.1. Opći sustav tri sile na tri mimosmjerna pravca

Sustav triju sila koje leže na tri međusobno mimosmjerna pravca prostora svodimo na dva recipročna pravca ništičnoga sustava toga sustava sila. Geometrijska je konstrukcija sljedeća (slika 8.): Zadane sile S_1, S_2, S_3 djeluju na pravcima s_1, s_2, s_3 . Netom opisanim postupkom sile S_1 i S_2 i zamjenjujemo silama S_{11} i S_{22} i koju ćemo sada, zbog preglednosti u nastavku, nazvati S_{23} . Na trećemu zadanom pravcu s_3 označimo s A_3 njegovo probodište s ravninom σ_2 , te po načelu 1. u ravnini σ_3 određenoj pravcem s_3 i točkom A_2 u točki A_3 rastavljamo silu S_3 na komponente S_{32} i S_{33} tako da se, po načelu 2., ponište komponente S_{23} i S_{32} koje leže na presječnici dviju ravnina. Time smo početni sustav sila S_1, S_2, S_3 sveli na ekvivalentan sustav dviju sila $S_{11} = R_1$ i $S_{33} = R_2$, koje leže na dva recipročna pravca ništičnoga sustava definiranog zadanim sustavom sila.

Ako su zadane više od tri sile, "klasični" postupak kojim sastavljamo verižni poligon u ravnini u općem slučaju nećemo moći nastaviti, jer ni pravac djelovanja sile S_{11} ni pravac djelovanja sile S_{33} neće

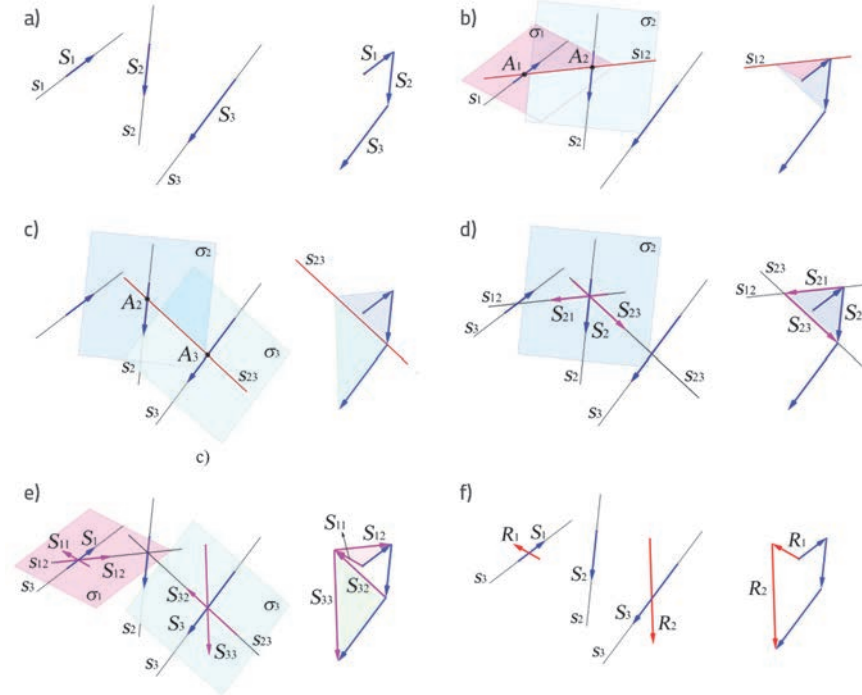
sjeći pravac djelovanja neke četvrte sile. Možemo, međutim, neku četvrtu silu pridružiti silama S_{11} i S_{33} pa te tri sile na opisani način zamijeniti dvjema silama. Na taj način svaki opći sustav sila možemo svesti na dvije rezultante na recipročnim pravcima.

4.2.2. Opći sustav dviju sila

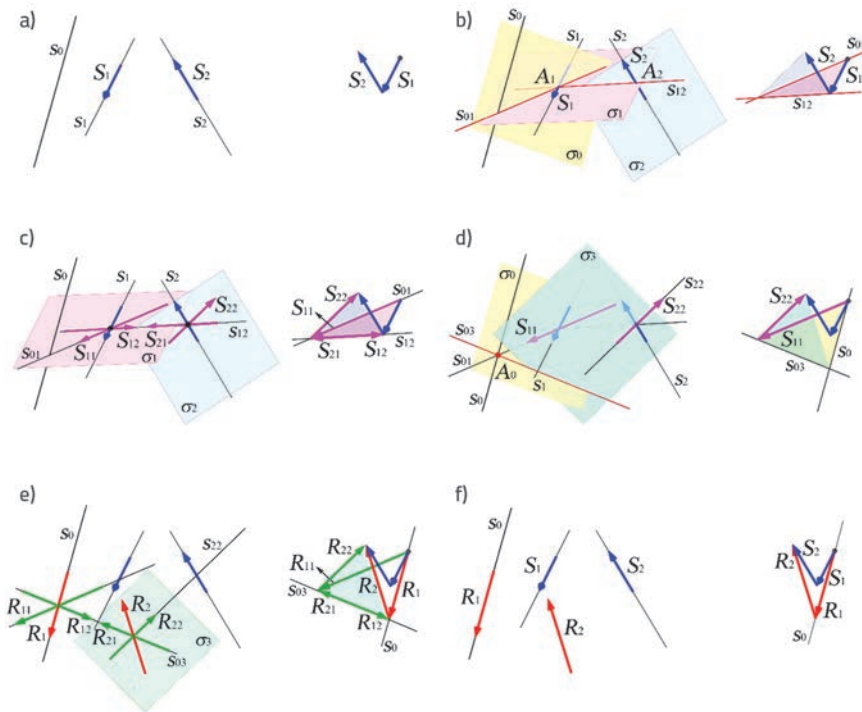
Ako imamo opći sustav koji se sastoji od dvije sile, tada zbog (31) mora vrijediti da su njihovi pravci djelovanja mimosmjerni i da su ti pravci recipročni u pridruženomu ništičnom sustavu.

Takav sustav možemo zamijeniti ekvivalentnim sustavom kojemu su izabrani elementi unaprijed određeni. Do sada smo pokazali kako se sustav dviju sila može zamijeniti sustavom dviju sila tako da jedna od njih prolazi zadanom točkom, a druga leži u zadanjoj ravnini (pri čemu zadata točka nije u zadanjoj ravnini) uz dva posebna slučaja (točka ili ravnina beskonačno su daleki) te sustavom dviju sila kojemu je zadan pravac djelovanja jedne sile [32].

Ako je zadan pravac djelovanja jedne sile, tada znamo da druga sila mora ležati na njemu recipročnom pravcu, pa drugi postupak ujedno daje geometrijsku konstrukciju recipročnoga pravca nekom zadanom pravcu za ništični sustav zadan dvjema silama. Kako se ta konstrukcija izravno uklapa u temu ovoga rada, prikaz postupka ovdje ćemo ponoviti (slika 9.):



Slika 8. Grafički postupak zamjene sustava triju sila dvjema silama na recipročnim pravcima



Slika 9. Zamjena sustava dviju sila dvjema silama na recipročnim pravcima od kojih je jedan zadan [32]

Zadan je pravac s_0 te sile S_1, S_2 i pravci njihova djelovanja s_1, s_2 . Odabiremo po volji točke A_1 i A_2 i po jednu na svakomu zadanom pravcu s_1 i s_2 , te ih spajamo pravcem s_{12} . Silu S_1 po načelu 1. rastavljamo u točki A_1 u komponentu S_{11} koja leži na presječnosti s_{01} ravnine σ_0 određene točkom A_1 i pravcem s_0 s ravninom σ_1 određenom pravcima s_1 i s_{12} , i komponentu S_{12} koja leži na pravcu s_{12} . Silu S_2 po istomu načelu rastavljamo u točki A_2 u komponente S_{21} i S_{22} tako da se komponente S_{12} i S_{21} , prema načelu 2., ponište, čime je određena komponenta S_{22} . Na taj smo način zadani sustav sila S_1, S_2 zamijenili dvjema silama S_{11}, S_{22} . Na zadanomu pravcu s_0 označimo s A_0 njegovo sjecište s pravcem s_{01} . Budući da pravci s_0, s_1 i pravac s_{03} , koji predstavlja presječnicu ravnine σ_0 određene pravcima s_0 i s_{01} s ravninom σ_3 određenom točkom A_0 i pravcem djelovanja s_{22} sile S_{22} , svi leže u istoj ravnini (σ_0) sila R_1 na pravcu s_0 određena je uvjetima da jedna njezina komponenta R_{11} leži na pravcu s_{01} i jednaka je sili S_{11} , a druga komponenta R_{12} djeluje na pravcu s_{03} .

Sila R_2 određena je prema pravilu paralelograma komponentom R_{22} , jednakom sili S_{22} , i komponentom R_{21} . Budući da je pravac s_{03} presječnica ravnina σ_0 i σ_3 u kojima leže sile R_1 i R_2 i njihove pripadajuće komponente, komponenta R_{21} je, po načelu 2., jednaka i suprotnoga djelovanja sili R_{12} .

Sile R_1 i R_2 čine sustav ekvivalentan zadanim dvjema silama S_1 , S_2 i leže na recipročnim pravcima, odnosno pravac djelovanja sile R_2 recipročan je pravac zadanom pravcu s_0 .

Kao što je prije spomenuto, Grassmannova algebra omogućava neposredan prijevod konstrukcijskogeometrijskih postupaka u algebarske izraze, a nakon toga u programski kod. Primjeri sa slika 7., 8. i 9. izrađeni su računalnim programom razvijenim pomoću alata za računalnu grafiku *Rhinoceros3D* [33] i njegovih dodataka *Grasshoppera*, alata za vizualno programiranje [34] i *GHPhytona*, dodatka *Grasshopperu* i tumača (engl. *interpreter*) za programski jezik *Python* [35]. Kako je programski kod napisan u jeziku *GhPythonu*, a primjeri su vizualizirani u programu *Rhinoceros3D*, korisnik ima mogućnost promjene sustava sila s istovremenim prikazom rezultata u realnom vremenu.

S pomoću ulaznih podataka iz navedenih primjera može se analitički izraziti ništični sustav, kako je opisano u potpoglavljima 3.3. i 4.1., i numerički potvrditi da su pravci na kojima leže zamjenjujuće sile pridruženi, odnosno da čine recipročan par.

5. Zaključak

U radu je prikazana geometrija pravčastoga prostora kombinacijom sintetičke, analitičke i algebarske metode. Definirani su pojmovi projektivnoga prostora te opisana konstrukcija proširene euklidske ravnine kao njegovoga modela, uz analitičke osnove odnosno uvođenje homogenih koordinata točaka i, dualno, ravnina. Analitički su definirane projektivne transformacije toga prostora na sama sebe, projektivne kolineacije i projektivne korelacije.

Zatim je definiran pravčasti prostor kao skup pravaca proširene euklidske ravnine, te je na taj skup uvedena koordinatizacija primjenom Grassmannove s pomoću koje se za taj prostor dobiva točkovni model u peterodimenzionalnomu projektivnom prostoru. Obraden je analitički pojam linearnoga kompleksa i pokazana je njegova veza s ništičnim sustavom, involutornom korelacijom proširenoga euklidskog prostora.

U zadnjemu poglavlju pokazana je veza između općega sustava sila u prostoru (sustava koji se ne može svesti na rezultantu) i regularnih linearnih kompleksa, odnosno ništičnih sustava te je pokazan primjer primjene alata geometrije pravčastoga prostora u razmatranju statičkih postupaka svođenja sustava sila na jednostavniji sustav.

LITERATURA

- [1] Möbius, A.F.: Über Eine Besondere Art Dualer Verhältnisse Zwischen Figuren Im Raume, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 10 (1833), pp. 317–341, <https://doi.org/10.1515/crll.1833.10.317>
- [2] Rosenfeld, B.A.: *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, New York, 1988
- [3] Plücker, J.: On a new geometry of space, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155 (1865), pp. 725–791, <https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0017>
- [4] Grassmann, H.: *Die lineare Ausdehnungslehre*, Verlag Otto Wigand, Leipzig, 1844.
- [5] Cayley, A.: On a new analytical representation of curves in space, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3 (1860), pp. 225–236
- [6] Grassmann, Hermann Günther, *Encyclopædia Britannica*, <https://www.britannica.com/biography/Hermann-Gunther-Grassmann/media/1/242222/112758>, pristupljeno 8. 6. 2019.
- [7] Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Julius_Pl%C3%BCcker.jpg, pristupljeno 28. 5. 2019.
- [8] Plücker, J.: Fundamental views regarding mechanics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 156 (1866), pp. 361–380, <https://doi.org/10.1098/rstl.1866.0016>
- [9] Klein, F.: Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, *Mathematische Annalen*, 4 (1871), pp. 403–415, <https://doi.org/10.1007/BF01455075>
- [10] Rankine, W.J.M.: *A Manual of Applied Mechanics*, Richard Griffin, London, Glasgow, 1858.
- [11] Maxwell, J.C.: On reciprocal figures and diagrams of forces, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 27 (1864), pp. 250–264, <https://doi.org/10.1080/14786446408643663>
- [12] Maxwell, J.C.: On reciprocal figures, frames and diagrams of forces, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 26 (1870), pp. 1–40, <https://doi.org/10.1017/S0080456800026351>
- [13] Culmann, C.: *Die graphische Statik*, Verlag Meyer & Zeller, Zürich, 1864.
- [14] Cremona, L.: *Le figure reciproche della statica grafica*, Tipografia Bernardoni, Milano, 1872.
- [15] Saviotti, C.: *La statica grafica. Seconda parte: Forze esterne*, Ulrico Hoepli, 1888.
- [16] Föppl, A.: *Fachwerk im Raume*, B. G. Teubner, Leipzig, 1892.
- [17] Lee, J., Van Mele, T., Block, P.: Disjointed force polyhedra, *Computer-Aided Design*, 99 (2018), pp. 11–28, <https://doi.org/10.1016/j.cad.2018.02.004>
- [18] Habicsek, M., Akbarzadeh, M., Guo, Y.: Algebraic 3D graphic statics: Reciprocal constructions, *Computer-Aided Design*, 108 (2019), pp. 30–41, <https://doi.org/10.1016/j.cad.2018.08.003>
- [19] D'Acunto, P., Jasienski, J.P., Ohlbrock, P.O., Fivet, C., Schwartz, J., Zastavni, D.: Vector-based 3D graphic statics: A framework for the design of spatial structures based on the relation between form and forces, *International Journal of Solids and Structures*, 167 (2019), pp. 58–70, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.02.008>
- [20] Lee, J., Mueller, C., Fivet, C.: Automatic generation of diverse equilibrium structures through shape grammars and graphic statics, *International Journal of Space Structures*, 31 (2016), pp. 147–164, <https://doi.org/10.1177/0266351116660798>

- [21] Konstantatou, M., D'Acunto, P., McRobie, A.: Polarities in structural analysis and design: n-dimensional graphic statics and structural transformations, *International Journal of Solids and Structures*, 152–153 (2018), pp. 272–293, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.07.003>
- [22] Coxeter, H.S.M.: *Projective Geometry*, Blaisdell Publishing Company, Toronto, 1964.
- [23] Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonardo_da_Vinci_-_The_Last_Supper_high_res.jpg, pristupljeno 26.05.2019
- [24] Palman, D.: *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.
- [25] Gorjanc, S., Jurkin, E., Kodrnja, I., Koncul, H.: *Deskriptivna geometrija*, Građevinski fakultet Zagreb, Zagreb, 2018.
- [26] Shafarevich I. R.: *Basic Algebraic Geometry 1*, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [27] Coxeter, H.S.M.: *Non-Euclidean Geometry*, Sixth Edition, The Mathematical Association of America, Washington D. C., 1998.
- [28] Pottmann H., Wallner, J.: *Computational Line Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [29] Niče, V.: *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
- [30] Werner, H.: *Mehanika I. Statika*, Hrvatski savez građevinskih inženjera, Zagreb, 2007.
- [31] SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.6), The Sage Developers, 2016, <http://www.sagemath.org>, pristupljeno 2. 6. 2019.
- [32] Baniček, M., Fresl, K., Kodrnja, I.: Some examples of static equivalency in space using descriptive geometry and Grassmann algebra, *Proceedings of the IASS Annual Symposium 2018: Creativity in Structural Design*, Boston, pp. 341-349, 2018.
- [33] R. McNeel & Assoc., Rhinoceros3D, <https://www.rhino3d.com>, pristupljeno 4. 6. 2019.
- [34] R. McNeel & Assoc., GhPython, <http://www.food4rhino.com/app/ghpython>, pristupljeno 4. 6. 2019.
- [35] R. McNeel & Assoc., Grasshopper, <http://www.grasshopper3d.com>, pristupljeno 4. 6. 2019.