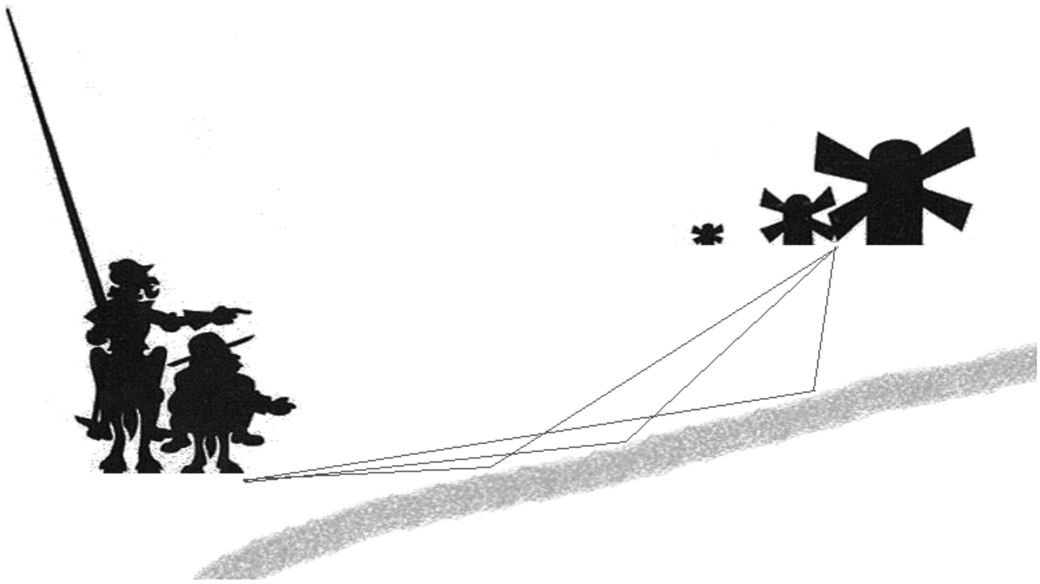
Višekoračna metoda gustoća sila

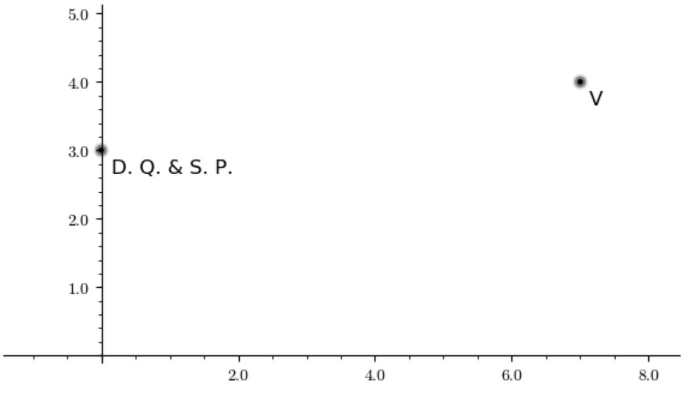
Don Quijote i vjetrenjače

Nađite točku u kojoj Don Quijote i Sancho Panza trebaju pristupiti obali rijeke da zbroj duljina puta do rijeke i puta od rijeke do vjetrenjača bude najmanji!



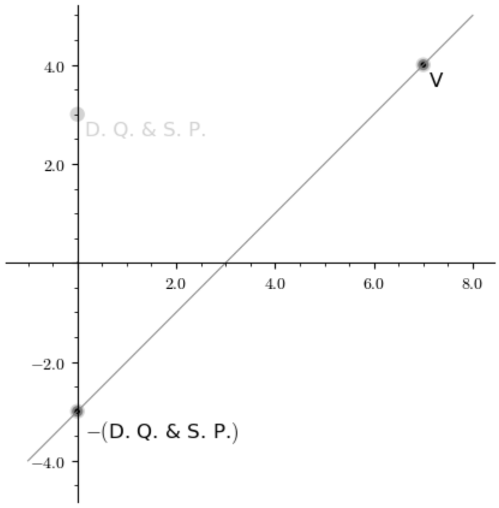
[s omota albuma *Windmill Tilter* Kennyja Wheelera]

U koordinatnom sustavu u kojem se obala rijeke poklapa s osi x koordinate su točke u kojoj su Don Quijote i Sancho Panza $Q(x_Q, y_Q) = Q(0, 3)$, dok su vjetrenjače u točki s koordinatama $V(x_V, y_V) = V(7, 4)$.



Budući da se obala rijeke poklapa s osi x, koordinate su tražene točke $(x, 0)$, pa je nepoznanica samo x.

„Grafičko” je rješenje gotovo trivijalno:



$$y = \frac{3+4}{7}\,x - 3 = x - 3$$

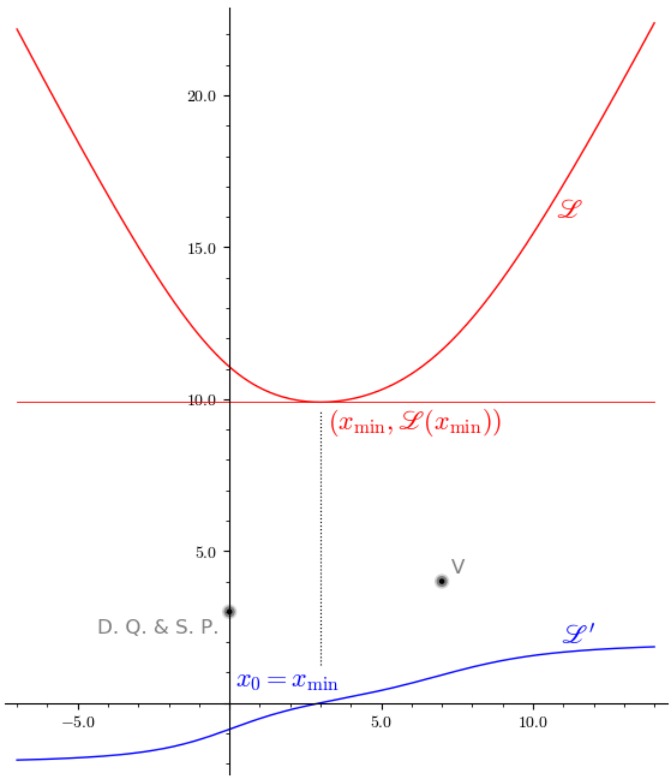
$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$\mathscr{L}(x) \simeq 9{,}899\,494\,936\,611\,665$$

Funkcija minimum koje tražimo zbroj je duljina putova do rijeke i od rijeke do vjetrenjača:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} : x \mapsto \ell_Q(x) + \ell_V(x) &= \sqrt{(x - x_Q)^2 + y_Q^2} + \sqrt{(x - x_V)^2 + y_V^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(x-7)^2 + 4^2} = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(x-7)^2 + 16}.\end{aligned}$$



Funkcija poprima najmanju vrijednost u točki u kojoj je njezina derivacija jednake nuli:

$$\mathscr{L}'(x) = 0,$$

$$\mathscr{L}' : x \mapsto \frac{x - x_Q}{\sqrt{(x - x_Q)^2 + y_Q^2}} + \frac{x - x_V}{\sqrt{(x - x_V)^2 + y_V^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{x - 7}{\sqrt{(x - 7)^2 + 16}},$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{x - 7}{\sqrt{(x - 7)^2 + 16}} = 0. \tag{♠}$$

Problem nalaženja Don Quijoteova najkraćega puta može se neposredno prevesti u problem nalaženja minimalne mreže kabelā, oblika mreže zadane topologije za koji je zbroj duljina kabelā manji od zbroja duljina u bilo kojem drugom obliku koji mreža može poprimiti. U minimalnoj su mreži vrijednosti sila u svim odsječcima svih kabela jednake, pa, označimo li sa S vrijednost sila u odsječcima zamišljenih kabela kojima smo zamijenili odsječke puta, uvjet minimuma (♠) prelazi u

$$S \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + S \frac{x - 7}{\sqrt{(x - 7)^2 + 16}} = 0.$$

Kako su ${}^{x}/_{\sqrt{x^2+9}}$ i ${}^{x-7}/_{\sqrt{(x-7)^2+16}}$ kosinusi kutova između osī kabelā i osi x, tom je jednadžbom izražen uvjet ravnoteže projekcija sila u kabelima na os x.[1]

Zaboravit ćemo na trenutak da su duljine odsječaka kabelā ℓ_Q i ℓ_V funkcije varijable x i u priču uvesti gustoće sila $q_Q = {}^{S}/_{\ell_Q}$ i $q_V = {}^{S}/_{\ell_V}$ te jednadžbu ravnoteže napisati u obliku

$$q_Q\, x + q_V\, (x - 7) = 0.$$

Ako su $q_Q = q_V = 1$, iz

$$x + x - 7 = 0$$

slijedi $x = 3{,}5$, pa su

$$\ell_Q = \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{3{,}5^2 + 9} = 4{,}609\,77,$$

$$\ell_V = \sqrt{(x - 7)^2 + 16} = \sqrt{(3{,}5 - 7)^2 + 16} = 5{,}315\,07,$$

$$\mathscr{L} = \ell_Q + \ell_V = 4{,}609\,77 + 5{,}315\,07 = 9{,}924\,84$$

i potom

$$S_Q = q_q\, \ell_Q = 1 \cdot 4{,}609\,77 = 4{,}609\,77,$$

$$S_V = q_V\, \ell_V = 1 \cdot 5{,}315\,07 = 5{,}315\,07.$$

Očito $S_Q \neq S_V$, što znači da dobivena mreža nije minimalna (odnosno, da dobiveni put nije najkraći). Do minimalne ćemo mreže doći iteracijskim postupkom.

[1] Jednadžbu ravnoteže projekcija sila na os y nećemo napisati. Samo dvije sile pravci djelovanja kojih se sijeku ionako ne mogu zadovoljiti obje jednadžbe ravnoteže.

Za traženu vrijednost sila odabrat ćemo $\overline{S} = 5$, što je „negdje između" vrijednostī S_Q i S_V, tako da se možemo nadati da će konvergencija prema $\overline{S}$ biti razmjerno brza. (Očito je da oblik mreže ne ovisi o odabranoj vrijednosti $\overline{S}$ (ako je $\overline{S} \neq 0$).)

Za iteraciju prema traženoj vrijednosti sila gustoće sila u koraku k izračunavamo prema izrazu

$$q_I^{(k)} \;=\; q_I^{(k-1)} \, \frac{\overline{S}}{S_I^{(k-1)}},$$

pa će biti

$$q_Q^{(2)} \;=\; 1 \cdot \frac{5}{4{,}609\,77} \;=\; 1{,}084\,65 \qquad \text{i} \qquad q_V^{(2)} \;=\; 1 \cdot \frac{5}{5{,}315\,07} \;=\; 0{,}940\,721.$$

Sada iz

$$1{,}084\,65\, x \;+\; 0{,}940\,721\, (x-7) \;=\; 0$$

slijedi $x^{(2)} \;=\; 3{,}251\,28$ i potom

$$\ell_Q^{(2)} \;=\; 4{,}423\,89, \qquad \ell_V^{(2)} \;=\; 5{,}482\,06 \qquad \text{i} \qquad \mathscr{L}^{(2)} \;=\; 9{,}905\,95$$

te

$$S_Q^{(2)} \;=\; 1{,}084\,65 \cdot 4{,}423\,89 \;=\; 4{,}798\,38 \qquad \text{i} \qquad S_V^{(2)} \;=\; 0{,}940\,721 \cdot 5{,}482\,05 \;=\; 5{,}157\,08.$$

U sljedećem su koraku:

$$q_Q^{(3)} \;=\; 1{,}084\,65 \cdot \frac{5}{4{,}798\,37} \;=\; 1{,}130\,23 \qquad \text{i} \qquad q_V^{(3)} \;=\; 0{,}940\,721 \cdot \frac{5}{5{,}157\,08} \;=\; 0{,}912\,067,$$

$$1{,}130\,23\, x \;+\; 0{,}912\,067\, (x-7) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^{(3)} \;=\; 3{,}126\,13,$$

$$\ell_Q^{(3)} \;=\; 4{,}332\,74, \qquad \ell_V^{(3)} \;=\; 5{,}568\,38 \qquad \text{i} \qquad \mathscr{L} \;=\; 9{,}901\,13,$$

$$S_Q^{(3)} \;=\; 4{,}896\,98 \qquad \text{i} \qquad S_V^{(3)} \;=\; 5{,}078\,74.$$

Nastavak iteracijskoga postupka (bez povećega broja preskočenih koraka) prikazan je u tablici.

k	4	5	8	11	15	18
$q_Q^{(k)}$	1,154 00	1,166 16	1,176 96	1,178 32	1,178 50	1,178 51
$q_V^{(k)}$	0,897 927	0,890 894	0,884 759	0,883 993	0,883 890	0,883 884
$x^{(k)}$	3,063 21	3,031 64	3,003 96	3,000 49	3,000 03	3,000 00
$\ell_Q^{(k)}$	4,287 57	4,265 07	4,245 44	4,242 99	4,242 66	4,242 64
$\ell_V^{(k)}$	5,612 34	5,634 52	5,654 06	5,656 50	5,656 83	5,656 85
$\mathscr{L}^{(k)}$	9,899 91	9,899 59	9,899 50	9,899 49	9,899 49	9,899 49
$S_Q^{(k)}$	4,947 87	4,973 77	4,996 70	4,999 59	4,999 97	5,000 00
$S_V^{(k)}$	5,039 47	5,019 77	5,002 47	5,000 31	5,000 02	5,000 00

Uvjet za prekid iteracije je

$$\left|\bar{S} - S_Q^{(k)}\right| < 5 \cdot 10^{-m} \quad \& \quad \left|\bar{S} - S_V^{(k)}\right| < 5 \cdot 10^{-m}.$$

Za $m = 3$ potrebno je osam, za $m = 4$ jedanaest, za $m = 5$ petnaest, a za $m = 6$ osamnaest koraka; uvjet je odabran tako da se vrijednosti sila mogu zaokružiti na m značajnih znamenaka:

$$S_Q^{(8)} = 4{,}996\,70 \simeq 5{,}00 \qquad S_V^{(8)} = 5{,}002\,47 \simeq 5{,}00$$

$$S_Q^{(11)} = 4{,}999\,59 \simeq 5{,}000 \qquad S_V^{(11)} = 5{,}000\,31 \simeq 5{,}000$$

$$S_Q^{(15)} = 4{,}999\,97 \simeq 5{,}000\,0 \qquad S_V^{(15)} = 5{,}000\,02 \simeq 5{,}000\,0$$

$$S_Q^{(18)} = 5{,}000\,00 \qquad S_V^{(18)} = 5{,}000\,00$$

[Adolf Schrödter]