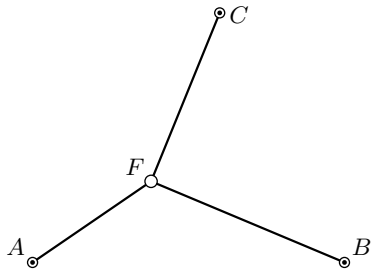
Višekoračna metoda gustoća sila

Primjer 1.

Nađite položaj čvora F u kojem su vrijednosti sila u kabelima $1 = \{A, F\}$, $2 = \{B, F\}$ i $3 = \{C, F\}$ jednake, ako su koordinate ležajnih čvorova A, B i C

$$A\,(x_A, y_A) \;=\; A\,(0, 0)$$
$$B\,(x_B, y_D) \;=\; B\,(5, 0)$$
$$C\,(x_C, y_C) \;=\; C\,(3, 4)$$



$$F\,(x_F, y_F) \;=\; F\,(x, y) \;\simeq\; F\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right)$$

jednadžbe ravnoteže čvora F:

$$q_1\,(x_A - x) \,+\, q_2\,(x_B - x) \,+\, q_3\,(x_C - x) \;=\; 0$$
$$q_1\,(y_A - y) \,+\, q_2\,(y_B - y) \,+\, q_3\,(y_C - y) \;=\; 0$$

$$-q_1\,x \,+\, q_2\,(5 - x) \,+\, q_3\,(3 - x) \;=\; 0$$
$$-q_1\,y \,-\, q_2\,y \,+\, q_3\,(4 - y) \;=\; 0$$

$$(q_1 + q_2 + q_3)\,x \;=\; 5\,q_2 \,+\, 3\,q_3 \qquad \Rightarrow \qquad x \;=\; \frac{5\,q_2 \,+\, 3\,q_3}{q_1 + q_2 + q_3}$$

$$(q_1 + q_2 + q_3)\,y \;=\; 4\,q_3 \qquad \Rightarrow \qquad y \;=\; \frac{4\,q_3}{q_1 + q_2 + q_3}$$

početne vrijednosti gustoća sila u kabelima:

$$q_1^{(1)} \;=\; q_2^{(1)} \;=\; q_3^{(1)} \;=\; 1\ \mathrm{kN/m}$$

$F\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$:

$$x^{(1)} \;=\; \frac{5 \,+\, 3}{3} \;=\; \frac{8}{3} \;=\; 2{,}\dot{6} \qquad \& \qquad y^{(1)} \;=\; \frac{4}{3} \;=\; 1{,}\dot{3}$$

duljine kabelā:

$$\ell_1 \;=\; \sqrt{(x_A - x)^2 \,+\, (y_A - y)^2} \;=\; \sqrt{x^2 \,+\, y^2}$$
$$\ell_2 \;=\; \sqrt{(x_B - x)^2 \,+\, (y_B - y)^2} \;=\; \sqrt{(5 - x)^2 \,+\, y^2}$$
$$\ell_3 \;=\; \sqrt{(x_C - x)^2 \,+\, (y_c - y)^2} \;=\; \sqrt{(3 - x)^2 \,+\, (4 - y)^2}$$

$$\ell_1^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{5} = 2{,}981\,42 \text{ m}$$

$$\ell_2^{(1)} = \sqrt{\left(5 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{65} = 2{,}687\,42 \text{ m}$$

$$\ell_3^{(1)} = \sqrt{\left(3 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{65} = 2{,}687\,42 \text{ m}$$

vrijednosti sila u kabelima:

$$S_j = q_j\,\ell_j$$

$$S_1^{(1)} = 1 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{5} = \frac{4}{3}\sqrt{5} = 2{,}981\,42 \text{ kN}$$

$$S_2^{(1)} = 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{65} = \frac{1}{3}\sqrt{65} = 2{,}687\,42 \text{ kN}$$

$$S_3^{(1)} = 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{65} = \frac{1}{3}\sqrt{65} = 2{,}687\,42 \text{ kN}$$

odabrana vrijednost sila u kabelima:

$$\overline{S} = \overline{S}_1 = \overline{S}_2 = \overline{S}_3 = 2{,}75 \text{ kN}$$

(negdje između vrijednostī $S_j^{(1)}$, pa se može pretpostaviti da će konvergencija prema njoj biti razmjerno brza)

gustoće sila za iteraciju prema traženim vrijednostima sila:

$$q_j^{(k)} = q_j^{(k-1)}\,\frac{\overline{S}}{S_j^{(k-1)}}$$

gustoće sila za drugi korak:

$$q_1^{(2)} = 1 \cdot \frac{2{,}75}{2{,}981\,42} = 0{,}922\,379 \text{ kN/m}$$

$$q_2^{(2)} = q_3^{(2)} = 1 \cdot \frac{2{,}75}{2{,}687\,42} = 1{,}023\,29 \text{ kN/m}$$

$F\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right)$:

$$x^{(2)} = \frac{5 \cdot 1{,}023\,29 + 3 \cdot 1{,}023\,29}{0{,}922\,379 + 1{,}023\,29 + 1{,}023\,29} = 2{,}757\,30$$

$$y^{(2)} = \frac{4 \cdot 1{,}023\,29}{0{,}922\,379 + 1{,}023\,29 + 1{,}023\,29} = 1{,}378\,65$$

duljine kabelā:

$$\ell_1^{(2)} \;=\; \sqrt{2{,}757\,30^2 + 1{,}378\,65^2} \;=\; 3{,}082\,76 \text{ m}$$

$$\ell_2^{(2)} \;=\; \sqrt{(5 - 2{,}757\,30)^2 \;+\; 1{,}378\,65^2} \;=\; 2{,}632\,56 \text{ m}$$

$$\ell_3^{(2)} \;=\; \sqrt{(3 - 2{,}757\,30)^2 \;+\; (4 - 1{,}378\,65)^2} \;=\; 2{,}632\,56 \text{ m}$$

vrijednosti sila u kabelima:

$$S_1^{(2)} \;=\; 0{,}922\,379 \cdot 3{,}082\,76 \;=\; 2{,}843\,47 \text{ kN}$$

$$S_2^{(2)} \;=\; S_3^{(2)} \;=\; 1{,}023\,29 \cdot 2{,}632\,56 \;=\; 2{,}693\,87 \text{ kN}$$

gustoće sila za treći korak:

$$q_1^{(3)} \;=\; 0{,}922\,379 \cdot \frac{2{,}75}{2{,}843\,47} \;=\; 0{,}892\,059 \text{ kN/m}$$

$$q_2^{(3)} \;=\; q_3^{(2)} \;=\; 1{,}023\,29 \cdot \frac{2{,}75}{2{,}693\,87} \;=\; 1{,}044\,61 \text{ kN/m}$$

$F\left(x^{(3)}, y^{(3)}\right)$:

$$x^{(3)} \;=\; \frac{5 \cdot 1{,}044\,61 \;+\; 3 \cdot 1{,}044\,61}{0{,}892\,059 + 1{,}044\,61 + 1{,}044\,61} \;=\; 2{,}803\,12$$

$$y^{(3)} \;=\; \frac{4 \cdot 1{,}044\,61}{0{,}892\,059 + 1{,}044\,61 + 1{,}044\,61} \;=\; 1{,}401\,56$$

duljine kabelā:

$$\ell_1^{(3)} \;=\; \sqrt{2{,}803\,12^2 + 1{,}401\,56^2} \;=\; 3{,}133\,98 \text{ m}$$

$$\ell_2^{(3)} \;=\; \sqrt{(5 - 2{,}803\,12)^2 \;+\; 1{,}401\,56^2} \;=\; 2{,}605\,89 \text{ m}$$

$$\ell_3^{(3)} \;=\; \sqrt{(3 - 2{,}803\,12)^2 \;+\; (4 - 1{,}401\,56)^2} \;=\; 2{,}605\,89 \text{ m}$$

vrijednosti sila u kabelima:

$$S_1^{(3)} \;=\; 0{,}892\,058 \cdot 3{,}133\,98 \;=\; 2{,}795\,70 \text{ kN}$$

$$S_2^{(3)} \;=\; S_3^{(2)} \;=\; 1{,}044\,61 \cdot 2{,}605\,89 \;=\; 2{,}722\,14 \text{ kN}$$

nastavak iteracijskoga postupka prikazan je u tablici na vrhu sljedeće stranice

može se vidjeti da vrijednosti sila konvergiraju prema vrijednosti $\overline{S} = 2{,}750$ kN

devet je koraka iteracije potrebno za zadovoljenje uvjeta

$$\left|\overline{S} - S_1^{(k)}\right| \;<\; 5 \cdot 10^{-4} \quad \& \quad \left|\overline{S} - S_2^{(k)}\right| \;<\; 5 \cdot 10^{-4} \quad \& \quad \left|\overline{S} - S_3^{(k)}\right| \;<\; 5 \cdot 10^{-4}$$

i, time, zaokruživanje vrijednostī sila na četiri značajne znamenke:

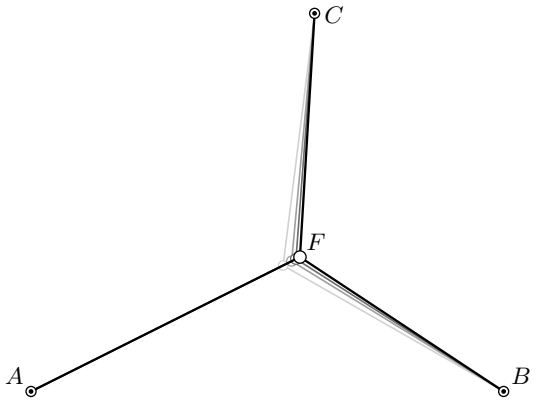
$$2{,}750\,49 \;\simeq\; 2{,}750; \quad 2{,}749\,69 \;\simeq\; 2{,}750$$

k	4	5	6	7	8	9
$q_1^{(k)}$	0,877 477	0,870 569	0,867 320	0,865 799	0,865 091	0,864 758
$q_2^{(k)}$	1,055 30	1,060 46	1,062 91	1,064 06	1,064 60	1,064 85
$q_3^{(k)}$	1,055 30	1,060 46	1,062 91	1,064 06	1,064 60	1,064 85
$x^{(k)}$	2,825 36	2,835 94	2,840 93	2,843 26	2,844 35	2,844 86
$y^{(k)}$	1,412 68	1,417 97	1,420 46	1,421 63	1,422 17	1,422 43
$\ell_1^{(k)}$	3,158 85	3,170 68	3,176 25	3,178 86	3,180 08	3,180 65
$\ell_2^{(k)}$	2,593 21	2,587 24	2,584 43	2,583 13	2,582 52	2,582 23
$\ell_3^{(k)}$	2,593 21	2,587 24	2,584 43	2,583 13	2,582 52	2,582 23
$S_1^{(k)}$	2,771 82	2,760 30	2,754 83	2,752 25	2,751 06	2,750 49
$S_2^{(k)}$	2,736 61	2,743 66	2,747 02	2,748 61	2,749 35	2,749 69
$S_3^{(k)}$	2,736 61	2,743 66	2,747 02	2,748 61	2,749 35	2,749 69

zadovoljimo li se s tri značajne znamenke, dovoljno je šest koraka ($2{,}754\,83 \simeq 2{,}75$; $2{,}747\,02 \simeq 2{,}75$); uvjet je prekida iteracije tada

$$\left|\overline{S} - S_i^{(k)}\right| \,<\, 5 \cdot 10^{-3}, \;\; i \,=\, 1, 2, 3$$

na slici su prikazani položaji čvora F i oblici „mreže" kabelā u prvom (svjetlosivo), drugom (sivo), trećem (tamnosivo) i devetom (crno) koraku iteracije; u stvari, na crtežu se zbog debljina linija položaji u sedmom, osmom i devetom koraku ne mogu razlikovati



(statička) provjera:

vrijednosti su sila jednake $\Rightarrow$ trokut sila je jednakostraničan [skicirajte!]

$\Rightarrow$ kutovi između pravaca djelovanja sila (to jest između kabelā) imaju 120°

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \cos \alpha_{a,b} \qquad \Rightarrow \qquad \cos \alpha_{a,b} \;=\; \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}$$

$$\vec{s}_1 \;=\; (x_A, y_A) \;-\; (x^{(9)}, y^{(9)}) \;=\; (-2{,}844\,86;\; -1{,}422\,43)$$
$$\vec{s}_2 \;=\; (x_B, y_B) \;-\; (x^{(9)}, y^{(9)}) \;=\; (2{,}155\,14;\; -1{,}422\,43)$$
$$\vec{s}_3 \;=\; (x_C, y_C) \;-\; (x^{(9)}, y^{(9)}) \;=\; (0{,}155\,14;\; 2{,}577\,57)$$

$$\left\|\vec{s}_1\right\| \;=\; \ell_1^{(9)} \;=\; 3{,}180\,65$$
$$\left\|\vec{s}_2\right\| \;=\; \ell_2^{(9)} \;=\; 2{,}582\,23$$
$$\left\|\vec{s}_3\right\| \;=\; \ell_3^{(9)} \;=\; 2{,}582\,23$$

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \;=\; -2{,}844\,86 \cdot 2{,}155\,14 \;+\; (-1{,}422\,43) \cdot (-1{,}422\,43) \;=\; -4{,}107\,76$$
$$\vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 \;=\; 2{,}155\,14 \cdot 0{,}155\,14 \;+\; (-1{,}422\,43) \cdot 2{,}577\,57 \;=\; -3{,}332\,06$$
$$\vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1 \;=\; 0{,}155\,14 \cdot (-2{,}844\,86) \;+\; 2{,}577\,57 \cdot (-1{,}422\,43) \;=\; -4{,}107\,76$$

$$\cos\alpha_{1,2} \;=\; \frac{-4{,}107\,76}{3{,}180\,65 \cdot 2{,}582\,23} \;=\; -0{,}500\,143 \;\simeq\; -0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{1,2} \;\simeq\; 120^\circ$$

$$\cos\alpha_{2,3} \;=\; \frac{-3{,}332\,06}{2{,}582\,23 \cdot 2{,}582\,23} \;=\; -0{,}499\,716 \;\simeq\; -0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{2,3} \;\simeq\; 120^\circ$$

$$\cos\alpha_{3,1} \;=\; \frac{-4{,}107\,76}{2{,}582\,23 \cdot 3{,}180\,65} \;=\; -0{,}500\,143 \;\simeq\; -0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{3,1} \;\simeq\; 120^\circ$$