

GS 2. — 25. veljače 2025.

Zadatak 1.

Crossovim postupkom izračunajte orijentiranu duljinu pomaka čvora 3!

$$P_1 = 125 \text{ kN}$$

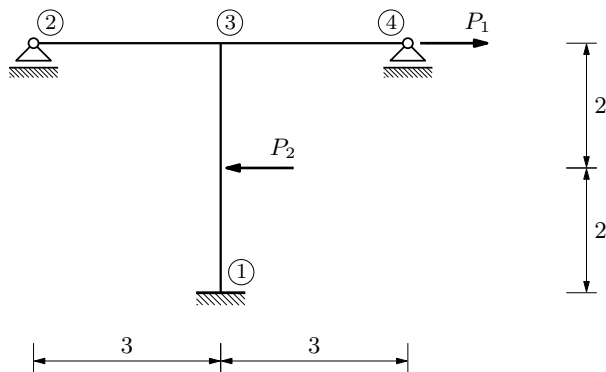
$$P_2 = 75 \text{ kN}$$

$$\text{stup: } b/h = 30/30 \text{ [cm]}$$

$$\text{lijeva greda: } b/h = 30/45 \text{ [cm]}$$

$$\text{desna greda: } b/h = 30/60 \text{ [cm]}$$

$$E = \text{const.}$$



momenti tromosti:

$$I_{\{1,3\}} = \frac{0,3^4}{12} = 0,000\,675 \text{ m}^4$$

$$I_{\{2,3\}} = \frac{0,3 \cdot 0,45^3}{12} = 0,002\,278\,125 \text{ m}^4$$

$$I_{\{3,4\}} = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 0,005\,4 \text{ m}^4$$

fleksijske krutosti:

$$k_{\{1,3\}} = \frac{E I_{\{1,3\}}}{\ell_{\{1,3\}}} = \frac{0,000\,675 E}{4}$$

$$k_{\{2,3\}} = \frac{E I_{\{2,3\}}}{\ell_{\{2,3\}}} = \frac{0,002\,278\,125 E}{3}$$

$$k_{\{3,4\}} = \frac{E I_{\{3,4\}}}{\ell_{\{3,4\}}} = \frac{0,005\,4 E}{3}$$

razdjelni koeficijenti:

$$\begin{aligned} k_3 &= 4 k_{\{1,3\}} + 3 k_{\{2,3\}} + 3 k_{\{3,4\}} \\ &= (0,000\,675 + 0,002\,278\,125 + 0,005\,4) E = 0,008\,353\,125 E \end{aligned}$$

$$\mu_{3,1} = \frac{4 k_{\{1,3\}}}{k_3} = \frac{0,000\,675}{0,008\,353\,125} = 0,08$$

$$\mu_{3,2} = \frac{4 k_{\{2,3\}}}{k_3} = \frac{0,002\,278\,125}{0,008\,353\,125} = 0,27$$

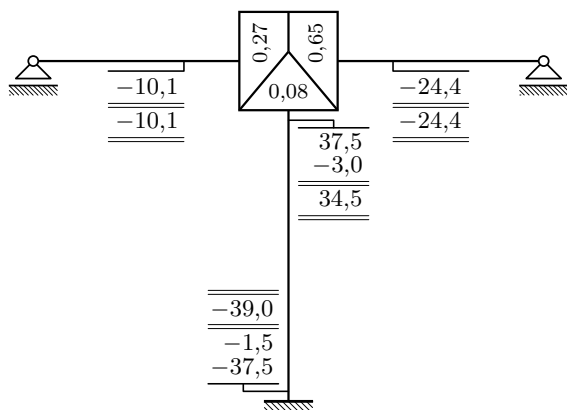
$$\mu_{3,4} = \frac{4 k_{\{3,4\}}}{k_3} = \frac{0,005\,4}{0,008\,353\,125} = 0,65 \quad (0,08 + 0,27 + 0,65 = 1,0)$$

vrijednosti momenata upetosti:

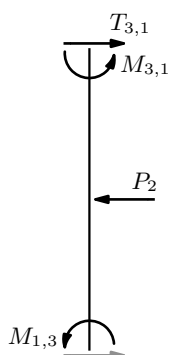
$$\bar{M}_{1,3} = -\frac{P_2 \ell}{8} = \frac{75 \cdot 4}{8} = -37,5 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{3,1} = -\bar{M}_{1,3} = 37,5 \text{ kNm}$$

relaksacija (bez iteracije):



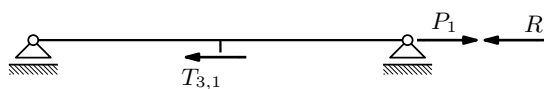
vrijednost poprečne sile na vrhu stupa:



$$-\ell_{\{1,3\}} T_{3,1} + M_{3,1} + M_{1,3} + \frac{\ell_{\{1,3\}}}{2} P_2 = 0$$

$$\begin{aligned} T_{3,1} &= \frac{M_{3,1} + M_{1,3}}{\ell_{\{1,3\}}} + \frac{P_2}{2} \\ &= \frac{34,5 - 39,0}{4} + \frac{75}{2} = 36,4 \text{ kN} \end{aligned}$$

vrijednost reakcije u zamišljenom spoju:



$$-T_{3,1} + P_1 - R = 0$$

$$R = -T_{3,1} + P_1$$

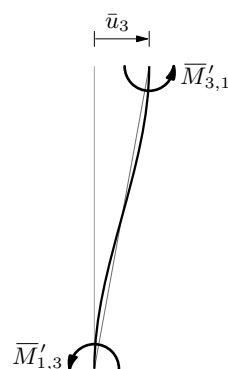
$$= -36,4 + 125 = 88,6 \text{ kN}$$

vrijednosti momenata upetosti za drugu relaksaciju:

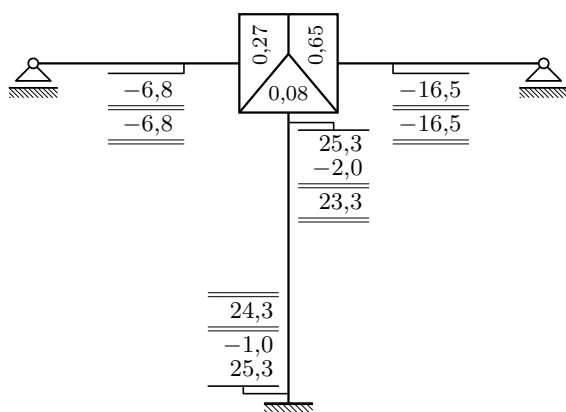
$$\begin{aligned} \bar{M}'_{1,3} = \bar{M}'_{3,1} &= -6 k_{\{1,3\}} \bar{\psi}_{\{1,3\}} = -6 k_{\{1,3\}} \left(-\frac{\bar{u}_3}{\ell_{\{1,3\}}} \right) \\ &= 6 \cdot \frac{0,000675 E}{4} \cdot \frac{\bar{u}_3}{4} = 0,000253125 E \bar{u}_3 \end{aligned}$$

prepostavka $\bar{u}_3 = \frac{100000}{E}$ daje „lijepe” vrijednosti

$$\bar{M}'_{1,3} = \bar{M}'_{3,1} = 25,3 \text{ kN}$$



relaksacija (bez iteracije):



vrijednosti poprečne sile na vrhu stupa i reakcije u zamišljenom spoju:

$$T'_{3,1} = \frac{M'_{3,1} + M'_{1,3}}{4} = \frac{23,3 + 24,3}{4} = 11,9 \text{ kN}$$

$$R' = -T'_{3,1} = -11,9 \text{ kN}$$

„popravni” koeficijent:

$$R + \varrho R' = 0$$

$$\varrho = -\frac{R}{R'} = -\frac{88,6}{-11,9}$$

orijentirana duljina pomaka čvora 3:

$$u_3 = \varrho \bar{u}_3 = 7,45 \cdot \frac{100\,000}{E} = \frac{745\,000}{E}$$

primjerice, za $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ je $u_3 = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$

(u zadatku se momentni dijagram ne traži, pa ga ne treba crtati)

ili: vrijednosti momenata upetosti za drugu relaksaciju, formalnije:

$$\bar{M}'_{1,3} = \bar{M}'_{3,1} = -6 k_{\{1,3\}} \left(-\frac{u}{\ell_{\{1,3\}}} \right) = 0,000\,253\,125 E u_3 = 25,3125 \cdot 10^{-5} E u_3$$

u_3 za „lijepe” vrijednosti momenata upetosti sada nećemo pretpostaviti

$10^{-5} E u_3$ je konstanta kojom se množe sve vrijednosti (konkretni brojevi) u relaksacijskom postupku relaksaciju provodimo s konkretnim brojevima, kao na slici na vrhu stranice

konačne izraze za vrijednosti momenata dobivamo tako da dobivene brojeve pomnožimo s $10^{-5} E u_3$:

$$M'_{3,1} = 23,3 \cdot 10^{-5} E u_3 \quad \text{i} \quad M'_{1,3} = 24,3 \cdot 10^{-5} E u_3, \quad \text{te je} \quad R' = -T'_{3,1} = -11,9 \cdot 10^{-5} E u_3$$

duljinu pomaka u_3 izračunavamo iz zahtjeva poništavanja reakcije u zamišljenom ležaju:

$$R + R' = 0 \quad \Rightarrow \quad 88,6 - 11,9 \cdot 10^{-5} E u_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = \frac{88,6}{11,9 \cdot 10^{-5} E} = \frac{744\,537,82}{E}$$

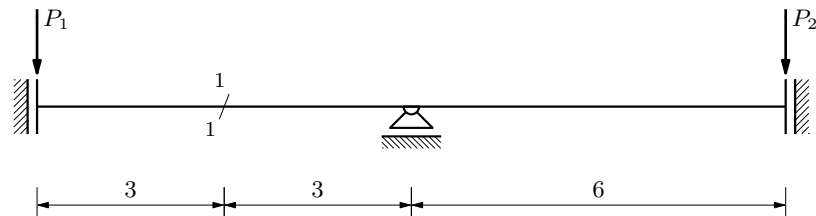
(očito je da za izračunavanje vrijednosti u_3 nije potrebna jednadžba virtualnih radova; primjena te jednadžbe, doduše, nije pogrešna, ali je gubitak vremena (i pokazuje nepotpuno razumijevanje— temeljna je zamisao proširenja Crossova postupka poništavanje reakcija u zamišljenim ležajevima))

Zadatak 2.

Pomoću utjecajnih linija izračunajte vrijednosti reaktivnoga momenta u desnom ležaju, reakcije u srednjem ležaju i poprečne sile u presjeku 1–1!

$$P_1 = 125 \text{ kN}$$

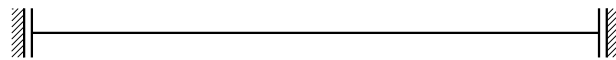
$$P_2 = 75 \text{ kN}$$



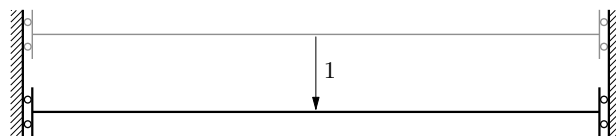
Počnimo od (naj)jednostavnijega:

b. Vrijednost reakcije u srednjem ležaju.

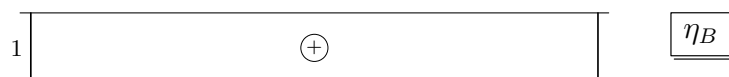
Uzmemo li da je pozitivni smisao djelovanja reakcije prema gore, utjecajna je linija, prema teoremu Müller–Breslaua, jednaka progibnoj liniji sistema zbog jediničnoga prisilnog pomaka ležaja po vertikalnom pravcu prema dolje. No, srednji je ležaj jedini spoj s podlogom koji sprečava pomak sistema kao krutoga tijela u vertikalnom smjeru; njegovim se uklanjanjem sistem pretvara u, prema klasifikaciji uvedenoj u *Mehanici 1.*, statički neodređeni mehanizam (ili kinematički preodređeni mehanizam) s jednim stupnjem slobode¹:



Progibna linija zbog jediničnoga pomaka hvatišta sile za koju crtamo utjecajnu liniju svodi se stoga na plan pomakā:



Prema tome, utjecajna je linija



te je $B = P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 1 = 125 + 75 = 200 \text{ kN}$.

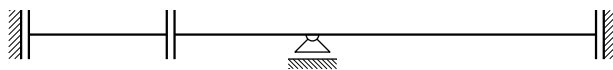
¹ Kako je za njega $s = s_{\min} = -2$, izvorni je sistem dva puta statički neodređen. No, uklanjanjem srednjega ležaja nismo smanjili stupanj statičke neodređenosti izvornoga sistema, nego smo mu dodali jedan (stvarni) stupanj slobode — mogućnost translacijskoga pomaka cijeloga sistema kao krutoga tijela u vertikalnom smjeru, tako da je sada

$$\begin{aligned} s_{\min} &= -2_{(\text{početni stupanj stat. neodr.})} + 1_{(\text{uklonjeni ležaj})} \\ &= -1 = -2_{(\text{novi stupanj stat. neodr.})} + 1_{(\text{stupanj slobode})} = s + m. \end{aligned}$$

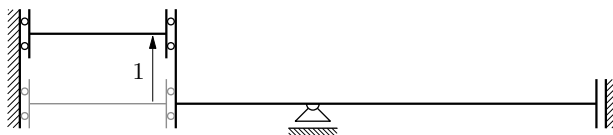
Malo složenije, ali s onim što ste netom „naučili“... :

c. Vrijednost poprečne sile u presjeku 1–1.

I sada je sistem za crtanje utjecajne linije kinematičkim postupkom



statički neodređeni/kinematički preodređeni mehanizam s jednim stupnjem slobode [izračunajte s_{\min} , s i m !], te je progibna linija ponovno tek plan pomakā:



(pozitivni je smisao djelovanja poprečne sile $\rightarrow \updownarrow \leftarrow$).

Utjecajna je linija

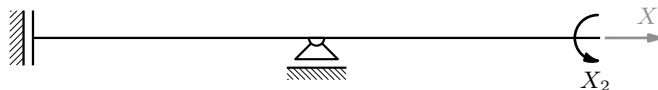


pa je $T_{1-1} = P_1 \cdot (-1) = -125 \text{ kN}$.

I na kraju:

a. Vrijednost reaktivnoga momenta u desnom ležaju.

Zadani je sistem dva puta statički neodređen. Mogući je osnovni sistem za metodu sila

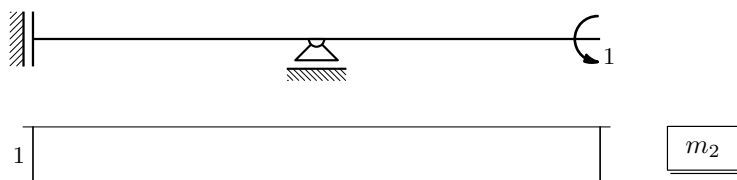


Jedinična sila na pravcu i u smislu djelovanja sile X_1 uzrokuje samo uzdužnu silu, te je $m_1 = 0$ i

$$M(x) = \underbrace{X_1 m_1(x)}_{= 0} + X_2 m_2(x) = X_2 m_2(x)$$

neovisno o vrijednosti X_1 (iako je lako pokazati i da je $X_1 = 0$).

Za jedinični je moment u hvatištu i smislu vrtnje momenta X_2



te je

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} (12 \cdot 1) \cdot 1 = \frac{12}{EI}$$

Uzmemo li da je pozitivan smisao vrtnje reaktivnoga momenta smisao vrtnje kazaljke na satu, $\overset{M_C}{\curvearrowright}$, prisilni je zaokret desnoga ležaja za utjecajnu/progibnu liniju \triangleleft , pa je jednadžba kontinuiteta

$$\delta_{2,2} X_2 = 1$$

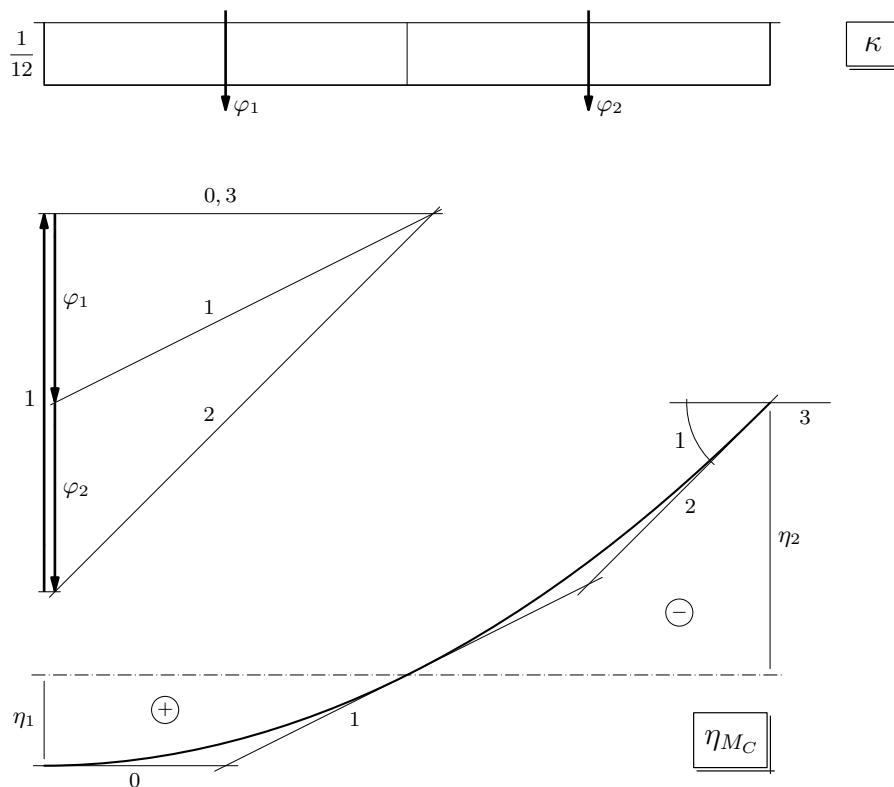
i

$$X_2 = \frac{1}{\delta_{2,2}} = \frac{EI}{12}.$$

Momentni je dijagram, prema izrazu $M(x) = X_2 m_2(x)$,

$$\frac{EI}{12} \boxed{\hspace{10cm}} \quad \boxed{M}$$

Za crtanje progibne/utjecajne linije odabrano je mjerilo duljina $1 \text{ cm} :: 1,25 \text{ m}$.



Kutovi su, kao ploštine dijelova dijagrama κ ,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{2}.$$

Za mjerilo kutova $1 \text{ cm} :: 1/5$ duljine su kutova u poligonu kutova $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 = 2,5 \text{ cm}$ i $\tilde{l} = 5 \text{ cm}$.

Za polnu je udaljenost odabrano $\chi = 1$, odnosno, na crtežu $\tilde{\chi} = 5 \text{ cm}$. Budući da lijevi ležaj ne dopušta zaokret osi, pol je odabran tako da su zraka 0 u poligonu kutova i, time, stranica 0 verižnoga poligona horizontalne — u ležaju nema zaokreta osi,

pa stranica 0 mora biti usporedna sa zaključnom linijom, ali i obratno: kako je stranica 0 horizontalna, i zaključna će linija biti horizontalna.

Srednji ležaj ne dopušta vertikalni pomak, pa zaključna linija siječe progibnu liniju ne mjestu srednjega ležaja. Budući da smo dijagram κ pri zamjeni kutovima podijelili nad srednjim ležajem, stranica 2 verižnoga poligona tangenta je na progibnu liniju u točki koja odgovara srednjem ležaju (siječemo pravac, a ne krivulju).

U točkama koje odgovaraju hvatištima sila P_1 i P_2 očitane su duljine $\tilde{\eta}_1 = 1,2$ cm i $\tilde{\eta}_2 = 3,6$ cm, pa su utjecajni koeficijenti

$$\eta_1 = \frac{m}{n} \tilde{\eta}_1 = \frac{1,25}{1} \cdot 1,2 = 1,5$$

i

$$|\eta_2| = 1,25 \cdot 3,6 = 4,5 \text{ i } \eta_2 = -4,5,$$

te je

$$M_C = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 = 125 \cdot 1,5 + 75 \cdot (-4,5) = -150 \text{ kNm.}$$

Vrijednosti potrebne za crtanje dijagrama M mogu se izračunati i (inženjerskom) metodom pomakā. Nepoznanice su orijentirane duljine vertikalnih pomaka u lijevom i desnom ležaju i kut zaokreta osi nad srednjim ležajem, ali uz primjenu statičke kondenzacije ostaje ostaje samo kut zaokreta; označimo ga φ_2 .

Ako su ležajne točke, slijeva udesno, čvorovi 1, 2 i 3, izrazi su za vrijednosti momenata na krajevima štapova

$$\begin{aligned} M_{1,2}^c &= -\frac{EI}{6} \varphi_2, & M_{2,1}^c &= \frac{EI}{6} \varphi_2, \\ M_{2,3}^c &= \frac{EI}{6} \varphi_2 - \frac{EI}{6} \cdot 1, & M_{3,2}^c &= -\frac{EI}{6} \varphi_2 + \frac{EI}{6} \cdot 1. \end{aligned}$$

Iz jednadžbe ravnoteže momenata u čvoru 2, $-M_{2,1}^c - M_{2,3}^c = 0$, slijedi

$$\frac{EI}{6} \varphi_2 + \frac{EI}{6} \varphi_2 = \frac{EI}{6} \quad \Rightarrow \quad 2 \varphi_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}$$

i

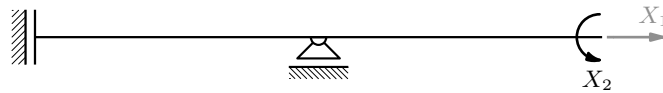
$$\begin{aligned} M_{1,2}^c &= -\frac{EI}{12}, & M_{2,1}^c &= \frac{EI}{12}, \\ M_{2,3}^c &= \frac{EI}{12} - \frac{EI}{6} = -\frac{EI}{12} & M_{3,2}^c &= -\frac{EI}{12} + \frac{EI}{6} = \frac{EI}{12}. \end{aligned}$$

I poslije kraja, još jednom

b. Vrijednost reakcije u srednjem ležaju.

Zadatak možemo riješiti i „školski”, kao (dva puta) statički neodređeni sistem za koji treba nacrtati progibnu liniju, bez pomalo mutnoga (i dosada možda nedovoljno obrađenoga) pojma statički neodređenih/kinematički preodređenih mehanizama.

Za osnovni čemo sistem ponovno uzeti



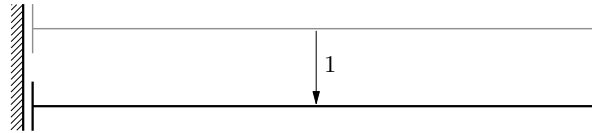
te je ponovno

$$M(x) = X_2 m_2(x).$$

Jednadžbe je kontinuiteta sada

$$\delta_{2,2} X_2 + \bar{\delta}_{2,0} = 0,$$

gdje je $\bar{\delta}_{2,0}$ zaokret osi u hvatištu momenta zbog jediničnoga pomaka zglobovopomičnoga ležaja osnovnoga sistema po vertikalnom pravcu. Utjecaj jediničnoga pomaka crtamo kao plan pomakā mehanizma koji nastaje uklanjanjem ležaja osnovnoga sistema. Kako je osnovni sistem statički određen, nastali je mehanizam mehanizam u užem smislu, odnosno statički određeni mehanizam:



Budući da pri pomaku nema zaokreta osi, $\bar{\delta}_{2,0} = 0$, pa iz jednadžbe kontinuiteta $\delta_{2,2} X_2 = 0$ slijedi $X_2 = 0$ i potom $M = 0$ te se progibna linija osnovnoga sistema poklapa s planom pomakā. Budući da je uz „pravu” vrijednost nepoznanice X_2 osnovni sistem u istom mehaničkom stanju kao zadani statički neodređeni sistem, progibna se linija zadanoga sistema poklapa s progibnom linijom osnovnoga, dakle s nacrtanim planom pomakā.

Zadatak 3.

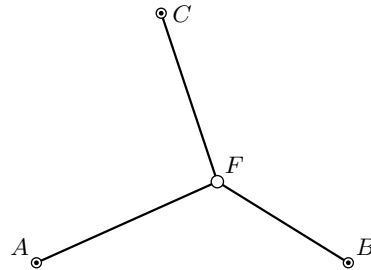
Iteracijskom primjenom metode gustoća sile nađite položaj čvora F u kojem su vrijednosti sile u kabelima $1 = \{A, F\}$, $2 = \{B, F\}$ i $3 = \{C, F\}$ jednake, ako su koordinate ležajnih čvorova

$$A(x_A, y_A) = A(0, 0),$$

$$B(x_B, y_B) = B(5, 0),$$

$$C(x_C, y_C) = C(2, 4).$$

Napravite tri koraka iteracije.



I'll Never Say Never Again...

Harry Woods

U primjeru

Višekoračna metoda gustoća sile

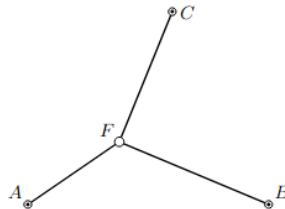
Primjer 1.

Nađite položaj čvora F u kojem su vrijednosti sile u kabelima $1 = \{A, F\}$, $2 = \{B, F\}$ i $3 = \{C, F\}$ jednake, ako su koordinate ležajnih čvorova A , B i C

$$A(x_A, y_A) = A(0, 0)$$

$$B(x_B, y_B) = B(5, 0)$$

$$C(x_C, y_C) = C(3, 4)$$



(<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs2/isp/vmgs-1.pdf>), dostupnom na stranici *Gradska statika 2. Bilješke i skice s predavanja i vježbi* (<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs2>) treba zamijeniti koordinatu x_C čvora C iz 3 u 2 i nastaviti proračun do (ne uključujući) šestoga retka odozdo na stranici 3 (do retka koji počinje riječima „nastavak iteracijskoga postupka...”).