

## PRIMJENA GRAFIČKOG POSTUPKA ODREĐIVANJA RAVNOTEŽE PROSTORNOGA ČVORA NA DISKRETNE ELEMENTE

### APPLICATION OF GRAPHICAL PROCEDURE FOR EQUILIBRIUM FINDING OF A SPATIAL NODE TO DISCRETE ELEMENTS

Maja Baniček<sup>1</sup>, Krešimir Fresl<sup>1</sup>, Damir Lazarević<sup>1</sup>, Mario Uroš<sup>1</sup>

(1) Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, mbanicek@grad.hr, fresl@grad.hr, damir@grad.hr, uros@grad.hr

#### Sažetak

U radu je analiziran skup čestica zrnatoga materijala u stabilnoj ravnoteži te statički pritisci koji se javljaju među česticama u mirovanju, pri čemu se čestice smatraju idealno glatkima, pa su zanemarene tangencijalne sile u kontaktima. Kako bi se pojednostavio problem prijenosa sila na mjestima dodira, uzeto je da čestice imaju oblik kuglica i da se svaka kuglica oslanja na druge tri kuglice. Uz navedena ograničenja dobiva se osnovni model ravnoteže jedne kuglice u mirovanju, a normalne sile u tako definiranomu kontaktu tvore statički određenu tlačnu rešetku koja drži skup kuglica u stabilnoj ravnoteži. Za sastavljanje takve tlačne rešetke mogu se primijeniti grafički postupak uravnoteženja prostornoga čvora i metoda rješavanja rešetke čvor po čvor. Na kraju rada provedena je simulacija ravnoteža kuglice u programskom paketu Abaqus metodom diskretno-konačnih elemenata te je prikazan prijenos sila na kontaktima.

*Ključne riječi: grafostatika, metoda diskretnih elemenata (MDE), rešetka sila, pronalaženje ravnoteže*

#### Abstract

The paper considers an assembly of particles of granular matter in stable equilibrium and pressures occurring at contacts of the particles, while the particles are considered as ideally smooth and tangential forces at contacts are neglected. In order to simplify the problem of contact force transmission, the particles are idealized as spherical particles and each sphere is supported by three spheres. In respect to the above restrictions, the basic model of a particle in equilibrium is obtained, and normal forces occurring at such defined contacts form a force network which ensures the assembly of particles to be in stable equilibrium. To assemble compression-only truss, it is possible to apply the graphical procedure for equilibrium finding of a spatial node and the node-by-node method for truss analysis. At the end of the paper a simulation of the equilibrium of a spherical particle is conducted using Finite-Discrete Element Method (FDEM) and software suite Abaqus and the transmission of the forces at the contacts are shown.

*Keywords: Graphic Statics, Discrete Element Method (DEM), force network, equilibrium finding*

## 1. Uvod

Metode grafostatike služe za rješavanje statičkih problema kao što su statička ekvivalencija zadanoga sustava sila ili globalna ravnoteža konstrukcijskoga sistema. One se temelje na geometrijskoj konstrukciji dvaju recipročnih planova, plana položaja i plana sila. U planu položaja prikazuju se geometrija konstrukcije (položaj unutarnjih čvorovi i ležajeva, duljine elemenata te položaj vanjskih opterećenja), dok se u planu sila ravnoteža unutarnjih čvorova i globalna ravnoteža prikazuju pomoću poligona sastavljenih od vektora.

Grafostatičke metode razvijene su u 19. stoljeću, a upotrebljavale su se uglavnom za rješavanje ravninskih statičkih problema. Zbog dugotrajnoga i kompleksnog postupka koji se provodi korak po korak, ove metode nisu mogle biti primijenjene na složenije prostorne konstrukcije. Zahvaljujući naprednim računalima i alatima za kompjutorsku grafiku, današnja grafostatika je prostorna, a postoji više pristupa i svi se temelje na računalnoj realizaciji neke od metoda predloženih u 19. stoljeću. Primjerice, u poliedralnoj grafostatici sile se prikazuju stranama poliedra okomitima na pravce njihova djelovanja i ploština proporcionalnih njihovim intenzitetima ([1] i literatura tamo navedena). U vektorskoj pak grafostatici plan je sila sastavljen od prostornih poligona dobivenih zbrajanjem vektora ([2] i literatura tamo navedena). Još je jedan od mogućih pristupa je prostorna grafostatika utemeljena na Plückerovoj pravčastoj geometriji [3], Möbiusovu načelu dualnosti [4] i Grassmannovoj algebri [5], a detaljniji opis tog pristupa može se naći u radu [6].

Današnja grafostatika svoju primjenu nalazi ponajviše u proračunu prostornih rešetaka štapovi kojih su spojeni kuglastim zglobovima, te se takvim konstrukcijskim elementima prenose samo uzdužne tlačne ili vlačne sile. Postoje dvije dobro poznate metode rješavanja rešetaka, a to su metoda presjeka i metoda čvorova – rješavanja čvor po čvor.

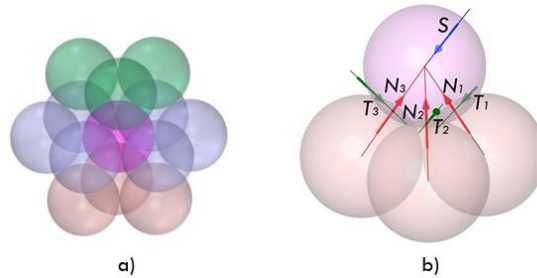
U metodi diskretnih elemenata (eng. *Discrete Element Method* – DEM) zrnati se materijal aproksimira skupom diskretnih elemenata (čestica) koji se promatraju kao zasebni elementi, a složeno globalno ponašanje zrnatoga materijala određeno je jednostavnim zakonima interakcije pojedinih diskretnih elemenata [7].

Statički pritisci koji se javljaju na mjestima dodira čestica tvore rešetku tlačnih sila koja osigurava stabilnu ravnotežu hrpe čestica. Uvođenjem određenih ograničenja može se dobiti statički određena rešetka za čije se sastavljanje može primijeniti metoda rješavanja rešetke čvor po čvor uz grafostatički postupak rješavanja ravnoteže prostornoga čvora. Na taj se način mogu u zrnatom materijalu uočiti kritična mjesta na kojima se javljaju velike tlačne sile. Primjerice, u zastornoj prizmi željezničkoga kolosijeka izrađenoj od zrna tucanika mogao bi se dobiti uvid u ponašanje kolosiječnoga zastora pod djelovanjem opterećenja koje se javlja tijekom eksploatacije, pri prolazu vlaka. Problemi koji se javljaju zbog prevelikih sila pritiska u zastornoj prizmi i prednosti metode diskretnih elemenata u rješavanju tog problema detaljnije su opisani u radu [8].

## 2. Diskretni elementi

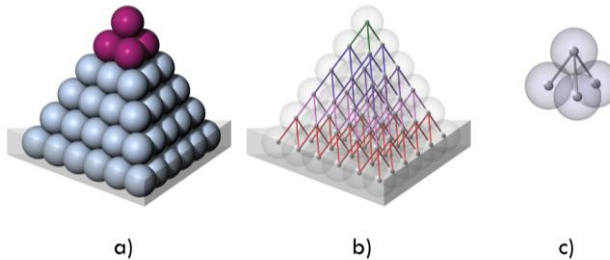
### 2.1. Model ravnoteže čestice

Radi pojednostavljenja prijenosa sila među česticama, u ovom ćemo radu čestice idealizirati krutim kuglicama. Ako primijenimo pristup opisan u radu [9], postoje tri vrste kontakata koje promatrana kuglica ostvaruje u stabilnoj hrpi, a to su: (i) kontakti koji pridonose opterećenju promatrane kuglice, dakle kontakti pri kojima kuglica predstavlja oslonac susjednim kuglicama i preuzima njihovo opterećenje (kontakti sa zelenim kuglicama na slici 1a), (ii) kontakti koji predstavljaju oslonce promatrane kuglice (kontakti sa crvenim kuglicama na slici 1a), (iii) kontakti koji ne preuzimaju nikakvu silu, a to su granični kontakti koji ne dopuštaju kuglici nikakav pomak u smjeru takvog kontakta (kontakti s plavim kuglicama na slici 1a). Uzmemo li u obzir navedene vrste kontakata koje kuglica ostvari u hrpi, dolazimo do konačnoga modela ravnoteže jedne kuglice prikazanoga na slici 1b).



Slika 1. a) vrste kontakata sa susjednim kuglicama koje kuglica ostvaruje u hrpi, b) konačni model ravnoteže kuglice

Na mjestu kontakta dviju čestica javljaju se normalna tlačna  $N$  i tangencijalna  $T$  sila, dok se eventualne vlačne sile zbog kohezije mogu zanemariti. Ako uvedemo uvjet da su kuglice idealno glatke, koeficijent trenja je  $\mu=0$ , pa je i tangencijalna sila  $T=0$ . Ovim ograničenjem u kontaktu ostaju samo normalne tlačne sile formirajući rešetku tlačnih sila koje drže hrpu čestica u stabilnom položaju (slika 2b). Da bi ta rešetka bila statički određena, svaka kuglica smije imati najviše tri susjedne kuglice (slika 2c). Na taj način se formira „tronožac“ kao aproksimacija modela ravnoteže jedne kuglice. Sam tronožac predstavlja statički određeni problem prostornoga čvora, pa se rešetka može sastaviti čvor po čvor. Ako je broj susjednih kuglica veći od tri, problem prostornoga čvora postaje statički neodređen, što rezultira statičkom neodređenošću same rešetke.



Slika 2. a) hrpa diskretnih čestica u ravnoteži, b) tlačna rešetka hrpe čestica u stabilnoj ravnoteži, c) aproksimacija stabilne ravnoteže jedne čestice ravnotežom čvora prostorne tlačne rešetke

### 3. Rješavanje rešetaka grafostatičkim postupcima

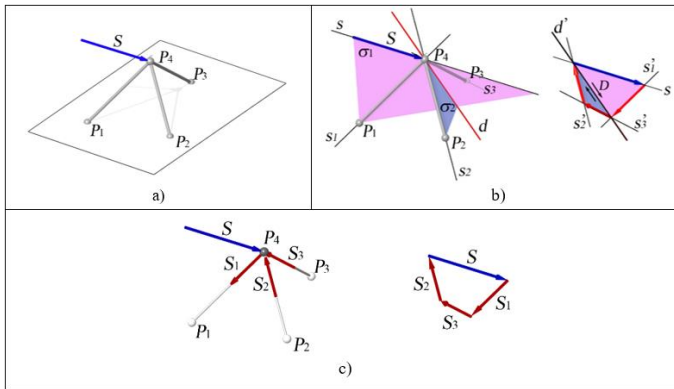
#### 3.1. Ravnoteža prostornoga čvora

Kako bi se odredila unutarnja ravnoteža prostorne rešetke može se primijeniti metoda čvor po čvor. Za čvor zadan u planu položaja recipročan plan u planu sila prostorni je poligon sila. Grafički postupak određivanja ravnoteže prostornoga čvora opisan je u udžbeniku [10], a u ovom ćemo radu primijeniti kompjutorsku realizaciju toga postupka iz rada [11].

Za prostorni kuglasti zglobovi čvor  $P_4$  i silu  $S$  koja djeluje na njega (slika 3a) odredit ćemo sile u štapovima kojima je čvor povezan kuglastim osloncima  $P_1, P_2$  i  $P_3$  za čvrstu podlogu. Kao što smo rekli, postupak se provodi u dva plana, u planu položaja (na slikama 3b) i 3c) lijevo) i u planu sila (na slikama 3b) i 3c) desno).

Rješavanje prostornoga čvora svodi se na postupak uravnoteženja četiri sile u prostoru: četiri su sile u ravnoteži ako rezultanta bilo koje dvije sile leži na pravcu djelovanja rezultante preostalih dviju sila. Pravac na kojemu leže rezultante tih dvaju parova sila presječna je dviju ravnina u

kojima leže ti parovi. Stoga, pravcem  $s$  djelovanja sile  $S$  i pravcem  $s_1$ , koji je os štapa  $P_1P_4$ , postavljamo ravninu  $\sigma_1$ , a pravcem  $s_2$ , koji je os štapa  $P_2P_4$ , i pravcem  $s_3$ , koji je os štapa  $P_3P_4$ , postavljamo ravninu  $\sigma_2$  (slika 3b), te određujemo pravac  $d$  kao presječnicu tih dviju ravnina. Na njemu će ležati rezultante  $D=S+S_1$  i  $-D=S_2+S_3$ . Budući da su sada svi pravci djelovanja sile poznati, postupak nastavljamo u planu sile.



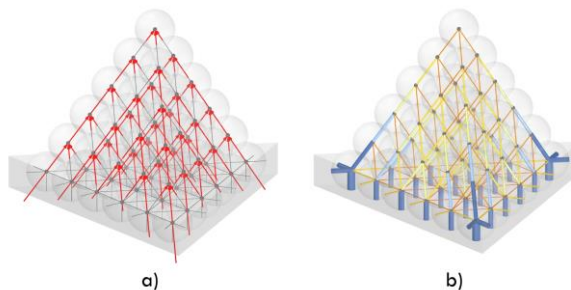
Slika 3. Ravnoteža prostornog čvora  $P_4$  [11]

Na početak sile  $S$  u planu sile postavljamo pravac  $d'$  paralelan pravcu  $d$ , a na kraj sile  $S$  pravac  $s_1'$  paralelan pravcu  $s_1$ . Kako je sila  $D=S+S_1$  zbroj sile  $S$  i  $S_1$  i kako sve djeluju u istoj ravnini  $\sigma_1$ , sjecište pravaca  $d'$  i  $s_1'$  dat će veličine sile  $D$  i  $S_1$ . Sada postavljamo na početak sile  $-D$  pravac  $s_2'$  paralelan pravcu  $s_2$ , a na kraj sile  $-D$  pravac  $s_3'$  paralelan pravcu  $s_3$ . Budući da svi pravci djelovanja  $d'$ ,  $s_2'$  i  $s_3'$  leže u istoj ravnini  $\sigma_2$ , sjecište pravaca  $s_2'$  i  $s_3'$  odredit će veličinu sile  $S_2$  i  $S_3$ . Na taj način smo odredili unutarnje sile  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  u štapovima koje u planu sile tvore zatvoreni prostorni poligon, odnosno odredili smo ravnotežu prostornog čvora  $P_4$  (slika 3c).

Želimo li da su sve sile u štapovima tlačne, pravac djelovanja zadane sile  $S$  mora probadati bazni trokut čiji su vrhovi oslonci  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  (na slici 3a) taj uvjet nije ispunjen, pa je sila  $S_1$  vlačna.

### 3.2. Primjena grafostatike na sastavljanje rešetke tlačnih sila

Slaganje rešetke tlačnih sila u stabilnoj hrpi čestica u mirovanju provodi se rastavljanjem sile (statička ekvivalencija) odozgo prema dolje, polazeći od čestice koja preuzima samo svoju vlastitu težinu i koja ne uravnotežuje niti jednu drugu česticu. Stoga, pogledamo li primjer hrpe kuglica u obliku trostrane piramide (slika 2a), to je kuglica na vrhu piramide.



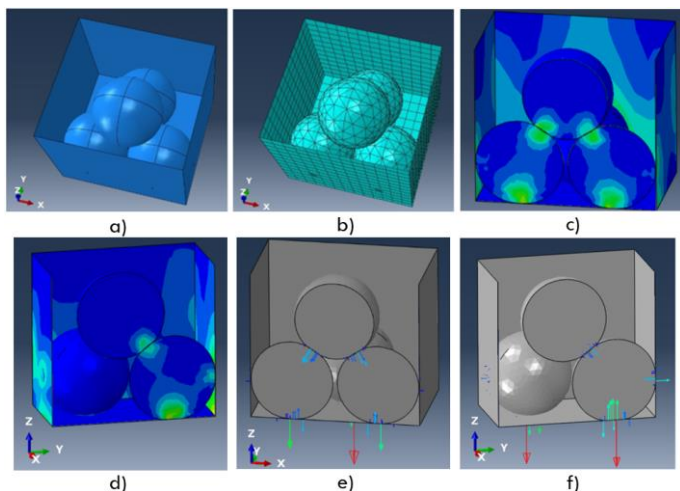
Slika 4. a) Rešetka uravnotežujućih sila, b) prikaz rasporeda i veličina tlačnih sila unutar hrpe čestica

Za stabilnu statičku ravnotežu čestice oblika kugle potrebne su minimalno tri susjedne čestice. Ako zanemarimo tangencijalne sile, ostaju samo normalne sile u kontaktima čiji pravci djelovanja

formiraju tetraedar kojemu su vrhovi središta promatranih kuglica. Takav statički sistem možemo aproksimirati čvorom prostorne rešetke i riješiti ga primjenom grafičkoga postupka opisanoga u potpoglavlju 3.1. Želimo li na isti način sastaviti cijelu rešetku, dobivene uravnotežujuće sile prenosimo s trenutno promatrane kuglice na njezine susjede te dalje istim postupkom određujemo njihove uravnotežujuće sile. Postupak nastavljamo dok ne dođemo do zadnje kuglice koja leži na čvrstoj podlozi. Konačna rešetka uravnotežujućih sila prikazana je na slici 4a), a raspored i veličine tlačnih sila unutar hrpe kuglica naznačeni su na slici 4b), pri čemu su intenziteti sila proporcionalni debljinama štapova. Kako je utjecaj trenja zanemaren, za kuglice koje leže na čvrstoj podlozi potrebni su dodatni rubni uvjeti koji će spriječiti translacijske pomake po čvrstoj podlozi. Obično se znati materijali skladište u spremnicima, pa potrebne rubne uvjete možemo postići stijenkama kutije ili fiksirati kuglice koja se nalaze u sloju u kontaktu s čvrstom podlogom.

### 3.3. Usporedba s metodom konačno-diskretnih elemenata

Kako bi se prikazao prijenos sila između čestica i kuglasta čestica u ravnoteži, izrađen je numerički model (slike 5a) i 5b)) u programskom paketu za inženjerske simulacije Abaqus/CAE [12] metodom konačno-diskretnih elemenata (eng. *Finite-Discrete Element Method* – FDEM) [13]. Model se sastoji od četiri deformabilne kuglice postavljene u kutiju koja ujedno predstavlja rubne uvjete, jer ne postoji trenje između čestica i podloge, a ne postoji ni kohezija među česticama. U suprotnom bi se slučaju čestice odvojile jedna od druge i izgubio bi se kontakt koji prenosi tlačne sile. Da bi kuglice bile definirane kao idealno glatke, tangencijalno ponašanje kontakta među česticama definirano je kao „Frictionless“, što znači da je koeficijent trenja  $\mu=0$ , pa je i tangencijalna sila u kontaktu jednaka nula, a ponašanje kontakta u normalnom smjeru definirano je kao kruto „Hard“. Za opisani model provedena je kvazistatička Abaqus/Explicit analiza, a naprezanja u kuglicama dobivena simulacijom prikazana su na slikama 5c) i 5d), te je prikazan prijenos sila u kontaktima na slikama 5e) i 5f).



Slika 5. FDEM model ravnoteže kuglice u Abaqus: a) i b) prostorni prikaz i prikaz mreže konačnih elemenata, c) i e) prikazi naprezanja u kuglicama, d) i f) prikazi prijenosa sila u kontaktima

## 4. Zaključak i budući rad

U radu su obrađeni diskretni elementi idealnoga oblika kugle, te su uvedena sljedeća ograničenja: a) na kontaktnoj plohi susjednih čestica zanemarene su tangencijalne sile koje se javljaju zbog trenja i b) vlačne sile su zanemarene zbog skoro nikakvoga kohezijskog međudjelovanja između čestica. Na taj smo način na kontaktnim plohamo dobili samo sile pritiska pravci djelovanja kojih

prolaze kroz središta kuglica koje su u međudjelovanju. U metodi diskretnih elemenata tlačne sile koje se javljaju na mjestu dodira čestica zrnatoga materijala u statičkoj stabilnoj ravnoteži tvore tlačnu rešetku. Pokazali smo da se, uvedemo li navedena ograničenja te uz raspored kuglica koji daje statičku određenost, rešetka može sastavljati čvor po čvor.

Grafostatika ima široku primjenu ne samo na klasične konstrukcije kao što su rešetke u visokogradnji ili mostovima, a u radu je pokazana primjena i u slučajevima u kojima se problem može aproksimirati rešetkom, kao što je sastavljanje tlačne rešetke koja drži hrpu čestica (diskretnih elemenata) u stabilnoj ravnoteži.

U budućem radu uvest ćemo tangencijalne sile u kontaktnoj plohi i različite veličine čestica te zamijeniti idealizirane čestice u obliku kugle drugim oblicima kao što su poliedri i elipsoidi, kako bi se postigao izgled što sličniji zrnu tucanika od kojega se izrađuje prizma kolosiječnoga zastora. Tlačnom rešetkom dobivenom takvim česticama moći će se točnije uočiti mjesta na kojima se javljaju velike sile pritiska koje bi mogle uzrokovati pucanje ili u krajnjem slučaju drobljenje pojedinih zrna, što može rezultirati narušavanjem stabilnosti kolosiječnoga zastora.

## Zahvala

Rad je izrađen u okviru projekta „Razvoj DIV elastične kopče“ referentne MIS oznake: KK.01.2.1.01.0011 koji financira Ministarstvo gospodarstva, poduzetništva i obrta RH kroz program „Jačanje konkurentnosti gospodarstva poticanjem investicija i učinkovitijim korištenjem EU sredstava“.

## Literatura

- [1] Hablicsek, M., Akbarzadeh, M., Guo, Y.: Algebraic 3D graphic statics: Reciprocal constructions, *Computer-Aided Design*, vol. 108, 2019, 12 (30-41), DOI: 10.1016/j.cad.2018.08.003.
- [2] D'Acunto, P., Jasienski, J.-P., Ohlbrock, P. O., Fivet, C., Schwartz, J., Zastavni, D.: Vector-based 3D graphic statics: A framework for the design of spatial structures based on the relation between form and forces, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 167, 2019, 13 (58-70), DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.02.008.
- [3] Plücker, J.: On a new geometry of space, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 155, 1865, 37 (725–791).
- [4] Möbius, A. F.: Über Eine Besondere Art Dualer Verhältnisse Zwischen Figuren Im Raume, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 10, 1833, 25 (317–341).
- [5] Grassmann, H.: A New Branch of Mathematics: The “Ausdehnungslehre” of 1844 and Other Works. Open Court Publishing, (Transl.: C. L. Kannenberg), 1995.
- [6] Kodrnja, I., Baniček, M., Fresl, K.: Line geometry and graphic statics, *Građevinar*, prihvaćeno za objavu, 2019.
- [7] Bičanić, N.: Discrete Element Methods, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Vol. 1: Fundamentals, John Wiley & Sons Inc., 2007., DOI: 10.1002/9781119971160.
- [8] Sluganović, V., Lakušić, S., Lazarević, D.: Track ballast modelling by discrete element method, *Građevinar*, vol 71 (7), 2019, 589–600, DOI: 10.14256/JCE.2350.2018.
- [9] Lazarević, D.: Modeliranje opterećenja spremnika pri punjenju zrnatim materijalom, *Magistarski rad*, Sveučilište Zagreb, Građevinski fakultet, 1997.
- [10] Simović, V.: *Građevna statika I*, Građevinski institut Zagreb, 1988.
- [11] Kodrnja, I., Baniček, M., Fresl, K.: Grassmann Algebra and Graphic Statics, *Future Trends in Civil Engineering*, prihvaćeno za objavu, 2019.
- [12] Dassault Systèmes: SIMULIA, User Assistance 2019., Simulia (2019)
- [13] Munjiza, A. A., Knight, E., Rougier, E.: *Computational Mechanics of Discontinua*, John Wiley & Sons Inc., 2011., DOI: 10.1002/9781119971160