Plücker & Grassmann

Točka

U euklidskom prostoru ima ∞^3 točaka, pa je položaj točke određen s tri Kartezijeve koordinate:

$$X = (\bar{x},\, \bar{y},\, \bar{z}).$$

U linearnoj algebri točku poistovjećujemo s njezinim vektorom položaja (ili radijvektorom, koji ima tri komponente[1])

$$\vec{r}_X = \bar{x}\,\vec{\imath} + \bar{y}\,\vec{\jmath} + \bar{z}\,\vec{k} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \vec{x}.$$

U projektivnom prostoru točku opisujemo s četiri homogene koordinate, $\mathcal{X} = (w : x : y : z)$, ali je

$$(w : x : y : z) = \left(1 : \frac{x}{w} : \frac{y}{w} : \frac{z}{w}\right) = (1 : \bar{x} : \bar{y} : \bar{z})$$

ako je $w \neq 0$. U projektivnom su proširenju euklidskoga prostora $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ Kartezijeve koordinate točke; ako je $w = 0$, onda je

$$\mathcal{X}_\infty = \mathcal{V}_\infty = (0 : x : y : z) = (0 : mx : my : mz)$$

za $m \neq 0$ neizmjerno daleka točka pravaca usporednih s euklidskim vektorom $\vec{v} = (x, y, z)$. Budući da ∞ nizova četiriju koordinata određuje položaj iste točke, četvrtom je koordinatom dodano »samo« ∞^2 neizmjerno dalekih točaka, te je broj točaka u projektivnom prostoru ∞^3 $\big(\infty^4/\infty = \infty^3,\ \infty^3/\infty = \infty^2,\ \infty^3 + \infty^2 = \infty^3\big)$.

Možemo uzeti i da su četiri broja u $(0 : x : y : z)$ homogene komponente euklidskoga vektora $\vec{v} = (x, y, z)$. Tada, međutim, $\vec{\boldsymbol{v}} = (0 : x : y : z)$ i $m\vec{\boldsymbol{v}} = (0 : mx : my : mz)$ za $m \neq 1$ nisu zapisi istoga vektora, nego je $m\vec{\boldsymbol{v}}$ homogeni zapis (euklidskoga) vektora $m\vec{v}$. Za razliku od neizmjerno dalekih točaka, vektora u prostoru ima ∞^3.

Zlorabeći pomalo način bilježenja pisat ćemo i $\mathcal{X} = \big(w : \vec{x}\big)$, gdje je $\vec{x} = (x, y, z)$ i gdje može biti $w = 0$ (pa je tada $\mathcal{X} = \mathcal{V}_\infty$). Takav će nam zapis omogućiti primjenu »klasičnih« linearnoalgebarskih operacija.

Pravac kao spojnica dviju točaka

Homogene koordinate zadanih točaka $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ zapisat ćemo kao komponente redaka matrice f:

$$f = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix};$$

ta je matrica jedan od zapisa pravca f koji prolazi točkama $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$. Plückerove koordinate pravca f determinante su drugoga reda kojima su stupci po dva stupca te matrice.

[1] Vektore $\bar{x}\,\vec{\imath}$, $\bar{y}\,\vec{\jmath}$, $\bar{z}\,\vec{k}$ nazivamo vektorskim, a brojeve $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ skalarnim komponentama vektora.

Ako su indeksi stupaca matrice $0, 1, 2$ i 3 i ako determinantu kojoj su stupci stupci i i j matrice označimo s $f_{i,j}$, bit će

$$f \;=\; \big(f_{0,1} \,:\, f_{0,2} \,:\, f_{0,3} \,:\, \underset{(1)}{f_{2,3}} \,:\, \underset{(2)}{f_{3,1}} \,:\, \underset{(3)}{f_{1,2}}\big)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. : \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \big(w_1 x_2 - w_2 x_1 \,:\, w_1 y_2 - w_2 y_1 \,:\, w_1 z_2 - w_2 z_1$$

$$: y_1 z_2 - y_2 z_1 \,:\, z_1 x_2 - z_2 x_1 \,:\, x_1 y_2 - x_2 y_1\big).$$

Ako su $\mathcal{X}_1 = \big(w_1 : \vec{x}_1\big)$ i $\mathcal{X}_2 = \big(w_2 : \vec{x}_2\big)$, onda je

$$f \;=\; \big(w_1 \vec{x}_2 - w_2 \vec{x}_1 \,:\, \vec{x}_1 \times \vec{x}_2\big) \;=\; \big(\vec{f} \,:\, \vec{f}_{m/o}\big).$$

Iako je Plückerovih koordinata pravca šest, pravaca u prostoru ima ∞^4. $\big($Točaka ima ∞^3. Svakom točkom prolazi ∞^2 pravaca; $\infty^3 \cdot \infty^2 = \infty^5$. Međutim, svaki pravac prolazi kroz ∞ točaka, te je na kraju $\infty^5/\infty = \infty^4$.$\big)$ Budući da su $(w : x : y : z)$ i $(mw : mx : my : mz)$ homogeni koordinatni zapisi iste točke,

$$f \;=\; \big(f_{0,1} \,:\, f_{0,2} \,:\, f_{0,3} \,:\, f_{2,3} \,:\, f_{3,1} \,:\, f_{1,2}\big)$$

$$= \big(m f_{0,1} \,:\, m f_{0,2} \,:\, m f_{0,3} \,:\, m f_{2,3} \,:\, m f_{3,1} \,:\, m f_{1,2}\big)$$

$$= m \big(f_{0,1} \,:\, f_{0,2} \,:\, f_{0,3} \,:\, f_{2,3} \,:\, f_{3,1} \,:\, f_{1,2}\big) \;=\; m f,$$

što znači da su Plückerove koordinate pravca homogene $\big(\infty^6/\infty = \infty^5\big)$.

Uvrštavanjem se može pokazati da je

$$f_{0,1} f_{2,3} \;+\; f_{0,2} f_{3,1} \;+\; f_{0,3} f_{1,2} \;=\; 0.$$

Šest »slučajno« odabranih brojeva a, b, c, d, e, f, svrstanih u koordinatni zapis $(a : b : c : d : e : f)$, bit će Plückerove koordinate nekog pravca (ako i) samo ako zadovoljavaju Plückerovu jednakost

$$a\,d \;+\; b\,e \;+\; c\,f \;=\; 0.$$

Tim se uvjetom, uz uvjet homogenosti, broj neovisnih koordinata pravca svodi na četiri, te je broj Plückerovim koordinatama odredivih pravaca ∞^4.

Sila

Ako je $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ vektor sile $\vec{\mathcal{F}}$ koja djeluje u točki $X = (x, y, z)$, onda je

$$\vec{\mathcal{F}} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

$$= \big(1 \cdot F_x \,:\, 1 \cdot F_y \,:\, 1 \cdot F_z \,:\, y F_z - z F_y \,:\, z F_x - x F_z \,:\, x F_y - y F_x\big)$$

$$= \big(F_x \,:\, F_y \,:\, F_z \,:\, M_x \,:\, M_y \,:\, M_z\big).$$

Tako izračunanih šest koordinata nazivamo Plückerovim koordinatama sile. Prve su tri Plückerove koordinate skalarne komponente vektora sile $\vec{F}$, dok su druge tri koordinate vrijednosti momenata sile oko osī x, y i z.

Ako je $\vec{F}_m = m\vec{F} = (mF_x,\, mF_y,\, mF_z)$ vektor sile $\vec{\mathcal{F}}_m$ koja djeluje u istoj točki, lako je vidjeti da je

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{F}}_m &= \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & mF_x & mF_y & mF_z \end{pmatrix} \\ &= \big(mF_x : mF_y : mF_z : mM_x : mM_y : mM_z\big) = m\vec{\mathcal{F}}\end{aligned}$$

Plückerove koordinate sile ujedno su i Plückerove koordinate pravca njezina djelovanja. No, dok su $\vec{\mathcal{F}}$ i $m\vec{\mathcal{F}}$ Plückerovi koordinatni zapisi istoga pravca, pravca djelovanja sila $\vec{\mathcal{F}}$ i $m\vec{\mathcal{F}}$, sile se, dakako, razlikuju ako $m \neq 1$. Na pravcu ima ∞ sila, pa je broj sila u prostoru $\infty^4 \cdot \infty = \infty^5$.

Homogene su koordinate neizmjerno daleke točke pravca f i probodištā toga pravca s koordinatnim ravninama $\pi_3 = yz$ (ili $x = 0$), $\pi_2 = zx$ (ili $y = 0$) i $\pi_1 = xy$ (ili $z = 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\infty &= \big(\;0 : f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3}\big), \\ \mathcal{F}_{yz} &= \big(-f_{0,1} : 0 : f_{1,2} : -f_{3,1}\big), \\ \mathcal{F}_{zx} &= \big(-f_{0,2} : -f_{1,2} : 0 : f_{2,3}\big), \\ \mathcal{F}_{xy} &= \big(-f_{0,3} : f_{3,1} : -f_{2,3} : 0\big).\end{aligned}$$

Ako je f pravac djelovanja sile $\vec{\mathcal{F}}$, onda su

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\infty &= \big(\;0 : F_x : F_y : F_z\big), \\ \mathcal{F}_{yz} &= \big(-F_x : 0 : M_z : -M_y\big) \\ &= \left(\;1 : 0 : -\frac{M_z}{F_x} : \frac{M_y}{F_x}\right), \\ \mathcal{F}_{zx} &= \big(-F_y : -M_z : 0 : M_x\big) \\ &= \left(\;1 : \frac{M_z}{F_y} : 0 : -\frac{M_x}{F_y}\right), \\ \mathcal{F}_{xy} &= \big(-F_z : M_y : -M_x : 0\big) \\ &= \left(\;1 : -\frac{M_y}{F_z} : \frac{M_x}{F_z} : 0\right).\end{aligned}$$

Ravnina određena trima točkama ili točkom i pravcem

Implicitna je jednadžba ravnine u euklidskom prostoru, izražena u Kartezijevu koordinatnom sustavu,

$$d + a\,\bar{x} + b\,\bar{y} + c\,\bar{z} = 0.$$

Množenje s w,

$$d\,w + a\,w\,\bar{x} + b\,w\,\bar{y} + c\,w\,\bar{z} = 0,$$

daje homogenu jednadžbu ravnine u projektivnom prostoru:

$$d\,w \;+\; a\,x \;+\; b\,y \;+\; c\,z \;=\; 0.$$

U drugi, treći i četvrti redak determinante četvrtoga reda upisat ćemo homogene koordinate zadanih točaka $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{X}_3$, a u prvi redak koordinate varijabilne točke $\mathcal{X}$. Determinantu ćemo razviti po prvome retku:

$$\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = w \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \; y \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Izraz dobiven izjednačavanjem razvoja s nulom ima oblik jednadžbe ravnine,

$$w \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \; y \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \;=\; 0,$$

pa je, sažeto zapisana, jednadžba ravnine određene trima točkama

$$\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \;=\; 0.$$

Koeficijente a, b, c i d u jednadžbi ravnine možemo smatrati (homogenim) koordinatama ravninama i uvesti koordinatni zapis ravnine (analogan koordinatnom zapisu točke):

$$\boldsymbol{\alpha} \;=\; (d \,:\, a \,:\, b \,:\, c) = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$
$$= \Bigg(\underset{\substack{[1,2,3] \\ (0)}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \;:\; - \underset{\substack{[0,2,3] \\ (1)}}{\begin{vmatrix} w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

$$
: \underset{\substack{[0,1,3] \\ (2)}}{\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}} \; : \; - \underset{\substack{[0,1,2] \\ (3)}}{\begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \Bigg).
$$

Determinante trećega reda u koordinatnom zapisu ravnine (koordinate ravnine) rastavit ćemo po prvome retku:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \;=\; \Bigg(& x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
& : \; -\left[w_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} w_2 & z_2 \\ w_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} \right] \\
& : \; w_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} w_2 & z_2 \\ w_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix} \\
& : \; -\left[w_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} w_2 & y_2 \\ w_3 & y_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} w_2 & x_2 \\ w_3 & x_3 \end{vmatrix} \right] \Bigg).
\end{aligned}
$$

Determinante drugoga reda koordinate su pravca određenoga točkama $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{X}_3$, pa je

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} \;=\; & \big(x_1 f_{2,3}^{(2,3)} - y_1 f_{1,3}^{(2,3)} + z_1 f_{1,2}^{(2,3)} \\
& \quad : \; -[w_1 f_{2,3}^{(2,3)} - y_1 f_{0,3}^{(2,3)} + z_1 f_{0,2}^{(2,3)}] \\
& \quad : \; w_1 f_{1,3}^{(2,3)} - x_1 f_{0,3}^{(2,3)} + z_1 f_{0,1}^{(2,3)} \\
& \quad : \; -[w_1 f_{1,2}^{(2,3)} - x_1 f_{0,2}^{(2,3)} + y_1 f_{0,1}^{(2,3)}] \big) \\
\;=\; & \big(x_1 f_{2,3}^{(2,3)} + y_1 f_{3,1}^{(2,3)} + z_1 f_{1,2}^{(2,3)} \\
& \quad : \; -w_1 f_{2,3}^{(2,3)} + \big[y_1 f_{0,3}^{(2,3)} - z_1 f_{0,2}^{(2,3)} \big] \\
& \quad : \; -w_1 f_{3,1}^{(2,3)} + \big[z_1 f_{0,1}^{(2,3)} - x_1 f_{0,3}^{(2,3)} \big] \\
& \quad : \; -w_1 f_{1,2}^{(2,3)} + \big[x_1 f_{0,2}^{(2,3)} - y_1 f_{0,1}^{(2,3)} \big] \big)
\end{aligned}
$$

Ako je $\mathcal{X}_1 = \big(w_1 : \vec{x}_1 \big)$ i ako je $f_{_{(2,3)}} = \big(\vec{f}_{(2,3)} : \vec{f}_{m/o}^{\,(2,3)} \big)$ pravac određen točkama $\mathcal{X}_2$ i $\mathcal{X}_3$, onda je

$$
\boldsymbol{\alpha} \;=\; \big(\vec{x}_1 \cdot \vec{f}_{m/o}^{\,(2,3)} \; : \; -w_1 \vec{f}_{m/o}^{\,(2,3)} + \vec{x}_1 \times \vec{f}_{(2,3)} \big).
$$

Koordinate a, b i c skalarne su komponente vektora okomitoga na ravninu, pa možemo sažeto pisati

$$
\boldsymbol{\alpha} \;=\; (d : a : b : c) \;=\; \big(d : \vec{n}_\alpha \big).
$$

Točka $(\bar{x},\, \bar{y},\, \bar{z}) = (w : x : y : z)$ leži u ravnini $(d : a : b : c)$, a možemo reći i da ravnina $(d : a : b : c)$ prolazi točkom $(w : x : y : z)$, ako koordinate točke zadovoljavaju jednadžbu ravnine:

$$d + a\,\bar{x} + b\,\bar{y} + c\,\bar{z} = 0, \qquad \text{(Kartezijeve koordinate)}$$

$$d\,w + a\,x + b\,y + c\,z = 0, \qquad \text{(homogene koordinate}^2\text{)}$$

$$d\,w + \vec{n}_\alpha \cdot \vec{x} = 0. \qquad \text{(sažetiji linearnoalgebarski zapis)}$$

Točka $\mathcal{X} = (w : x : y : z)$ leži na pravcu $f = \begin{pmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ ili pravac f prolazi točkom $\mathcal{X}$ ako tom točkom i tim pravcem ravnina nije određena[3]:

$$\begin{pmatrix} w & x & y & z \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (0 : 0 : 0 : 0),^4$$

ili, ako je pravac zadan Plückerovim koordinatama,

$$\begin{aligned} \big(x\,f_{2,3} + y\,f_{3,1} + z\,f_{1,2} &: -w\,f_{2,3} + y\,f_{0,3} - z\,f_{0,2} \\ &- w\,f_{3,1} + z\,f_{0,1} - x\,f_{0,3} : -w\,f_{1,2} + x\,f_{0,2} - y\,f_{0,1}\big) \\ &= (0 : 0 : 0 : 0), \end{aligned}$$

ili, sažetije,

$$= \big(\vec{x} \cdot \vec{f}_{m/o} : -w\,\vec{f}_{m/o} + \vec{x} \times \vec{f}\,\big) = \big(0 : \vec{0}\big).$$

Pravac kao presječnica dviju ravnina

Dualni postupak zadavanju pravca kao spojnice dviju točaka zadavanje je pravca kao presječnice ravnina $\boldsymbol{\alpha}_1$ i $\boldsymbol{\alpha}_2$:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \right. \\ &\qquad \left. : \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

---

[2] … ili, dualno, ako koordinate ravnine zadovoljavaju jednadžbu točke.

[3] Ako je točka $\mathcal{X}$ točka pravca f, kao odredbeni element ostaje samo pravac, a on je nosilac pramena ravnina (u kojem ima ∞ ravnina).

[4] Točka s koordinatama $(0 : 0 : 0 : 0)$ ne postoji. Koordinate su ishodišta $(1 : 0 : 0 : 0)$, dok su koordinate neizmjerno dalekih točaka na koordinatnim osima $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ i $(0 : 0 : 0 : 1)$. Dualno, ne postoji ni ravnina s koordinatama $(0 : 0 : 0 : 0)$. Koordinate su neizmjerno daleke ravnine $(1 : 0 : 0 : 0)$, dok su koordinate koordinatnih ravnina $\pi_3 = yz$, $\pi_2 = zx$ i $\pi_1 = xy$ $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ i $(0 : 0 : 0 : 1)$.

$$= \left(\bar f_{0,1} : \bar f_{0,2} : \bar f_{0,3} : \bar f_{2,3} : \bar f_{3,1} : \bar f_{1,2}\right);$$

dualne je koordinate Plücker nazvao osnim koordinatama[5].

Linearnoalgebarski zapis

$$\bar f = \left(d_1\vec n_{\alpha_2} - d_2\vec n_{\alpha_1} : \vec n_{\alpha_1}\times\vec n_{\alpha_2}\right)$$

pokazuje da su koordinate $\bar f_{2,3}$, $\bar f_{3,1}$, $\bar f_{1,2}$ komponente vektora koji je okomit na vektore normala $\vec n_{\alpha_1}$ i $\vec n_{\alpha_2}$ ravnina $\boldsymbol\alpha_1$ i $\boldsymbol\alpha_2$, pa je taj vektor vektor smjera pravca f. Može se vidjeti i da su koordinate $\bar f_{0,1}$, $\bar f_{0,2}$, $\bar f_{0,3}$ komponente vektora koji je usporedan s ravninom usporednom s vektorima normala, što znači da je okomit na vektor smjera, pa se može naslutiti da taj vektor ima ulogu momenta pravca u odnosu na ishodište.

Veza je osnih i »običnih« koordinata pravca

$$\begin{aligned} f &= \left(\bar f_{2,3} : \bar f_{3,1} : \bar f_{1,2} : \bar f_{0,1} : \bar f_{0,2} : \bar f_{0,3}\right) \\ &= \left(f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}\right). \end{aligned}$$

Koordinate su ravnine određene pravcem i ishodištem i projicirajućih ravnina kroz pravac

$$\begin{aligned} \boldsymbol\alpha_0 &= \left(0 : \bar f_{0,1} : \bar f_{0,2} : \bar f_{0,3}\right) \\ &= \left(0 : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2}\right), \\ \boldsymbol\alpha_{\perp\pi_3} &= \left(-\bar f_{0,1} : 0 : \bar f_{1,2} : -\bar f_{3,1}\right) \\ &= \left(-f_{2,3} : 0 : f_{0,3} : -f_{0,2}\right), \\ \boldsymbol\alpha_{\perp\pi_2} &= \left(-\bar f_{0,2} : -\bar f_{1,2} : 0 : \bar f_{2,3}\right) \\ &= \left(-f_{3,1} : -f_{0,3} : 0 : f_{0,1}\right), \\ \boldsymbol\alpha_{\perp\pi_1} &= \left(-\bar f_{0,3} : \bar f_{3,1} : -\bar f_{2,3} : 0\right) \\ &= \left(-f_{1,2} : f_{0,2} : -f_{0,1} : 0\right). \end{aligned}$$

Točka kao sjecište triju ravnina ili kao probodište pravca i ravnine

U homogenoj jednadžbi

$$dw + ax + by + cz = 0$$

četvorke su brojeva w, x, y, z i d, a, b, c »ravnopravne«. Uzmemo li da su w, x, y, z varijable, a d, a, b, c konstante, to je jednadžba ravnine: točke, kojima koordinate w, x, y, z zadovoljavaju tu jednadžbu, leže u ravnini kojoj su koordinate d, a, b, c. Možemo, međutim, uzeti i da su w, x, y, z konstante, a d, a, b, c varijable; tada dobivamo jednadžbu točke: ravnine, kojima koordinate d, a, b, c zadovoljavaju tu jednadžbu, prolaze točkom koordinate koje su w, x, y, z.

[5] »Obične« koordinate pravca, uvedene na stranici 12, Plücker je nazvao koordinatama zrake. Riječ je o kinematičkoj metafori/analogiji: pravac kao presječnica ravnina os je rotacije koja jednu ravninu prevodi u drugu, dok je pravac kao spojnica točaka zraka koja jednu točku prenosi u drugu.

Izjednačimo li s nulom determinantu četvrtoga reda kojoj su komponente prvoga retka koordinate varijabilne ravnine $\boldsymbol{\alpha}$, a komponente drugoga, trećeg i četvrtog retka koordinate zadanih ravnina $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ i $\boldsymbol{\alpha}_3$, dobit ćemo jednadžbu točke $\mathcal{X}$ u kojoj se te tri zadane ravnine sijeku:

$$\begin{vmatrix} d & a & b & c \\ d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Razvoj determinante po prvome retku,

$$d \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

pokazuje da su dobivene detemernante trećega reda, s odgovarajućim predznacima, koordinate točke $\mathcal{X}$ u kojoj se sijeku ravnine $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ i $\boldsymbol{\alpha}_3$:

$$\mathcal{X} = (w : x : y : z) = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right).$$

Nastavimo li s razvojem determinanata,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \Bigg(& a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ & : -d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ & : -d_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ & : -d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix} \Bigg), \end{aligned}$$

u dobivenim determinantama drugoga reda možemo prepoznati koordinate, osne ili »obične«, pravca u kojem se sijeku ravnine $\boldsymbol{\alpha}_2$ i $\boldsymbol{\alpha}_3$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} \;=\; \big(&a_1\,\bar{f}_{2,3}^{(2,3)} \;+\; b_1\,\bar{f}_{3,1}^{(2,3)} \;+\; c_1\,\bar{f}_{1,2}^{(2,3)} \\
&:\; -d_1\,\bar{f}_{2,3}^{(2,3)} \;+\; b_1\,\bar{f}_{0,3}^{(2,3)} \;-\; c_1\,\bar{f}_{0,2}^{(2,3)} \\
&:\; -d_1\,\bar{f}_{3,1}^{(2,3)} \;+\; c_1\,\bar{f}_{0,1}^{(2,3)} \;-\; a_1\,\bar{f}_{0,3}^{(2,3)} \\
&:\; -d_1\,\bar{f}_{1,2}^{(2,3)} \;+\; a_1\,\bar{f}_{0,2}^{(2,3)} \;-\; b_1\,\bar{f}_{0,1}^{(2,3)}\big) \\
\;=\; \big(&a_1\,f_{0,1}^{(2,3)} \;+\; b_1\,f_{0,2}^{(2,3)} \;+\; c_1\,f_{0,3}^{(2,3)} \\
&:\; -d_1\,f_{0,1}^{(2,3)} \;+\; b_1\,f_{1,2}^{(2,3)} \;-\; c_1\,f_{3,1}^{(2,3)} \\
&:\; -d_1\,f_{0,2}^{(2,3)} \;+\; c_1\,f_{2,3}^{(2,3)} \;-\; a_1\,f_{1,2}^{(2,3)} \\
&:\; -d_1\,f_{0,3}^{(2,3)} \;+\; a_1\,f_{3,1}^{(2,3)} \;-\; b_1\,f_{2,3}^{(2,3)}\big)
\end{aligned}$$

ili, u sažetijem linearnoalgebarskom zapisu,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} \;&=\; \big(\vec{n}_{\alpha_1}\cdot\vec{f}_{m/o}^{(2,3)} \;:\; -d_1\,\vec{\underline{f}}_{m/o}^{(2,3)} + \vec{n}_{\alpha_1}\times\vec{\underline{f}}_{(2,3)}\big) \;=\; \big(w \;:\; \vec{x}\big) \\
&=\; \big(\vec{n}_{\alpha_1}\cdot\vec{f}_{(2,3)} \;:\; -d_1\,\vec{f}_{(2,3)} + \vec{n}_{\alpha_1}\times\vec{f}_{m/o}^{(2,3)}\big) \;=\; \big(w \;:\; \vec{x}\big).
\end{aligned}$$

Pravac

$$f = (\bar{f}_{2,3} : \bar{f}_{3,1} : \bar{f}_{1,2} : \bar{f}_{0,1} : \bar{f}_{0,2} : \bar{f}_{0,3}) = (f_{0,1} : f_{0,2} : f_{0,3} : f_{2,3} : f_{3,1} : f_{1,2})$$

leži u ravnini $\boldsymbol{\alpha} = (d : a : b : c)$ ili ravnina $\boldsymbol{\alpha}$ prolazi pravcem f ako probodište toga pravca i te ravnine nije određeno[6]:

$$\begin{aligned}
\big(&a\,\bar{f}_{2,3} \;+\; b\,\bar{f}_{3,1} \;+\; c\,\bar{f}_{1,2} \;:\; -d\,\bar{f}_{2,3} \;+\; b\,\bar{f}_{0,3} \;-\; c\,\bar{f}_{0,2} \\
&:\; -d\,\bar{f}_{3,1} \;+\; c\,\bar{f}_{0,1} \;-\; a\,\bar{f}_{0,3} \;:\; -d\,\bar{f}_{1,2} \;+\; a\,\bar{f}_{0,2} \;-\; b\,\bar{f}_{0,1}\big) \\
&=\; (0 \;:\; 0 \;:\; 0 \;:\; 0)
\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}
\big(&a\,f_{0,1} \;+\; b\,f_{0,2} \;+\; c\,f_{0,3} \;:\; -d\,f_{0,1} \;+\; b\,f_{1,2} \;-\; c\,f_{3,1} \\
&:\; -d\,f_{0,2} \;+\; c\,f_{2,3} \;-\; a\,f_{1,2} \;:\; -d\,f_{0,3} \;+\; a\,f_{3,1} \;-\; b\,f_{2,3}\big) \\
&=\; (0 \;:\; 0 \;:\; 0 \;:\; 0)
\end{aligned}$$

ili, sažetije,

$$\big(\vec{n}_\alpha\cdot\vec{f} \;:\; -d\,\vec{f} + \vec{n}_\alpha\times\vec{f}_{m/o}\big) \;=\; \big(0 \;:\; \vec{0}\big).$$

Moment pravca oko pravca

Moment pravca f oko pravca g definiran je izrazom

$$\begin{aligned}
m_{f/g} \;&=\; f_{0,1}\,g_{2,3} \;+\; f_{0,2}\,g_{3,1} \;+\; f_{0,3}\,g_{1,2} \;+\; f_{2,3}\,g_{0,1} \;+\; f_{3,1}\,g_{0,2} \;+\; f_{1,2}\,g_{0,3} \\
&=\; \vec{f}\cdot\vec{g}_{m/o} \;+\; \vec{f}_{m/o}\cdot\vec{g}.
\end{aligned}$$

[6] Ako pravac leži u ravnini, sve su njegove točke, njih ∞, »probodišta«.

Zamjena slova f slovom g i, istodobno, slova g slovom f pokazuje da je istim izrazom definiran i moment $m_{g/f}$ pravca $\mathcal{g}$ oko pravca $\mathcal{f}$.

Izraz za moment pravca oko pravca razmjerno je lako izvesti linearnoalgebraski, uz statičku interpretaciju. Vektor $\vec{f}$ poistovjećuje se s vektorom sile $\vec{\mathcal{F}}$ koja djeluje na pravcu $\mathcal{f}$, a vektor $\vec{f}_{m/o}$ s vektorom momenta te sile oko ishodišta.

Poznato je da je vektor momenta sile $\vec{\mathcal{F}}$ oko neke točke G, koju ćemo uzeti na pravcu $\mathcal{g}$,

$$\vec{f}_{m/G} = \vec{f}_{m/o} - \vec{r}_G \times \vec{f},$$

gdje je $\vec{r}_G$ radijvektor točke G. Orijentirana je duljina ortogonalne projekcije vektora $\vec{f}_{m/G}$ na pravac $\mathcal{g}$ (pomnožena s duljinom vektora $\vec{g}$)

$$\begin{aligned}\vec{g}\cdot\vec{f}_{m/G} &= \vec{g}\cdot\big(\vec{f}_{m/o} - \vec{r}_G\times\vec{f}\,\big) = \vec{g}\cdot\vec{f}_{m/o} - \vec{g}\cdot\big(\vec{r}_G\times\vec{f}\,\big)\\ &= \vec{g}\cdot\vec{f}_{m/o} - \big(\vec{g}\times\vec{r}_G\big)\cdot\vec{f} = \vec{g}\cdot\vec{f}_{m/o} + \big(\vec{r}_G\times\vec{g}\big)\cdot\vec{f}\\ &= \vec{g}\cdot\vec{f}_{m/o} + \vec{g}_{m/o}\cdot\vec{f} = \vec{f}\cdot\vec{g}_{m/o} + \vec{f}_{m/o}\cdot\vec{g}.\end{aligned}$$

Pravci $\mathcal{f}$ i $\mathcal{g}$ se sijeku ako je moment jednoga oko drugog jednak nuli:

$$f_{0,1}\,g_{2,3} + f_{0,2}\,g_{3,1} + f_{0,3}\,g_{1,2} + f_{2,3}\,g_{0,1} + f_{3,1}\,g_{0,2} + f_{1,2}\,g_{0,3} = 0$$

ili

$$\vec{f}\cdot\vec{g}_{m/o} + \vec{f}_{m/o}\cdot\vec{g} = 0.$$

Točka kao sjecište pravaca $\mathcal{f}$ i $\mathcal{g}$ (ako se ti pravci sijeku)

Postavimo li jednim pravcem neku ravninu, možemo upotrijebiti prije izvedeni izraz za probodište pravca i ravnine.

Primjerice, ravninu možemo postaviti pravcem $\mathcal{f}$ i ishodištem i odrediti probodište pravca $\mathcal{g}$ i te ravnine:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \big(f_{2,3}\,g_{0,1} + f_{3,1}\,g_{0,2} + f_{1,2}\,g_{0,3} : f_{3,1}\,g_{1,2} - f_{1,2}\,g_{3,1}\\ &\qquad : f_{1,2}\,g_{2,3} - f_{2,3}\,g_{1,2} : f_{2,3}\,g_{3,1} - f_{3,1}\,g_{2,3}\big)\\ &= \big(\vec{f}_{m/o}\cdot\vec{g} : \vec{f}_{m/o}\times\vec{g}_{m/o}\big).\end{aligned}$$

Ravninu, naravno, možemo postaviti i pravcem $\mathcal{g}$ i ishodištem te naći probodište pravca $\mathcal{f}$ i te ravnine:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \big(g_{2,3}\,f_{0,1} + g_{3,1}\,f_{0,2} + g_{1,2}\,f_{0,3} : g_{3,1}\,f_{1,2} - g_{1,2}\,f_{3,1}\\ &\qquad : g_{1,2}\,f_{2,3} - g_{2,3}\,f_{1,2} : g_{2,3}\,f_{3,1} - g_{3,1}\,f_{2,3}\big)\\ &= \big(\vec{g}_{m/o}\cdot\vec{f} : \vec{g}_{m/o}\times\vec{f}_{m/o}\big).\end{aligned}$$

Izvedeni izrazi nisu primjenjivi ako su oba pravca u istoj ravnini kroz ishodište. Tada je $\vec{f}_{m/o} \parallel \vec{g}_{m/o}$, pa je $\vec{f}_{m/o}\times\vec{g}_{m/o} = \vec{0}$. Kako su uvijek $\vec{f}_{m/o}\perp\vec{f}$ i $\vec{g}_{m/o}\perp\vec{g}$, bit će tada i $\vec{g}_{m/o}\perp\vec{f}$ i $\vec{f}_{m/o}\perp\vec{g}$ i, stoga, i $\vec{f}_{m/o}\cdot\vec{g} = \vec{g}_{m/o}\cdot\vec{f} = 0$, pa izrazi daju $(0:\vec{0}) = (0:0:0:0)$.

Pravcem g možemo tada postaviti prvu projicirajuću ravninu; probodište je pravca f i te ravnine

$$\mathcal{X} = \big(g_{0,2}\,f_{0,1} - g_{0,1}\,f_{0,2} \ :\ g_{1,2}\,f_{0,1} - g_{0,1}\,f_{1,2} \\ :\ g_{1,2}\,f_{0,2} - g_{0,2}\,f_{1,2} \ :\ g_{1,2}\,f_{0,3} + g_{0,2}\,f_{3,1} + g_{0,1}\,f_{2,3}\big).$$

No, prolazi li ta ravnina ishodištem i ako je u njoj i pravac f, nemamo sreće.

Postavimo li pravcem g drugu projicirajuću ravninu, probodište je pravca f i te ravnine

$$\mathcal{X} = \big(-g_{0,3}\,f_{0,1} + g_{0,1}\,f_{0,3} \ :\ g_{3,1}\,f_{0,1} - g_{0,1}\,f_{3,1} \\ :\ g_{3,1}\,f_{0,2} + g_{0,1}\,f_{2,3} + g_{0,3}\,f_{1,2} \ :\ g_{3,1}\,f_{0,3} - g_{0,3}\,f_{3,1}\big);$$

postavimo li pak pravcem g treću projicirajuću ravninu, bit će

$$\mathcal{X} = \big(g_{0,3}\,f_{0,2} - g_{0,2}\,f_{0,3} \ :\ g_{2,3}\,f_{0,1} + g_{0,3}\,f_{1,2} + g_{0,2}\,f_{3,1} \\ :\ g_{2,3}\,f_{0,2} + g_{0,2}\,f_{2,3} \ :\ g_{2,3}\,f_{0,3} - g_{0,3}\,f_{2,3}\big).$$

Ravnina određena pravcima f i g (ako se ti pravci sijeku)

Uzmemo li jedan pravac i neizmjerno daleku točku drugoga, možemo upotrijebiti prije izvedeni izraz za ravninu određenu točkom i pravcem:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \big(f_{0,1}\,g_{2,3} + f_{0,2}\,g_{3,1} + f_{0,3}\,g_{1,2} \\ &\qquad :\ f_{0,2}\,g_{0,3} - f_{0,3}\,g_{0,2} \ :\ f_{0,3}\,g_{0,1} - f_{0,1}\,g_{0,3} \ :\ f_{0,1}\,g_{0,2} - f_{0,2}\,g_{0,1}\big) \\ &= \big(g_{0,1}\,f_{2,3} + g_{0,2}\,f_{3,1} + g_{0,3}\,f_{1,2} \\ &\qquad :\ g_{0,2}\,f_{0,3} - g_{0,3}\,f_{0,2} \ :\ g_{0,3}\,f_{0,1} - g_{0,1}\,f_{0,3} \ :\ g_{0,1}\,f_{0,2} - g_{0,2}\,f_{0,1}\big) \\ &= \big(\vec{f}\cdot\vec{g}_{m/o} \ :\ \vec{f}\times\vec{g}\big) = \big(\vec{g}\cdot\vec{f}_{m/o} \ :\ \vec{g}\times\vec{f}\big).\end{aligned}$$

Izraz nije primjenjiv ako su pravci f i g usporedni. Tada je $\vec{f} \parallel \vec{g}$ &td.