

GS 2. — Prvi (i jedini) kolokvij (2025./2026.)

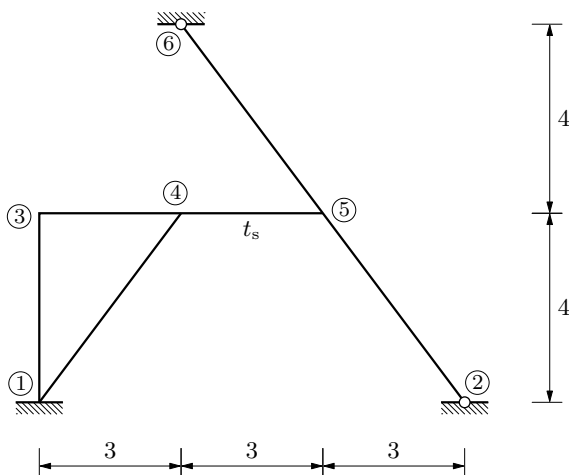
Zadatak 1.

Navedite nepoznanice za inženjersku metodu pomaka! Izrazite kutove $\psi_{\{1,3\}}$, $\psi_{\{1,4\}}$, $\psi_{\{2,5\}}$, $\psi_{\{3,4\}}$, $\psi_{\{4,5\}}$ i $\psi_{\{5,6\}}$ u ovisnosti o neovisnom translacijskom pomaku ili, ako ih je više, neovisnim translacijskim pomacima! Izračunajte vrijednosti momenata upetosti!

$$t_s = -30^\circ C \text{ (na štapu } \{4,5\})$$

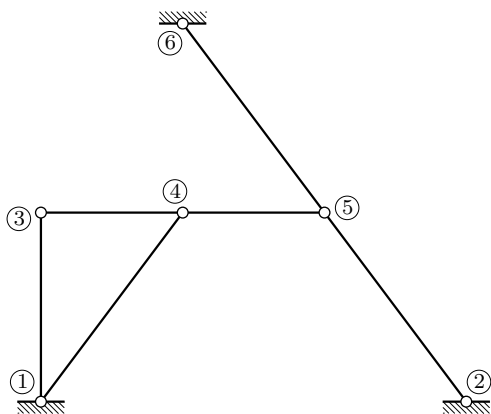
$$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$$

$$EI = 20250 \text{ kNm}^2$$



♣ kutovi zaokreta čvorova koji su nepoznanice: φ_3, φ_4 i φ_5

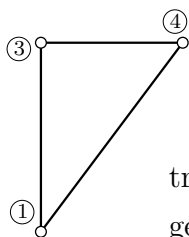
♣ zglobna shema i prebrojavanje neovisnih translacijskih pomaka:



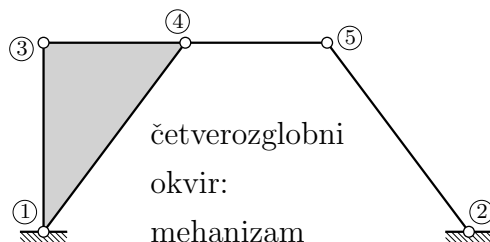
$$s_{\min} = n_f \cdot 2 - b = 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

... ali $s_{\min}$ je samo najmanji mogući broj stupnjeva slobode, može ih biti i više...

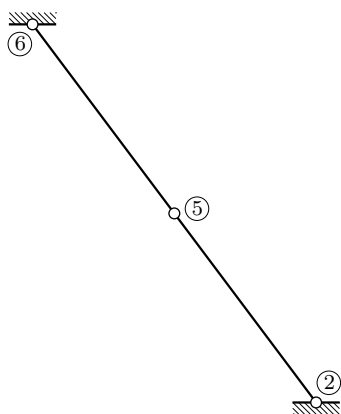
... i zato — kinematička analiza:



trokut zglobnih štapova:
geometrijski nepromjenivi lik

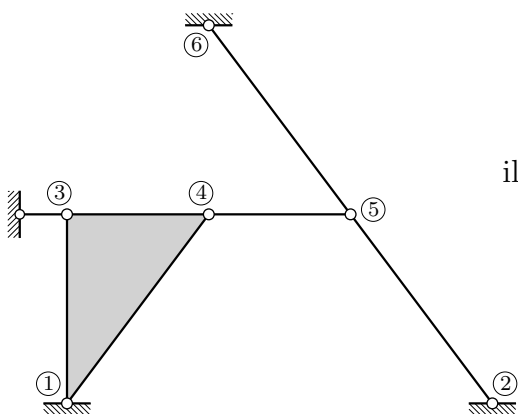


četverozglobni
okvir:
mekhanizam

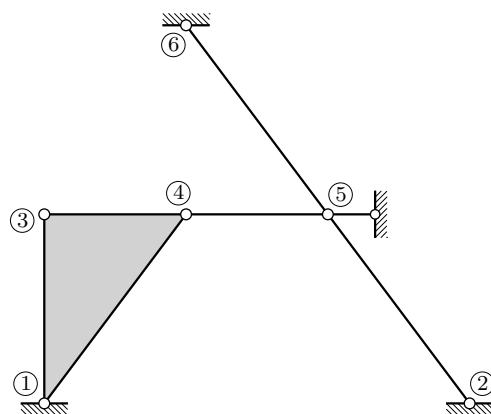


moguć je infinitezimalni pomak čvora 5
 po okomici na osi štapova $\{2, 5\}$ i $\{5, 6\}$
 $\Rightarrow s > s_{\min}, s = 1$ (1 stupanj slobode)
 $\Rightarrow$ postoji neovisni translacijski pomak $u_{\{3,4,5\}}$
 $\Rightarrow u_{\{3,4,5\}}$ je četvrta nepoznanica

sprečavanje neovisnoga translacijskog pomaka:

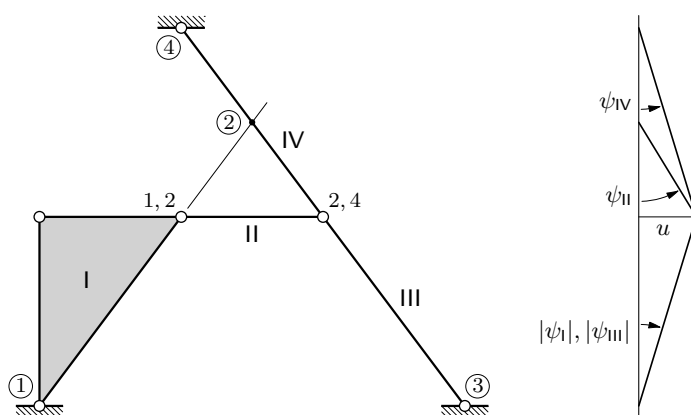


ili



♣ neovisni translacijski pomak i ψ -jevi:

dijagram projekcija pomaka na horizontalnu os ($u = u_{\{3,4,5\}}$):



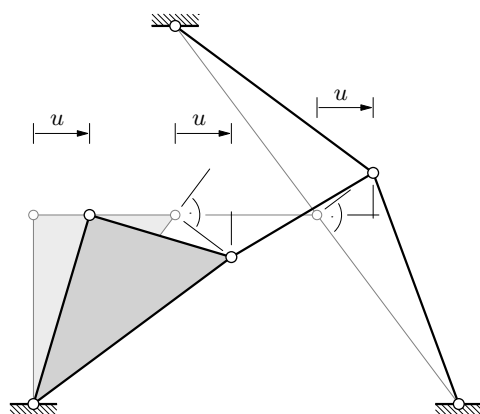
$$\psi_{\{1,3\}} = \psi_{\{1,4\}} = \psi_{\{3,4\}} = \psi_{\text{I}} = -\frac{u_{\{3,4,5\}}}{4}$$

$$\psi_{\{4,5\}} = \psi_{\text{II}} = \frac{u_{\{3,4,5\}}}{2}$$

$$\psi_{\{2,5\}} = \psi_{\text{III}} = -\frac{u_{\{3,4,5\}}}{4}$$

$$\psi_{\{5,6\}} = \psi_{\text{IV}} = \frac{u_{\{3,4,5\}}}{4}$$

plan pomakā (samo zora radi):

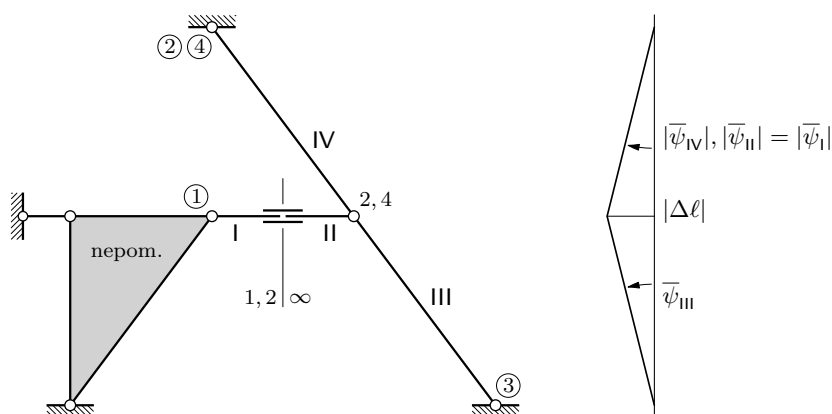


♣ vrijednosti momenata upetosti:

promjena duljine štapa {4, 5} zbog jednolike promjene temperature:

$$\Delta \ell = \alpha_t t_s \ell_{\{4,5\}} = 1 \cdot 10^{-5} \cdot (-30) \cdot 3 = -0,000\,9 \text{ m (skraćenje)}$$

dijagram projekcija pomakā:



$$\bar{\psi}_{\{2,5\}} = \bar{\psi}_{\text{III}} = \frac{|\Delta \ell|}{4} = 0,000\,225$$

$$\bar{\psi}_{\{5,6\}} = \bar{\psi}_{\text{IV}} = -\frac{|\Delta \ell|}{4} = -0,000\,225$$

$$\bar{\psi}_{\{4,5\}} = \bar{\psi}_{\text{II}} (= \bar{\psi}_{\text{I}}) = -\frac{|\Delta \ell|}{4} = -0,000\,225$$

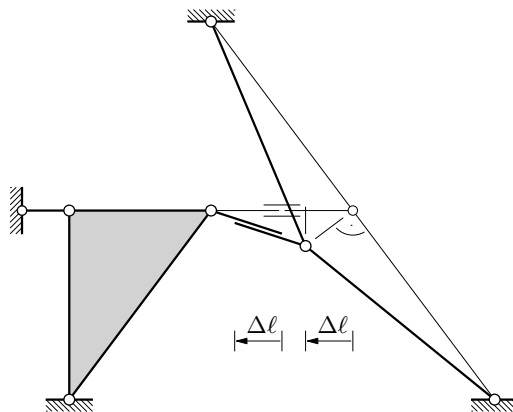
vrijednosti momenata upetosti:

$$M_{4,5} = M_{5,4} = -6 \frac{EI}{\ell_{\{4,5\}}} \bar{\psi}_{\{4,5\}} = -6 \cdot \frac{20\,250}{3} \cdot (-0,000\,225) = 9,112\,5 \text{ kNm}$$

$$M_{5,2} = -3 \frac{EI}{\ell_{\{2,5\}}} \bar{\psi}_{\{2,5\}} = -3 \cdot \frac{20\,250}{5} \cdot 0,000\,225 = -2,733\,75 \text{ kNm}$$

$$M_{5,6} = -3 \frac{EI}{\ell_{\{5,6\}}} \bar{\psi}_{\{5,6\}} = -3 \cdot \frac{20\,250}{5} \cdot (-0,000\,225) = 2,733\,75 \text{ kNm}$$

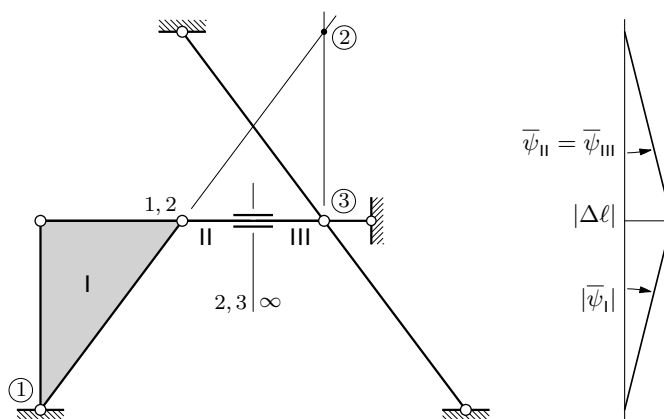
plan pomakā (tek zora radi (a nije ni potpuno korektan :o)):



♣ ili vrijednosti momenata upetosti:

$\Delta\ell$ kao prije

dijagram projekcija pomakā:



$$\bar{\psi}_{\{1,3\}} = \bar{\psi}_{\{1,4\}} = \bar{\psi}_{\{3,4\}} = \bar{\psi}_I = -\frac{|\Delta\ell|}{4} = -0,000\,225$$

$$\bar{\psi}_{\{4,5\}} = \bar{\psi}_{II} (= \bar{\psi}_{III}) = \frac{|\Delta\ell|}{4} = 0,000\,225$$

vrijednosti momenata upetosti:

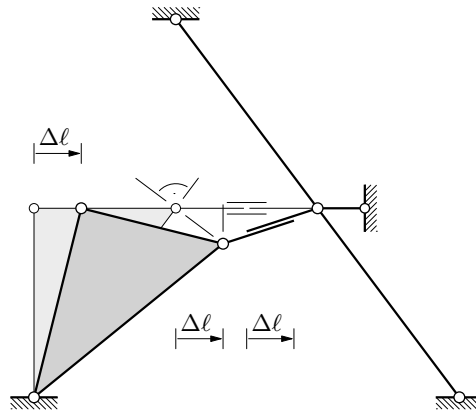
$$M_{1,3} = M_{3,1} = -6 \frac{EI}{\ell_{\{1,3\}}} \bar{\psi}_{\{1,3\}} = -6 \cdot \frac{20\,250}{4} \cdot (-0,000\,225) = 6,834\,38 \text{ kNm}$$

$$M_{1,4} = M_{4,1} = -6 \frac{EI}{\ell_{\{1,4\}}} \bar{\psi}_{\{1,4\}} = -6 \cdot \frac{20\,250}{5} \cdot (-0,000\,225) = 5,467\,5 \text{ kNm}$$

$$M_{3,4} = M_{4,3} = -6 \frac{EI}{\ell_{\{3,4\}}} \bar{\psi}_{\{3,4\}} = -6 \cdot \frac{20\,250}{3} \cdot (-0,000\,225) = 9,112\,5 \text{ kNm}$$

$$M_{4,5} = M_{5,4} = -6 \frac{EI}{\ell_{\{4,5\}}} \bar{\psi}_{\{4,5\}} = -6 \cdot \frac{20\,250}{3} \cdot 0,000\,225 = -9,112\,5 \text{ kNm}$$

i još jedan plan pomaka (i opet tek zora radi (i opet nije potpuno korektan :o)):

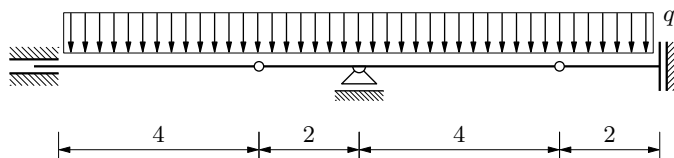


- ♣ domaća zabava za kraj: pokažite da oba načina izračunavanja vrijednosti momenata upetosti vode do istoga konačnog dijagrama momenata savijanja (možda uz neznatne greške zaokruživanja)

Zadatak 2.

Pomoću utjecajnih linija izračunajte vrijednosti reaktivnih momenata u lijevom i desnom ležaju i vertikalne reakcije u srednjem ležaju!

$$q = 25 \text{ kN/m}$$

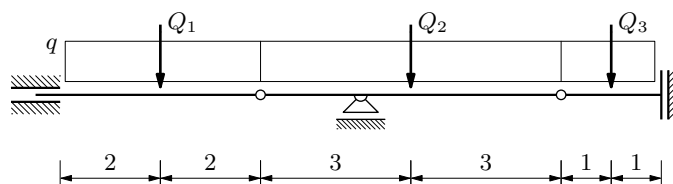


- ♣ sistem je statički određen: neformalna računica za Gerberove nosače:

$$(2 + 1 + 2) \text{ ležajna spoja} - 2 \text{ zglobova} = 3 \text{ oduzeta stupnja slobode}$$

- ♣ rezultante dijelova distribuiranoga opterećenja:

sistem je statički određen $\rightarrow$ utjecajne su linije sastavljene od odsječaka pravaca „od zgloba do zgloba”



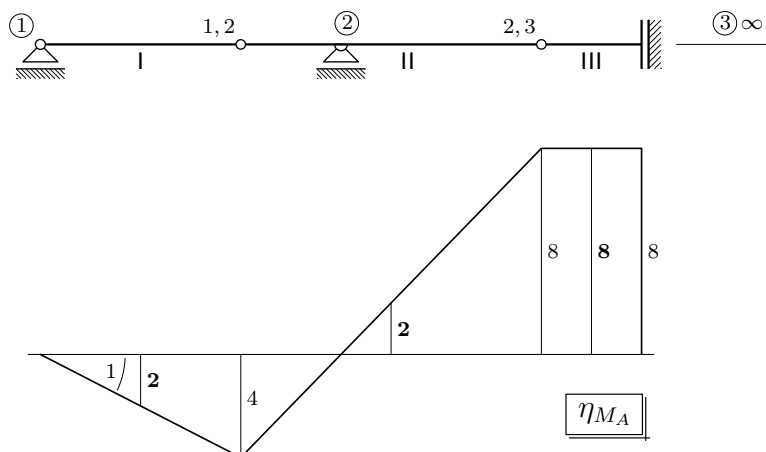
$$Q_1 = q \cdot 4 = 25 \cdot 4 = 100 \text{ kN}$$

$$Q_2 = 25 \cdot 6 = 150 \text{ kN}$$

$$Q_3 = 25 \cdot 2 = 50 \text{ kN}$$

- ♣ vrijednost reaktivnoga momenta u lijevom ležaju:

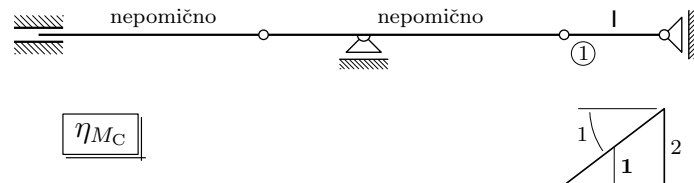
pretpostavljeni smisao vrtnje momenta: suprotan smislu vrtnje kazaljke na satu



$$M_A = Q_1 \cdot 2 + Q_2 \cdot (-2) + Q_3 \cdot (-8) = 100 \cdot 2 - 150 \cdot 2 - 50 \cdot 8 = -500 \text{ kNm}$$

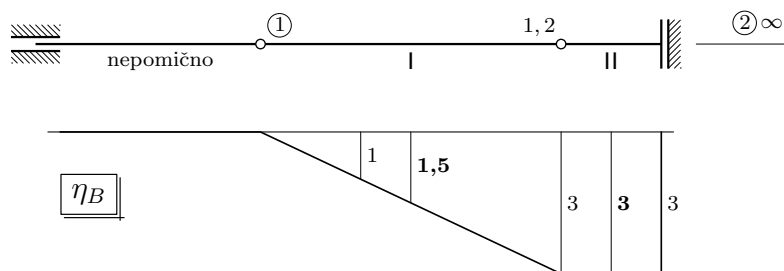
- ♣ vrijednost reaktivnoga momenta u desnom ležaju:

pretpostavljeni smisao vrtnje momenta: smisao vrtnje kazaljke na satu



$$M_C = Q_3 \cdot (-1) = -50 \cdot 1 = -50 \text{ kNm}$$

- ♣ vrijednost reakcije u srednjem ležaju:



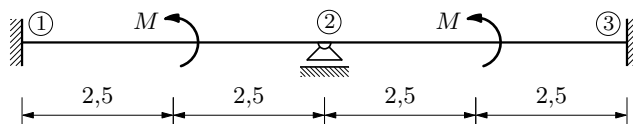
$$B = Q_2 \cdot 1,5 + Q_3 \cdot 3 = 150 \cdot 1,5 + 50 \cdot 3 = 375 \text{ kN}$$

Zadatak 3.

Pomoću utjecajne linije izračunajte vrijednost vertikalne reakcije u srednjem ležaju!

$$M = 50 \text{ kNm}$$

$$EI = \text{const.}$$



♥ zdravorazumno rješenje:

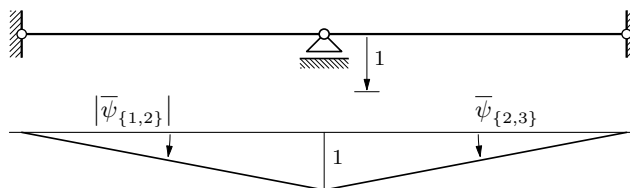
- ♦ sistem je osnosimetričan u odnosu na vertikalnu os koja prolazi srednjim ležajem;
- ♦ pri pomaku srednjega ležaja (točke na osi simetrije) po vertikalnom pravcu (po osi simetrije) progibna će linija biti osnosimetrična u odnosu na istu tu os;
- ♦ hvatišta momenata su simetrična u odnosu na tu os, pa su apsolutne vrijednosti kutova zaokretā osi grede u hvatištima jednake, dok je smisao zaokretā suprotan;
- ♦ kako je smisao vrtnje oba momenta jednak, smisao je vrtnje jednoga momenta jednak kao smisao zaokreta osi grede u njegovu hvatištu, dok je smisao vrtnje drugoga suprotan smislu zaokreta osi;
- ♦ budući da je (prema teoremu Müller–Breslaua) utjecajna linija jednaka progibnoj liniji (pri pomaku $\mathcal{E}'td.$), utjecaji momenata će se poništiti, pa je vrijednost reakcije u srednjem ležaju jednaka nuli.

♥ izbor metode crtanja momentnoga dijagrama za „školsko” rješenje (ako ne vjerujete zdravom razumu):

metoda sila: sistem je četiri puta statički neodređen $\Rightarrow$ 4 nepoznanice

(inženjerska) metoda pomakā: nepoznanica $\varphi_2 \Rightarrow$ 1 nepoznanica

♥ vrijednosti momenata upetosti:



$$\bar{\psi}_{\{1,2\}} = -\frac{1}{5}$$

$$\bar{\psi}_{\{2,3\}} = \frac{1}{5}$$

$$\bar{M}_{1,2} = \bar{M}_{2,1} = -6 \frac{EI}{5} \bar{\psi}_{\{1,2\}} = -6 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6EI}{25}$$

$$\bar{M}_{2,3} = \bar{M}_{3,2} = -6 \frac{EI}{5} \bar{\psi}_{\{2,3\}} = -6 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{6EI}{25}$$

♥ izrazi za vrijednosti momenata na krajevima štapova:

$$M_{1,2} = 2 k_{\{1,2\}} \varphi_2 + \bar{M}_{\{1,2\}}$$

$$M_{2,1} = 4 k_{\{1,2\}} \varphi_2 + \bar{M}_{\{2,1\}}$$

$$M_{2,3} = 4 k_{\{2,3\}} \varphi_2 + \bar{M}_{\{2,3\}}$$

$$M_{3,2} = 2 k_{\{2,3\}} \varphi_2 + \bar{M}_{\{3,2\}}$$

♥ jednačba ravnoteže momenata u čvoru 2:

$$-M_{2,1} - M_{2,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{2,1} + M_{2,3} = 0$$

$$4 k_{\{1,2\}} \varphi_2 + 4 k_{\{2,3\}} \varphi_2 = -\bar{M}_{\{2,1\}} - \bar{M}_{\{2,3\}}$$

$$(4 k_{\{1,2\}} + 4 k_{\{2,3\}}) \varphi_2 = -\frac{6EI}{25} + \frac{6EI}{25}$$

$$(4 k_{\{1,2\}} + 4 k_{\{2,3\}}) \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 0$$

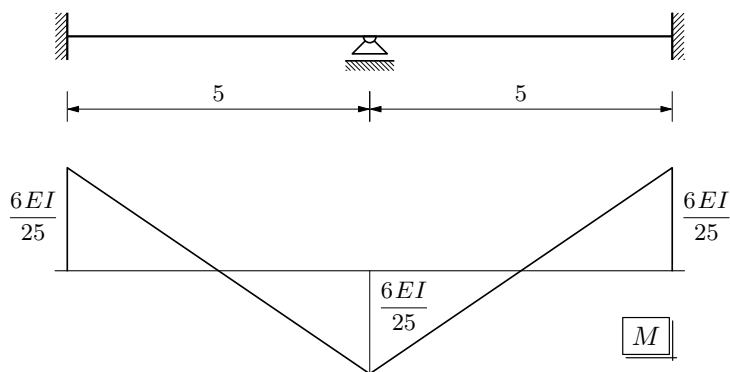
♥ vrijednosti momenata i zakrivljenosti na krajevima štapova:

$$M_{1,2} = \bar{M}_{\{1,2\}} = \frac{6EI}{25} \quad \Rightarrow \quad \kappa_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{EI} = \frac{6}{25}$$

$$M_{2,1} = \bar{M}_{\{2,1\}} = \frac{6EI}{25} \quad \Rightarrow \quad \kappa_{2,1} = \frac{6}{25}$$

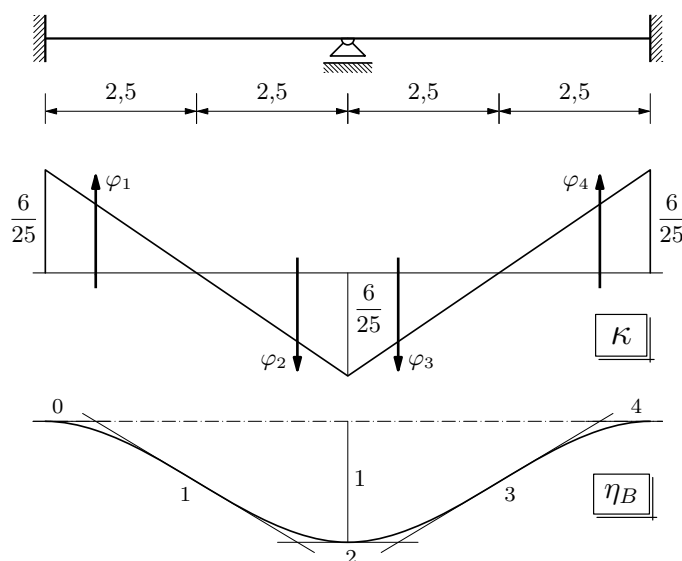
$$M_{2,3} = \bar{M}_{\{2,3\}} = -\frac{6EI}{25} \quad \Rightarrow \quad \kappa_{2,3} = -\frac{6}{25}$$

$$M_{3,2} = \bar{M}_{\{3,2\}} = -\frac{6EI}{25} \quad \Rightarrow \quad \kappa_{3,2} = -\frac{6}{25}$$



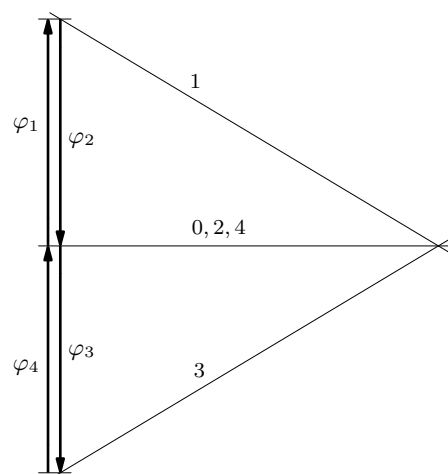
(progibna/utjecajna linija na sljedećoj stranici)

♥ progibna/utjecajna linija:



mjerilo duljina:

$$1 \text{ [cm]} :: 1,25 \text{ [m]}$$



$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{10}$$

mjerilo kutova:

$$1 \text{ [cm]} :: \frac{3}{10}$$

$$\chi = \frac{1}{2} \quad (\text{polna udaljenost})$$

♥ vrijednost reakcije u srednjem ležaju:

stranice 1 i 3 verižnoga poligona tangente su verižne krivulje (progibne/utjecajne linije) u točkama koje odgovaraju hvatištima momenata

$$B = M \varphi_2 + M (-\varphi_3) = M \varphi_2 + M (-\varphi_2) = 0$$