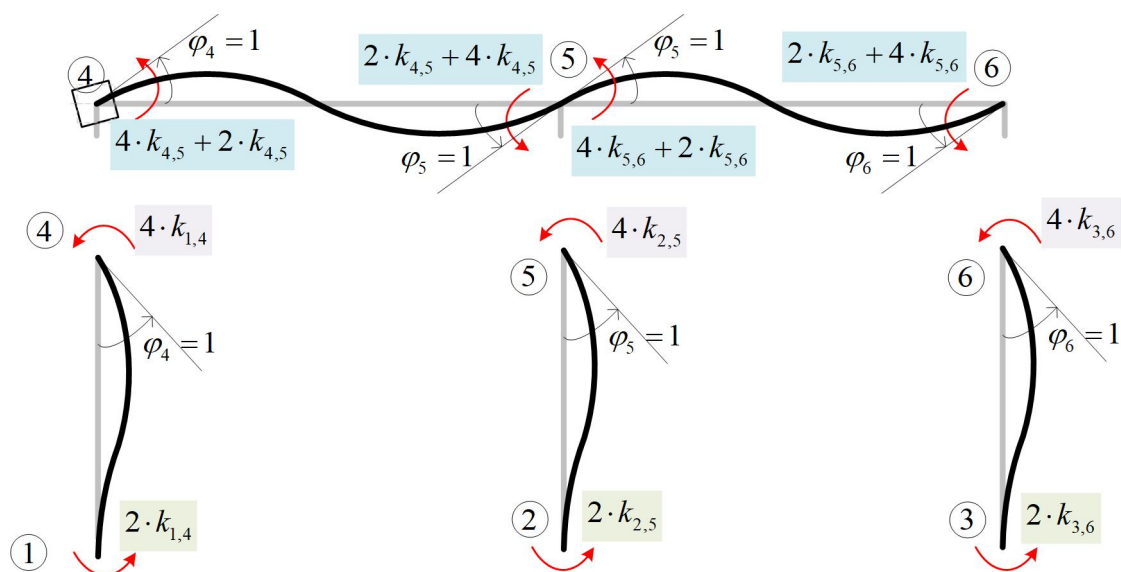


Petra Gidak  
Elizabeta Šamec

## Statički neodređeni sistemi





ISBN 978-953-8168-58-1

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1 Metoda sila</b>	<b>2</b>
1.1 O metodi sila	3
1.2 Prisilni pomak ležaja obostrano upete grede	6
1.3 Obostrano upeta greda opterećena koncentriranom silom	12
1.4 Statički neodređeni sistem s jednom prekobrojnomo veličinom	15
1.5 Okvirni sistem sa zategom	19
1.6 Prisilni pomaci ležajeva okvirnoga sistema	25
1.7 Utjecaj jednolike temperature na okvirni sistem	33
1.8 Određivanje pomaka metodom jedinične sile	40
1.9 Utjecaj nejednolike temperature i deformacijska kontrola	48
1.10 Dodatak 1: <i>Vereščaginov</i> teorem	54
1.11 Dodatak 2: <b>utjecaj poprečne sile na iznos pomaka točaka konstrukcije</b>	56
1.12 Dodatak 3: <b>"složene" površine</b>	58
<b>2 Metoda pomaka</b>	<b>61</b>
2.1 O metodi pomaka	62
2.2 Pomični okviri	67
2.3 Nepomični sistem – kontinuirana greda	77
2.4 Dodatak 1: <b>tablica momenata upetosti</b>	85
2.5 Dodatak 2: <b>matrica krutosti štapnoga elementa</b>	89
2.6 Dodatak 3: <b>statička kondenzacija</b>	91

<b>3 Inženjerska metoda pomaka</b>	<b>93</b>
3.1 O inženjerskoj metodi pomaka . . . . .	94
3.2 Pomični okvir . . . . .	95
3.3 Pomični okvir s kosim stupom . . . . .	108
3.4 Utjecaj promjenjive temperature i prisilnih pomaka . . . . .	119
3.5 Utjecaj jednolike temperature . . . . .	130
<b>4 Relaksacijske metode</b>	<b>139</b>
4.1 O relaksacijskim metodama . . . . .	140
4.2 Nepomični višeetažni okviri . . . . .	142
4.3 Pomični višeetažni okvir – primjena postupka Wernera i Csonke . . .	157
4.4 Kontinuirani nosač . . . . .	174
4.5 Uvjeti simetrije . . . . .	178
<b>5 Utjecajne funkcije</b>	<b>189</b>
5.1 Definicija i postupci određivanja utjecajnih funkcija . . . . .	190
5.2 Određivanje utjecajne linije za moment savijanja u presjeku kontinuiranoga nosača . . . . .	192
5.3 Određivanje utjecajne linije za poprečnu silu u presjeku kontinuiranoga nosača . . . . .	199
5.4 Određivanje utjecajne linije za reakciju u ležaju . . . . .	205
5.5 Utjecajna linija okvirnoga sistema . . . . .	213
<b>6 Metoda gustoća sila</b>	<b>220</b>
6.1 O mrežama prednapetih kabela i metodi gustoća sila . . . . .	221
6.2 Metoda gustoća sila . . . . .	228
6.3 Iteracijska primjena metode gustoća sila . . . . .	230

# Uvod

Naglasak je ove knjige na statici štapnih konstrukcija kao dijela tehničke mehanike [31, 36]. Pri tome pod štapnim konstrukcijama shvaćamo konstrukcije sastavljene od štapnih elemenata duljina kojih je znatno veća od dimenzija (visine i širine) popračenoga presjeka. *Građevna statika 1.* i *Građevna statika 2.* na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu osnovni su tehnički kolegiji te poveznica između temeljnih zakona mehanike krutih tijela (*Mehanika 1.* i *Mehanika 2.*) i čvrstoće, krutosti i stabilnosti elemenata konstrukcija (*Otpornost materijala 1.* i *Otpornost materijala 2.*). Bez dobrog poznavanja gradiva navedenih kolegija rezultat je promišljanja nad sadržajem ove knjige nepredvidljiv [2, 34, 35, 37, 38].

Nadalje, *Građevna statika 1.* prethodi kolegiju *Betonske i zidane konstrukcije 1.*, *Metalne konstrukcije*, *Drvene konstrukcije* i *Mostovi* na preddiplomskom studiju, a zajedno s *Građevnom statikom 2.* i nizu kolegija na diplomskom studiju, od kojih izdvojimo *Teoriju elastičnosti i plastičnosti* na smjeru *Teorija i modeliranje konstrukcija*, smjeru *Geotehnika* i smjeru *Materijali*. Točnije, svi kolegiji povezani s proračunom konstrukcija zgrada, cesta, mostova, hidrotehničkih i geotehničkih građevina temeljeni su na sadržaju kolegija *Građevna statika* [22].

Opisane metode proračuna primjenjuju pojednostavljene modele realnih ravninskih nosivih sistema. Modelirati realno ponašanje konstrukcije temelj je statičkoga proračuna, "ručnog" ili "računalnog", te podrazumijeva inženjersko promišljanje o ponašanju konstrukcija. Istodobno, zamisao opisane metode pomaka temelj je metode konačnih elemenata primjena koje danas nadilazi građevinarstvo.

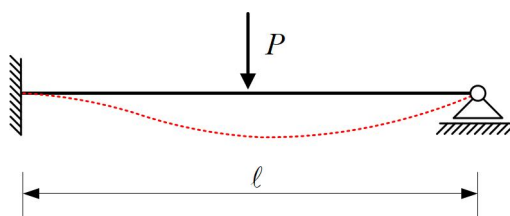
Autorice smatraju da studenti na Građevinskom fakultetu ne bi smjeli propustiti priliku potaknuti vlastitu inženjersku prosudbu rješavajući jednostavnije primjere modela ravninskih konstrukcija [12, 14].

# Poglavlje 1

## Metoda sila

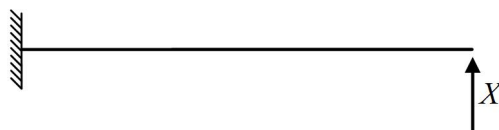
## 1.1 O metodi sila

Poznavajući vrijednosti prekobrojnih statičkih veličina statički neodređenih sistema jednadžbama se ravnoteže mogu odrediti vrijednosti ostalih statičkih veličina, na ležajevima i u presjecima elemenata, te skicirati dijagrami unutarnjih sila. Zamisao je metode sila definirati statički određeni sistem raskidanjem odabranih prekobrojnih (ležajnih i/ili unutarnjih) veza te zahtijevati jednakost (kompatibilnost) pomaka zadanoga statičkog sistema i odabranoga statički određenog sistema [1, 3]. Dakle, cijeli se proračun odvija na odabranom, statički određenom sistemu koji se naziva *osnovnim sistemom*.

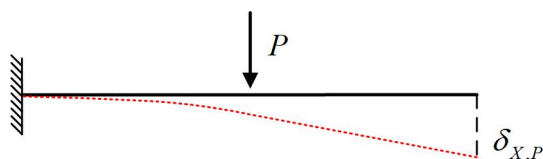


Slika 1.1: Zadani statički neodređeni sistem

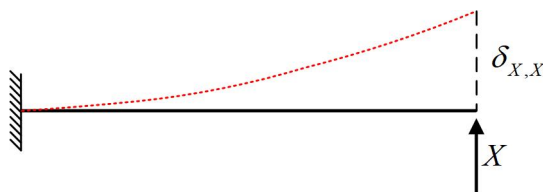
Na slici 1.1 prikazan je statički neodređeni sistem s jednom prekobrojnog vezom opterećen distribuiranom silom  $q(x)$ . Crvenom je linijom skicirana progibna linija zadanoga statičkog sistema. Ako se reakcija na pomičnom zglobnom ležaju odabere kao prekobrojna veličina, osnovni je sistem u metodi sila konzola sa slike 1.2. Progibna linija odabranoga osnovnog sistema opterećenog jednakim opterećenjem kao i zadani sistem (distribuiranom silom  $q$ ) svakako nije jednaka onoj zadanoga sistema (slika 1.3). Međutim, ako se osnovni sistem optereti silom  $X$  koja djeluje na mjestu i u smjeru raskinute prekobrojne veze, "zbrajanjem" progiba sa slike 1.3 i 1.4 osnovni se sistem dovodi u stanje jednako stanju zadanoga sistema [15]. Problem nastaje zato što iznos sile  $X$  nije poznat.



Slika 1.2: Osnovni statički određeni sistem



Slika 1.3: Osnovni sistem opterećen vanjskim djelovanjem



Slika 1.4: Osnovni sistem opterećen silom  $X$

Međutim, zbog linearnosti koja vrijedi u slučaju malih pomaka i malih deformacija (teorija I. reda), ako sila iznosa  $X = 1$  uzrokuje pomak  $\delta_{X,X=1}$ , tada će sila iznosa  $X$  uzrokovati  $X$  puta veći pomak ( $\delta_{X,X}$ ). Budući da je pomak zadanoga sistema na mjestu sile  $X$  jednak nuli može se zapisati:

$$\delta_{X,q} + X \cdot \delta_{X,X=1} = 0,$$

gdje je  $\delta_{X,q}$  pomak na mjestu sile  $X$  uzrokovan vanjskim opterećenjem, odnosno distribuiranom silom  $q(x)$ . Gornji je izraz **uvjet kompatibilnosti pomaka zadanoga i osnovnoga statičkoga sistema** [27, 30]. U slučaju statičkoga sistema s  $n$  prekobrojnih veličina uvjeti kompatibilnosti tvore sustav od  $n$  jednadžbi:

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} + \delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{1,n} \cdot X_n &= 0 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{2,n} \cdot X_n &= 0 \\ \delta_{3,0} + \delta_{3,1} \cdot X_1 + \delta_{3,2} \cdot X_2 + \delta_{3,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{3,n} \cdot X_n &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n,0} + \delta_{n,1} \cdot X_1 + \delta_{n,2} \cdot X_2 + \delta_{n,3} \cdot X_3 + \dots + \delta_{n,n} \cdot X_n &= 0 \end{aligned}$$

Koeficijenti uz nepoznanice u tim jednadžbama nazivaju se *koeficijentima fleksibilnosti*. Koeficijenti fleksibilnosti i slobodni članovi određuju se na temelju sljedećih izraza:



$$\delta_{i,j} = \int \frac{m_i \cdot m_j}{EI} ds + \int \frac{n_i \cdot n_j}{EA} ds + k \cdot \int \frac{t_i \cdot t_j}{GA} ds$$

$$\delta_{i,0} = \int \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} ds + \int \frac{N_0 \cdot n_i}{EA} ds + k \cdot \int \frac{T_0 \cdot t_i}{GA} ds + \int (\kappa_t \cdot m_i) ds + \int (\varepsilon_t \cdot n_i) ds$$

Pri tome je  $\delta_{i,j}$  pomak na mjestu  $i$  u smjeru sile s indeksom  $i$  uzrok kojega je jedinično djelovanje na mjestu  $j$ , dok je  $\delta_{i,0}$  pomak na mjestu  $i$  u smjeru sile s indeksom  $i$  od vanjskoga djelovanja (opterećenja). Osim koncentriranih i linijskih sila i momenata, vanjsko djelovanje može biti promjenjiva temperatura ( $\Delta t$ ) i/ili jednolika temperatura  $t_s$ . Promjenjiva temperatura uzrokuje dodatnu zakrivljenost ( $\kappa_t$ ) elementa na kojem djeluje, dok jednolika temperatura uzrokuje promjenu duljine elementa ( $\Delta \ell$ ) pa stoga i pomake nekih ili svih elemenata statičkoga sistema.

Vrijednosti integrala u izrazu za koeficijente fleksibilnosti određuju se prema *Vereščaginovom teoremu* (vidi poglavlje 1.10).

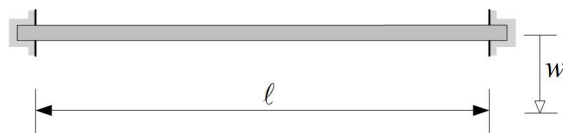
Rješenja jednadžbi kompatibilnosti ( $X_i$ ) uvrštavaju se u sljedeće izraze za određivanje vrijednosti unutarnjih sila na zadanom sistemu (izrazi se temelje na principu superpozicije):

$$M(x) = M_0 + X_1 \cdot m_1(x) + X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x) + \dots + X_n \cdot m_n(x)$$

$$T(x) = T_0 + X_1 \cdot t_1(x) + X_2 \cdot t_2(x) + X_3 \cdot t_3(x) + \dots + X_n \cdot t_n(x)$$

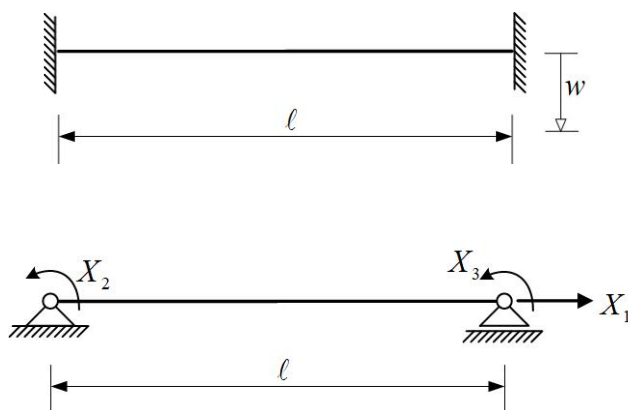
$$N(x) = N_0 + X_1 \cdot n_1(x) + X_2 \cdot n_2(x) + X_3 \cdot n_3(x) + \dots + X_n \cdot n_n(x)$$

## 1.2 Prisilni pomak ležaja obostrano upete grede



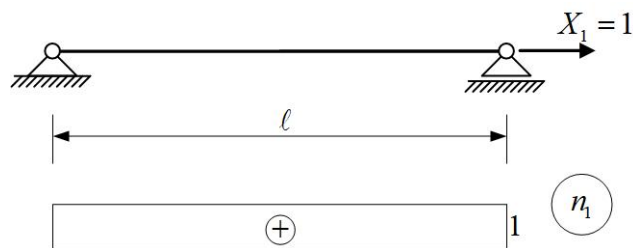
Slika 1.5: Zadani statički sistem

Zadani sistem je tri puta statički neodređen, odnosno ima tri (vanjske) veze više od minimuma potrebnoga da bude geometrijski nepromjenjiv (drugim riječima, statički određen). Zamisao je metode sila zadani statički neodređeni sistem pretvoriti u statički određeni otpuštanjem (raskidanjem) prekobrojnih ležajnih veza (napomena: moguće je osnovni sistem definirati i otpuštanjem unutarnjih veza; primjerice, dopuštanjem zaokreta u nekom presjeku nastaje zglob). Odabrani statički određeni sistem nazivamo *osnovnim sistemom* te se na njemu provodi daljnji proračun.

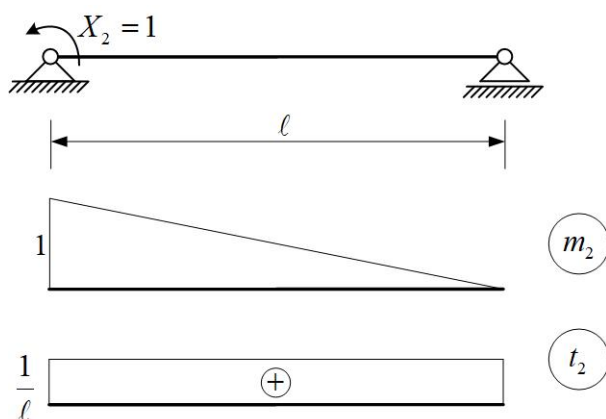


Slika 1.6: Zadani sistem i odabrani osnovni sistem s naznačenim silama u prekobrojnim vanjskim vezama

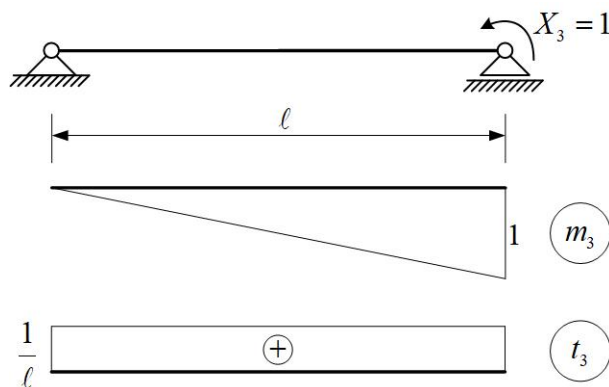
Polje pomaka osnovnoga sistema pod djelovanjem vanjskoga opterećenja i jediničnoga opterećenja na mjestu raskinutih veza treba izjednačiti s poljem pomaka zadanoga sistema pod djelovanjem vanjskoga opterećenja. Stoga se sustav jednadžbi rješenja kojega su vrijednosti prekobrojnih sila zadanoga sistema sastavlja na temelju *uvjeta kompatibilnosti* pomaka zadanoga i osnovnoga sistema i naziva *jednadžbama kompatibilnosti*.



Slika 1.7: Jedinično djelovanje  $X_1 = 1$  i pripadni dijagram  $n_1$



Slika 1.8: Jedinično djelovanje  $X_2 = 1$  i pripadni dijagrami  $m_2$  i  $t_2$



Slika 1.9: Jedinično djelovanje  $X_3 = 1$  i pripadni dijagrami  $m_3$  i  $t_3$

Sustav je linearnih jednadžbi koji čine tri jednadžbe kompatibilnosti pomaka oblika

$$\begin{aligned}\delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1,3} \cdot X_3 + \delta_{1,0} &= 0 \\ \delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2,3} \cdot X_3 + \delta_{2,0} &= 0 \\ \delta_{3,1} \cdot X_1 + \delta_{3,2} \cdot X_2 + \delta_{3,3} \cdot X_3 + \delta_{3,0} &= 0\end{aligned}$$

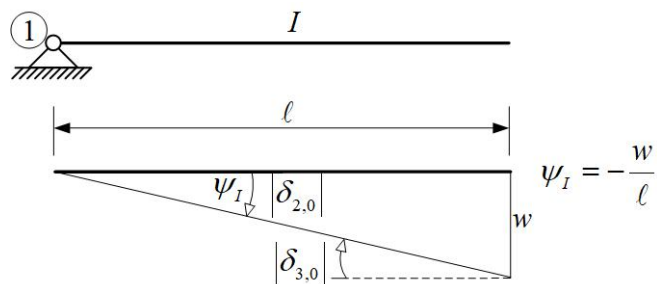
Vrijednosti koeficijenta fleksibilnosti (koeficijenti uz nepoznanice u jednadžbama kompatibilnosti pomaka) određuju se prema *Vereščaginovu teoremu*:

$$\begin{aligned}\delta_{1,1} &= \frac{1}{EA} \cdot (1 \cdot \ell \cdot 1) = \frac{\ell}{EA} \\ \delta_{1,2} &= \delta_{2,1} = 0 \\ \delta_{1,3} &= \delta_{3,1} = 0 \\ \delta_{2,2} &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot \ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{k}{GA} \cdot \left( \frac{1}{\ell} \cdot \ell \cdot \frac{1}{\ell} \right) = \frac{\ell}{3EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \\ \delta_{3,3} &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot \ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{k}{GA} \cdot \left( \frac{1}{\ell} \cdot \ell \cdot \frac{1}{\ell} \right) = \frac{\ell}{3EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \\ \delta_{2,3} &= \delta_{3,2} = -\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot \ell}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{k}{GA} \cdot \left( \frac{1}{\ell} \cdot \ell \cdot \frac{1}{\ell} \right) = -\frac{\ell}{6EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell}\end{aligned}$$

Prvi je pribrojnik u posljednja tri koeficijenta fleksibilnosti utjecaj momenata savijanja na pomak  $\delta_{i,j}$ , dok drugi pribrojnik izražava utjecaj poprečnih sila. S obzirom na to da je veličina utjecaja poprečnih sila promjenjive prirode i da ovisi o omjeru visine poprečnoga presjeka i raspona ( $\frac{h}{\ell}$ ), njezin se doprinos pomacima točaka konstrukcije (odnosno iznosima koeficijenata fleksibilnosti u metodi sila) detaljnije analizira u poglavlju 1.11, a u većini se slučajeva može zanemariti.

Opravdano je utjecaje poprečnih i uzdužnih sila zanemariti ako u poprečnim presjecima postoje momenti savijanja, te u slučaju zanemarivanja poprečne sile ako je odnos visine i raspona veći od  $\frac{1}{5}$ .

Vanjsko je djelovanje prisilni vertikalni pomak  $w$  jednoga upetog ležaja, te se stoga koeficijenti fleksibilnosti koji su vrijednosti pomaka na mjestima raskinutih vanjskih veza od utjecaja pomaka  $w$  određuju iz plana pomaka na mehanizmu s mogućnim pomakom  $w$ . Mehanizam nastaje raskidanjem veze koja je na osnovnom sistemu sprečavala pomak  $w$ , slika 1.10.



Slika 1.10: Plan pomaka (određivanje utjecaja prisilnoga pomaka  $w$ )

Na mjestu djelovanja prekobrojnih sila (točnije momenata)  $X_1$  i  $X_2$  u planu pomaka određuju se pomaci (odnosno zaokreti) uzrokovani prisilnim pomakom  $w$ :

$$\begin{aligned}\delta_{1,0} &= 0 \\ \delta_{2,0} &= -\frac{w}{\ell} \\ \delta_{3,0} &= -\frac{w}{\ell}\end{aligned}$$

Jednadžbe kompatibilnosti pomaka glase:

$$\begin{aligned}\frac{\ell}{EA} \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 &= 0 \Rightarrow X_1 = 0 \\ 0 \cdot X_1 + \left( \frac{\ell}{3EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_2 + \left( -\frac{\ell}{6EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_3 &= \frac{w}{\ell} \\ 0 \cdot X_1 + \left( -\frac{\ell}{6EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_2 + \left( \frac{\ell}{3EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_3 &= \frac{w}{\ell}\end{aligned}$$

Pošto je  $X_1 = 0$ , sustav jednadžbi poprima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}\left( \frac{\ell}{3EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_2 + \left( -\frac{\ell}{6EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_3 &= \frac{w}{\ell} \\ \left( -\frac{\ell}{6EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_2 + \left( \frac{\ell}{3EI} + \frac{k}{GA \cdot \ell} \right) \cdot X_3 &= \frac{w}{\ell}\end{aligned}$$

Rješenje sustava jednadžbi glasi:

$$X_2 = \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} + \frac{GA}{k} \cdot \frac{w}{2}$$

$$X_3 = \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} + \frac{GA}{k} \cdot \frac{w}{2}$$

Rješenja su veličine momenata savijanja na upetim ležajevima zadanoga sistema. Uzimajući u obzir već rečeno o veličini utjecaja pojedinih unutarnjih sila na pomake točaka konstrukcije, rješenje se može s dovoljnom točnošću zapisati kao

$$X_2 = \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell}$$

$$X_3 = \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell}$$

Dijagram momenata savijanja i poprečnih sila (općenito i uzdužnih sila) na zadanom sistemu za zadano vanjsko opterećenje određuje se na temelju izraza

$$M(x) = X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x)$$

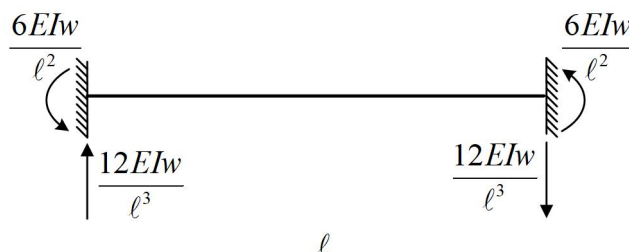
$$T(x) = X_2 \cdot t_2(x) + X_3 \cdot t_3(x)$$

$$N(x) = X_2 \cdot n_2(x) + X_3 \cdot n_3(x)$$

$$M(x=0) = 1 \cdot \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} - 0 \cdot \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} = \frac{6EIw}{\ell^2}$$

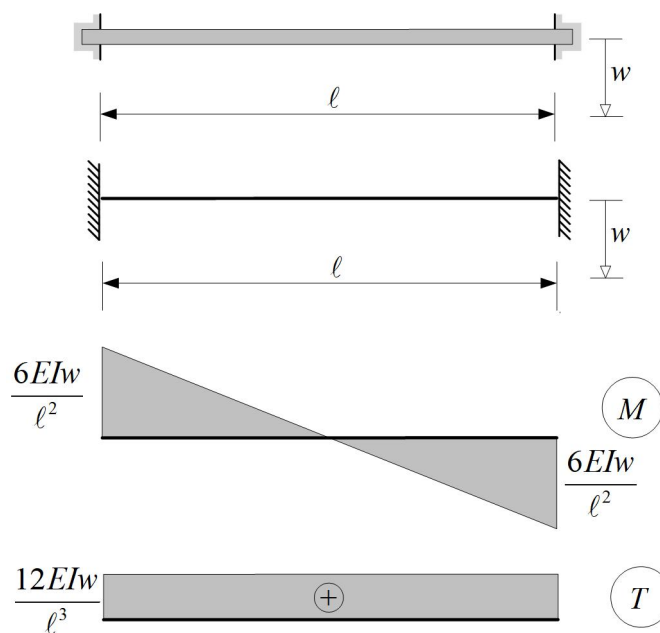
$$M(x=\ell) = -0 \cdot \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} + 1 \cdot \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} = \frac{6EIw}{\ell^2}$$

$$T(x=0) = \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} \cdot \frac{1}{\ell} + \frac{6EI}{\ell} \cdot \frac{w}{\ell} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{12EI}{\ell^2} \cdot \frac{w}{\ell}$$



Slika 1.11: Skica stvarnih djelovanja

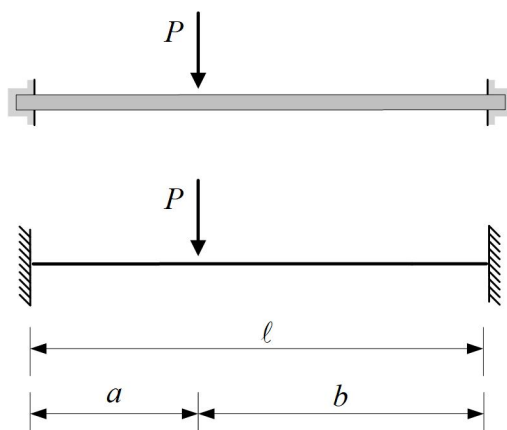
Na slici 1.11 prikazane su stvarne vrijednosti i smjerovi reakcija zadanoga statičkog sistema, dok su na slici 1.12 prikazani dijagrami unutarnjih sila. o S obzirom na da je  $X_1 = 0$ , dijagram uzdužnih sila ne postoji. U sljedećim se zadacima utjecaj poprečnih sila na pomake točaka konstrukcije zanemaruje kao i utjecaj uzdužnih sila u elementima statičkih sistema u kojima se mogu pojaviti momenti savijanja.



Slika 1.12: Dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila

### 1.3 Obostrano upeta greda opterećena koncentriranom silom

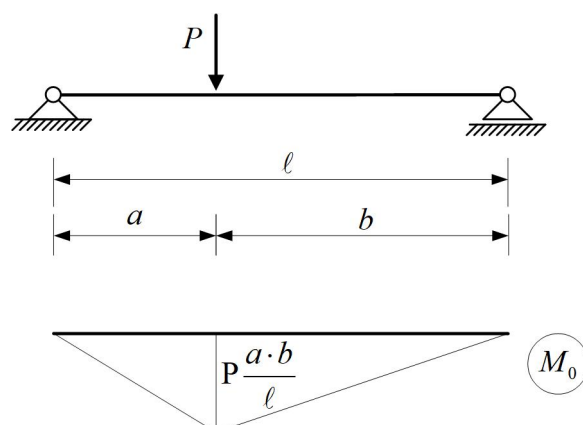
Statički sistem iz prethodnoga poglavlja opterećen je vanjskom koncentriranom silom  $P$ . Odabran je osnovni sistem koji nastaje raskidanjima tri prekobrojne vanjske (ležajne) veze (prosta greda).



Slika 1.13: Zadani statički sistem

Dijagrami unutarnjih sila na osnovnom sustavu uzrokovanih jediničnim vrijednostima prekobrojnih sila isti su kao u prethodnom primjeru.

Razlika je u postojanju dijagrama momenata savijanja na osnovnom sustavu uzrokovanih silom  $P$  (dijagram  $M_0$ ) te posljedično u izrazima za izračunavanje slobodnih članova  $\delta_{2,0}$  i  $\delta_{3,0}$  (slika 1.14):



Slika 1.14: Dijagram momenata savijanja na osnovnom sustavu uzrokovanih silom  $P$



$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{P \cdot a \cdot b}{\ell} \cdot a \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{b}{\ell} - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{P \cdot a \cdot b}{\ell} \cdot b \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{b}{\ell} \right) \right)$$

$$\delta_{2,0} = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot \ell^2 \cdot EI} - \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{6 \cdot \ell \cdot EI} - \frac{P \cdot a \cdot b^3}{3 \cdot \ell^2 \cdot EI}$$

$$\delta_{3,0} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{P \cdot a \cdot b}{\ell} \cdot a \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\ell} \right) + \frac{P \cdot a \cdot b}{\ell} \cdot b \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\ell} + \frac{1}{3} \right) \right)$$

$$\delta_{3,0} = \frac{P \cdot a^3 \cdot b}{3 \cdot \ell^2 \cdot EI} + \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot \ell^2 \cdot EI} + \frac{P \cdot a \cdot b^2}{6 \cdot \ell \cdot EI}$$

$$X_2 = -\frac{2Pa^3b - 2Pa^2b^2 - 4Pab^3 - (2Pa^2b - Pab^2) \cdot \ell}{3\ell^3}$$

$$X_3 = -\frac{4Pa^3b + 2Pa^2b^2 - 2Pab^3 - (Pa^2b - 2Pab^2) \cdot \ell}{3\ell^3}$$

$$b = \ell - a$$

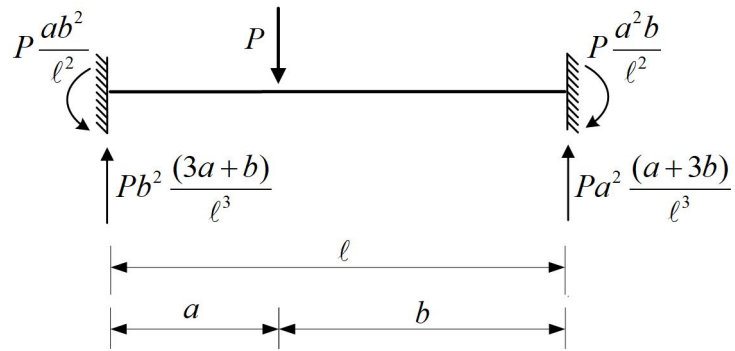
$$X_2 = \frac{Pa \cdot (\ell^2 + a^2 - 2a\ell)}{\ell^2} = \frac{Pa \cdot (\ell - a)^2}{\ell^2} = \frac{Pab^2}{\ell^2}$$

$$a = \ell - b$$

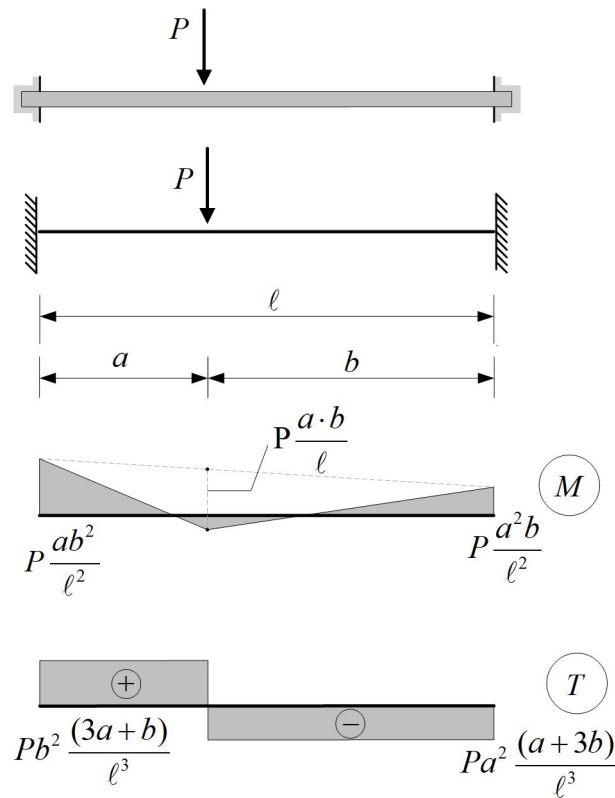
$$X_3 = -\frac{Pa^2b}{\ell^2}$$

$$M(x) = M_0 + X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x)$$

$$T(x) = T_0 + X_2 \cdot t_2(x) + X_3 \cdot t_3(x)$$



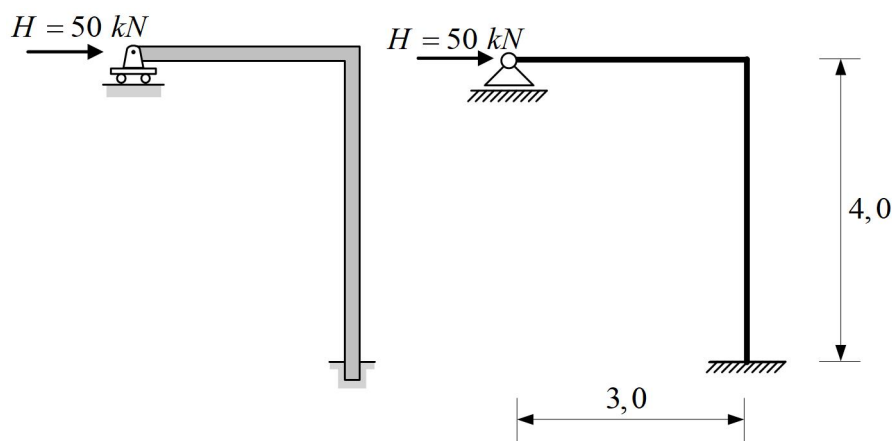
Slika 1.15: Skica stvarnih djelovanja



Slika 1.16: Dijagrami unutarnjih sila

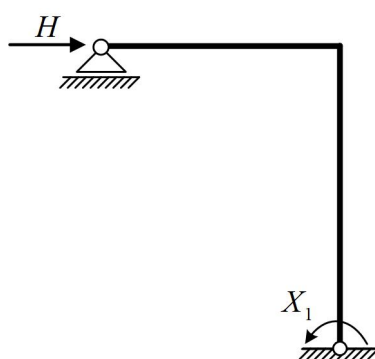
## 1.4 Statički neodređeni sistem s jednom prekobrojn- nom veličinom

Zadan je jedanput statički neodređeni sistem (koji nazivamo poluokvirom) opterećen koncentriranom horizontalnom silom  $H$ .



Slika 1.17: Zadani statički sistem

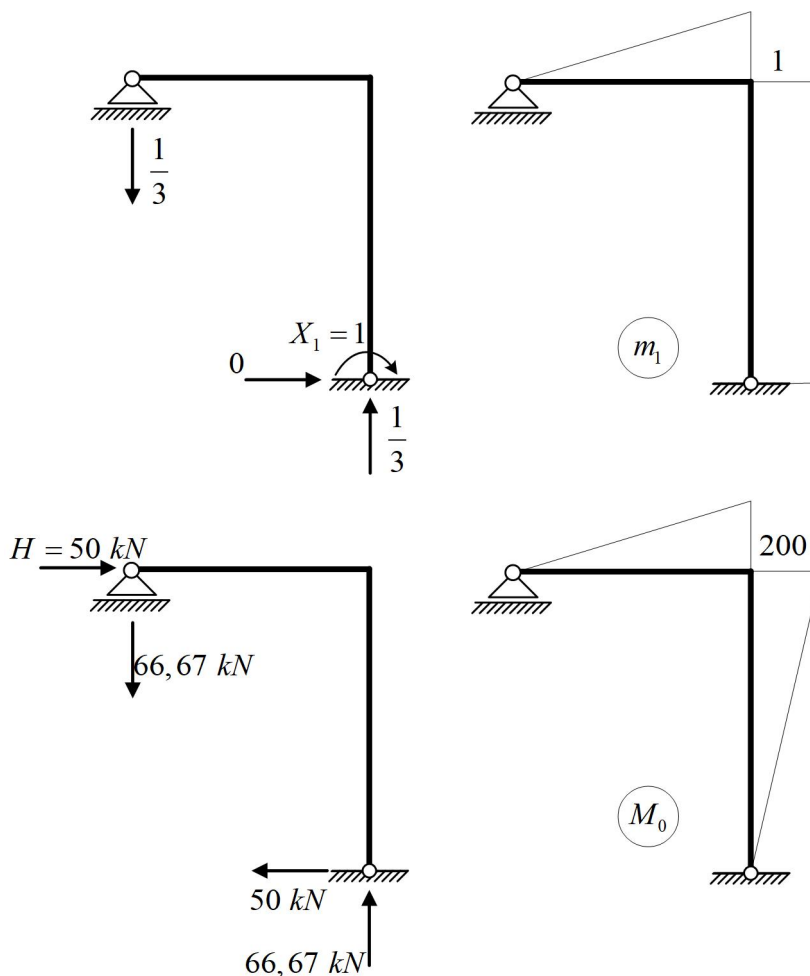
Odabran je osnovni sistem (slika 1.18) s dopuštenom rotacijom na upetom ležaju zadanoga sistema. Stoga je moment savijanja na tom ležaju prekobrojna veličina i ujedno nepoznanica u jednadžbi kompatibilnosti pomaka (slika 1.19).



Slika 1.18: Odabrani osnovni sistem

Na slici 1.19 prikazan je osnovni sistem opterećen vanjskim opterećenjem (silom  $H$ ), i momentom  $X_1 = 1$ . Za navedena su opterećenja skicirani pripadni dijagrami

momenata savijanja na temelju kojih se određuju koeficijent fleksibilnosti  $\delta_{1,1}$  i slobodni član  $\delta_{1,0}$  potrebni za rješavanje jednadžbe komaptibilnosti pomaka:



Slika 1.19: Osnovni sistem i postupak rješavanja

$$\delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,0} = 0$$

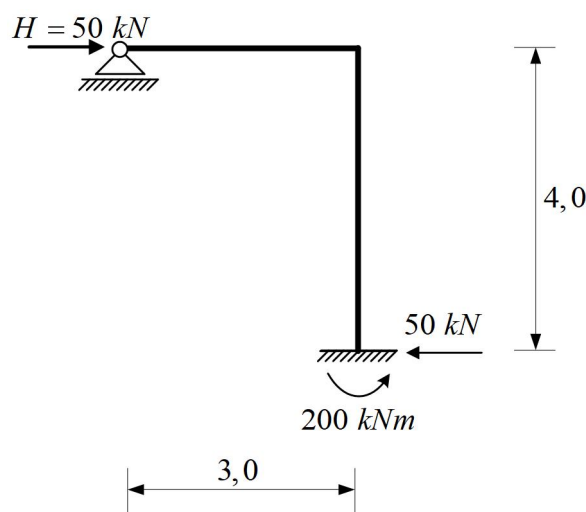
$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{5}{EI}$$

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{200 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 200 \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{1000}{EI}$$

$$\frac{5}{EI} \cdot X_1 + \frac{1000}{EI} = 0$$

$$X_1 = -200$$

Rješenje jednadžbe komaptibilnosti pomaka vrijednost je momenta na upetom ležaju, a s obzirom na to da je zadani sistem jedanput statički neodređen, nakon određivanja jedne prekobrojne veličine moguće je na temelju jednadžbi ravnoteže odrediti iznose ostalih (vanjskih i unutarnjih) sila. Na slici 1.20 prikazana su stvarna djelovanja zadanoga statičkog sistema dobivena iz jednadžbi ravnoteže.



Slika 1.20: Skica stvarnih djelovanja

Prilikom određivanja vrijednosti unutarnjih sila (prema donjim izrazima) odabire se predznak unutarnjih sila koji ne mora biti jednak dogovoru o pozitivnim smjerovima unutarnjih sila u presjeku:

$$M(x) = M_0 + X_1 \cdot m_1(x)$$

$$M(x = 3) = 200 - 200 \cdot 1 = 0$$

$$T(x) = T_0 + X_1 \cdot t_1(x)$$

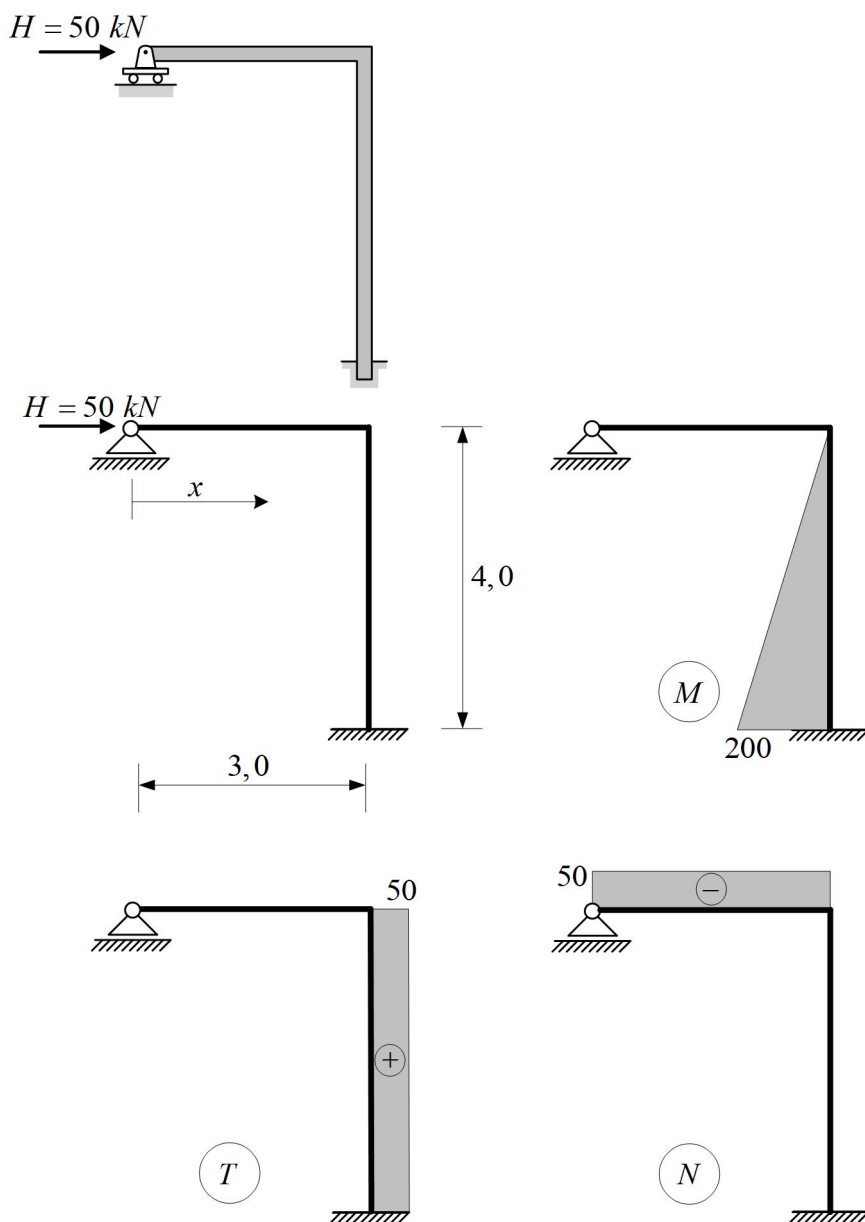
$$T(x = 0) = 66,67 - 200 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$N(x) = N_0 + X_1 \cdot n_1(x)$$

$$N(x = 0) = 50 - 200 \cdot 0 = 50 \text{ kN (tlak)}$$

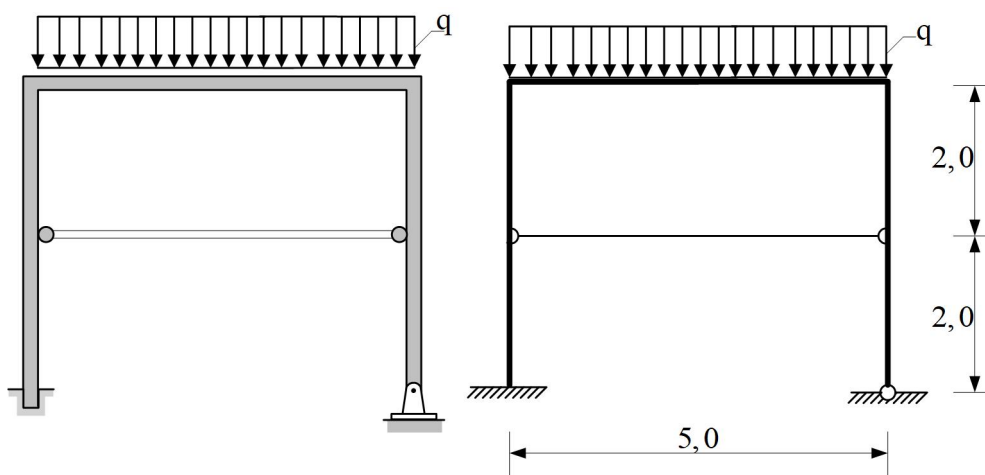
Na primjer, određujući vrijednost uzdužne sile na gredi, vrijednost uzdužne sile od vanjskog opterećenja (50 kN) uvrštena je kao pozitivna (iako je zapravo riječ o

tlačnoj sili). Konačna vrijednost uzdužne sile je (+)50kN, ali radi se o tlačnoj sili, jer se predznak te konačne vrijednosti uzdužne sile podudara sa predznakom unutarnje (tlačne) sile na gredi koja je u izraz  $N(x = 0)$  uvrštena kao pozitivna.



Slika 1.21: Dijagrami unutarnjih sila

## 1.5 Okvirni sistem sa zategom



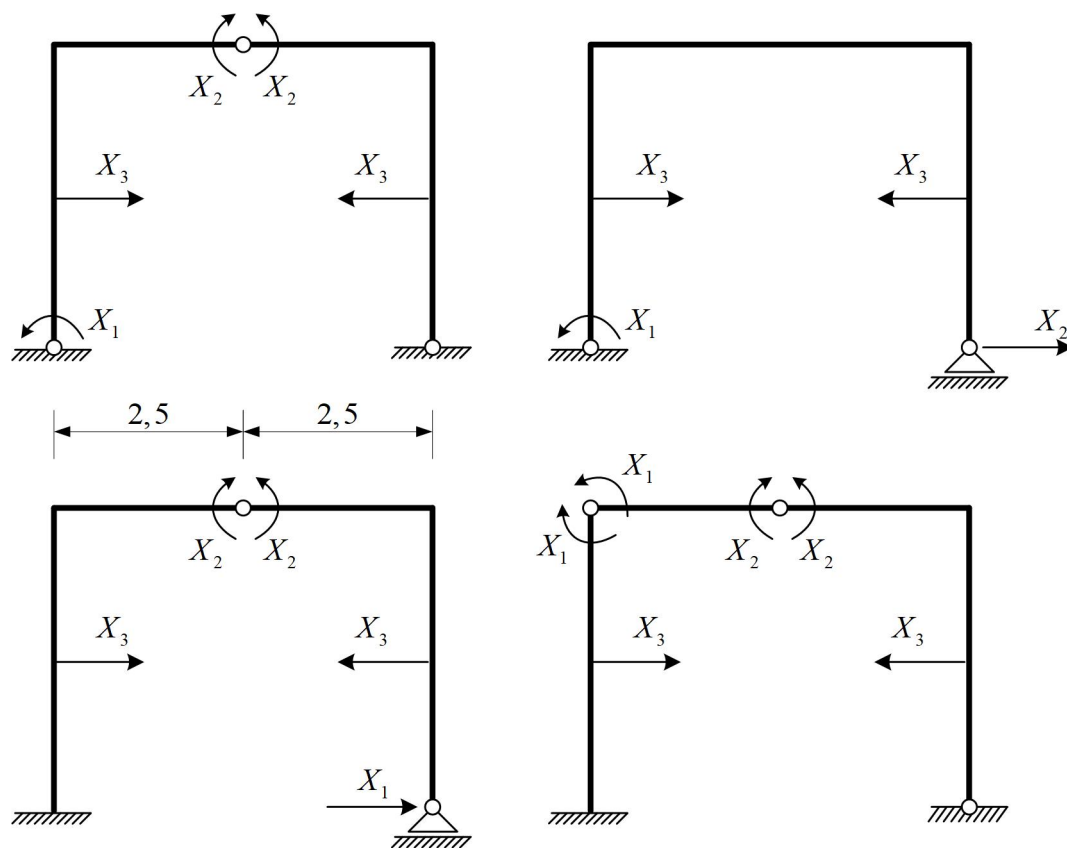
Slika 1.22: Zadani statički sistem

U prethodnim zadacima statički su se sistemi sastojali isključivo od grednih nosača. U metodi sila koeficijenti fleksibilnosti i slobodni članovi za statičke sisteme od grednih nosača mogu se s dovoljnom točnošću odrediti zanemarivanjem utjecaja uzdužnih sila, dok za statičke sisteme sastavljene isključivo od štapova uzdužne sile jedine određuju vrijednosti koeficijenata fleksibilnosti i slobodnih članova. U oba je slučaja utjecaj poprečnih sila zanemariv ili poprečne sile ne postoje.

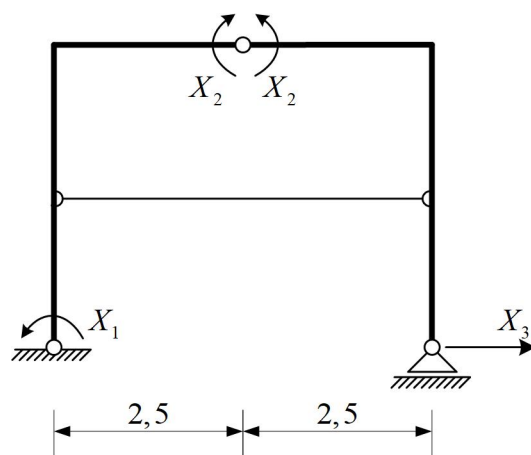
U slučaju statičkoga sistema s grednim nosačima i štapovima vrijednosti koeficijenata fleksibilnosti i slobodnih članova u metodi sila sastoje se od doprinosa momenata savijanja na gredama i uzdužnih sila u štapovima, kao što je slučaj u primjeru sa slike 1.22.

Statički je sistem sa slike 1.22 tri puta statički neodređen (zadane su vrijednosti umnožaka  $EA = 4\,000\,000\text{ kN}$ ,  $EI = 68\,000\text{ kNm}^2$  i opterećenja  $q = 10\text{ kN/m}$ ), te je osnovni sistem nastao raskidanjem tri prekobrojne veze (slika 1.24) od kojih su dvije vanjske ( $X_1$ ,  $X_3$ ) i jedna unutarnja ( $X_2$ ).

Za određivanje vrijednosti koeficijenata fleksibilnosti i slobodnih članova treba odrediti dijagrame momenata savijanja (od jediničnih vrijednosti prekobrojnih sila te od vanjskoga opterećenja) na osnovnom sistemu kao i vrijednosti sile u štapu (zatezi).

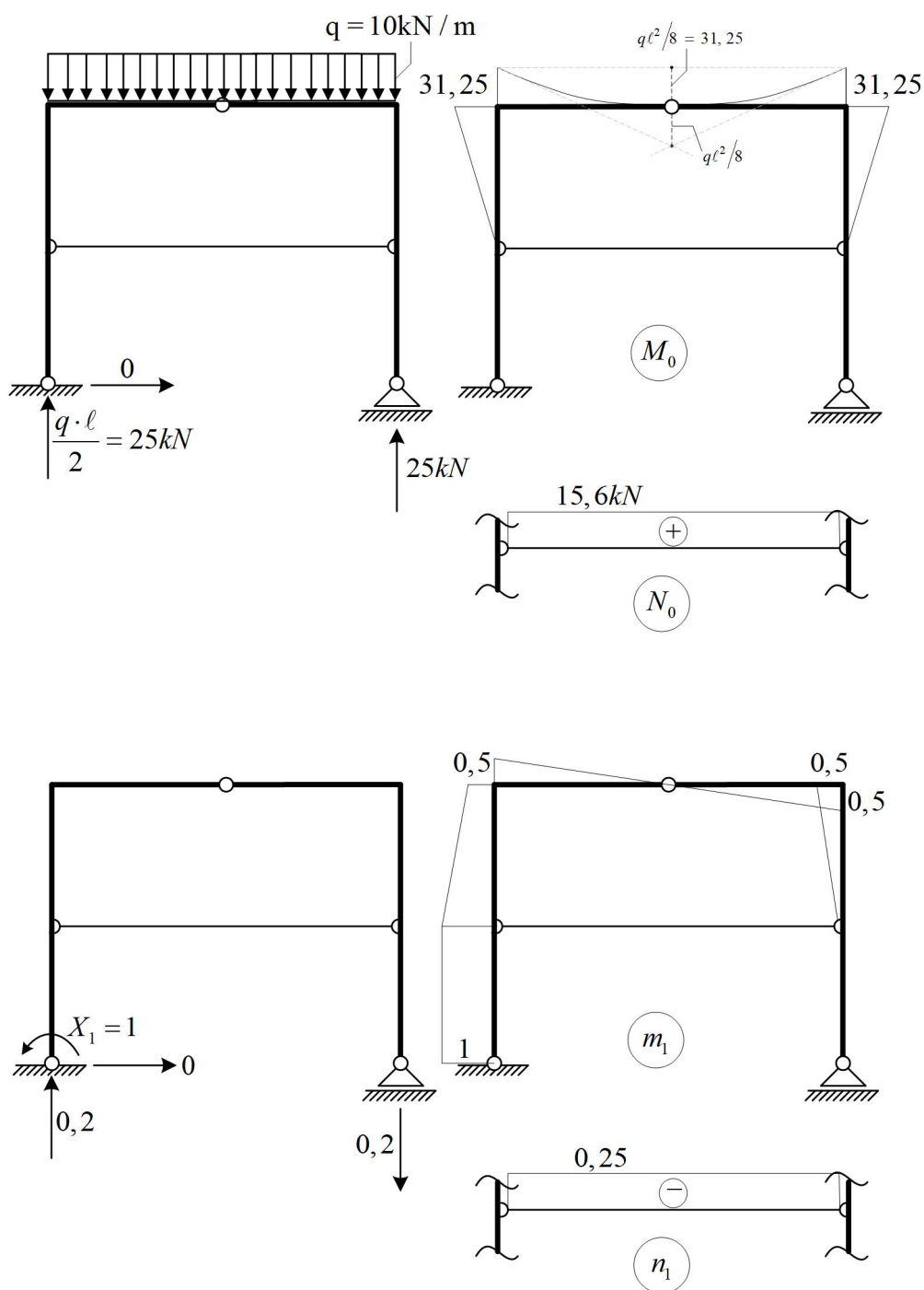


Slika 1.23: Neki od mogućih osnovnih sistema

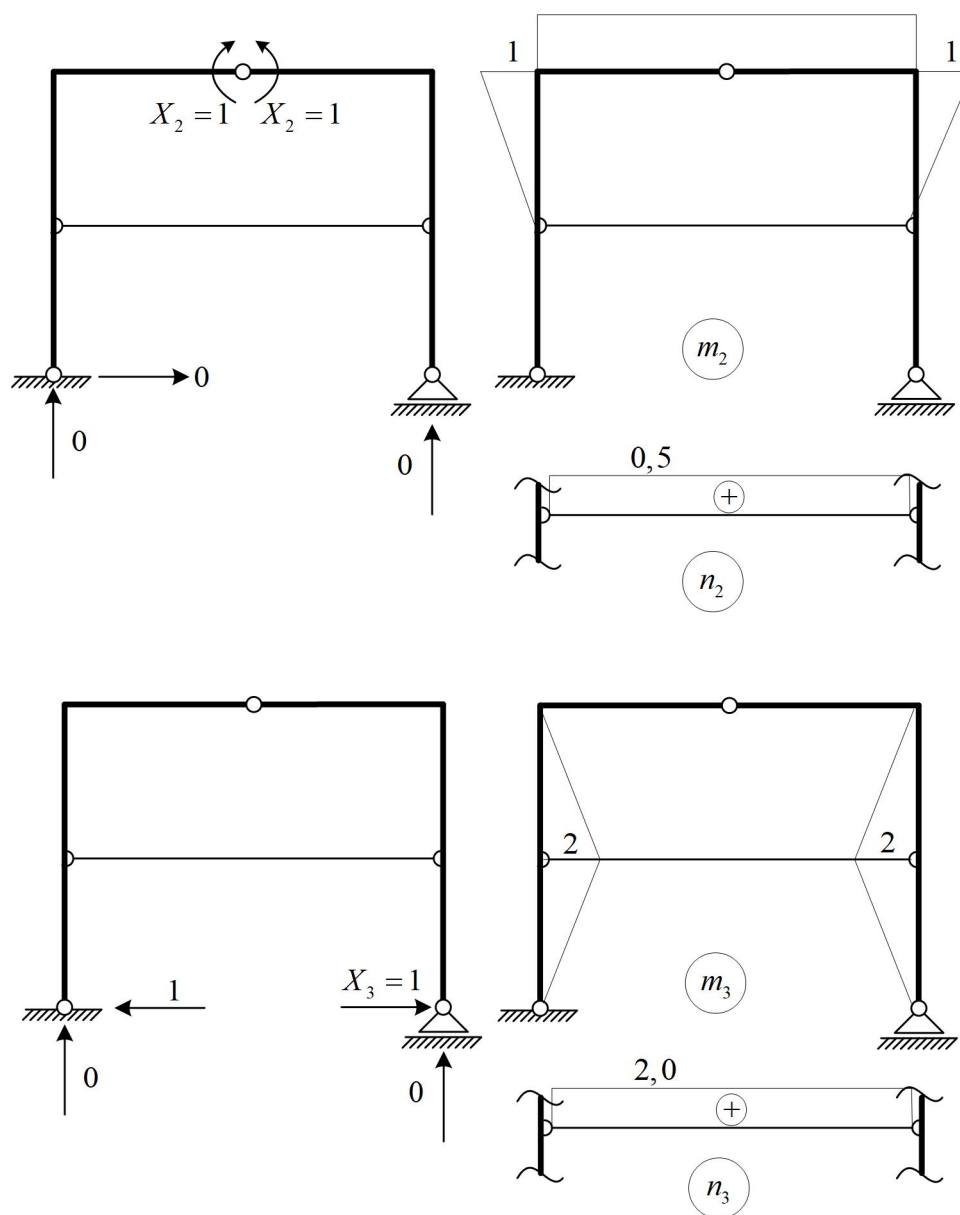


Slika 1.24: Odabrani osnovni sistem





Slika 1.25: Postupak rješavanja



Slika 1.26: Postupak rješavanja

Na slici 1.23 prikazani su (neki) mogući osnovni sistemi koji nastaju raskidanjem tri prekobrojne veze (vanjske i/ili unutarnje) zadanoga sistema. Statički sistem sa slike 1.24, poznat pod nazivom trozglojni nosač sa zategom, odabrani je osnovni sistem zbog mogućnosti lakoga određivanja dijagram momenata savijanja primjenom grafoanalitičkoga postupka [15]. Svi potrebni dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slikama 1.25 i 1.26.

Sustav jednadžbi kompatibilnosti pomaka te pripadni koeficijenti flaksibilnosti i slobodni članovi sljedećega su oblika:

$$\delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1,3} \cdot X_3 + \delta_{1,0} = 0$$

$$\delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2,3} \cdot X_3 + \delta_{2,0} = 0$$

$$\delta_{3,1} \cdot X_1 + \delta_{3,2} \cdot X_2 + \delta_{3,3} \cdot X_3 + \delta_{3,0} = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} = & \frac{1}{EI} \cdot \left( 1 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{0.5 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{0.5 \cdot 2.5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5 \cdot 2 + \right. \\ & \left. + \frac{0.5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5 \right) + \frac{1}{EA} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{3.75}{EI} + \frac{5}{16EA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} = \delta_{2,1} = & \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5 \right) + \\ & \frac{1}{EA} \cdot \left( -0.5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3EI} - \frac{5}{8EA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,3} = \delta_{3,1} = & \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 1 - \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0.5 \right) + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.5 \right) + \\ & \frac{1}{EA} \cdot \left( -\frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 2 \right) = -\frac{10}{3EI} - \frac{5}{2EA} \end{aligned}$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EA} \cdot (0.5 \cdot 5 \cdot 0.5) = \frac{19}{3EI} + \frac{5}{4EA}$$

$$\delta_{3,3} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 \right) + \frac{1}{EA} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 2) = \frac{32}{3EI} + \frac{20}{EA}$$

$$\delta_{2,3} = \delta_{3,2} = \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \right) + \frac{1}{EA} \cdot (0.5 \cdot 5 \cdot 2) = -\frac{4}{3EI} + \frac{5}{EA}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} = & \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{31.25 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{31.25 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{EA} \cdot \left( -15.625 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} \right) = \\ & \frac{31.25}{3EI} - \frac{78.125}{4EA} \end{aligned}$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{31.25 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 31.25 \cdot 5 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EA} \cdot (15.625 \cdot 5 \cdot 0.5) = \frac{93.75}{EI} + \frac{78.125}{2EA}$$

$$\delta_{3,0} = \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{31.25 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \right) + \frac{1}{EA} \cdot (15.625 \cdot 5 \cdot 2) = -\frac{125}{3EI} + \frac{156.25}{EA}$$

Rješenje sustava vrijednosti su prekobrojnih veličina  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ :

$$\left(\frac{3.75}{EI} + \frac{5}{16EA}\right) \cdot X_1 + \left(\frac{1}{3EI} - \frac{5}{8EA}\right) \cdot X_2 + \left(-\frac{10}{3EI} - \frac{5}{2EA}\right) \cdot X_3 + \frac{31.25}{3EI} - \frac{78.125}{4EA} = 0$$

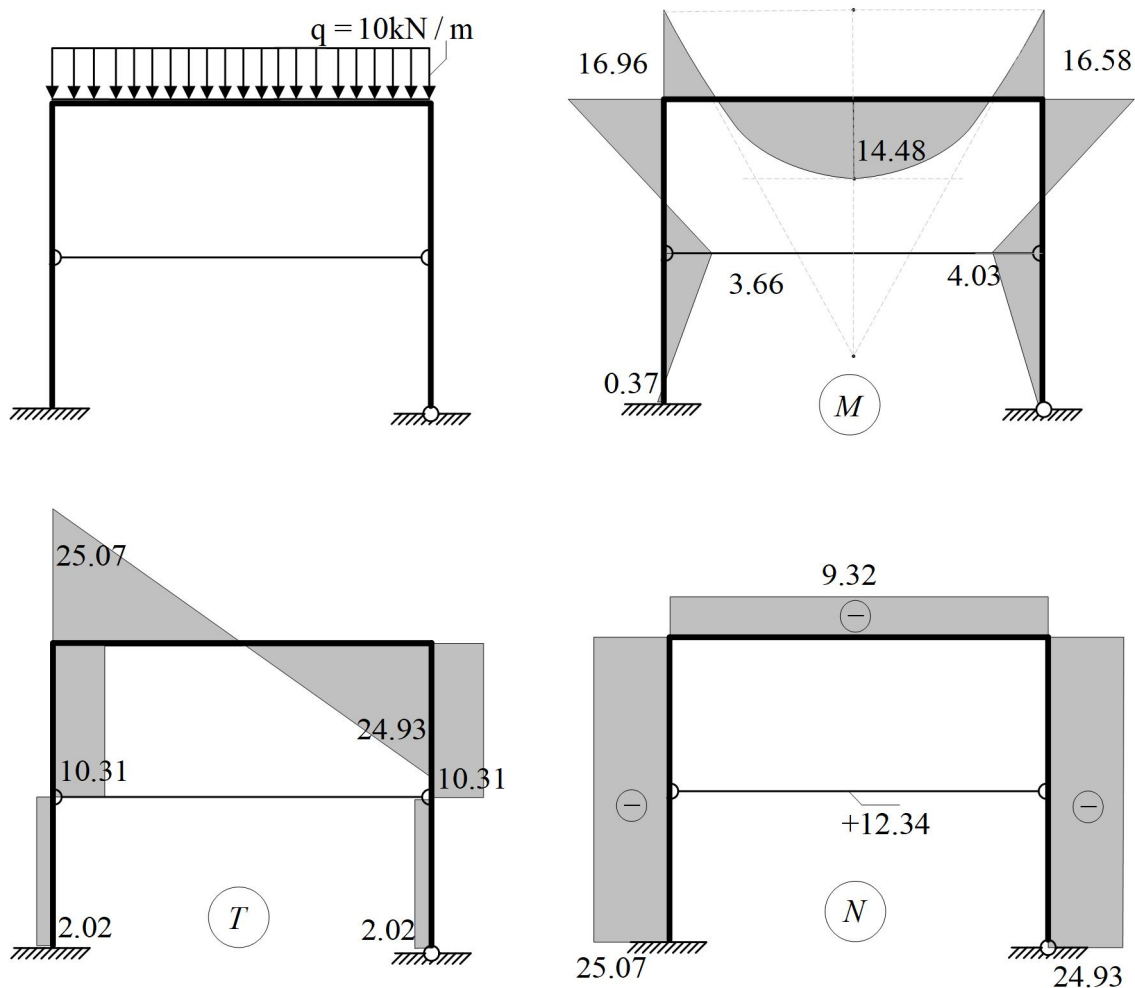
$$\left(\frac{1}{3EI} - \frac{5}{8EA}\right) \cdot X_1 + \left(\frac{19}{3EI} + \frac{5}{4EA}\right) \cdot X_2 + \left(-\frac{4}{3EI} + \frac{5}{EA}\right) \cdot X_3 + \frac{250}{EI} + \frac{78.125}{2EA} = 0$$

$$\left(-\frac{10}{3EI} - \frac{5}{2EA}\right) \cdot X_1 + \left(-\frac{4}{3EI} + \frac{5}{EA}\right) \cdot X_2 + \left(\frac{32}{3EI} + \frac{20}{EA}\right) \cdot X_3 - \frac{125}{3EI} + \frac{156.25}{EA} = 0$$

$$X_1 = 0.371$$

$$X_2 = -14.48$$

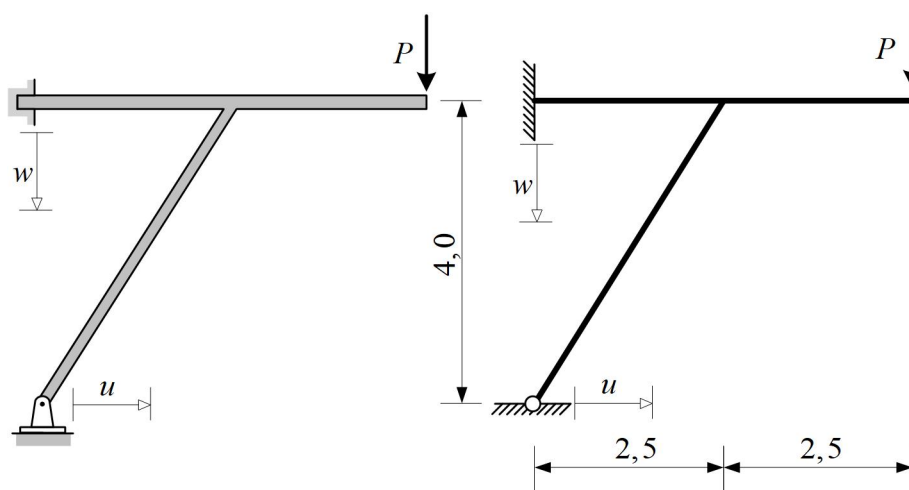
$$X_3 = 2.016$$



Slika 1.27: Dijagrami unutarnjih sila

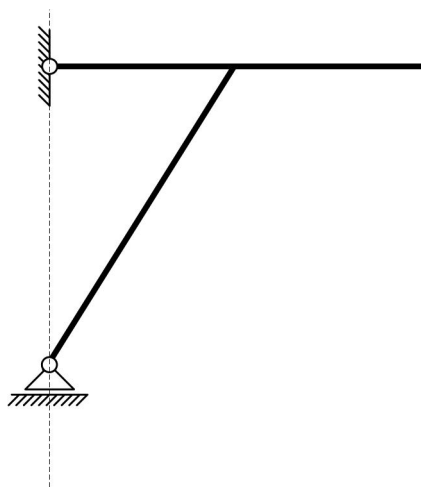
## 1.6 Prisilni pomaci ležajeva okvirnoga sistema

U primjeru obostrano upete grede vanjsko je djelovanje bio prisilni pomak ležajne točke. U tom je primjeru utjecaj prisilnoga pomaka na pomake na mjestima (raskinutih) prekobrojnih veza određen očitavanjem iz plana pomaka te su tako definirane vrijednosti slobodnih članova  $\delta_{i,0}$ . Ako je prekobrojna veličina odabrana na mjestu zadanoga prisilnog zaokreta, desna strana u jednadžbi kompatibilnosti pomaka (koja se odnosi na pomak na mjestu raskinute veze, gdje je zadan i prisilni zaokret) nije jednaka nuli već vrijednosti prisilnoga zaokreta. To su dva načina uvođenja prisilnih pomaka i zaokreta u postupak proračuna po metodi sila. U sljedećem primjeru prikazat će se i treći način.



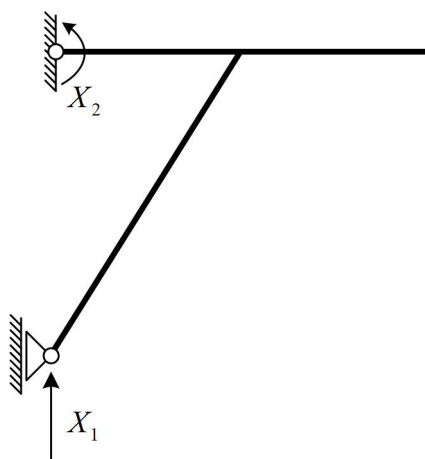
Slika 1.28: Zadani statički sistem

Statički sistem sa slike 1.28 dva je puta statički neodređen. Zadana je vrijednost koncentrirane sile  $P = 40 \text{ kN}$ , dok su iznosi prisilnih pomaka  $w = 1,5 \text{ cm}$  i  $u = 1,0 \text{ cm}$ . Umnožak je modula elastičnosti i momenta tromosti presjeka  $EI = 68\,000 \text{ kNm}^2$ . Osnovni sistem nastaje oslobađanjem dvije vanjske ili unutarnje veze. Oslobađanjem horizontalnoga pomaka na (donjem) nepomičnom ležaju zadanoga sistema nastaje mehanizam (slika 1.29). Prema tome, kod odabira prekobrojnih veza i tvorbe osnovnoga sistema ne smije se osloboditi horizontalni pomak na nepomičnom ležaju zadanoga sistema.



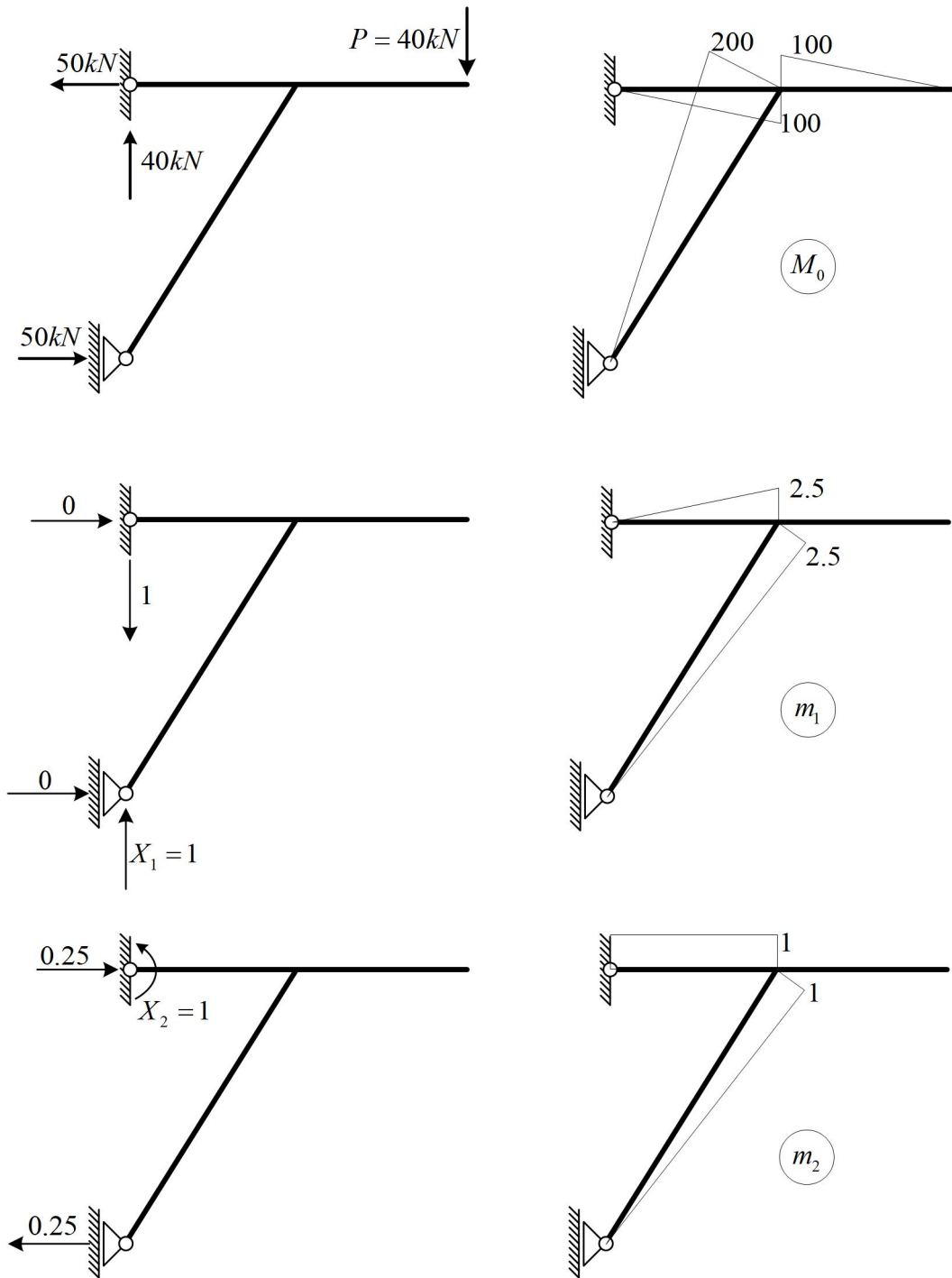
**Slika 1.29:** Zglobna shema stupnja  $S=0$ , ali radi se o mehanizmu!

Odabran je osnovni sistem sa slike 1.30 u kojem su oslobođeni vertikalni pomak nepomičnoga ležaja i zaokret upetoga ležaja zadanoga sistema.



**Slika 1.30:** Odabrani osnovni sistem

U nastavku su određeni dijagrami momenata savijanja na osnovnom sistemu od vanjske koncentrirane sile  $P$  i od prekobrojnih sila jediničnih vrijednosti.



Slika 1.31: Postupak rješavanja

Sustav jednadžbi kompatibilnosti pomaka sastoji se od dvije jednadžbe. Slobodni će se članovi sustava jednadžbi odrediti na dva načina:

1. pomoću plana pomaka,
2. pomoću rada.

Za oba se načina utjecaj koncentrirane sile  $P$  određuje na isti način, primjenom Vereščaginova teorema, a označit će se oznakom  $\delta_{i,0}(P)$ :

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 + \frac{2,5 \cdot \sqrt{22,25}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) = \frac{15,04}{EI}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \cdot 1 + \frac{2,5 \cdot \sqrt{22,25}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7,06}{EI}$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 1 \cdot 2,5 \cdot 1 + \frac{1 \cdot \sqrt{22,25}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{4,07}{EI}$$

$$\delta_{1,0}(P) = \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{100 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 - \frac{200 \cdot \sqrt{22,25}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 \right) = -\frac{994,5}{EI}$$

$$\delta_{2,0}(P) = \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{100 \cdot 2,5}{2} \cdot 1 - \frac{200 \cdot \sqrt{22,25}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{439,5}{EI}$$

### 1. Određivanje slobodnih članova jednadžbi kompatibilnosti pomoću plana pomaka

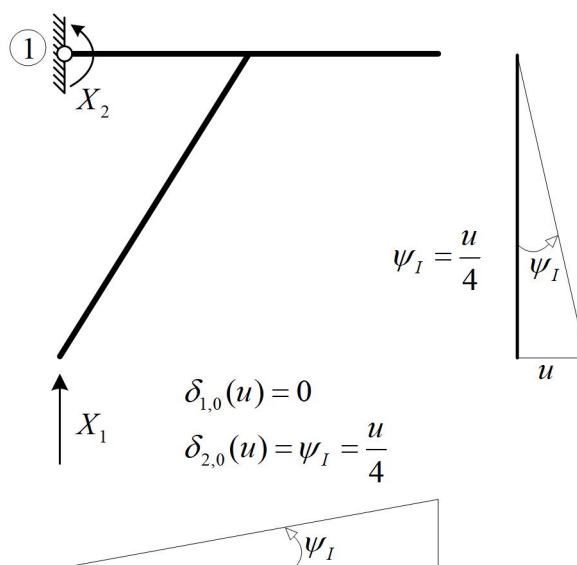
Za određivanje utjecaja prisilnih pomaka na pomake na mjestima prekobrojnih statičkih veličina ( $X_1$  i  $X_2$ ) treba konstruirati planove pomaka osnovnoga sistema za zadane prisilne pomake ( $u$  i  $w$ ). Za svaki se plan pomaka definira mehanizam koji nastaje oslobađanjem one veze koja u osnovnom sistemu sprečava pomak na mjestu  $i$  u smjeru zadanog (jednog) prisilnog pomaka.

Dakle, ako je osnovni sistem u metodi sila statički određen ( $S = 0$ ), mehanizam koji nastaje prilikom crtanja plana pomaka ima stupanj slobode gibanja  $S = +1$ .

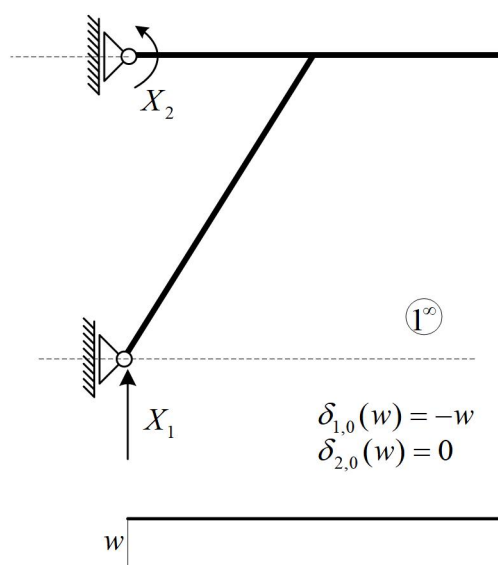
U nastavku su prikazani planovi pomaka potrebni za određivanje utjecaja prisilnih pomaka.



Plan pomaka za prisilni pomak "u" (na mehanizmu koji nastaje raskidanjem veze koja u osnovnom sistemu sprečava pomak "u"):



Plan pomaka za prisilni pomak "w" (na mehanizmu koji nastaje raskidanjem veze koja u osnovnom sistemu sprečava pomak "w"):



Slika 1.32: Planovi pomaka

Iz svakoga se plana pomaka određuje pomak na mjestu prekobrojne veličine  $X_1$ , a označava s  $\delta_{1,0}(u)$ , odnosno  $\delta_{1,0}(w)$ . Istovjetno su definirani pomaci na mjestu

prekobrojne sile (točnije momenta)  $X_2$  uzrokovani prisilnim pomacima  $u$  i  $w$  te su uvedene oznake  $\delta_{2,0}(u)$ , odnosno  $\delta_{2,0}(w)$ .

Sustav jednadžbi je sljedećega oblika (s pripadnim rješenjem):

$$\begin{aligned}\frac{15,04}{EI} \cdot X_1 + \frac{7,06}{EI} \cdot X_2 - \frac{994,5}{EI} + 0 - w &= 0 \\ \frac{7,06}{EI} \cdot X_1 + \frac{4,07}{EI} \cdot X_2 - \frac{439,5}{EI} + \frac{u}{4} + 0 &= 0\end{aligned}$$

$$X_1 = 553,81$$

$$X_2 = -894,44$$

## 2. Određivanje slobodnih članova jednadžbi kompatibilnosti pomoću rada

Na slici 1.33 prikazani su slučajevi jediničnoga opterećenja osnovnoga sistema u metodi sila te su na temelju jednadžbi ravnoteže određene vrijednosti reakcija. Na mjestu prisilnoga pomaka  $u$  za slučaj opterećenja  $X_1 = 1$ , vrijednost reakcije iznosi 0, a na mjestu prisilnog pomaka  $w$  reakcija je iznosa 1.

Rad koji reakcije na osnovnom sistemu za slučaj opterećenje  $X_1 = 1$  obavljaju na prisilnim pomacima  $u$  i  $w$  jednak je:

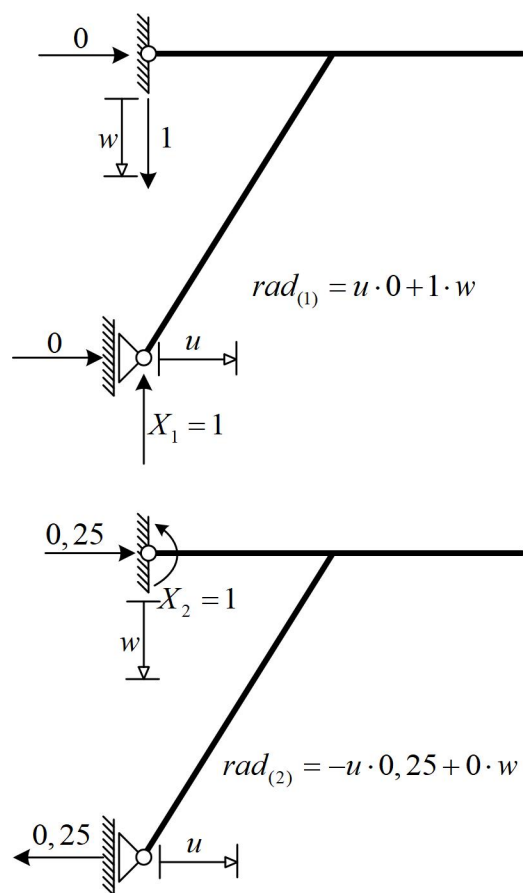
$$rad_{(1)} = u \cdot 0 + 1 \cdot w.$$

Na jednak se način može odrediti rad sila (točnije reakcija) osnovnoga sistema koje nastaju od opterećenja  $X_2 = 1$  na prisilnim pomacima  $u$  i  $w$ :

$$rad_{(2)} = -0,25 \cdot u + 0 \cdot w.$$

Ako se gornja dva izraza uvrste u prvu, odnosno drugu jednadžbu kompatibilnosti s desne strane, nastaje sustav jednadžbi jednak sustavu nastalom prilikom određivanja slobodnih članova jednadžbi kompatibilnosti pomoću plana pomaka. Dakle, oba načina (1. pomoću plana pomaka i 2. pomoću rada) vode istom sustavu jednadžbi, odnosno istom rješenju.

Stvarna djelovanja zadanoga statičkog sistema prikazana su na slici 1.34, dok su dijagrami unutarnjih sila prikazani na slici 1.35.



$$rad_{(1)} = u \cdot 0 + 1 \cdot w$$

$$rad_{(2)} = -u \cdot 0,25 + 0 \cdot w$$

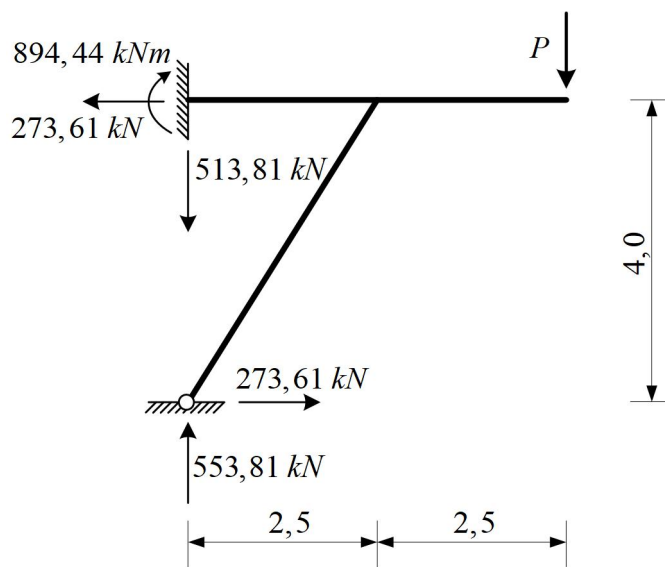
$$\frac{15,04}{EI} \cdot X_1 + \frac{7,06}{EI} \cdot X_2 - \frac{994,5}{EI} = rad_{(1)}$$

$$\frac{7,06}{EI} \cdot X_1 + \frac{4,07}{EI} \cdot X_2 - \frac{439,5}{EI} = rad_{(2)}$$

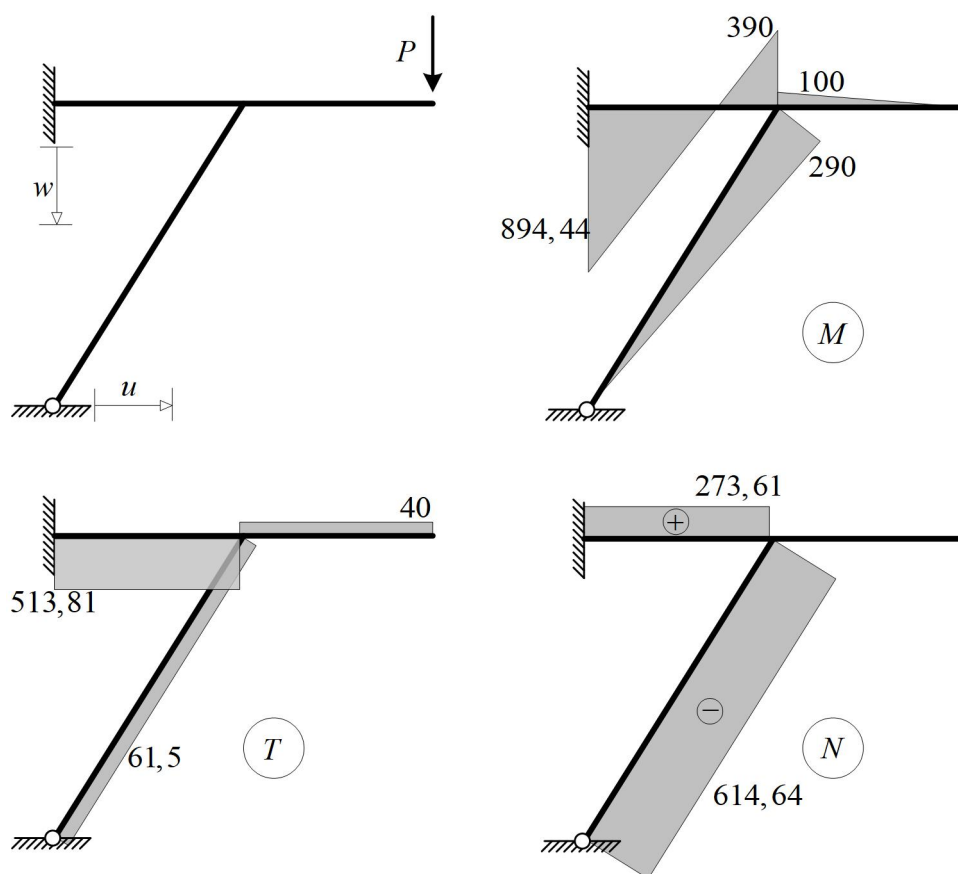
$$X_1 = 553,81$$

$$X_2 = -894,44$$

**Slika 1.33:** Jedinično opterećenje osnovnoga sistema i sustav jednadžbi kompatibilnosti pomaka



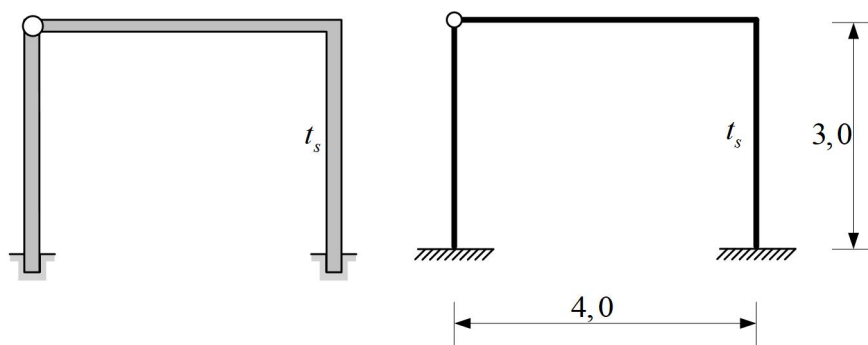
Slika 1.34: Skica stvarnih djelovanja



Slika 1.35: Dijagrami unutarnjih sila na zadanom sistemu

## 1.7 Utjecaj jednolike temperature na okvirni sistem

Zadan je dva puta statički neodređeni sistem na koji na desnom stupu djeluje jednolika temperatura  $t_s = 50^\circ \text{C}$  (slika 1.36). Zadana je vrijednost umnoška  $EI = 68\,000 \text{ kNm}^2$ . Koeficijent linearnoga toplinskog širenja betona iznosi  $\alpha_t = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

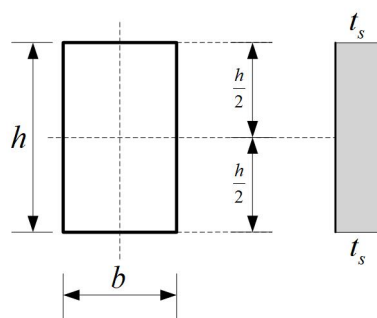


Slika 1.36: Zadani statički sistem

Ako na element statičkoga sistema djeluje promjenjiva temperatura, ona uzrokuje dodatnu zakrivljenost elementa ( $\kappa_t$ ), odnosno savijanje elementa zbog zagrijavanja gornje strane poprečnoga presjeka, a hlađenja donje (ili obratno).

Međutim, jednolika temperatura (oznake  $t_s$ ) uzrokuje ravnomjerno zagrijavanje (ili hlađenje) poprečnoga presjeka, kao što je prikazano na slici 1.37. Stoga će element na koji djeluje jednolika temperatura promijeniti duljinu za iznos

$$\Delta l = \alpha_t \cdot t_s \cdot l$$



Slika 1.37: Dijagram jednolike temperature u poprečnom presjeku

treba napomenuti da i promjenjiva temperatura može uzrokovati promjenu duljine

ako srednja temperatura nije nula, odnosno na rubovima presjeka temperature nisu istog iznosa i suprotnog predznaka ( $-t$  i  $+t$ ).

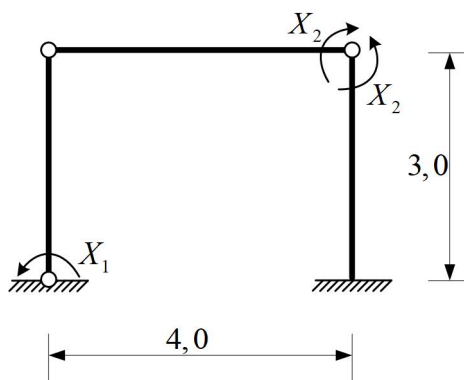
U izrazu za  $\Delta\ell$ ,  $\alpha_t$  je koeficijent toplinskog širenja materijala, dok je  $\ell$  (početna) duljina elementa pod utjecajem jednolike temperature  $t_s$ . Poznavajući duljinu  $\ell$  i njezinu promjenu  $\Delta\ell$  može se odrediti iznos deformacije od temperature  $t_s$  prema izrazu

$$\epsilon_t = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Osnovni sistem (slika 1.38) nastaje raskidanjem dvije veze: oslobađanjem zaokreta na upetom ležaju ( $X_1$  je moment na tom ležaju) i relativnoga zaokreta stupa i grede ( $X_2$  je par momenata na spoju stupa i grede). Produljenje  $\Delta\ell$  koje uzrokuje temperatura  $t_s$  jednako je  $\Delta\ell = 10^{-5} \cdot 50 \cdot 3 = 1,5 \cdot 10^{-3}$  m. Vrijednost deformacije  $\epsilon_t$  iznosi  $\epsilon_t = \frac{\Delta\ell}{\ell} = 0,0005$ .

Osim temperature  $t_s$  ne postoji druga vrsta djelovanja na zadanom sistemu te su funkcije unutarnjih sila na osnovnom sistemu nulfunkcije. (**Ponovimo:** temperaturna djelovanja kao ni prisilni pomaci ne utječu na funkcije unutarnjih sila statički određenih sistema.)

Dijagrami momenata savijanja na osnovnom sistemu koje uzrokuju prekobrojne statičke veličine  $X_1$  i  $X_2$  jediničnih vrijednosti prikazani su na slici 1.39.



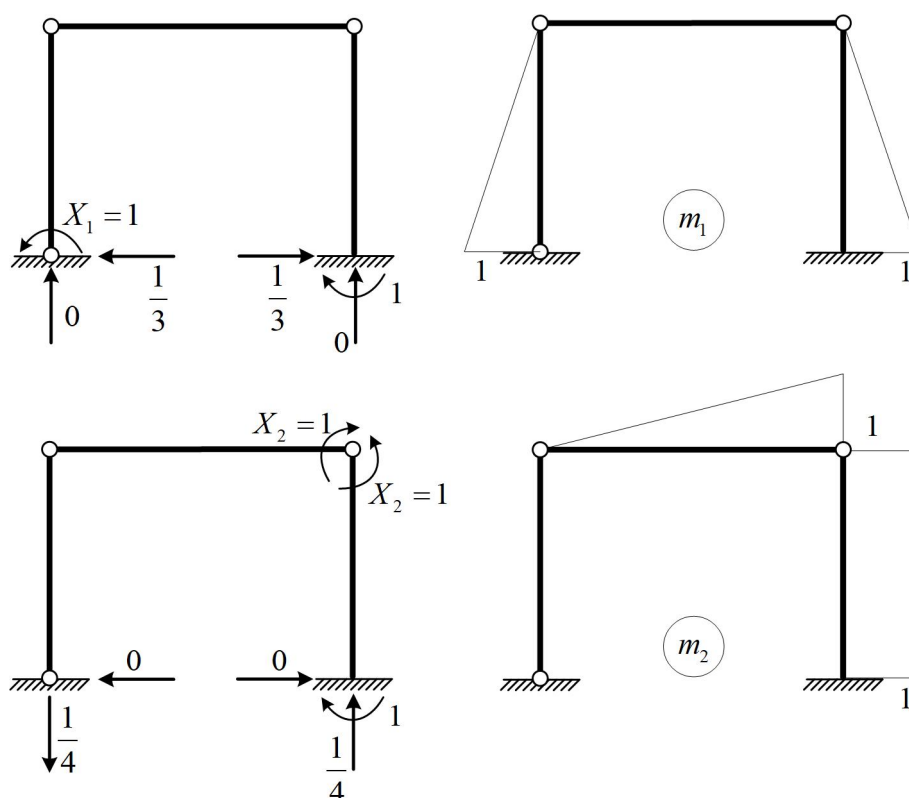
Slika 1.38: Odabrani osnovni sistem

Na temelju dijagrama sa slike 1.39 određeni su iznosi koeficijenata fleksibilnosti  $\delta_{i,j}$ :

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 2 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{2}{EI}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{3}{2EI}$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 \right) = \frac{13}{3EI}$$



Slika 1.39: Postupak rješavanja

Produljenje čiji je uzrok temperatura  $t_s$  zapravo je vrsta prisilnoga pomaka, te se može primijeniti jedan od postupaka iz prethodnoga primjera. Osim već opisana dva postupka (1. pomoću plana pomaka, 2. pomoću rada), objasniti će se i postupak pomoću dijagrama deformacije  $\epsilon_t$ .

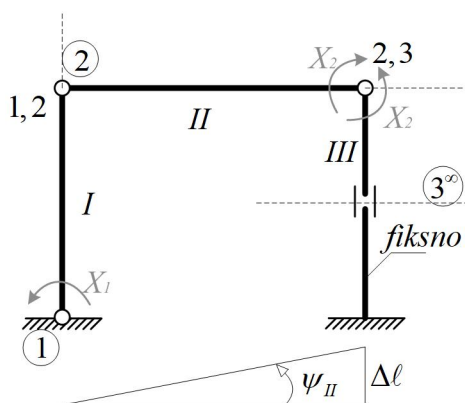
Ako se jednadžbe kompatibilnosti pomaka zadanoga i osnovnoga sistem zapisuju pomoću slobodnih članova  $\delta_{i,0}(\Delta\ell)$  vrijednost kojih se određuje na temelju plana pomaka za pomak  $\Delta\ell$ , tada treba odrediti taj plan pomaka na mehanizmu s mogućim pomakom u smjeru osi onoga elementa koji mijenja duljinu zbog temperature  $t_s$

(slika 1.40).

Zaokret je elementa na kojem se nalazi prekobrojna statička veličina  $X_1$  nula (zato što su dvije točke toga elementa nepomične: apsolutni pol diska  $I$  i apsolutni pol susjednog diska  $II$ ), dok zaokret elementa na kojem djeluje jedan od para momenata  $X_2$  iznosi  $\frac{\Delta\ell}{4}$ .

Drugi se moment iz para momenata  $X_2$  također nalazi na elementu zaokreta nula. Prema tome, slobodni su članovi

$$\begin{aligned}\delta_{1,0}(\Delta\ell) &= 0 \\ \delta_{2,0}(\Delta\ell) &= -\psi_{II} = -\frac{\Delta\ell}{4}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\psi_I = \psi_{III} &= 0 \\ \psi_{II} &= \frac{\Delta\ell}{4}\end{aligned}$$

Slika 1.40: Plan pomaka za pomak  $\Delta\ell$

Pripadni sustav jednadžbi kompatibilnosti pomaka zadanoga i osnovnoga sistema ima sljedeći oblik i rješenje:



$$\begin{aligned}\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{10}(\Delta\ell) &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{20}(\Delta\ell) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{EI} \cdot X_1 + \frac{3}{2EI} \cdot X_2 + 0 &= 0 \\ \frac{3}{2EI} \cdot X_1 + \frac{13}{3EI} \cdot X_2 - \frac{\Delta\ell}{4} &= 0\end{aligned}$$

$$X_1 = -\frac{9}{154} \cdot EI \cdot \Delta\ell = -5,961$$

$$X_2 = \frac{6}{77} \cdot EI \cdot \Delta\ell = 7,978$$

Jednadžbe kompatibilnosti pomaka mogu se zapisati pomoću rada prekobrojnih sila jediničnih vrijednosti na pomaku koji uzrokuje temperatura  $t_s$ . Na slici 1.39 određene su reakcije osnovnoga sistema za slučajeve opterećenja  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$ , te se mogu odrediti desne strane jednadžbi kompatibilnosti kao

$$rad_{(1)} = 0 \cdot \Delta\ell,$$

$$rad_{(2)} = \frac{1}{4} \cdot \Delta\ell.$$

U izrazu za  $rad_{(1)}$  sila koja obavlja rad na pomaku  $\Delta\ell$  vertikalna je reakcija elementa koji je opterećen temperaturnim djelovanjem  $t_s$ , a ta je sila nula. Analogno, u izrazu za  $rad_{(2)}$  sila koja obavlja rad na pomaku  $\Delta\ell$  vertikalna je reakcija iznosa  $\frac{1}{4}$ , a rad je pozitivan (jer su i reakcija i pomak istog smjera). Jednadžbe kompatibilnosti pomaka su oblika (jednake jednadžbama sastavljenima određivanjem slobodnih članova na temelju plana pomaka)

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = rad_{(1)}$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = rad_{(2)}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{EI} \cdot X_1 + \frac{3}{2EI} \cdot X_2 &= 0 \\ \frac{3}{2EI} \cdot X_1 + \frac{13}{3EI} \cdot X_2 &= \frac{\Delta\ell}{4}\end{aligned}$$

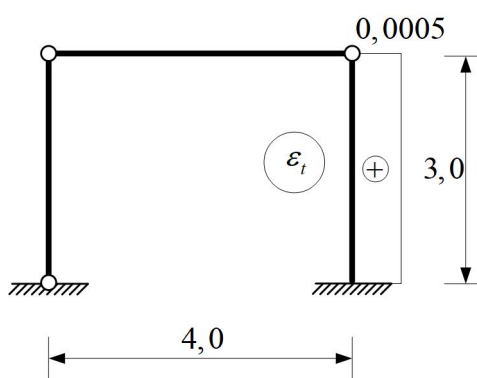
Slobodni se članovi u jednadžbama kompatibilnosti mogu odrediti i na temelju već poznatoga izraza za pomake točaka konstrukcije

$$\delta_{i,0} = \int \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} ds + \int \frac{N_0 \cdot n_i}{EA} ds + k \cdot \int \frac{T_0 \cdot t_i}{GA} ds + \int (\kappa_t \cdot m_i) ds + \int (\varepsilon_t \cdot n_i) ds$$

Dva se zadnja člana u tom izrazu odnose na utjecaj promjenjive ( $\Delta t$ ) i jednolike ( $t_s$ ) temperature na pomake točaka konstrukcije. Za rješenje naznačenih integrala treba odrediti funkciju zakrivljenosti od promjenjive temperature, odnosno funkciju deformacije od jednolike temperature. Na slici 1.41 konstruiran je graf funkcije  $\varepsilon_t$ . Slobodni su članovi jednadžbi kompatibilnosti su

$$\delta_{1,0} = \int (\varepsilon_t \cdot n_1) ds = 0,0005 \cdot 3 \cdot 0 = 0$$

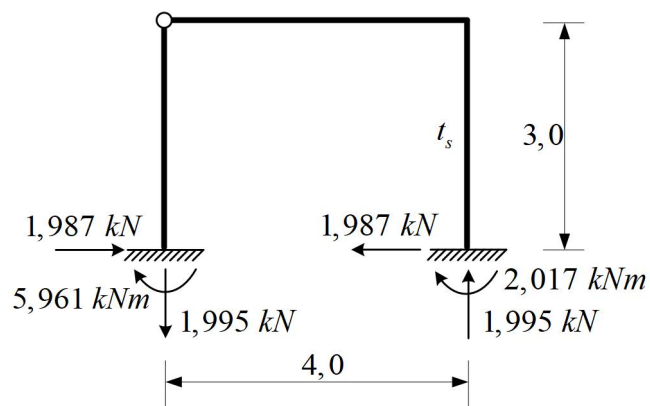
$$\delta_{2,0} = \int (\varepsilon_t \cdot n_2) ds = 0,0005 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\Delta \ell}{4}$$



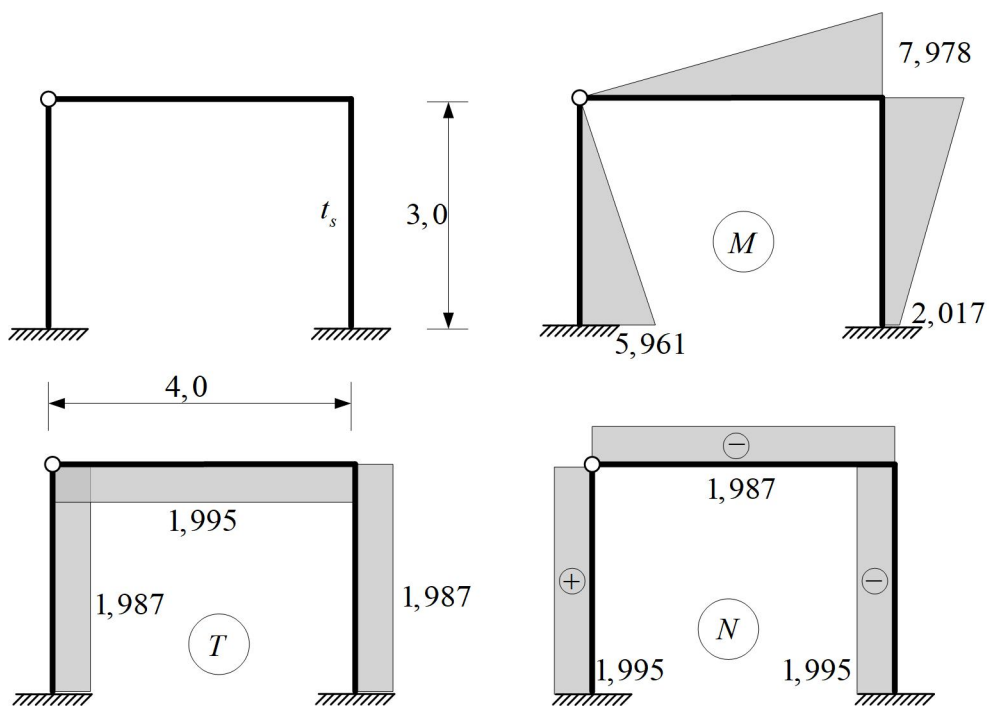
**Slika 1.41:** Dijagram deformacije od jednolike temperature

Ti koeficijenti tvore isti sustav jednadžbi kao i oni dobiveni određivanjem slobodnih članova na temelju plana pomaka ili pomoću rada.

Skica stvarnih djelovanja prikazana je na slici 1.42, a dijagrami unutarnjih sila na slici 1.43.



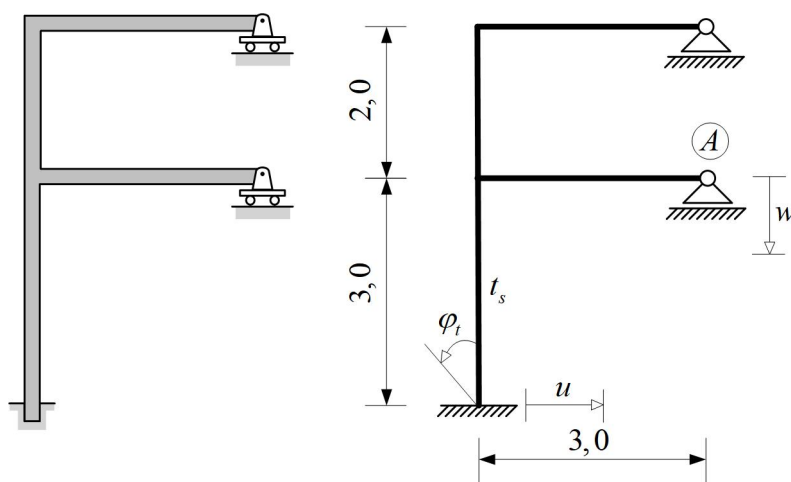
Slika 1.42: Skica stvarnih djelovanja



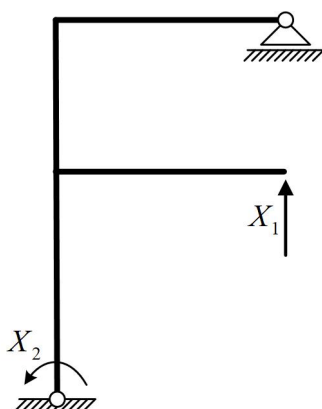
Slika 1.43: Dijagrami unutarnjih sila na zadanom sistemu

## 1.8 Određivanje pomaka metodom jedinične sile

Metodom jedinične sile odredit će se horizontalni pomak točke  $A$ . Za provedbu metode potreban je dijagram momenata savijanja koji uzrokuje vanjsko djelovanje na zadanom statičkom sistemu (slika 1.44). Vanjska su djelovanja jednolika temperatura na donjem stupu sistema ( $t_s = 14^\circ\text{C}$ ) i prisilni pomaci ležajeva ( $w = 2,0\text{ cm}$ ,  $u = 1,5\text{ cm}$ ,  $\varphi_t = 0,0005\text{ rad}$ ). Zadana vrijednost umnoška  $EI$  iznosi  $90\,000\text{ kNm}^2$ . Zadani je sistem dva puta statički neodređen te će osnovni sistem nastati oslobađanjem dvije prekobrojne veze.



Slika 1.44: Zadani statički sistem



Slika 1.45: Odabrani osnovni sistem

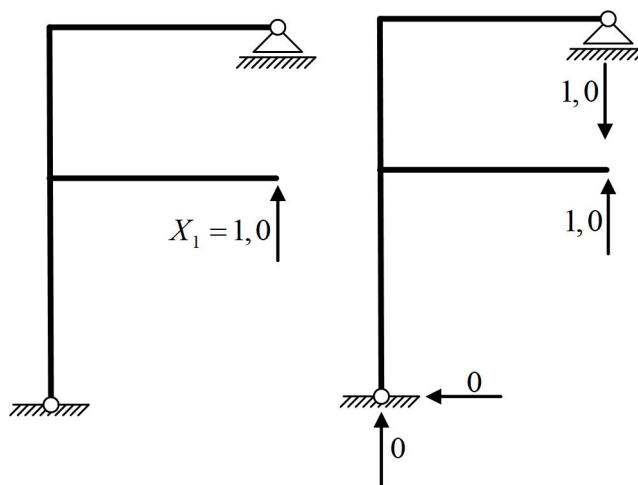
Prekobrojne veze oslobođene su s obzirom na zadane prisilne pomake (zbog jednostavnosti postupka rješavanja). **Napomena:** horizontalna reakcija na upetom

ležaju ne smije biti prekobrojna statička veličina u metodi sila, jer njezinim oslobađanjem sistem postaje mehanizmom (oslobođene su mu sve veze u horizontalnom smjeru). Stoga su oslobođeni vertikalna reakcija u ležaju sa zadanim vertikalnim prisilnim pomakom i moment na upetom ležaju (na kojem je zadana prisilna rotacija), što rezultira osnovnim sistemom sa slike 1.45.

Uzimajući u obzir djelovanje jednolike temperature i prisilnoga pomaka  $u$  na mjestu kojega nije oslobođena prekobrojna statička veličina jednadžbe kompatibilnosti pomaka glase

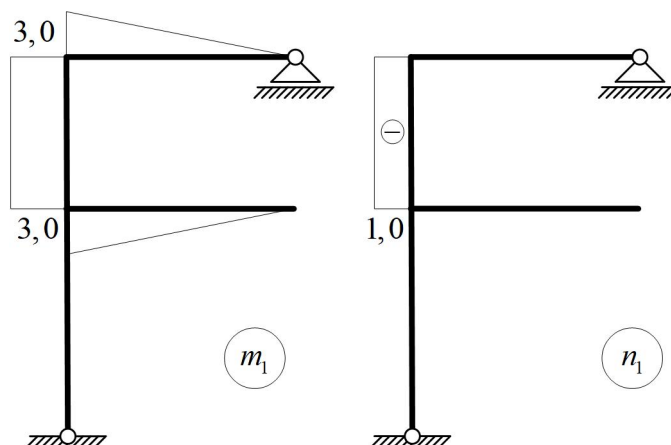
$$\begin{aligned}\delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1,0}(u) + \delta_{1,0}(t_s) &= -w \\ \delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2,0}(u) + \delta_{2,0}(t_s) &= \varphi_t\end{aligned}$$

Slobodni članovi  $\delta_{1,0}(t_s)$  i  $\delta_{2,0}(t_s)$ , odnosno pomaci uzrokovani jednolikom temperaturom, mogu se odrediti na dva načina: pomoću dijagrama deformacije zbog jednolike temperature (produljenje ili skraćenje elementa) ili shvaćanjem deformacije nastale od jednolike temperature kao prisilnoga pomaka te određivanjem njezina utjecaja iz plana pomaka.



**Slika 1.46:** Postupak rješavanja za  $X_1 = 1,0$

Dijagrami momenata savijanja i uzdužnih sila od opterećenja  $X_1 = 1$  prikazani su na slici 1.47, dok su na slici 1.49 prikazani dijagrami momenata savijanja i uzdužnih sila od opterećenja  $X_2 = 1$ , te su pomoću njih određeni pomaci od jediničnih opterećenja odnosno pripadni koeficijente fleksibilnosti  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$  i  $\delta_{2,1}$ :

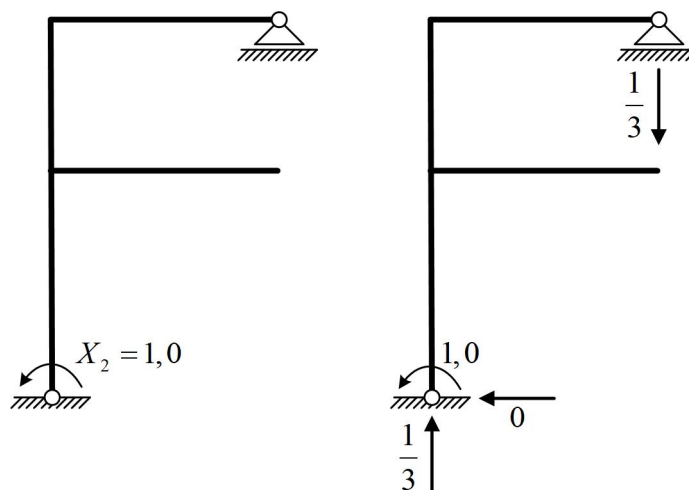


Slika 1.47: Postupak rješavanja za  $X_1 = 1,0$ , nastavak

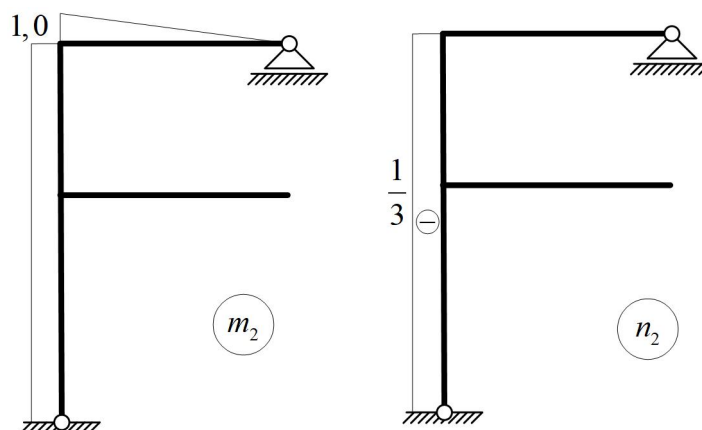
$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{36}{EI}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 3 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{9}{EI}$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 1 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{6}{EI}$$

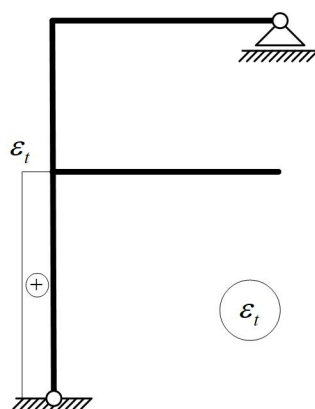


Slika 1.48: Postupak rješavanja za  $X_2 = 1,0$



Slika 1.49: Postupak rješavanja za  $X_2 = 1, 0$ , nastavak

Za određivanje pomaka od jednolike temperature treba prvo odrediti iznos toplinske uzdužne deformacije  $\varepsilon_t$  kao umnožak zadane temperature i toplinskog koeficijenta. Pomak se definira kao integral umnoška funkcije toplinske deformacije i funkcije uzdužne sile, odnosno primjenjuje se Vereščaginov teorem. Dijagram  $\varepsilon_t$  dan je na slici 1.50.

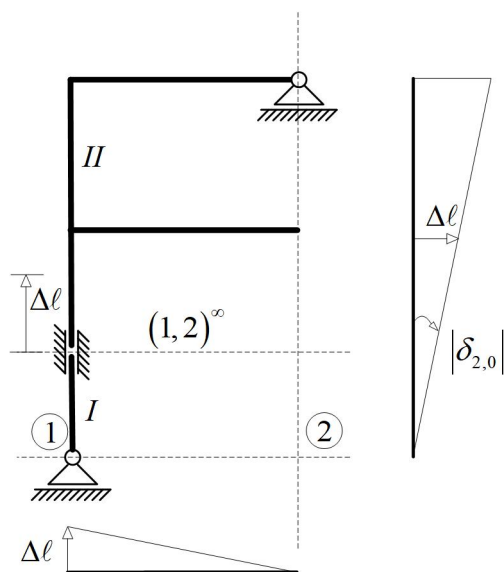


Slika 1.50: Dijagram deformacije od jednolike temperature

$$\varepsilon_t = t_s \cdot \alpha_t = 1,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{1,0} = 0$$

$$\delta_{2,0} = 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1,4 \cdot 10^{-4}$$

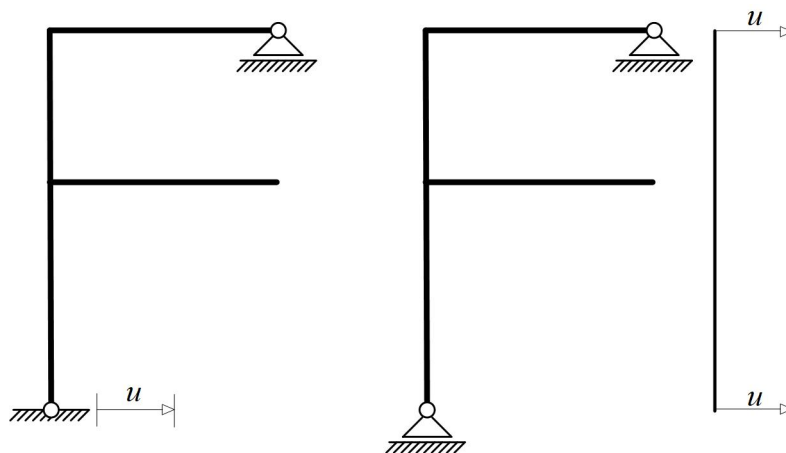


Slika 1.51: Plan pomaka za pomak uzrokovan temperaturom  $t_s$

$$\delta_{1,0}(\Delta\ell) = 0$$

$$\delta_{2,0}(\Delta\ell) = \frac{\Delta\ell}{3} = \frac{\varepsilon_t \cdot 3}{3} = \varepsilon_t = 1,4 \cdot 10^{-4}$$

Iste se vrijednosti pomaka ( $\delta_{1,0}, \delta_{2,0}$ ) od utjecaja jednolike temperature mogu dobiti ako se produljenje (ili skraćenje) koje uzrokuje jednolika temperatura prikaže kao prisilan pomak za koji se konstruira plan pomaka (slika 1.51).



Slika 1.52: Plan pomaka za prisilni pomak  $u$

Za utjecaj prisilnoga pomaka  $u$  na jednadžbe kompatibilnosti određuje se plan



pomaka na mehanizmu koji nastaje oslobađanjem na osnovnom sistemu veze na mjestu  $i$  na pravcu prisilnoga pomaka  $u$ . Budući da se dobiveni mehanizam pod utjecajem horizontalnog pomaka samo translacija u horizontalnom smjeru, nema rotacije niti vertikalnoga pomaka na mjestima oslobođenih prekobrojnih veza, te su pripadni slobodni članovi  $\delta_{i,0}(u)$  jednaki nuli.

Do istoga se zaključka dolazi određivanjem rada reakcija nastalih od jediničnih opterećenja na prisilnom pomaku  $u$  budući da ni u prvom ni u drugom slučaju jediničnoga opterećenja ne postoje horizontalne reakcije na mjestu  $i$  smjeru prisilnog pomaka  $u$ .

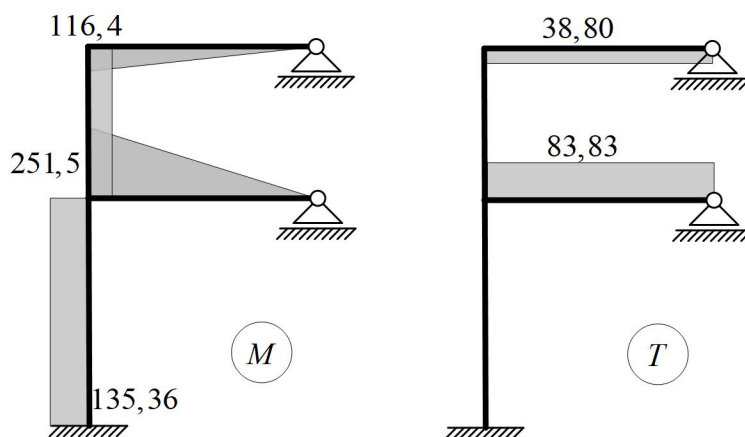
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti slobodnih članova u jednadžbe kompatibilnosti dobiva se sustav dviju jednadžbi rješenja kojih su tražene prekobrojne veličine  $X_1$  i  $X_2$  pomoću kojih se određuje konačni dijagram momenata savijanja (slika 1.53):

$$\frac{36}{EI} \cdot X_1 + \frac{9}{EI} \cdot X_2 = -0,02$$

$$\frac{9}{EI} \cdot X_1 + \frac{6}{EI} \cdot X_2 - 1,4 \cdot 10^{-4} = 0,0005$$

$$X_1 = -83,84 \text{ kN}$$

$$X_2 = 135,36 \text{ kNm}$$



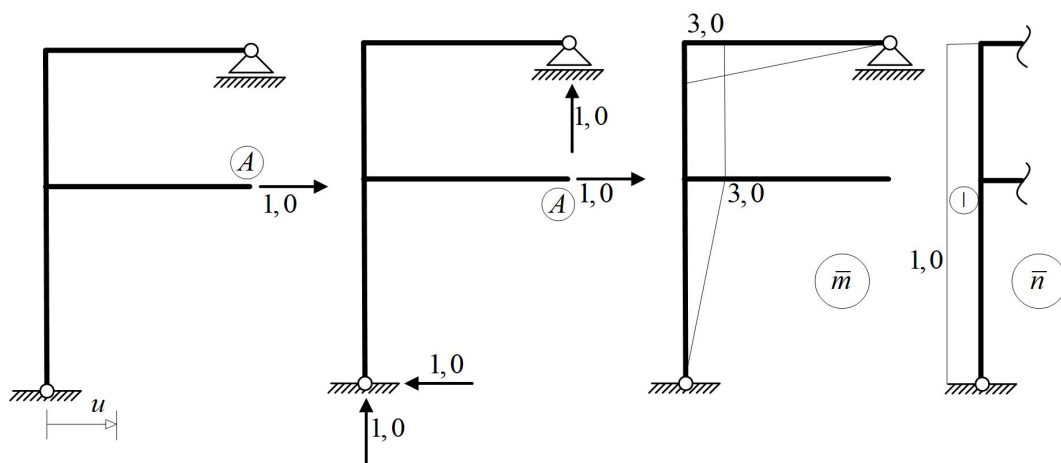
**Slika 1.53:** Konačni momentni dijagram i dijagram poprečnih sila

Uz poznati je konačni dijagram momenata savijanja moguće odrediti pomak bilo koje točke zadanoga sistema. Na istom osnovnom sistemu koji je upotrijebljen

tijekom rješavanja zadatka (što nije pravilo) zadaje se jedinična sila na mjestu i na pravcu traženog pomaka točke, kako je prikazano na slici 1.54.

Od zadane se jedinične sile određuje dijagram momenata savijanja radi primjene Vereščaginovoga teorema za određivanje vrijednosti integrala umnoška funkcije momenta savijanja od jedinične sile (na mjestu i pravcu traženoga pomaka) i funkcije konačnoga momenta savijanja zadanoga statičkog sistema.

U planu pomaka od prisilnog pomaka  $u$  prije su promatrani pomaci koji su odgovarali oslobođenim prekobrojnim vezama (zaokret i vertikalni pomak), a sada u planu pomaka treba provjeriti postoji li horizontalni pomak promatrane točke  $A$ . Zadani se sistem pod utjecajem prisilnog pomaka  $u$  translacija, pa je  $u_A^u = u$ , te tu vrijednost treba pridodati ukupnom pomaku točke  $A$ . Isto vrijedi i za pomak od jednolike temperature. Dijagram deformacije od temperature prikazan ranije i dalje vrijedi, a treba dodatno odrediti uzdužnu silu od jediničnog opterećenja na mjestu i pravcu traženoga pomaka za dio nosača opterećen jednolikom temperaturom. Ponovno se pomoću Vereščaginovoga teorema određuje integral umnoška funkcije toplinske deformacije i funkcije dobivene uzdužne sile. Zbrajanjem svih određenih pomaka na mjestu točke  $A$  dobiva se ukupan iznos horizontalnoga pomaka koji se može zaokružiti na 2 cm:

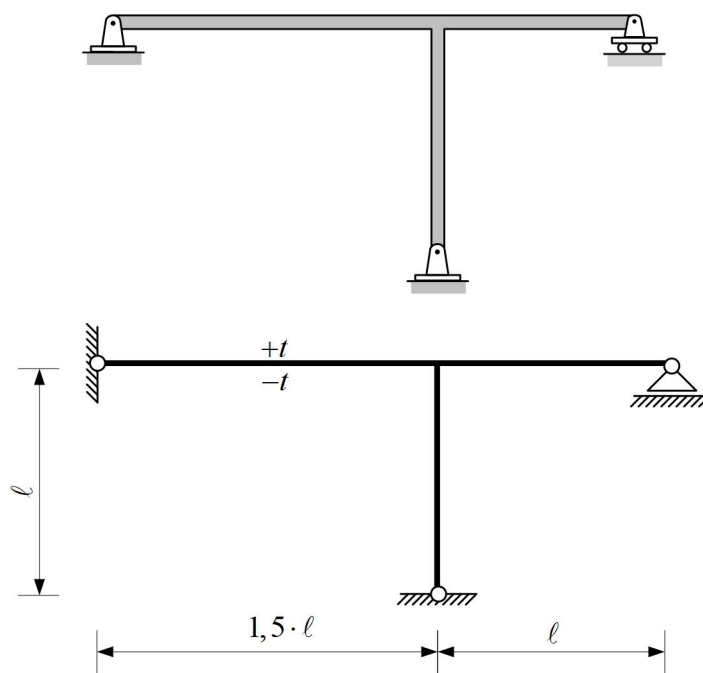


Slika 1.54: Određivanje pomaka točke  $A$  metodom jedinične sile

$$\begin{aligned}u_A &= \int \frac{M(x) \cdot \bar{m}(x)}{EI} ds + u_A^u + u_A^{ts} = \\&= \frac{1}{EI} \cdot \left( 135,36 \cdot 3 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot 3 + 116,4 \cdot 2 \cdot 3 + \frac{116,4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \\&1,4 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 1 + 0,015 = 0,02029 \text{ m}\end{aligned}$$

## 1.9 Utjecaj nejednolike temperature i deformacijska kontrola

Postupkom naziva *deformacijska kontrola* mogu se kontrolirati dijagrami unutarnjih sila. Pritom se provjerava deformacija ležajnih točaka, budući da je u tim točkama poznat barem jedan iznos pomaka ili rotacije (ovisno o tipu rubnoga uvjeta). Za zadani sistem i vanjsko opterećenje sa slike 1.55 određen je dijagram momenata savijanja te je nakon toga provedena deformacijska kontrola ( $EI = const.$ ,  $\alpha_t = const.$ ).

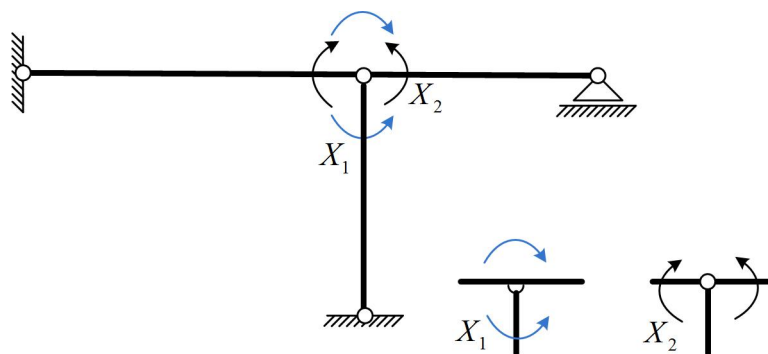


Slika 1.55: Zadani statički sistem

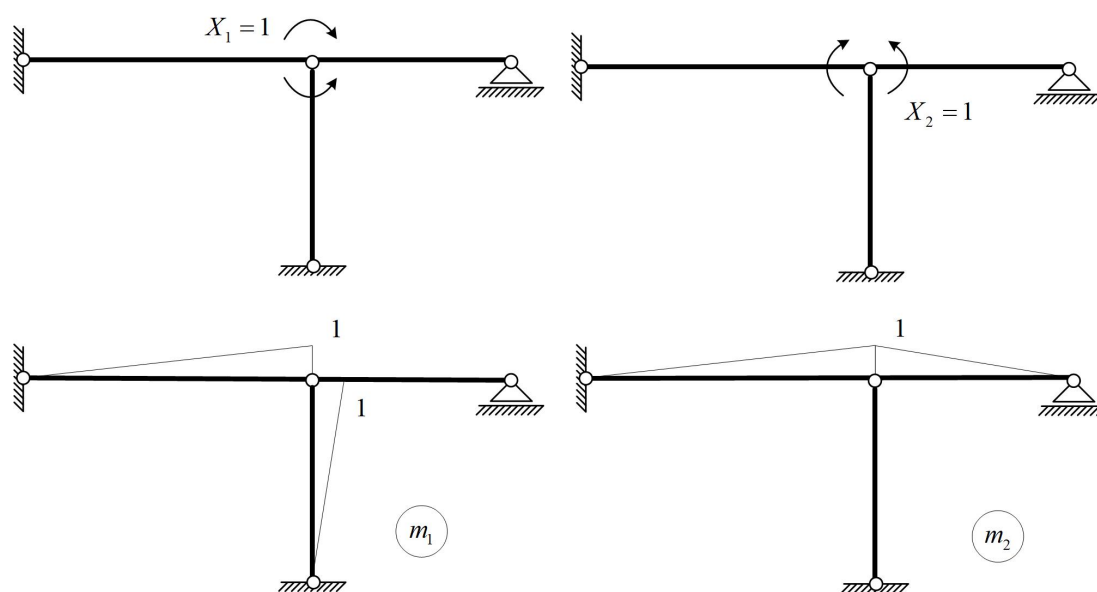
Sistem je dva puta statički neodređen. Iz pedagoških razloga osnovni će se sistem definirati oslobađanjem unutarnjih veza: dopušta se rotacija u točki spoja horizontalnoga i vertikalnoga elementa statičkoga sistema. Međutim, definiranjem zglobne veze navedenih elemenata oslobođena su dva relativna zaokreta, jer je zglobom dopuštena rotacija donjega (vertikalnog) elementa u odnosu na gornji (horizontalni), a nakon toga i rotacija gornjega (horizontalnog) desnog dijela nosača u odnosu na gornji (horizontalni) lijevi dio (slika 1.56).

Prema tome, jednu prekobrojnu statičku veličinu čini par momenata s mjestom djelovanja na vrhu vertikalnoga elementa i u točki spoja horizontalnoga s vertikalnim elementom ( $X_1$ ), dok je druga prekobrojna statička veličina par momenata na

horizontalnom elementu neposredno lijevo odnosno desno od spoja s vertikalnim elementom ( $X_2$ ).



Slika 1.56: Odabrani osnovni sistem



Slika 1.57: Postupak rješavanja

Opći je oblik jednačbi kompatibilnosti pomaka, odnosno u ovom slučaju zaokreta (pritom su slobodni članovi  $\delta_{i,0}(t)$  jednaki pomacima na mjestima prekobrojnih veličina zbog djelovanja nejednolike temperature):

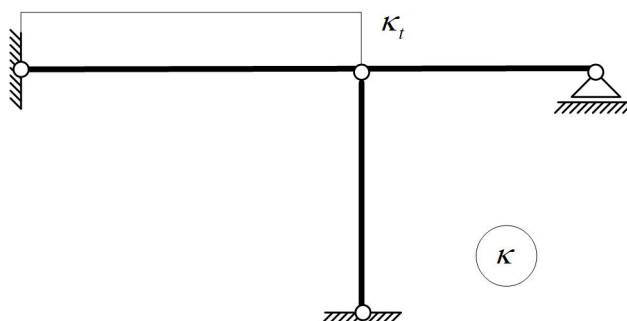
$$\begin{aligned} \delta_{1,1} \cdot X_1 + \delta_{1,2} \cdot X_2 + \delta_{1,0}(t) &= 0 \\ \delta_{2,1} \cdot X_1 + \delta_{2,2} \cdot X_2 + \delta_{2,0}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Na slici 1.57 prikazani su dijagrami momenata savijanja od utjecaja jediničnih sila  $X_1 = 1,0$  i  $X_2 = 1,0$ , te su izračunani pripadni koeficijenti fleksibilnosti:

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot 1,5\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1 \cdot \ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{5\ell}{6EI}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot 1,5\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\ell}{2EI}$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1 \cdot 1,5\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1 \cdot \ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{5\ell}{6EI}$$



**Slika 1.58:** Dijagram zakrivljenosti od promjenjive temperature

Za određivanje iznosa slobodnih članova (prema ranije prikazanom izrazu) potreban je dijagram deformacije ( $\kappa_t$ ) nastale od promjenjive temperature  $\Delta t$ . Pomaci čiji je uzrok promjenjiva temperatura određuju se kao integral umnoška funkcije toplinske deformacije i funkcije momenta od jedinične sile, odnosno pomoću Vereshčaginovoga teorema kombinacijom dijagrama promjenjive temperature i momenta savijanja od utjecaja  $X_1 = 1$ :

$$\kappa_t = \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} = \alpha_t \cdot \frac{2t}{h}$$

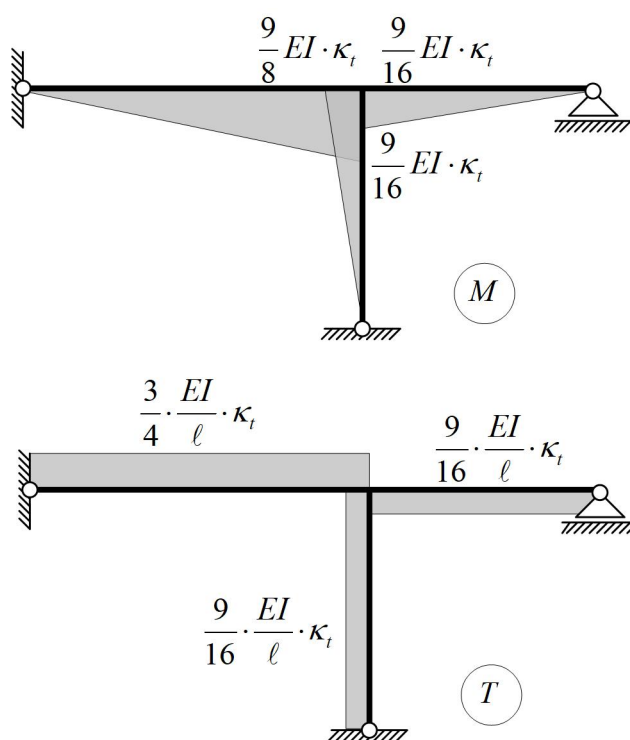
$$\delta_{1,0}(t) = \int (\kappa_t \cdot m_1) ds = \frac{1}{EI} \cdot (1,5\ell \cdot \kappa_t \cdot 0,5) = \frac{3}{4} \cdot \ell \cdot \kappa_t$$

$$\delta_{2,0}(t) = \int (\kappa_t \cdot m_2) ds = \frac{1}{EI} \cdot (1,5\ell \cdot \kappa_t \cdot 0,5) = \frac{3}{4} \cdot \ell \cdot \kappa_t$$

Uvrštavanjem svih koeficijenata fleksibilnosti i slobodnih članova u jednadžbe kompatibilnosti pomaka određuju se iznosi nepoznanica  $X_1$  i  $X_2$ , a ujedno i vrijednosti konačnoga dijagrama momenata savijanja:

$$\begin{aligned} \frac{5\ell}{6EI} \cdot X_1 + \frac{\ell}{2EI} \cdot X_2 + \frac{3}{4} \cdot \ell \cdot \alpha_t \cdot \frac{2t}{h} &= 0 \\ \frac{\ell}{2EI} \cdot X_1 + \frac{5\ell}{6EI} \cdot X_2 + \frac{3}{4} \cdot \ell \cdot \alpha_t \cdot \frac{2t}{h} &= 0 \\ X_1 = X_2 &= -\frac{9}{16} \cdot EI \cdot \kappa_t \end{aligned}$$

Metodom jedinične sile provjerit će se je li vertikalni pomak zadanoga sistema na mjestu točke  $A$  (slika 1.60) jednak nuli. Pritom se primjenjuje *redukcijski stavak* prema kojem se može odabrati bilo koji osnovni sistem na koji se (prema metodi jedinične sile) zadaje jedinična sila na mjestu  $i$  u smjeru traženoga pomaka (koji je u deformacijskoj kontroli jednak nuli).



**Slika 1.59:** Dijagram momenata savijanja i poprečnih sila na zadanom sistemu

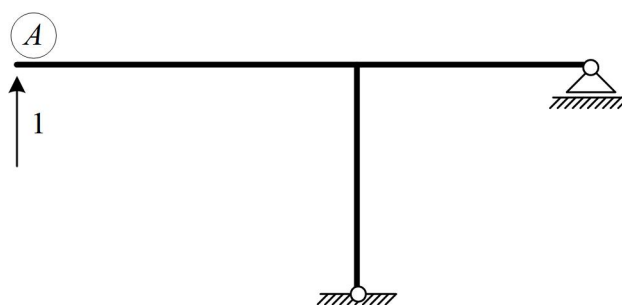
Za provedbu deformacijske kontrole odabrat će se novi, drugačiji osnovni sistem. Na slici 1.60 prikazan je osnovni sistem s dvije prekobrojne veze na mjestu  $i$  u smjeru reakcija nepomičnoga ležaja horizontalnoga elementa zadanoga sistema. Prema metodi jedinične sile određuje se dijagram momenata savijanja uzrokovan jediničnim

opterećenjem na mjestu i na pravcu traženoga pomaka (dakle, u točki  $A$  zadaje se vertikalna jedinična sila).

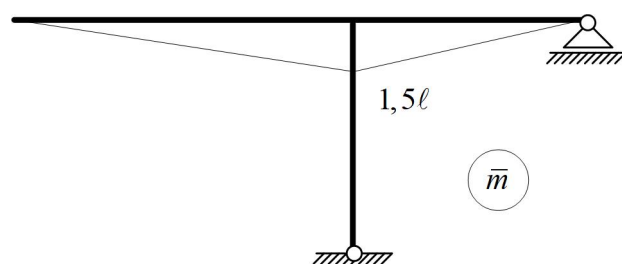
Ako se deformacijskom kontrolom potvrdi da je traženi pomak jednak nuli, velika je vjerojatnost da je konačni dijagram momenata savijanja za zadano opterećenje točno određen. Vrijednost traženoga pomaka jednaka je iznosu integrala umnoška funkcije momenta savijanja ( $\bar{m}$ ) nastaloga od jedinične sile i funkcije konačnoga dijagrama momenata savijanja ( $M$ ):

$$\delta_v(M, \bar{m}) = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} \cdot EI \cdot \kappa_i \cdot 1,5\ell \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5\ell + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} \cdot EI \cdot \kappa_i \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5\ell \right)$$

$$\delta_v(M, \bar{m}) = \frac{9 \cdot \kappa_i \cdot \ell^2}{8}$$



**Slika 1.60:** Novi osnovni sistem s jediničnim vertikalnim opterećenjem na mjestu točke  $A$



**Slika 1.61:** Dijagram momenata od jediničnoga opterećenja na mjestu točke  $A$

Iz dobivenoga je izraza vidljivo da se proračunom vertikalnoga pomaka točke  $A$  ne dobiva iznos nula. Razlog je tome to što u izraz nije uvršten pomak koji točka ostvaruje zbog djelovanja temperature. Za određivanje pomaka koji uzrokuje



promjenjiva temperatura treba integrirati umnožak funkcije momenta savijanja sa slike 1.61 i funkcije zakrivljenosti zbog temperature sa slike 1.58:

$$\delta_v(t, \bar{m}) = \kappa_t \cdot 1,5\ell \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1,5\ell = -\frac{9 \cdot \kappa_t \cdot \ell^2}{8}$$

Zbrajanjem pomaka uzrokovanih savijanjem i promjenjivom temperaturom ukupan vertikalni pomak točke  $A$  iznosi nula:

$$\delta_v = \delta_v(M, \bar{m}) + \delta_v(t, \bar{m}) = 0$$

Time je potvrđena točnost konačnoga dijagrama momenata savijanja sa slike 1.59.

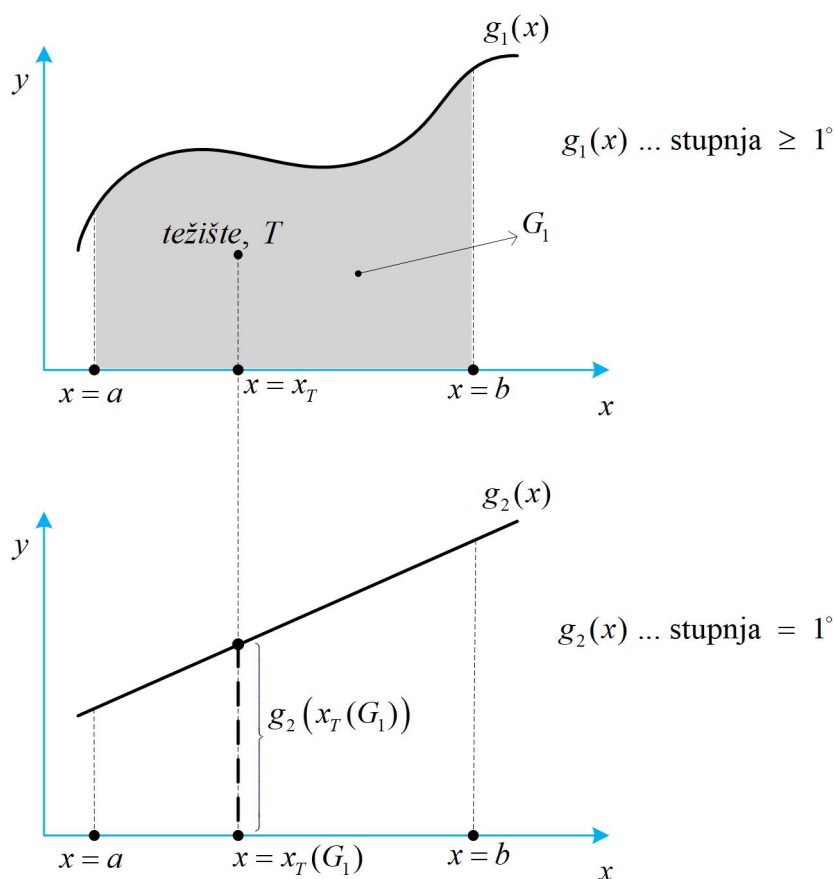
## 1.10 Dodatak 1: Vereščaginov teorem

Vrijednosti koeficijenta fleksibilnosti u metodi sila određuju se na temelju izraza [26, 27, 29]:

$$\delta_{i,j} = \int \frac{m_i \cdot m_j}{EI} ds + \int \frac{n_i \cdot n_j}{EA} ds + k \cdot \int \frac{t_i \cdot t_j}{GA} ds$$

$$\delta_{i,0} = \int \frac{M_0 \cdot m_i}{EI} ds + \int \frac{N_0 \cdot n_i}{EA} ds + k \cdot \int \frac{T_0 \cdot t_i}{GA} ds + \int (\kappa_t \cdot m_i) ds + \int (\varepsilon_t \cdot n_i) ds$$

Nazivnici unutar integrala većinom su konstante i izlaze izvan integrala, te preostaje odrediti integral umnoška dviju funkcija.



Slika 1.62: Vereščaginov teorem

Jedna je funkcija uvijek prvog stupnja, jer predstavlja funkciju unutarnje sile zbog djelovanja jedne jedinične sile ili momenta. Na slici 1.62 ta je funkcija označena

s  $g_2(x)$ . Stupanj druge funkcije ovisi o tipu vanjskoga opterećenja koje opterećuje statički sistem ako se određuju slobodni članovi  $\delta_{i,0}$  ili u slučaju određivanja koeficijenta fleksibilnosti  $\delta_{i,j}$  funkcija je ponovno prvoga stupnja.

Prema Vereščaginovom teoremu integral umnoška dvije funkcije od kojih je (barem) jedna prvoga stupnja, može se odrediti na temelju izraza

$$I_{1,2} = \int_a^b g_1(x) \cdot g_2(x) dx = G_1 \cdot g_2(x_T(G_1))$$

gdje je  $G_1$  površina između  $g_1(x)$  i osi  $x$  u granicama od  $x = a$  do  $x = b$ ,  $x_T(G_1)$  je apscisa težišta površine  $G_1$ , a  $g_2(x_T(G_1))$  je vrijednost funkcije  $g_2(x)$  za  $x = x_T(G_1)$ .

## 1.11 Dodatak 2: utjecaj poprečne sile na iznos pomaka točaka konstrukcije

Poznavajući vrijednosti *Youngova modula elastičnosti* i *modula posmika* osnovnih građevinskih materijala, kao i veličine poprečnih presjeka elemenata statičkih sistema te njihove raspone, lako se mogu izračunati doprinosi pojedinih unutarnjih sila na pomake točaka konstrukcije, te ustvrditi da momenti savijanja uzrokuju čak  $\approx 99\%$  ukupnoga pomaka ako je odnos visine i duljine  $\frac{h}{\ell} > \frac{1}{5}$ .

Međutim, povećanjem omjera visine poprečnoga presjeka i raspona grede, doprinos poprečne sile pomacima točaka konstrukcije (odnosno vrijednostima koeficijenata fleksibilnosti u metodi sila) značajno raste.

Za različitu visinu  $h$  poprečnoga presjeka i stoga različit odnos  $\frac{h}{\ell}$  (uz konstantan raspon  $\ell$ ), utjecaj se poprečne sile mijenja, te se u slučaju  $\frac{1}{5} > \frac{h}{\ell} > \frac{1}{2}$  više ne može zanemariti (slika 1.63).

Kada je odnos  $\frac{h}{\ell} \approx 1$ , element se smatra visokostijenim nosačem.

Za zorniji prikaz navedenih utjecaja poprečne sile u izraz za koeficijent fleksibilnosti  $\delta_{2,2}$  iz poglavlja 1.2 uvrstit će se sljedeće vrijednosti:

$$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$$

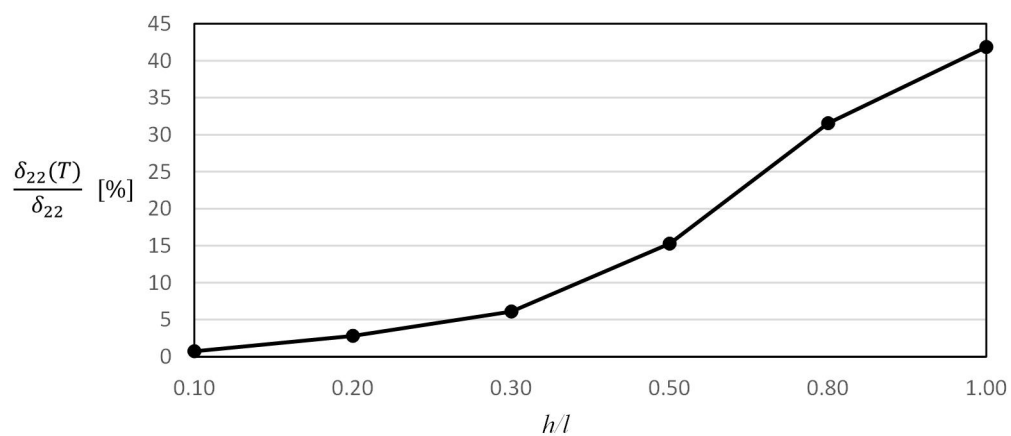
$$G = 12500000 \text{ kN/m}^2$$

$$\ell = 5,0 \text{ m}$$

$$k = 1, 2$$

$$b = 40 \text{ cm}$$

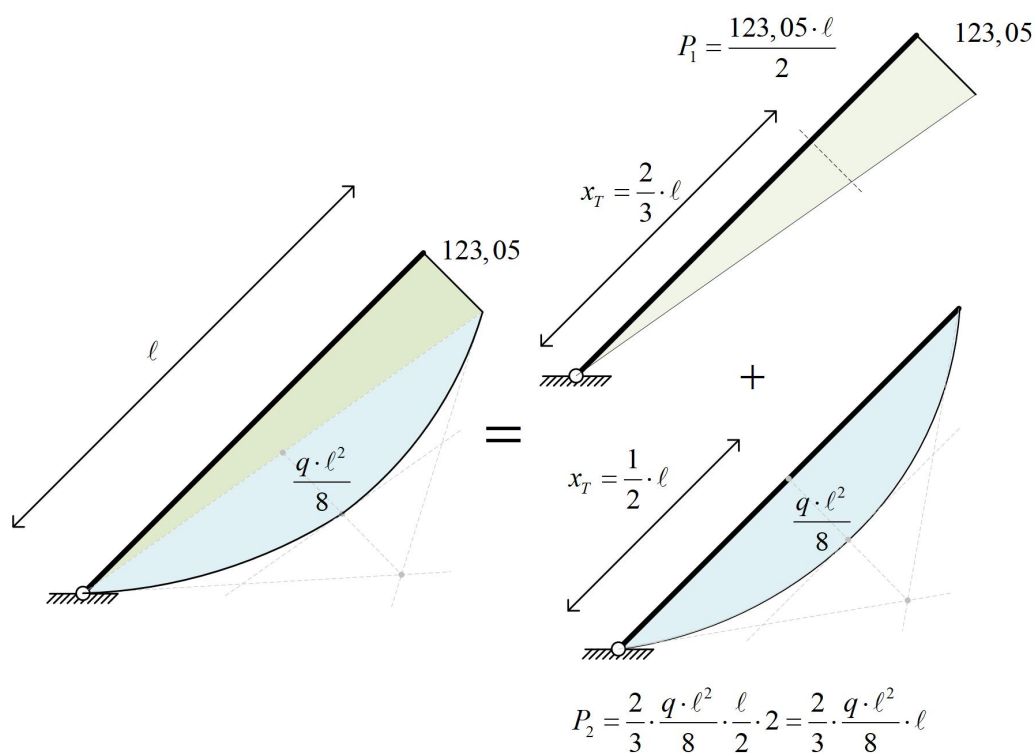
$h$ [m]	$h/l$	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$I$ [m <sup>4</sup> ]	$\delta_{22}(M)$	$\delta_{22}(T)$	$\delta_{22}$	$\frac{\delta_{22}(M)}{\delta_{22}}$ [%]	$\frac{\delta_{22}(T)}{\delta_{22}}$ [%]
0.50	0.10	0.20	0.00417	1.33333E-05	0.000000096	1.34293E-05	99.28514694	0.714853058
1.00	0.20	0.40	0.03333	1.66667E-06	0.000000048	1.71467E-06	97.20062208	2.799377916
1.50	0.30	0.60	0.1125	4.93827E-07	0.000000032	5.25827E-07	93.91435011	6.085649887
2.50	0.50	1.00	0.52083	1.06667E-07	1.92E-08	1.25867E-07	84.74576271	15.25423729
4.00	0.80	1.60	2.13333	2.60417E-08	0.000000012	3.80417E-08	68.45564074	31.54435926
5.00	1.00	2.00	4.16667	1.33333E-08	9.6E-09	2.29333E-08	58.13953488	41.86046512



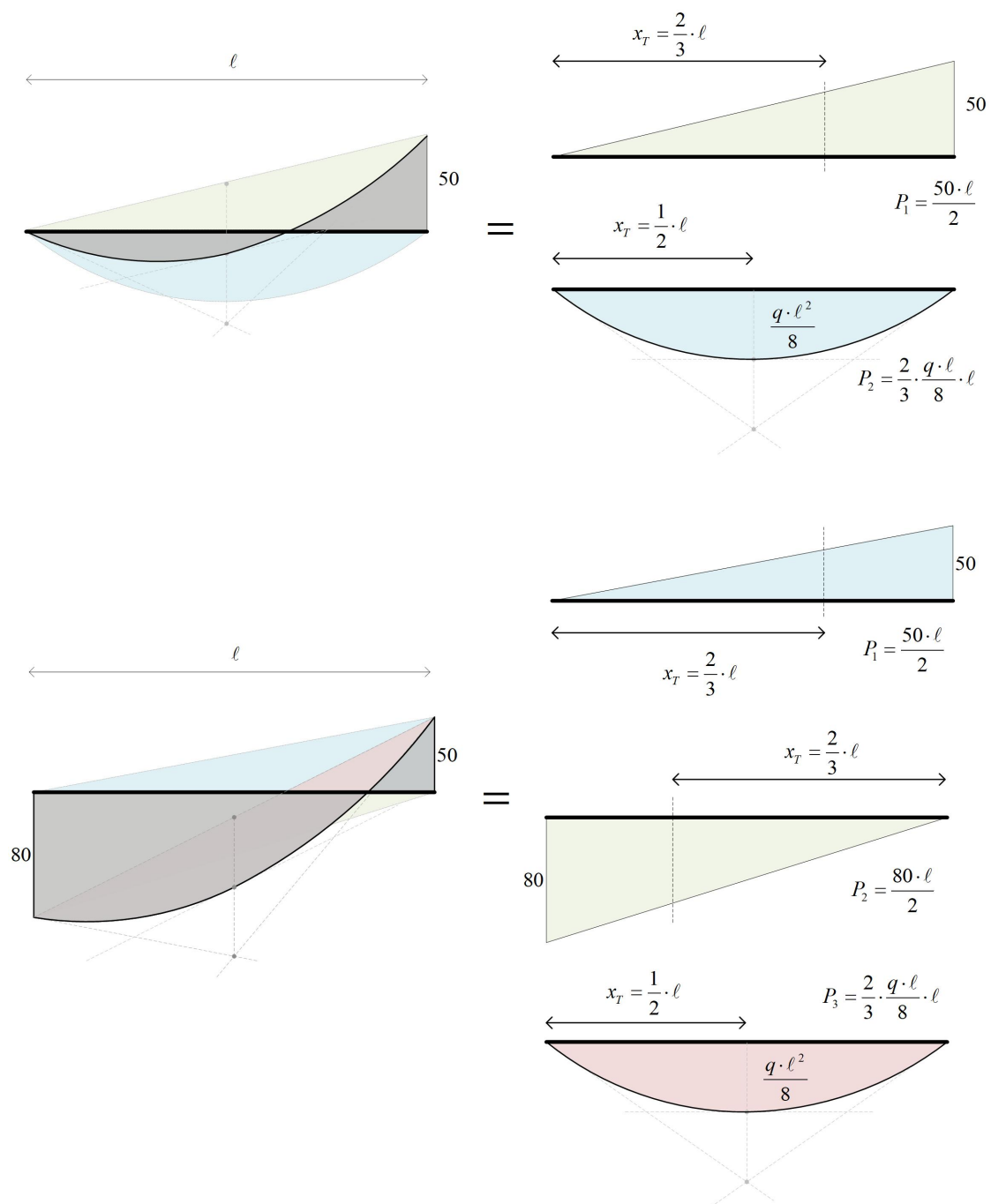
**Slika 1.63:** Utjecaj poprečne sile ovisno o omjeru visine i duljine grede

## 1.12 Dodatak 3: "složene" površine

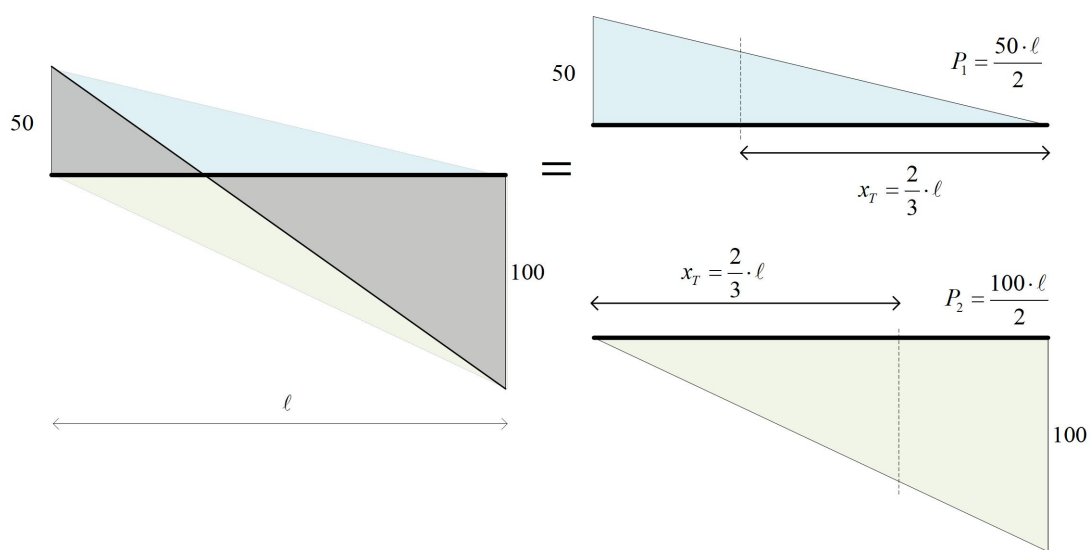
U metodi sila primjenjuje se Vereščaginov teorem [3, 15] za izračunavanje integrala umnoška dviju funkcije od kojih (barem) jedna mora biti prvoga stupnja. Vanjsko opterećenje uzrokuje funkcije unutarnjih sila prvoga ili višega stupnja. Površina omeđena takvom funkcijom i osi nosača ponekad se sastoji od više jednostavnijih površina kao što je prikazano na slici 1.64, 1.65 i 1.66. (sivom bojom označena je "složena" površina).



Slika 1.64: "Složena" površina



Slika 1.65: Primjeri "složenih" površina



Slika 1.66: Primjeri "složenih" površina

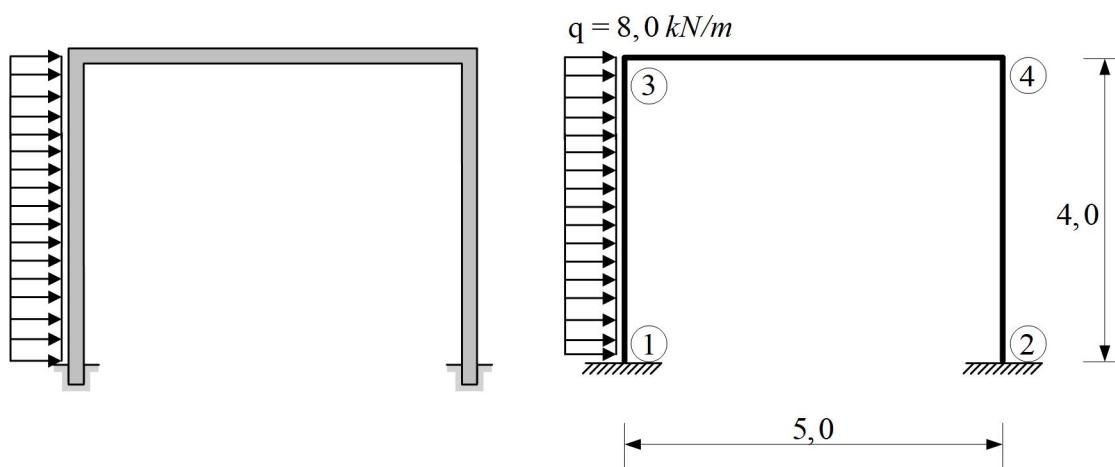


## Poglavlje 2

### Metoda pomaka

## 2.1 O metodi pomaka

Kruto tijelo u ravnini (kao i infinitezimalni dio ravninskoga statičkoga sistema) ima tri stupanja slobode gibanja: dva translacijska te jedan rotacijski stupanj slobode. Ako se za nepoznate veličine (štapnoga) statički neodređenoga sistema odaberu duljine translacijskih pomaka i(li) kutovi zaokreta odabranih točaka koje nazivamo čvorovima, primijenjeni se postupak za proračun funkcija unutarnjih sila naziva *metodom pomaka* [2, 3, 15, 29].



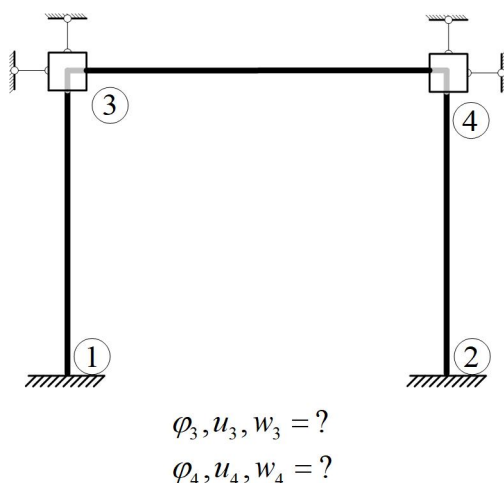
Slika 2.1: Primjer statičkoga sistema i numeracije čvorova

Statički sistem dijelimo na gredne ili štapne elemente (sile i momenti na njihovim krajevima mogu se lako izraziti kao funkcije pomaka i zaokreta krajeva tih elemenata) i čvorove (mjesto spajanja štapnih elemenata, te ležajne i slobodne točke). Elementi koji se spajaju u zajedničkom krutom čvoru imaju na tom kraju pomak i zaokret jednak onima zajedničkoga krutog čvora.

Na slici 2.1 na zadanom statičkom sistemu definirane su točke štapnih elemenata koje se nazivaju *čvorovima* (od 1 do 4). Nepoznanice su u metodi pomaka (mogući) pomaci definiranih čvorova zadanoga sistema. Svaka se točka na elementu može proglasiti čvorom, a odabiru se one točke sistema pomoću čijih se iznosa pomaka i zaokreta lako određuju funkcije sila i momenata krajeva elemenata te potom i funkcije unutarnjih sila uzduž cijeloga elementa.

Proračun se u metodi pomaka provodi (kao i u metodi sila) na *osnovnom sistemu*. Dodajući zadanom sistemu veze s podlogom nastaje osnovni sistem sa spriječenim (prethodno definiranim nepoznatim) pomacima i zaokretima čvorova zadanoga sis-

tema (slika 2.2: zaokreti su spriječeni dodavanjem momentnoga spoja naznačene simbolom kvadrata dok su pomaci spriječeni dodavanjem štapova). Dakle, u metodi pomaka u osnovnom se sistemu povećava statička neodređenost, a u slučaju statički određenoga zadanog sistema (koje je također moguće analizirati metodom pomaka), proračun provodimo na statički neodređenom osnovnom sistemu.



**Slika 2.2:** Osnovni sistem i nepoznanice prema metodi pomaka

U prvom se koraku na osnovnom sistemu određuju poopćene sile na krajevima elemenata koje uzrokuje vanjsko opterećenje. U osnovnom sistemu onemogućeni su svi pomaci i zaokreti krajeva elemenata te se prikazani sistem može rastaviti na tri grede s upetim krajevima: element 1 – 3, element 3 – 4 i element 2 – 4 (slika 2.3). Takve elemente nazivamo *obostrano upetim gredama*, a vrijednosti su poopćenih sila na krajevima obostrano upetih greda za neke slučajeve opterećenja poznate iz prethodnoga poglavlja.

U *tablici momenata upetosti* (poglavlje 2.4) dani su izrazi za momente na kraju obostrano upete grede opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$ . Pritom je uvažen dogovor sa slike 2.4 o pozitivnim smjerovima poopćenih sila na krajevima elementa.

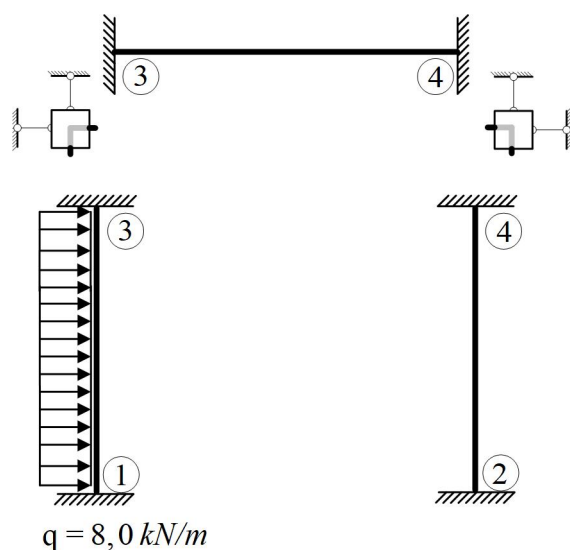
Stoga, na elementu 3 – 4 primjera sa slike 2.1 poprečne su sile i momenti savijanja na upetim krajevima

$$\bar{M}_{1,3} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{8,0 \cdot 4^2}{12} = 10,67 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{3,1} = -\frac{q \cdot \ell^2}{12} = -\frac{8,0 \cdot 4^2}{12} = -10,67 \text{ kNm}$$

$$\bar{T}_{1,3} = -\frac{q \cdot \ell}{2} = -\frac{8,0 \cdot 4}{2} = -16,0 \text{ kNm}$$

$$\bar{T}_{3,1} = -\frac{q \cdot \ell}{2} = -\frac{8,0 \cdot 4}{2} = -16,0 \text{ kNm}$$

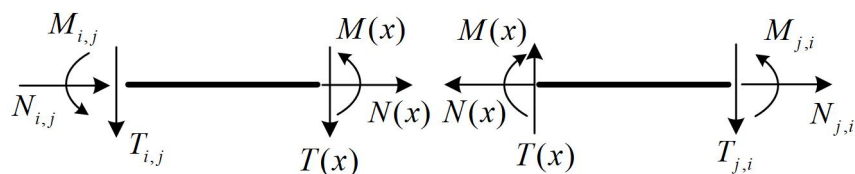


**Slika 2.3:** Raspad osnovnoga sistema na obostrano upete grede

U gornjim izrazima prvi indeks označava mjesto (odnosno, indeks čvora) djelovanja momenata ili poprečne sile upetosti, dok je drugi indeks indeks čvora na drugom kraju elementa čiji se momenti i poprečne sile upetosti određuju.

Elementi 3–4 i 2–4 su neopterećeni, te su njihove poprečne sile upetosti jednake nuli.

Prema tome, u metodi pomaka povećava se stupanj statičke neodređenosti osnovnoga sistema, ali se vrijednosti poprečnih sila na krajevima elemenata određuju iz poznatih izraza dobivenih metodom sila za statički sistem koji nazivamo obostrano upeta greda.



**Slika 2.4:** Pozitivni smjerovi poopćenih sila na krajevima i u presjeku elementa

U drugom se koraku osnovni sistem prisilno pomiče i/ili zaokreće na mjestima dodanih veza osnovnoga sistema. Pritom vrijednosti pomaka i zaokreta nisu poznate, ali je izraze za sile i momente krajeva obostrano upetih greda koje uzrokuju prisilni pomaci njegovih krajeva lako odrediti metodom sila (slika 1.12). Na primjer, za prisilni zaokret čvora 3 zadanoga sistema sa slike 2.1, izrazi za momente na upetim krajevima glase

$$\begin{aligned}
 m_{1,3} &= 2 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \varphi_3 = 2 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \varphi_3 = \frac{EI}{2} \cdot \varphi_3 \\
 m_{3,1} &= 4 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \varphi_3 = 4 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \varphi_3 = EI \cdot \varphi_3 \\
 m_{3,4} &= 4 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \varphi_3 = 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 m_{4,3} &= 2 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \varphi_3 = 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3
 \end{aligned}$$

Superpozicijom dva koraka metode pomaka osnovni se sistem dovodi u stanje pomaka jednako onom zadanoga sistema. Točnije, ukupna se vrijednost sila na krajevima elementa određuje kao

$$M_{i,j} = \overline{M}_{i,j} + m_{i,j}$$

$$T_{i,j} = \overline{T}_{i,j} + t_{i,j}$$

$$N_{i,j} = \overline{N}_{i,j} + n_{i,j}$$

gdje je  $\overline{M}_{i,j}$  moment upetosti kraja elementa  $i - j$ , a  $m_{i,j}$  moment savijanja kraja elementa  $i - j$  iz drugoga koraka metode pomaka u kojem se krajevi elemenata prisilno pomiču i/ili zaokreću.

Pri tome su još uvijek nepoznati pomaci i zaokreti čvorova s dodanim vezama s podlogom. Međutim, u zadanom sistemu ne postoje dodatne veze s podlogom

pomoću kojih nastaje osnovni sistem, pa stoga ne postoje ni reaktivne sile ovih dodanih veza.

Zahtjev iščezavanja reaktivnih sila (i momenata) dodanih veza daje sustav jednažbi iz kojeg se mogu odrediti nepoznati pomaci (i zaokreti) zadanoga sistema, a taj je zahtjev jednak uvjetu ravnoteže čvorova zadanoga sistema.

Za čvorove 3 i 4 zadanoga sistema sa slike 2.1 uvjeti ravnoteže momenata glase:

$$\begin{aligned}M_{3,1} + M_{3,4} &= 0 \\ \bar{M}_{3,1} + m_{3,1} + \bar{M}_{3,4} + m_{3,4} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{4,3} + M_{4,2} &= 0 \\ \bar{M}_{4,3} + m_{4,3} + \bar{M}_{4,2} + m_{4,2} &= 0\end{aligned}$$

U poglavlju 2.4 dani su izrazi za momente na krajevima obostrano upete i jednostrano upete grede za većinu uobičajenih slučajeva opterećenja.

Osnovna je ideja metode pomaka temelj metodi konačnih elemenata čija primjena danas nadilazi građevinarstvo.

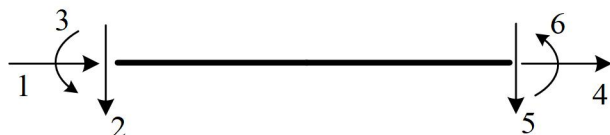
## 2.2 Pomični okviri

Za zadani sistem sa slike 2.1 odredit će se metodom pomaka dijagrami unutarnjih sila. Nepoznati pomaci i zaokreti kao i osnovni sistem, određeni su na slici 2.2. Cijeli se proračun provodi na osnovnom sistemu, točnije na obostrano upetim gredama na koje se osnovni sistem može rastaviti.

Poopćene sile na krajevima elemenata (koji su po statičkom sistemu obostrano upete grede) iz prvog koraka metode pomaka (*faza upetosti*) određuju vektore sila upetosti:

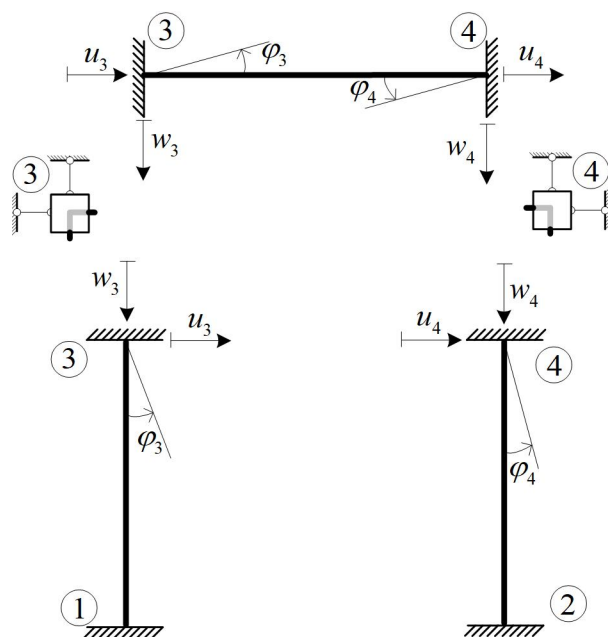
$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}_{1,3} &= [\bar{N}_{1,3} \quad \bar{T}_{1,3} \quad \bar{M}_{1,3} \quad \bar{N}_{3,1} \quad \bar{T}_{3,1} \quad \bar{M}_{3,1}]^T \\ &= [0 \quad -16,0 \quad 10,67 \quad 0 \quad -16,0 \quad -10,67]^T \\ \bar{\mathbf{f}}_{3,4} &= [\bar{N}_{3,4} \quad \bar{T}_{3,4} \quad \bar{M}_{3,4} \quad \bar{N}_{4,3} \quad \bar{T}_{4,3} \quad \bar{M}_{4,3}]^T \\ &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ \bar{\mathbf{f}}_{2,4} &= [\bar{N}_{2,4} \quad \bar{T}_{2,4} \quad \bar{M}_{2,4} \quad \bar{N}_{4,2} \quad \bar{T}_{4,2} \quad \bar{M}_{4,2}]^T \\ &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T\end{aligned}$$

Pri tome je položaj pojedine poopćene sile u vektoru sila upetosti elementa određena prema slici 2.5.



**Slika 2.5:** Poredak poopćenih sila upetosti na krajevima elementa u vektoru sila upetosti

Drugi se korak u metodi pomaka naziva *fazom dopuštenih* ili *fazom prisilnih pomaka* osnovnoga sistema na mjestima dodanih veza. I dalje se osnovni sistem može rastaviti na obostrano upete grede, te se vrijednosti poopćenih sila na njihovim krajevima određuju iz poznatih izraza dobivenih metodom sila za prisilne pomake i zaokrete krajeva elementa. Na slici 2.6 prikazani su elementi (obostrano upete grede) osnovnoga sistema s prisilnim pomacima krajeva koji odgovaraju nepoznanicama  $(u_3, w_3, \varphi_3, u_4, w_4, \varphi_4)$  zadanoga sistema po metodi pomaka.



Slika 2.6: Prisilni pomaci krajeva elemenata osnovnoga sistema

Prema izrazu iz poglavlja 1.11 vektor popučenih sila na kraju obostrano upete grede ( $\mathbf{f}_{i,j}$ ) jednak je skalarnom umnošku matrice krutosti elementa i vektora pomaka krajeva elementa [3, 14, 15, 27, 29, 32]. Za element 1 – 3 osnovnoga sistema može se odrediti vektor  $\mathbf{f}_{1,3}$ :

$$\begin{bmatrix} n_{1,3} \\ t_{1,3} \\ m_{1,3} \\ n_{3,1} \\ t_{3,1} \\ m_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{4} & 0 & 0 & -\frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{4^3} & -\frac{6EI}{4^2} & 0 & -\frac{12EI}{4^3} & \frac{6EI}{4^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{4^2} & \frac{4EI}{4} & 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{2EI}{4} \\ -\frac{EA}{4} & 0 & 0 & \frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{4^3} & \frac{6EI}{4^2} & 0 & \frac{12EI}{4^3} & \frac{6EI}{4^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{4^2} & \frac{2EI}{4} & 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -w_3 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

S obzirom na to da su pomaci čvora tri jednaki nuli, prva se tri stupca matrice krutosti mogu izostaviti, te je vektor  $\mathbf{f}_{1,3}$



$$\begin{bmatrix} n_{13} \\ t_{13} \\ m_{13} \\ n_{31} \\ t_{31} \\ m_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{4^3} & -\frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{2EI}{4} \\ -\frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{4^3} & \frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_3 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

Vektor je poopćenih sila na kraju elementa 2 – 4

$$\begin{bmatrix} n_{24} \\ t_{24} \\ m_{24} \\ n_{42} \\ t_{42} \\ m_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{4^3} & -\frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{2EI}{4} \\ -\frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{4^3} & \frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_4 \\ u_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

Elementu 3 – 4 u fazi prisilnih pomaka pomiču se i zaokreću oba čvora, te je vektor poopćenih sila na kraju elementa,  $\mathbf{f}_{3,4}$ ,

$$\begin{bmatrix} n_{3,4} \\ t_{3,4} \\ m_{3,4} \\ n_{4,3} \\ t_{4,3} \\ m_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{5} & 0 & 0 & -\frac{EA}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{5^3} & -\frac{6EI}{5^2} & 0 & -\frac{12EI}{5^3} & \frac{6EI}{5^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{5^2} & \frac{4EI}{5} & 0 & \frac{6EI}{5^2} & \frac{2EI}{5} \\ -\frac{EA}{5} & 0 & 0 & \frac{EA}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{5^3} & \frac{6EI}{5^2} & 0 & \frac{12EI}{5^3} & \frac{6EI}{5^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{5^2} & \frac{2EI}{5} & 0 & \frac{6EI}{5^2} & \frac{4EI}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

Treba naglasiti da u vektoru prisilnih pomaka elementa 1 – 3 (analogno vrijedi i za element 2 – 4) pomak na četvrtom mjestu u vektoru (prije skraćivanja zapisa zbog nula na prva tri mjesta) mora biti pomak čvora s indeksom 3 u uzdužnom smjeru elementa 1 – 3, a taj je pomak prilikom definicije nepoznanica nazvan  $w_3$ , jer je riječ o vertikalnom pomaku čvora s indeksom 3 u globalnom koordinatnom sustavu zadanoga statičkog sistema. Iz istoga se razloga na mjestu pet istoga vektora prisilnih pomaka nalazi poprečni pomak (u odnosu na os elementa 1 – 3) čvora s indeksom 3, koji je u globalnom koordinatnom sustavu nazvan  $u_3$  i odnosi se na horizontalni pomak čvora s indeksom 3 (slika 2.6).

Konačne vrijednosti poopćenih sila na krajevima elemenata zbrojevi su vektora poopćenih sila oba koraka metode pomaka, odnosno općenito vrijedi

$$\hat{\mathbf{f}}_{i,j} = \bar{\mathbf{f}}_{i,j} + \mathbf{f}_{i,j},$$

a za elemente osnovnog sistema iz primjera 1 vektori su konačnih vrijednosti poopćenih sila

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{f}}_{1,3} &= \bar{\mathbf{f}}_{1,3} + \mathbf{f}_{1,3} = [\bar{N}_{1,3} \quad \bar{T}_{1,3} \quad \bar{M}_{1,3} \quad \bar{N}_{3,1} \quad \bar{T}_{3,1} \quad \bar{M}_{3,1}]^T + [n_{1,3} \quad t_{1,3} \quad m_{1,3} \quad n_{3,1} \quad t_{3,1} \quad m_{3,1}]^T \\
 \hat{\mathbf{f}}_{2,4} &= \bar{\mathbf{f}}_{2,4} + \mathbf{f}_{2,4} = [\bar{N}_{2,4} \quad \bar{T}_{2,4} \quad \bar{M}_{2,4} \quad \bar{N}_{4,2} \quad \bar{T}_{4,2} \quad \bar{M}_{4,2}]^T + [n_{2,4} \quad t_{2,4} \quad m_{2,4} \quad n_{4,2} \quad t_{4,2} \quad m_{4,2}]^T \\
 \hat{\mathbf{f}}_{3,4} &= \bar{\mathbf{f}}_{3,4} + \mathbf{f}_{3,4} = [\bar{N}_{3,4} \quad \bar{T}_{3,4} \quad \bar{M}_{3,4} \quad \bar{N}_{4,3} \quad \bar{T}_{4,3} \quad \bar{M}_{4,3}]^T + [n_{3,4} \quad t_{3,4} \quad m_{3,4} \quad n_{4,3} \quad t_{4,3} \quad m_{4,3}]^T
 \end{aligned}$$

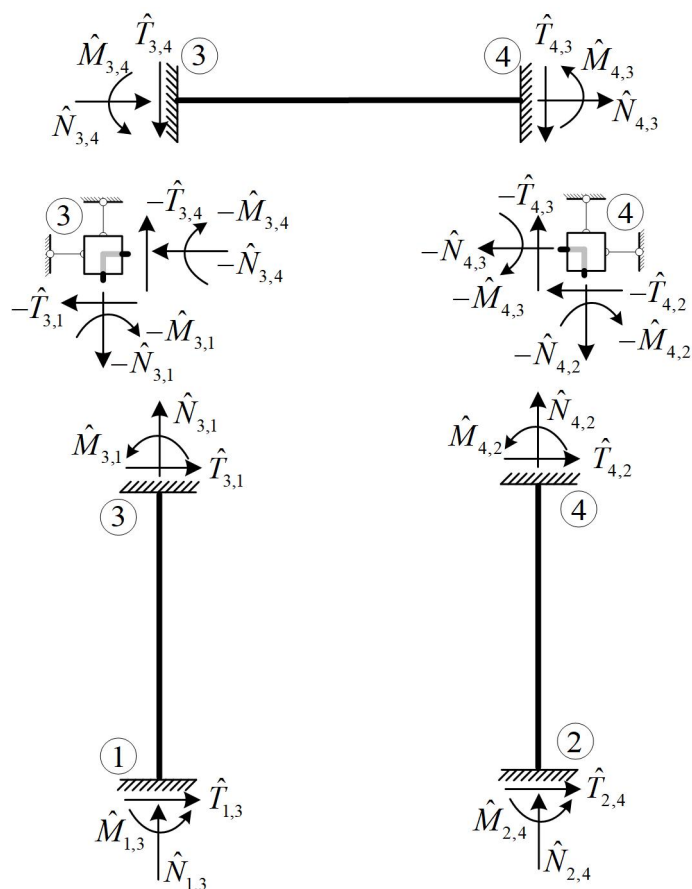
Vektori su poopćenih sila na krajevima elemenata 3 – 4 i 2 – 4 iz faze upetosti nul-vektori, te su konačne vrijednosti poopćenih sila na krajevima navedenih elemenata jednake vrijednostima sila iz faze prisilnih pomaka, dok se za element 1 – 3 konačne

vrijednosti sila na kraju elementa dobivaju zbrajanjem vrijednosti poopćenih sila iz oba koraka po metodi pomaka:

$$\hat{\mathbf{f}}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16,0 \\ 10,67 \\ 0 \\ -16,0 \\ -10,67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{4^3} & -\frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{2EI}{4} \\ -\frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{4^3} & \frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_3 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{2,4} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{4^3} & -\frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{2EI}{4} \\ -\frac{EA}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{4^3} & \frac{6EI}{4^2} \\ 0 & \frac{6EI}{4^2} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_4 \\ u_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{5} & 0 & 0 & -\frac{EA}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{5^3} & -\frac{6EI}{5^2} & 0 & -\frac{12EI}{5^3} & -\frac{6EI}{5^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{5^2} & \frac{4EI}{5} & 0 & \frac{6EI}{5^2} & \frac{2EI}{5} \\ -\frac{EA}{5} & 0 & 0 & \frac{EA}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{5^3} & \frac{6EI}{5^2} & 0 & \frac{12EI}{5^3} & \frac{6EI}{5^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{5^2} & \frac{2EI}{5} & 0 & \frac{6EI}{5^2} & \frac{4EI}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

Zbog lakšega razumijevanja jednadžbi iščezavanja reaktivnih poopćenih sila na mjestima spriječenih pomaka (i zaokreta) zadanog sistema, na slici 2.7 naznačena su mjesta djelovanja reaktivnih poopćenih sila krajeva elemenata. U čvorovima 3 i 4 smjer se djelovanja sila s kraja elementa mora promijeniti, te je on negativan u odnosu na dogovor o pozitivnom smjeru poopćenih sila na kraju elementa (slika 2.4).



**Slika 2.7:** Pozitivni smjerovi i položaji konačnih reaktivnih poopćenih sila

Sve komponente vektora konačnih sila na kraju elemenata usporedne su s osima globalnoga koordinatnog sustava, te nije potrebno vršiti transformaciju lokalnoga koordinatnog sustava elemenata u globalni koordinatni sustav (pomoću matrice transformacije).

Na čvor 3 djeluju poopćene sile od priključnih elemenata (1 – 3 i 3 – 4). Treba primijetiti da na čvor može djelovati i vanjska koncentrirana sila i/ili moment savijanja, a u svakom slučaju čvor mora biti u ravnoteži. Jednadžbe ravnoteže čvorova 3 i 4 glase

$$\begin{aligned}
 -\hat{N}_{3,4} - \hat{T}_{3,1} &= 0 & -\hat{N}_{4,3} - \hat{T}_{4,2} &= 0 \\
 \hat{N}_{3,1} - \hat{T}_{3,4} &= 0 & \hat{N}_{4,2} - \hat{T}_{4,3} &= 0 \\
 -\hat{M}_{3,1} - \hat{M}_{3,4} &= 0 & -\hat{M}_{4,2} - \hat{M}_{4,3} &= 0
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza za konačne sile na krajevima elemenata, jednadžbe ravnoteže tvore sustav jednadžbi nepoznanice kojih su pomaci čvorova 3 i 4:

$$\begin{aligned}
 &-\hat{N}_{3,4} - \hat{T}_{3,1} = 0 \\
 &-\left(\frac{EA}{5} \cdot u_3 - \frac{EA}{5} \cdot u_4\right) - \left(-16,0 + \frac{12EI}{4^3} \cdot u_3 + \frac{6EI}{4^2} \cdot \varphi_3\right) = 0 \\
 &\hat{N}_{3,1} - \hat{T}_{3,4} = 0 \\
 &\left(-\frac{EA}{4} \cdot w_3\right) - \left(\frac{12EI}{5^3} \cdot w_3 - \frac{6EI}{5^2} \cdot \varphi_3 - \frac{12EI}{5^3} \cdot w_4 - \frac{6EI}{5^2} \cdot \varphi_4\right) = 0 \\
 &-\hat{M}_{3,1} - \hat{M}_{3,4} = 0 \\
 &-\left(-10,67 + \frac{6EI}{4^2} \cdot u_3 + \frac{4EI}{4} \cdot \varphi_3\right) - \left(-\frac{6EI}{5^2} \cdot w_3 + \frac{4EI}{5} \cdot \varphi_3 + \frac{6EI}{5^2} \cdot w_4 + \frac{2EI}{5} \cdot \varphi_4\right) = 0 \\
 \\
 &-\hat{N}_{4,3} - \hat{T}_{4,2} = 0 \\
 &-\left(-\frac{EA}{5} \cdot u_3 + \frac{EA}{5} \cdot u_4\right) - \left(\frac{12EI}{4^3} \cdot u_4 + \frac{6EI}{4^2} \cdot \varphi_4\right) = 0 \\
 &\hat{N}_{4,2} - \hat{T}_{4,3} = 0 \\
 &\left(-\frac{EA}{4} \cdot w_4\right) - \left(-\frac{12EI}{5^3} \cdot w_3 + \frac{6EI}{5^2} \cdot \varphi_3 + \frac{12EI}{5^3} \cdot w_4 + \frac{6EI}{5^2} \cdot \varphi_4\right) = 0 \\
 &-\hat{M}_{4,2} - \hat{M}_{4,3} = 0 \\
 &-\left(\frac{6EI}{4^2} \cdot u_4 + \frac{4EI}{4} \cdot \varphi_4\right) - \left(-\frac{6EI}{5^2} \cdot w_3 + \frac{2EI}{5} \cdot \varphi_3 + \frac{6EI}{5^2} \cdot w_4 + \frac{4EI}{5} \cdot \varphi_4\right) = 0
 \end{aligned}$$

Sustav se može matrično zapisati:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{5} & \frac{12EI}{4^3} & 0 & -\frac{6EI}{4^2} & \frac{EA}{5} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{EA}{4} & \frac{12EI}{5^3} & \frac{6EI}{5^2} & 0 & \frac{12EI}{5^3} & \frac{6EI}{5^2} \\
 -\frac{6EI}{4^2} & \frac{6EI}{5^2} & -\frac{4EI}{5} & \frac{4EI}{4} & 0 & -\frac{6EI}{5^2} & -\frac{2EI}{5} \\
 \frac{EA}{5} & 0 & 0 & -\frac{EA}{5} & \frac{12EI}{4^3} & 0 & -\frac{6EI}{4^2} \\
 0 & \frac{12EI}{5^3} & -\frac{6EI}{5^2} & 0 & 0 & -\frac{EA}{4} & \frac{12EI}{5^3} \\
 0 & \frac{6EI}{5^2} & -\frac{2EI}{5} & -\frac{6EI}{4^2} & -\frac{6EI}{5^2} & -\frac{4EI}{4} & \frac{4EI}{5}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 u_3 \\
 w_3 \\
 \varphi_3 \\
 u_4 \\
 w_4 \\
 \varphi_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -16,0 \\
 0 \\
 -10,67 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Pripadno je rješenje sustava

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00085 \text{ m} \\ -3,523 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ -0,0000544 \text{ m}^0 \\ 0,000842 \text{ m} \\ 3,523 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ -0,000164 \text{ m}^0 \end{bmatrix}$$

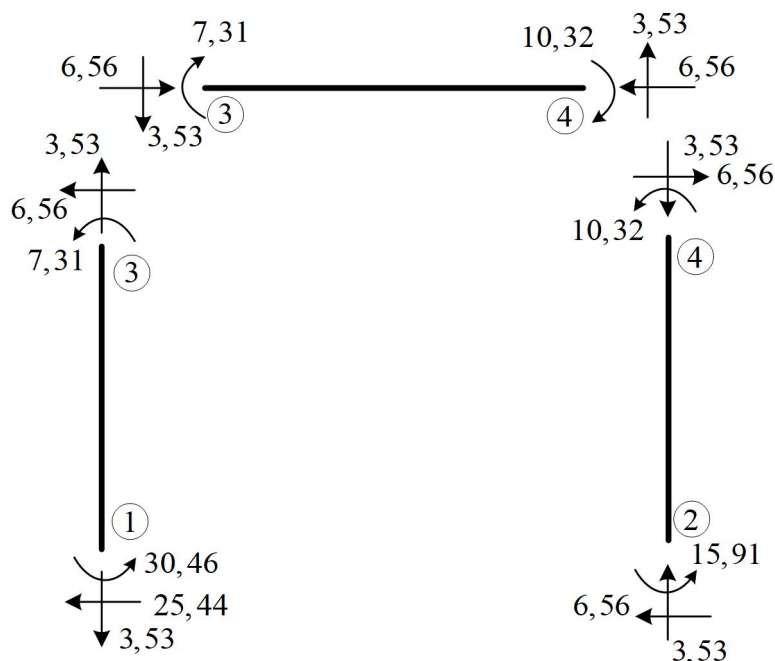
Matrica je sustava dijagonalno dominantna, simetrična i pozitivno definitna te stoga sustav jednadžbi ima jedno realno rješenje.

Vertikalni su pomaci čvorova 3 i 4 vrlo mali. Na slici 2.6 lako je vidljivo da se vertikalni pomaci čvorova 3 i 4 odnose na pomake u smjeru osi elemenata 1 – 3 i 2 – 4, odnosno radi se o promjeni duljine navedenih elemenata zbog djelovanja uzdužnih sila elemenata. Prema tome, kao i u metodi sila, mala je promjena duljine zanemariva (ta je činjenica bitna za prelazak iz metode pomaka u *inženjersku metodu pomaka*).

Također, horizontalni se pomaci čvorova 3 i 4 razlikuju tek na petoj decimali, a ta činjenica navodi na zaključak o jednakosti ovih pomaka (ponovno, važno za razumijevanje pojednostavljenja metode pomaka).

Uvrštavanjem gornjega rješenja u vektore konačnih poopcćenih sila na kraju elemenata dobiva se

$$\hat{\mathbf{f}}_{1,3} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{1,3} \\ \hat{T}_{1,3} \\ \hat{M}_{1,3} \\ \hat{N}_{3,1} \\ \hat{T}_{3,1} \\ \hat{M}_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,53 \\ -25,44 \\ 30,46 \\ 3,53 \\ -6,56 \\ 7,31 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{2,4} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{2,4} \\ \hat{T}_{2,4} \\ \hat{M}_{2,4} \\ \hat{N}_{4,2} \\ \hat{T}_{4,2} \\ \hat{M}_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,53 \\ -6,56 \\ 15,91 \\ -3,53 \\ 6,56 \\ 10,32 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{3,4} = \begin{bmatrix} \hat{N}_{3,4} \\ \hat{T}_{3,4} \\ \hat{M}_{3,4} \\ \hat{N}_{4,3} \\ \hat{T}_{4,3} \\ \hat{M}_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,56 \\ 3,53 \\ -7,31 \\ -6,56 \\ -3,53 \\ -10,32 \end{bmatrix}$$

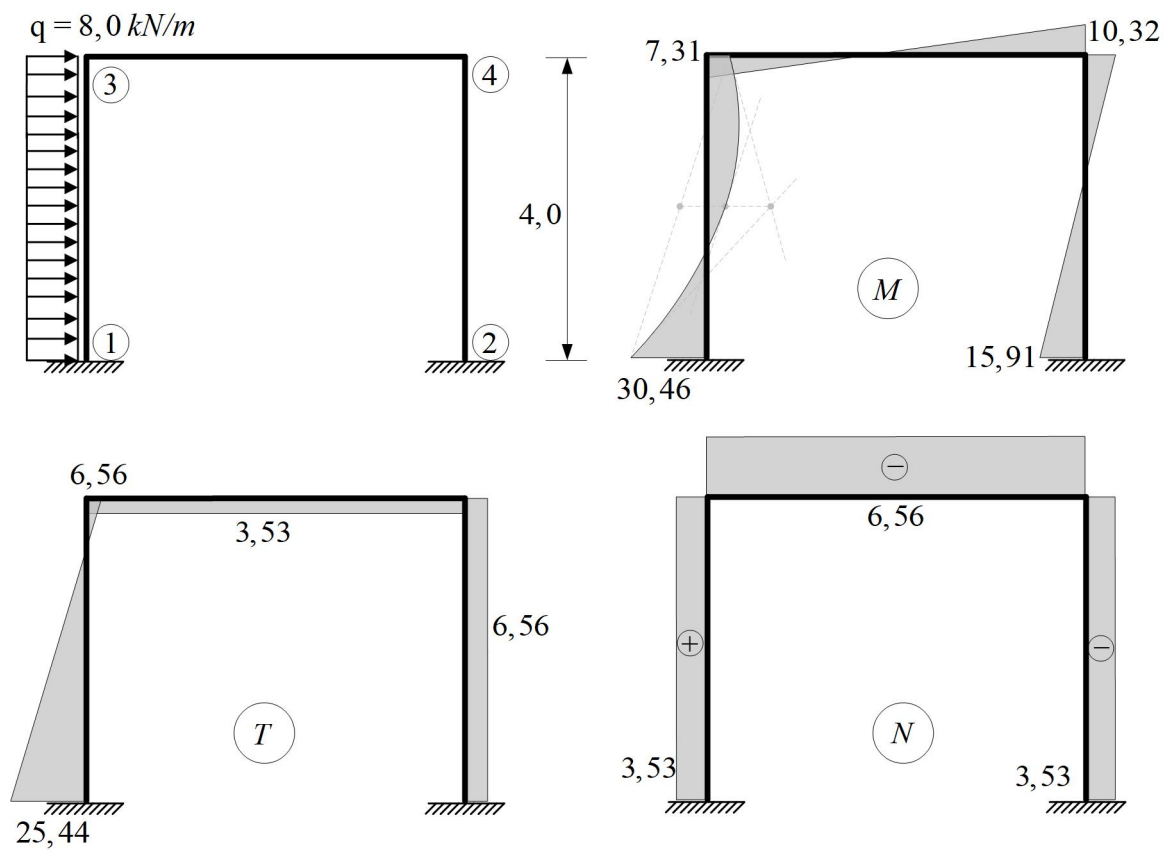


Slika 2.8: Poopćene sile na krajevima elemenata

Dijagrami unutarnjih sila na zadanom sistemu prikazani su na slici 2.9. Prilikom konstruiranja dijagrama unutarnjih sila treba se prisjetiti dogovora o pozitivnim smjerovima poopćenih sila na krajevima elemenata (slika 2.4).

Na elementu 1 – 3 određen je momenta savijanja  $\hat{M}_{1,3} = 30,46 \text{ kNm}$ , odnosno  $\hat{M}_{3,1} = 7,31 \text{ kNm}$ . Oba su momenta pozitivna, a prema dogovoru o pozitivnim smjerovima to znači da im je smjer rotacije suprotan od kazaljke na satu (slika 2.8). Iako su momenti istoga (pozitivnog) smjera, zatežu različite strane elementa 1 – 3. Analogno je određena vlačna strana ostalih elemenata.

Nadalje, predznakom je poprečnih i uzdužnih sila na krajevima elemenata određen smjer vektora pojedine sile u odnosu na dogovor o pozitivnim smjerovima poopćenih sila na krajevima elemenata (slika 2.8).

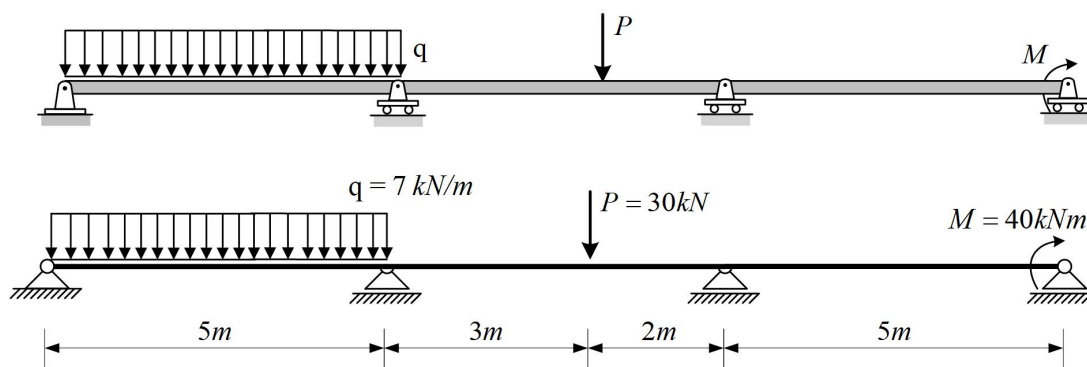


Slika 2.9: Dijagrami unutarnjih sila zadanoga sistema



## 2.3 Nepomični sistem – kontinuirana greda

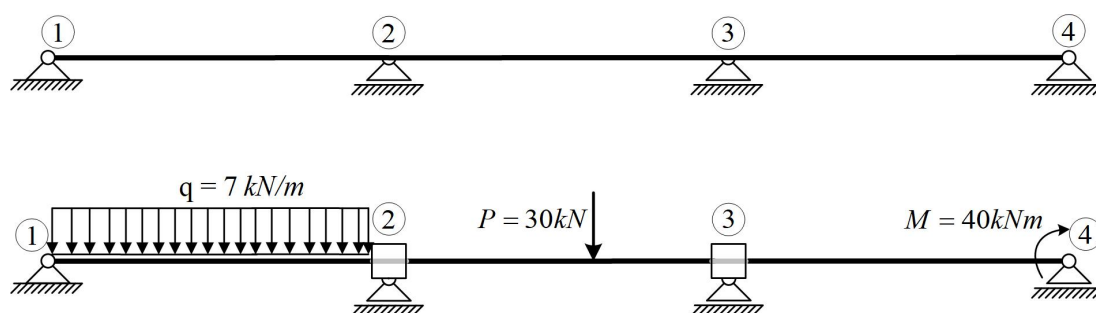
Zadan je dva puta statički neodređeni sistem naziva *kontinuirana greda* (slika 2.10).



Slika 2.10: Zadani sistem

Ako su poznate vrijednosti momenata savijanja grede "iznad" ležajeva, tada je između tih vrijednosti lako konstruirati funkcije momenata savijanja. Isti zaključak vrijedi za konstrukciju funkcija poprečnih i uzdužnih sila (naravno, za konstrukciju dijagrama tih sila treba znati njihove vrijednosti neposredno prije i nakon ležajeva). Dakle, čvorovi će se definirati na mjestima ležajeva (slika 2.11).

Svaki (opći) čvor zadanoga sistema ima tri stupnja slobode gibanja, odnosno u metodi pomaka u svakom se (općem) čvoru mogu definirati tri nepoznata (opća) pomaka: dvije translacije i jedna rotacija.



Slika 2.11: Položaj i numeracija čvorova te osnovni sistem

U čvoru s indeksom 2 kliznim je ležajem spriječen vertikalni pomak, dok je horizontalni pomak toga čvora onemogućen nepomičnim ležajem na mjestu čvora s indeksom 1 (zapravo, nepomičnim ležajem tog sistema spriječeni su horizontalni

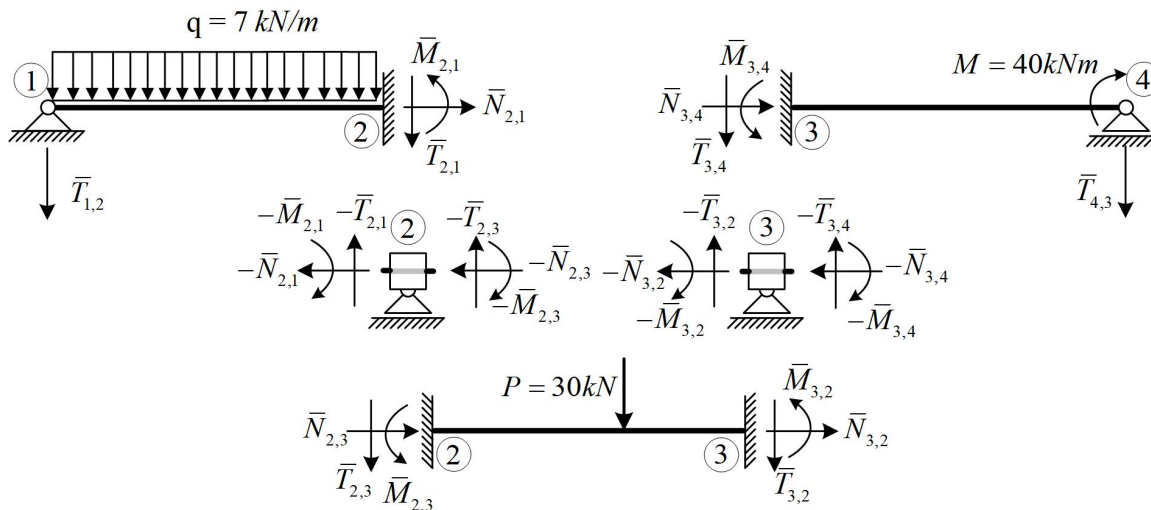
pomaci svih točaka zadanoga sistema sve dok ne postoje uzdužne sile, odnosno uzdužne deformacije). Prema tome, u čvoru 2 nepoznat je samo kut zaokreta ( $\varphi_2$ ) zbog vanjskoga opterećenja. Analogno, u čvoru 3 nepoznat je zaokret  $\varphi_3$ .

U čvorovima 1 i 4 poznate su konačne vrijednosti momenata savijanja ( $\hat{M}_{1,3} = 0$ ,  $\hat{M}_{4,3} = -40 \text{ kNm}$ ), a poznate su i vrijednosti translacija tih čvorova ( $u_1 = w_1 = u_4 = w_4 = 0$ ). Nadalje, zaokret zgloba na kraju elementa neće uzrokovati reakciju na drugom upetom kraju tog elementa. Prema tome, zaokreti čvorova 1 i 4 nisu nepoznanice.

Za zadani sistem sa slike 2.10 nepoznanice su:  $\varphi_2 = ?$ ,  $\varphi_3 = ?$ .

U fazi upetosti osnovni se sistem raspada na tri grede (slika 2.12). Pritom su elementi 1 – 3 i 3 – 4 *jednostrano upete grede*. Izrazi za sile na krajevima tih greda mogu se odrediti primjenom metode sila (kao što je učinjeno za obostrano upete grede). Na taj su način izvedeni izrazi u tablici momenata upetosti (poglavljje 2.4).

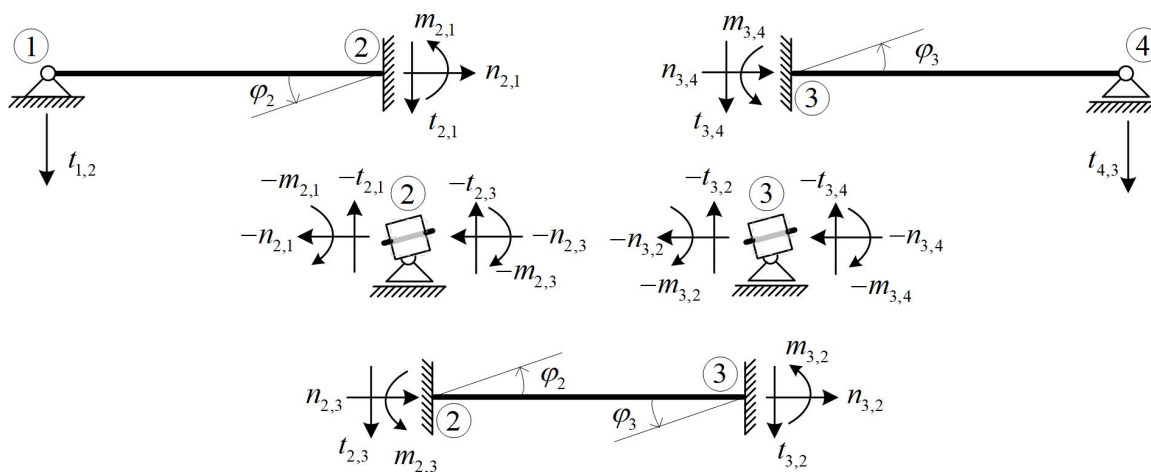
Međutim, isti se izrazi mogu odrediti postupkom nazvanim *statička kondenzacija* (postupak je kratko pojašnjen u poglavlju 2.6).



Slika 2.12: Raspad osnovnoga sistema na tri elementa

Vrijednosti su poopćenih sila upetosti

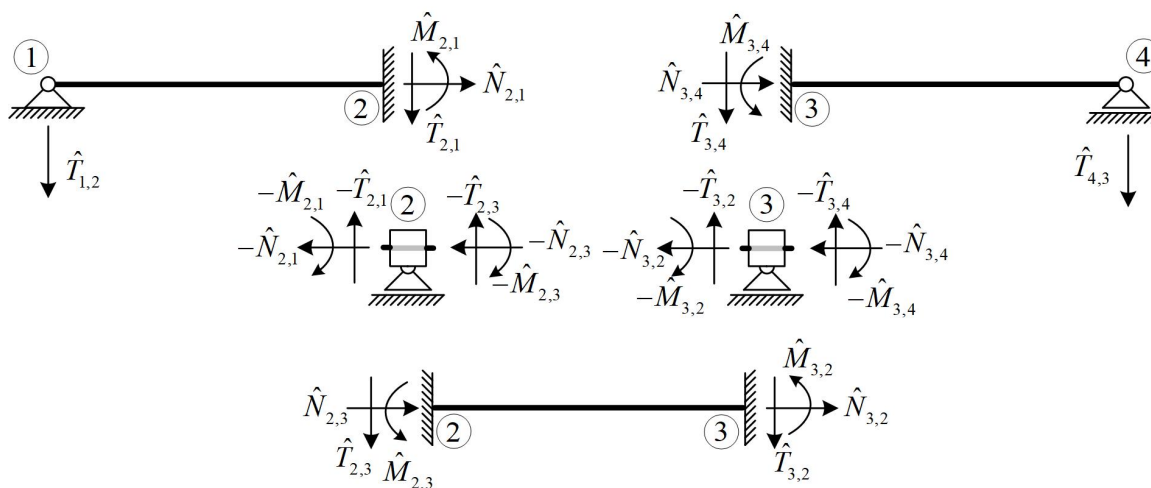
$$\begin{aligned} \bar{M}_{3,4} &= -\frac{M}{2} = -\frac{40}{2} = -20 \text{ kNm} & \bar{M}_{2,1} &= -\frac{q \cdot \ell^2}{8} = -\frac{7,0 \cdot 5^2}{8} = -21,875 \text{ kNm} \\ \bar{T}_{3,4} &= \frac{3M}{2\ell} = \frac{3 \cdot 40}{2 \cdot 5} = 12 \text{ kN} & \bar{T}_{2,1} &= -\frac{5 \cdot q \cdot \ell}{8} = -\frac{5 \cdot 7,0 \cdot 5}{8} = -21,875 \text{ kN} \\ \bar{N}_{3,4} &= 0 & \bar{N}_{2,1} &= 0 \\ \bar{T}_{4,3} &= -\frac{3M}{2\ell} = -\frac{3 \cdot 40}{2 \cdot 5} = -12 \text{ kN} & \bar{T}_{1,2} &= -\frac{3 \cdot q \cdot \ell}{8} = -\frac{3 \cdot 7,0 \cdot 5}{8} = -13,125 \text{ kN} \\ \bar{M}_{2,3} &= P \cdot \frac{a \cdot b^2}{\ell^2} = 30 \cdot \frac{3 \cdot 2^2}{5^2} = 14,4 \text{ kNm} \\ \bar{T}_{2,3} &= -P \cdot \frac{(3a+b) \cdot b^2}{\ell^3} = -30 \cdot \frac{(3 \cdot 3 + 2) \cdot 2^2}{5^3} = -10,56 \text{ kN} \\ \bar{N}_{2,3} &= \bar{N}_{3,2} = 0 \\ \bar{M}_{3,2} &= -P \cdot \frac{a^2 \cdot b}{\ell^2} = -30 \cdot \frac{3^2 \cdot 2}{5^2} = -21,6 \text{ kNm} \\ \bar{T}_{3,2} &= -P \cdot \frac{(a+3b) \cdot a^2}{\ell^3} = -30 \cdot \frac{(3+3 \cdot 2) \cdot 3^2}{5^3} = -19,44 \text{ kN} \end{aligned}$$



Slika 2.13: Faza prisilnih pomaka

Sljedeći je korak faza prisilnih pomaka u kojoj se zaokreću (za nepoznate vrijednosti kutova) čvorovi 2 i 3. Na slici 2.13 prikazano je opterećenje faze prisilnih pomaka koje uzrokuje poopćene sile  $f_{i,j}$ :

$$\begin{aligned}
 m_{3,4} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 & m_{2,1} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 t_{3,4} &= -3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 & t_{2,1} &= 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 \\
 n_{3,4} &= 0 & n_{2,1} &= 0 \\
 t_{4,3} &= 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 & t_{1,2} &= -3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 \\
 \\
 m_{2,3} &= 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 t_{2,3} &= -6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 \\
 n_{2,3} &= 0 \\
 \\
 m_{3,2} &= 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 t_{3,2} &= 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 + 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 \\
 n_{3,2} &= 0
 \end{aligned}$$



Slika 2.14: Konačne sile na krajevima elemenata

Konačne vrijednosti popučenih sila na krajevima elemenata (slika 2.14) zbroj sila iz dva koraka metode pomaka:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{3,4} &= \bar{M}_{3,4} + m_{3,4} = -20 + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 & \hat{M}_{2,1} &= \bar{M}_{2,1} + m_{2,1} = -21,875 + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 \\
 \hat{T}_{3,4} &= \bar{T}_{3,4} + t_{3,4} = 12 - 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 & \hat{T}_{2,1} &= \bar{T}_{2,1} + t_{2,1} = -21,875 + 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 \\
 \hat{N}_{3,4} &= 0 & \hat{N}_{2,1} &= 0 \\
 \hat{T}_{4,3} &= \bar{T}_{4,3} + t_{4,3} = -12 + 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 & \hat{T}_{1,2} &= \bar{T}_{1,2} + t_{1,2} = -13,125 - 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 \\
 \\ 
 \hat{M}_{2,3} &= \bar{M}_{2,3} + m_{2,3} = 14,4 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 \hat{T}_{2,3} &= \bar{T}_{2,3} + t_{2,3} = -10,56 - 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 \\
 \hat{N}_{2,3} &= \hat{N}_{3,2} = 0 \\
 \hat{M}_{3,2} &= \bar{M}_{3,2} + m_{3,2} = -21,6 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 \hat{T}_{3,2} &= \bar{T}_{3,2} + t_{3,2} = -19,44 + 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 + 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3
 \end{aligned}$$

Na slici 2.14 reaktivni momenti u dodanoj vezi čvor 2 i 3 moraju iščeznuti, odnosno u navedenim čvorovima vrijede sljedeći uvjeti ravnoteže :

$$\begin{aligned}
 -\hat{M}_{2,1} - \hat{M}_{2,3} &= 0 \\
 -\hat{M}_{3,2} - \hat{M}_{3,4} &= 0
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza za konačne momente savijanja na krajevima elemenata u te jednadžbe ravnoteže nastaje sustav jednadžbi rješenja kojih su nepoznati kutovi zaokreta čvorova 2 i 3. Vrijednosti konačnih sila na krajevima elemenata određuju se uvrštavanjem rješenja sustava jednadžbi u izraze za konačne poopćene sile,  $\hat{M}_{i,j}$ ,  $\hat{T}_{i,j}$ ,  $\hat{N}_{i,j}$ . Sustav jednadžbi ima jedno realno rješenje, jer je sustav simetričan i pozitivno definitan (elementi na dijagonali sustava su pozitivni) i dijagonalno dominantan.

$$\begin{aligned}
 -7 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 &= -7,475 \\
 -2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 - 7 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 &= -41,6 \\
 \varphi_2 &= -\frac{247}{72EI} & \varphi_3 &= \frac{1105}{36EI}
 \end{aligned}$$

$$\hat{M}_{2,1} = -21,875 + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 = -21,875 + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \left( -\frac{247}{72EI} \right) = -23,93 \text{ kNm}$$

$$\hat{T}_{2,1} = -21,875 - 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 = -21,875 + 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \left( -\frac{247}{72EI} \right) = -22,29 \text{ kN}$$

$$\hat{N}_{2,1} = 0$$

$$\hat{T}_{1,2} = -13,125 + 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 = -13,125 - 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \left( -\frac{247}{72EI} \right) = -12,71 \text{ kN}$$

$$\hat{M}_{2,3} = 14,4 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 = 23,93 \text{ kNm}$$

$$\hat{T}_{2,3} = -10,56 - 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 = -17,10 \text{ kN}$$

$$\hat{N}_{2,3} = \hat{N}_{3,2} = 0$$

$$\hat{M}_{3,2} = -21,6 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 = 1,58 \text{ kNm}$$

$$\hat{T}_{3,2} = -19,44 + 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_2 + 6 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 = -12,90 \text{ kN}$$

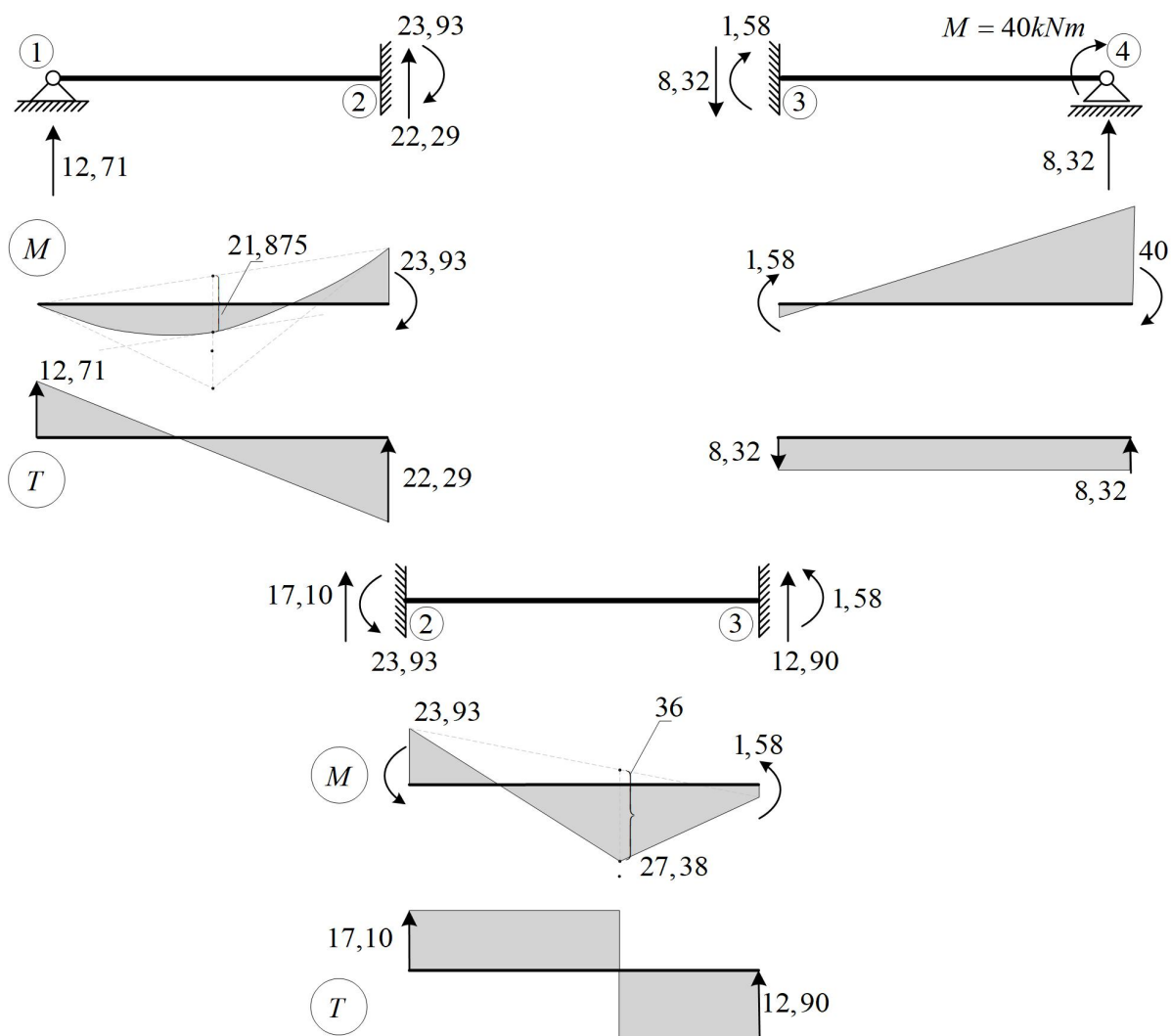
$$\hat{M}_{3,4} = -20 + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 = -20 + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{1105}{36EI} = -1,58 \text{ kNm}$$

$$\hat{T}_{3,4} = 12 - 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 = 12 - 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \frac{1105}{36EI} = 8,32 \text{ kN}$$

$$\hat{N}_{3,4} = 0$$

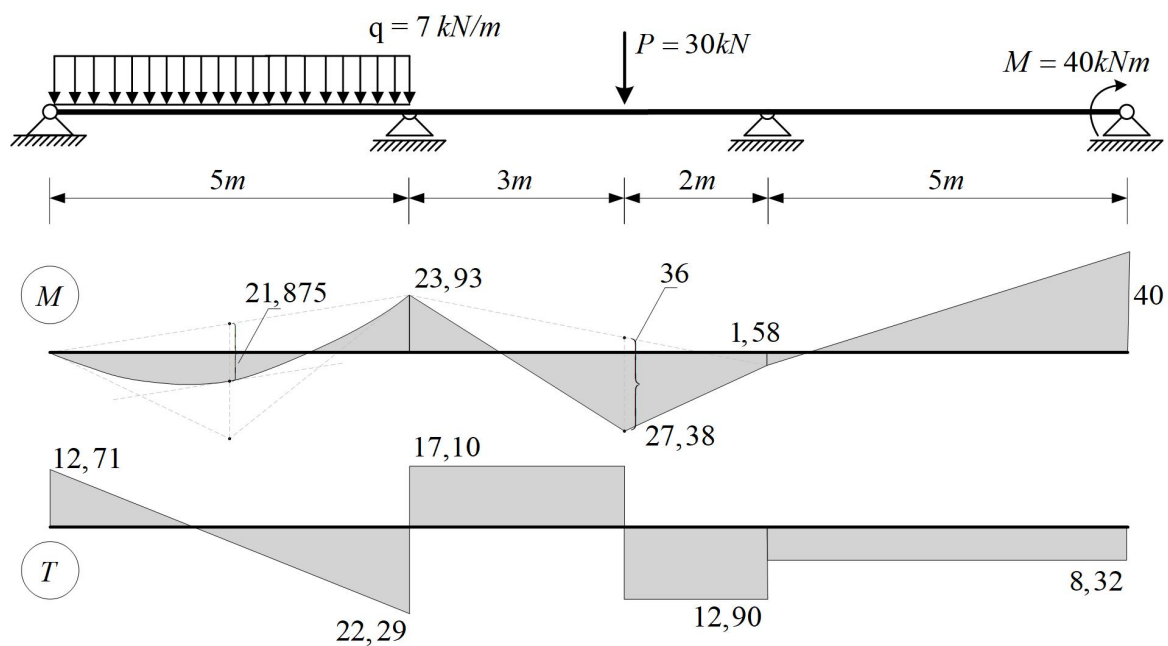
$$\hat{T}_{4,3} = -12 + 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \varphi_3 = -12 + 3 \cdot \frac{EI}{5^2} \cdot \frac{1105}{36EI} = -8,32 \text{ kN}$$

Na slici 2.15 prikazane su konačne poopćene sile na krajevima elemenata sa stvarnim smjerovima.



**Slika 2.15:** Konačne vrijednosti i smjerovi poopćenih sila na krajevima elemenata

Konačne vrijednosti i smjerovi sila odnose se na krajeve elemenata. Nakon konstruiranja dijagrama unutarnjih sila za svaki element (kao na slici 2.15), njihovim se povezivanjem na istu nultu liniju, određuju konačni dijagrami unutarnjih sila zadanog sistema (slika 2.16).

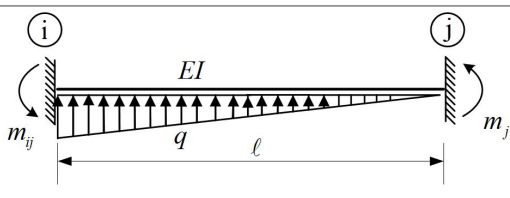
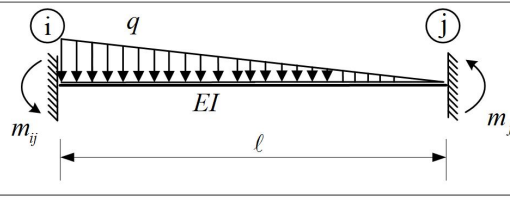
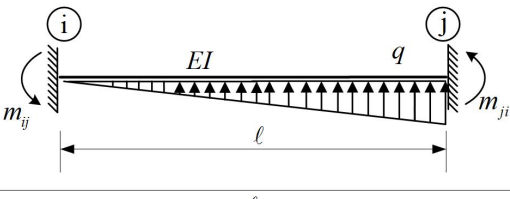
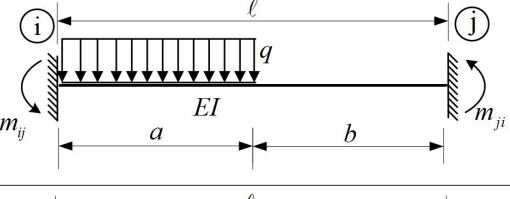
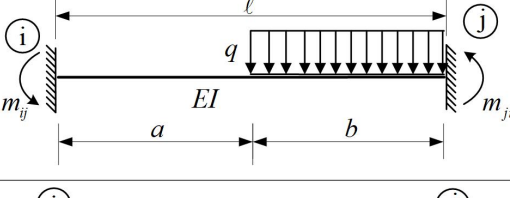
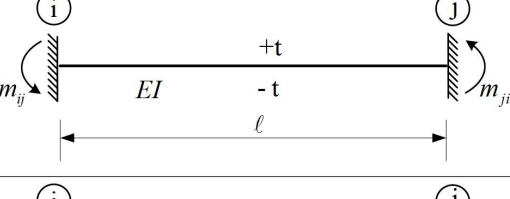
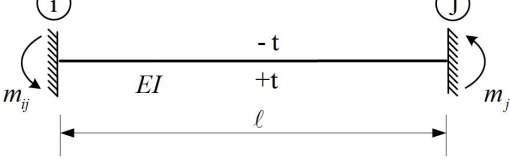


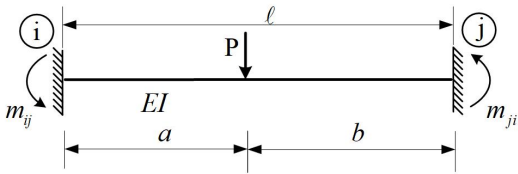
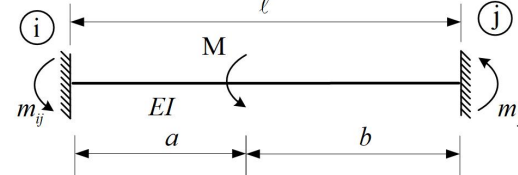
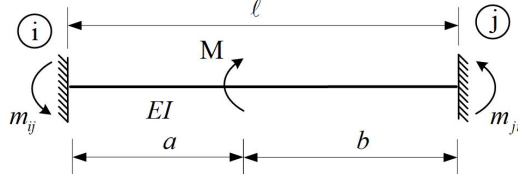
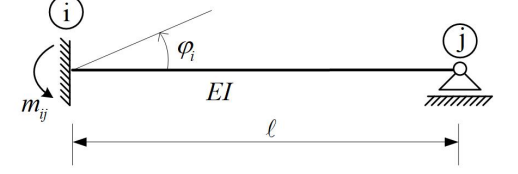
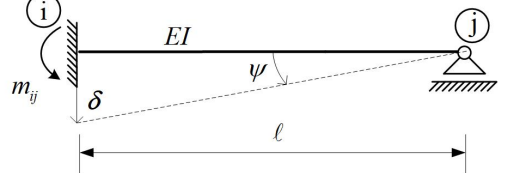
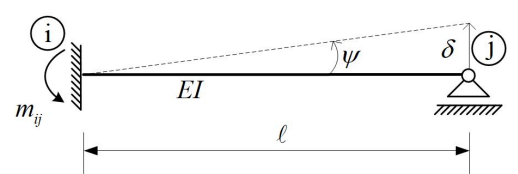
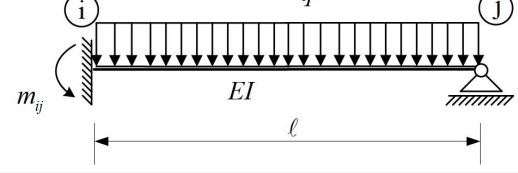
Slika 2.16: Dijagrami unutarnjih sila zadanoga sistema

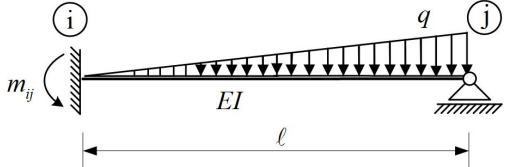
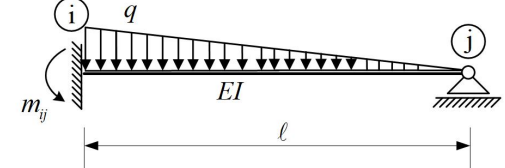
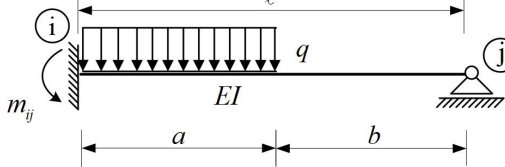
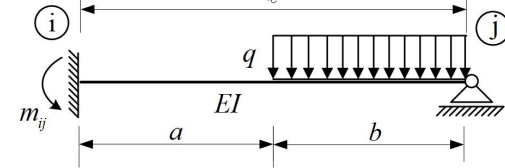
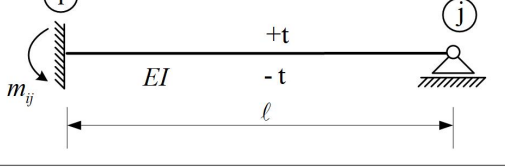
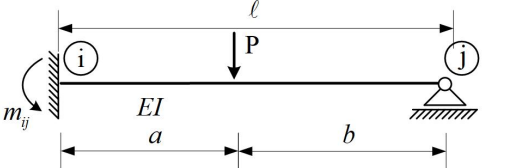
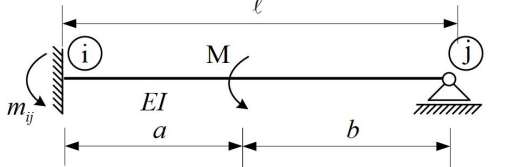


## 2.4 Dodatak 1: tablica momenata upetosti

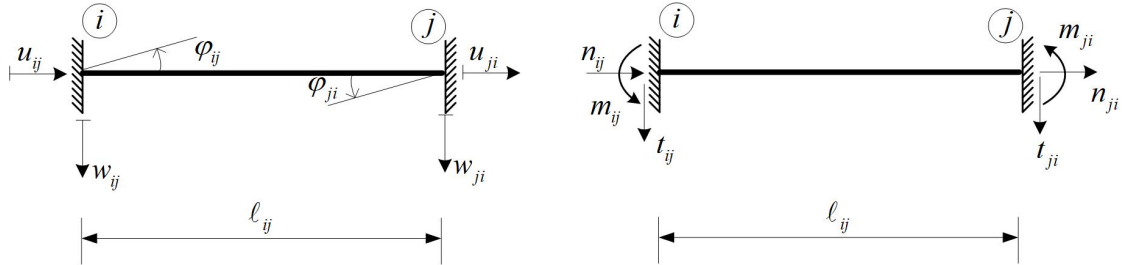
Statički sistem	$m_{ij}$	$m_{ji}$
	$4 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_i$	$2 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_i$
	$2 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_j$	$4 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_j$
	$-6 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \frac{\delta}{l}$	$-6 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \frac{\delta}{l}$
	$-6 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \frac{\delta}{l}$	$-6 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \frac{\delta}{l}$
	$\frac{q \cdot l^2}{12}$	$-\frac{q \cdot l^2}{12}$
	$-\frac{q \cdot l^2}{12}$	$\frac{q \cdot l^2}{12}$
	$\frac{q \cdot l^2}{30}$	$-\frac{q \cdot l^2}{20}$

Statički sistem	$m_{ij}$	$m_{ji}$
	$\frac{q \cdot \ell^2}{20}$	$-\frac{q \cdot \ell^2}{30}$
	$-\frac{q \cdot \ell^2}{20}$	$\frac{q \cdot \ell^2}{30}$
	$-\frac{q \cdot \ell^2}{30}$	$\frac{q \cdot \ell^2}{20}$
	$\frac{q \cdot a^2}{12\ell^2} \cdot (6\ell^2 - 8\ell \cdot a + 3a^2)$	$-\frac{q \cdot a^3}{12\ell^2} \cdot (4\ell - 3a)$
	$\frac{q \cdot b^3}{12\ell^2} \cdot (4\ell - 3b)$	$-\frac{q \cdot b^2}{12\ell^2} \cdot (6\ell^2 - 8\ell \cdot b + 3b^2)$
	$-\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot EI$	$\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot EI$
	$\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot EI$	$-\alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot EI$

Statički sistem	$m_{ij}$	$m_{ji}$
	$P \cdot \frac{a \cdot b^2}{\ell^2}$	$-P \cdot \frac{a^2 \cdot b}{\ell^2}$
	$M \cdot \frac{b \cdot (3a - \ell)}{\ell^2}$	$M \cdot \frac{a \cdot (3b - \ell)}{\ell^2}$
	$-M \cdot \frac{b \cdot (3a - \ell)}{\ell^2}$	$-M \cdot \frac{a \cdot (3b - \ell)}{\ell^2}$
	$3 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \varphi_i$	
	$-3 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \frac{\delta}{\ell}$	
	$-3 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \frac{\delta}{\ell}$	
	$\frac{q \cdot \ell^2}{8}$	

Statički sistem	$m_{ij}$	$m_{ji}$
	$\frac{7}{120} \cdot q \cdot \ell^2$	
	$\frac{1}{15} \cdot q \cdot \ell^2$	
	$\frac{q \cdot a^2}{8\ell^2} \cdot (4\ell^2 - \ell - b)$	
	$\frac{q \cdot a^2}{8\ell^2} \cdot (2\ell^2 - a^2)$	
	$-\frac{3}{2} \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot EI$	
	$P \cdot \frac{b \cdot (\ell^2 - b^2)}{2\ell^2}$	
	$M \cdot \frac{3a \cdot b}{2\ell^2} + \frac{M}{\ell} \cdot \left( \frac{a - 2b}{2} \right)$	

## 2.5 Dodatak 2: matrica krutosti štapnoga elementa



Slika 2.17: Obostrano upete greda  $i - j$ : prisilni pomaci čvorova i poopćene sile na krajevima

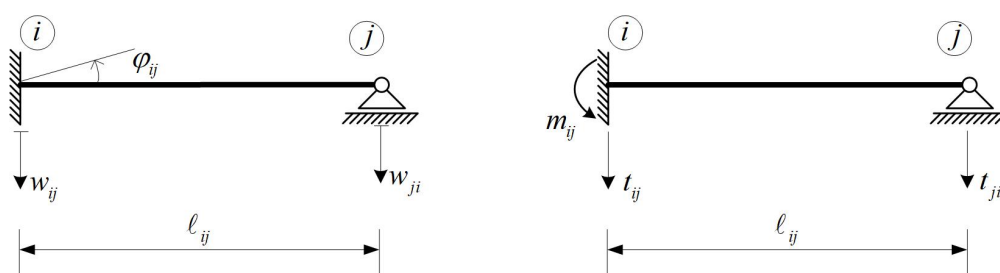
Za obostrano upetu gredu sa slike 2.17 metodom sila određeni su izrazi za sile na krajevima (poglavlje 1.2) za slučaj prisilnoga vertikalnog pomaka jednog kraja. Na jednak se način određuju izrazi za sile na krajevima obostrano upete grede u slučaju ostalih mogućih pomaka krajeva ( $w_{ji}, \varphi_{ji}, u_{ij}, u_{ji}$ ).

$$\begin{bmatrix} n_{ij} \\ t_{ij} \\ m_{ij} \\ n_{ji} \\ t_{ji} \\ m_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & -\frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 0 & -\frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} \\ 0 & \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} & \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}} & 0 & \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} & \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}} \\ -\frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} & 0 & \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} \\ 0 & -\frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} & \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}} & 0 & \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} & \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{ij} \\ w_{ij} \\ \varphi_{ij} \\ u_{ji} \\ w_{ji} \\ \varphi_{ji} \end{bmatrix}$$

Ako se sile na krajevima obostrano upete grede svrstaju u vektor (pri tom se odabire određeni poredak sila u vektoru) jednako kao i pomaci njezinih krajeva, tada se dobiva gornji matrični zapis odnosa sila na krajevima i pomaka krajeva grede (točnije, štapnoga elementa).

Matrica u koju su upisani faktori uz pomake krajeva iz izraza za poopćenu silu na kraju elementa zove se *matrica krutosti štapnog elementa* u lokalnom koordinatnom sustavu elementa.

Svaki član matrice predstavlja određenu krutost štapnoga elementa. Na primjer, ako je zadan pomak  $u_{ij} = 1$  (dok je vrijednost svih ostalih pomaka nula), sila  $n_{ij}$  jednaka je  $\frac{EA_{ij}}{\ell_{ij}}$  (element matrice krutosti u prvom retku i prvom stupcu) te se naziva *krutost elementa na uzdužnu silu*. Dakle, općenito i neformalno može se reći da je krutost jednaka sili (na kraju elementa) od jediničnoga pomaka (kraja elementa).



**Slika 2.18:** Jednostrano upeta gređa  $i - j$ : prisilni pomaci čvorova i poopćene sile na krajevima

Na jednak se način određuje matrica krutosti jednostrano upete gređe (slika 2.18):

$$\begin{bmatrix} t_{ij} \\ m_{ij} \\ t_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} & -\frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & -\frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} \\ -\frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & \frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}} & \frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} \\ \frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} & \frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^2} & \frac{3EI_{ij}}{\ell_{ij}^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{ij} \\ \varphi_{ij} \\ w_{ji} \end{bmatrix}$$

## 2.6 Dodatak 3: statička kondenzacija

Vrijednosti se poopćenih sila na kraju jednostrano upete grede mogu odrediti metodom sila (kao i u slučaju obostrano upete grede). Primjenom postupka naziva *statička kondenzacija* moguće je izraze za poopćene sile na kraju jednostrano upete grede izvesti na temelju već poznatih izraza. Poznati su izrazi za poopćene sile na kraju obostrano upete grede. Tada se primjenjuje statički uvjet: poznata je vrijednost momenta savijanja jednoga kraja jednostrano upete grede.

Za obostrano upetu gredu sa slike 2.17 vrijede sljedeći izrazi za konačne momente savijanja na krajevima:

$$\begin{aligned}\hat{M}_{i,j} &= \bar{M}_{i,j} + m_{i,j} = \bar{M}_{i,j} + 4 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_i + 2 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_j - 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{i,j} + 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{j,i} \\ \hat{M}_{j,i} &= \bar{M}_{j,i} + m_{j,i} = \bar{M}_{j,i} + 2 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_i + 4 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_j - 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{i,j} + 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{j,i}\end{aligned}$$

Na slici 2.18 na mjestu čvora  $j$  moment savijanja jednak je nuli. Na temelju tog statičkog uvjeta iz izraza za  $\hat{M}_{j,i}$  uklanja se zaokret čvora  $j$ :

$$\begin{aligned}\bar{M}_{j,i} + 2 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_i + 4 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_j - 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{i,j} + 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{j,i} &= 0 \\ \varphi_j &= -\bar{M}_{j,i} \cdot \frac{\ell_{i,j}}{4EI} - \frac{1}{2} \cdot \varphi_i + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\ell_{i,j}} \cdot w_{i,j} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\ell_{i,j}} \cdot w_{j,i} \\ \hat{M}_{i,j} &= \bar{M}_{i,j} + 4 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_i + 2 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \left( -\bar{M}_{j,i} \cdot \frac{\ell_{i,j}}{4EI} - \frac{1}{2} \cdot \varphi_i + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\ell_{i,j}} \cdot w_{i,j} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\ell_{i,j}} \cdot w_{j,i} \right) \\ &\quad - 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{i,j} + 6 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{j,i} \\ \hat{M}_{i,j} &= \bar{M}_{i,j} - \frac{1}{2} \cdot \bar{M}_{j,i} + 3 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_i - 3 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{i,j} + 3 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{j,i}\end{aligned}$$

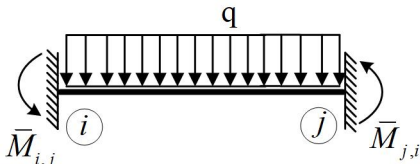
Dobiveni moment savijanja  $\hat{M}_{i,j}$  izraz je za konačni moment savijanja na kraju  $i$  jednostrano upete grede te se može zapisati kao  $\hat{M}_{i,j} = \bar{M}_{i,j}^c + m_{i,j}$ , gdje su

$$\bar{M}_{i,j}^c = \bar{M}_{i,j} - \frac{1}{2} \cdot \bar{M}_{j,i}$$

$$m_{i,j} = 3 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_i - 3 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{i,j} + 3 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}} \cdot \varphi_j + 3 \cdot \frac{EI}{\ell_{i,j}^2} \cdot w_{j,i}$$

Moment savijanja  $m_{i,j}$  zapravo je drugi redak matrice krutosti jednostrano upete grede pomnožen vektorom pomaka krajeva.

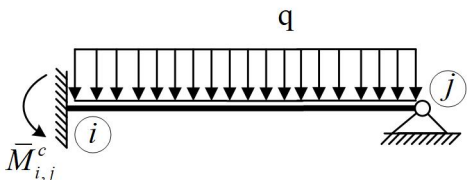
Na temelju izraza za *kondenzirani moment upetosti* jednostrano upete grede ( $\bar{M}_{i,j}^c$ ) mogu se odrediti momenti upetosti jednostrano upete grede poznavajući momente obostrano upete grede. Na primjer, za obostrano upetu gredu opterećenu jednolikim kontinuiranim opterećenjem  $q$ , momenti savijanja na mjestu čvora  $i$  i  $j$  su



$$\bar{M}_{i,j} = \frac{q \cdot \ell^2}{12}$$

$$\bar{M}_{j,i} = -\frac{q \cdot \ell^2}{12}$$

Ako se ti momenti uvrste u izraz za kondenzirani moment savijanja jednostrano upete grede, dobivena vrijednost jednaka je onoj iz tablice momenata upetosti:



$$\bar{M}_{i,j}^c = \bar{M}_{i,j} - \frac{1}{2} \cdot \bar{M}_{j,i}$$

$$\bar{M}_{i,j}^c = \frac{q \cdot \ell^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{q \cdot \ell^2}{12} \right)$$

$$\bar{M}_{i,j}^c = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$$

Isto načelo vrijedi neovisno o vrsti opterećenja.



## Poglavlje 3

### Inženjerska metoda pomaka

### 3.1 O inženjerskoj metodi pomaka

U inženjerskoj metodi pomaka nepoznanice nisu vrijednosti svih (mogućih) translacijskih pomaka čvorova statičkoga sistema (kao što je to slučaj u općoj metodi pomaka). Budući da su promjene duljina elemenata sistema dovoljno male, može se smatrati da su elementi sistema (štapovi) apsolutno kruti u uzdužnom smjeru. To je pojednostavnjenje temelj inženjerske metode pomaka, a uzrokuje (često) znatno smanjenje broja nepoznanica [16, 27, 29].

Dakle, nepoznanice nepomičnih statičkih sistema u inženjerskoj metodi pomaka kutovi su zaokreta krutih i mješovito kruto-zglobnih čvorova. U slučaju pomičnih sistema, uz navedene kutove zaokreta čvorova nepoznanice su i iznosi neovisnih translacijskih pomaka.

Pretvaranjem zadanoga statičkog sistema u *pridruženu rešetku* (koja nastaje omogućavanjem rotacija u ležajevima kao i neovisnih rotacija elemenata priključenih u čvorove s prije definiranim nepoznatim kutovima zaokreta) određuje se broj neovisnih translacija koje se proglašavaju dodatnim nepoznanicama u inženjerskoj metodi pomaka. Broj neovisnih translacija jednak je stupnju slobode gibanja pridružene rešetke (koja se često naziva *zglobnom shemom*).

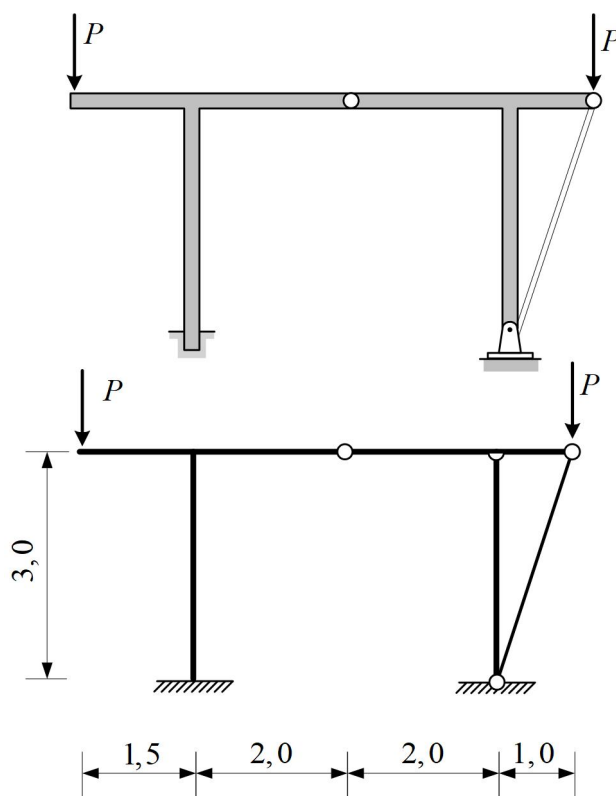
Za svaku se definiranu neovisnu translaciju skicira plan pomaka, pri čemu se elementi zglobne sheme smatraju apsolutno krutim diskovima, a pomaci dovoljno malima (diskovi se zaokreću po okomicama na početne položaje, a kutova zaokreta jednaki su tangensima tih kutova).

Sustav jednadžbi s nepoznanicama koje su nepoznati kutovi zaokreta i neovisne translacije oblikuju jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima (s nepoznatim rotacijama) te jednadžbe virtualnih radova na neovisnim translacijskim pomacima, primjenjujući pritom teorem o virtualnim pomacima u mehanici krutih tijela (što je alternativni iskaz uvjeta ravnoteže). Podsjetimo, ako je ukupni rad aktivnih sila na bilo kojim virtualnim pomacima jednak nuli, tada su točka, kruto tijelo ili sistem u ravnoteži (a teorem ima i obrat). Nadalje, virtualnim se pomacima smatraju zamišljeni, mali i mogući pomaci sistema (a upravo su takvi nepoznati neovisni translacijski pomaci).

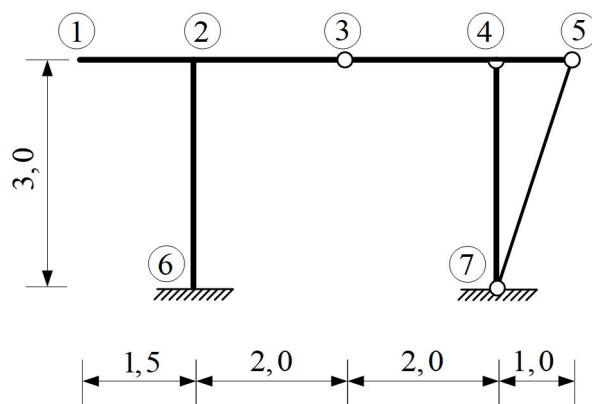
Jednadžbe virtualnih radova zamjenjuju jednadžbe ravnoteže zbrojeva sila u čvorovima u smjeru neovisnih translacijskih pomaka.

## 3.2 Pomični okvir

Za zadani statički sistem sa slike 3.1 inženjerskom će se metodom pomaka odrediti dijagrami unutarnjih sila. Pritom je vrijednost umnoška  $EI = 45\,000\text{ kNm}^2$  dok je sila  $P = 35\text{ kN}$ .



Slika 3.1: Skica statičkoga sistema i njegova proračunska interpretacija

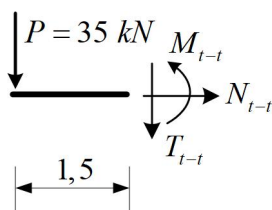


Slika 3.2: Skica statičkog sistema s oznakama čvorova

Statički je sistem jedanput statički neodređen. Definirano je sedam čvorova (slika 3.2) od kojih su dva ležajna (čvor 6 i 7).

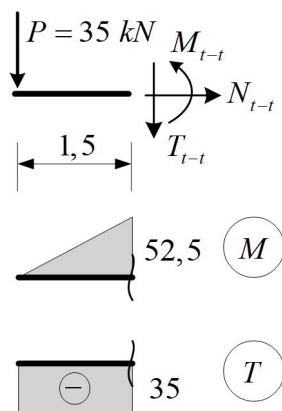
Element koji povezuje čvorove 1 i 2 predstavlja statički određeni dio zadanoga sistema. Naime, presijecajući element 1–2 neposredno prije njegova spoja s ostatkom zadanoga sistema (slika 3.3), moguće je samo na temelju jednadžbi ravnoteže odrediti vrijednosti unutarnjih sila u tom presjeku:

$$\begin{aligned} \Sigma N = 0 & \quad \Sigma T = 0 & \quad \Sigma M = 0 \\ N_{t-t} = 0 & \quad T_{t-t} + P = 0 & \quad M_{t-t} + P \cdot 1,5 = 0 \\ T_{t-t} = -35 \text{ kN} & \quad M_{t-t} = -52,5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

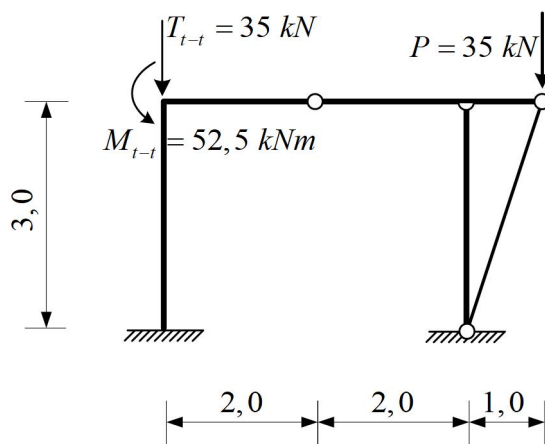


**Slika 3.3:** Određivanje vrijednosti unutarnjih sila u presjeku neposredno prije čvora 2

Prema tome, na elementu 1 – 2 poznati su dijagrami unutarnjih sila (slika 3.4), te se on može isključiti iz daljnjega proračuna zamjenom njegova utjecaja na ostatak sistema silama u presjeku spoja elementa 1 – 2 i ostatka statičkoga sistema (slika 3.5).



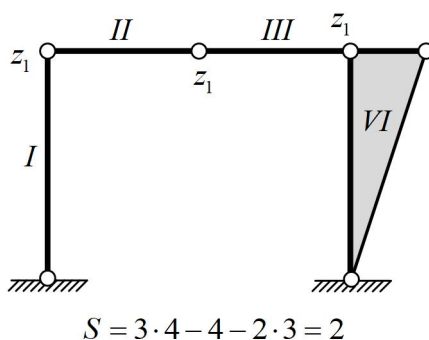
**Slika 3.4:** Dijagrami unutarnjih sila na elementu 1 – 2



**Slika 3.5:** Zadani statički sistem bez elementa 1 – 2

S obzirom na to da u čvorovima 2 i 4 nisu poznati iznosi (svih) momenata savijanja elemenata koji se u navedene čvorove priključuju, kao niti njihovi zaokreti, ti se zaokreti proglašavaju nepoznanicama u inženjerskoj metodi pomaka. Dakle,  $\varphi_2 = ?$  i  $\varphi_4 = ?$ .

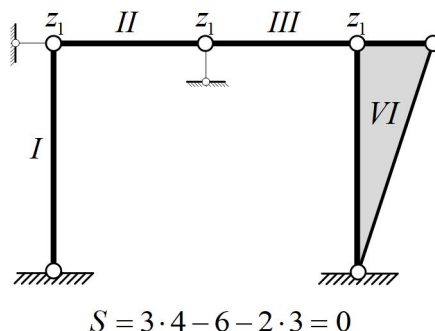
Čvorovi (točke) u ravnini osim rotacijskih imaju i translacijske stupnjeve slobode gibanja, te se stoga u inženjerskoj metodi pomaka osim zaokreta mogu javiti i nepoznati translacijski pomaci. Ima li zadani statički sistem dodatnu (ili dodatne) nepoznanicu u obliku nepoznate translacije, "otkriva" zglobna shema (slika 3.6).



**Slika 3.6:** Skica zglobne sheme zadanoga statičkog sistema

Naime, ako se u svim definiranim čvorovima zadanoga sistema oslobodi rotacija, nastaje zglobna shema (slika 3.6). Pritom tri zglobna štapa povezana u obliku trokuta tvore kruto tijelo, što znači da su translacijski pomaci i zaokreti ta tri zglobna štapa jednaki. Stoga se u zglobnoj shemi tri zglobna štapa koji tvore trokut

promatraju kao jedan disk. Stupanj slobode gibanja zglobne sheme sa slike 3.6 jest +2, dakle riječ je o mehanizmu ( $S > 0$ ) s moguće dvije neovisne translacije.



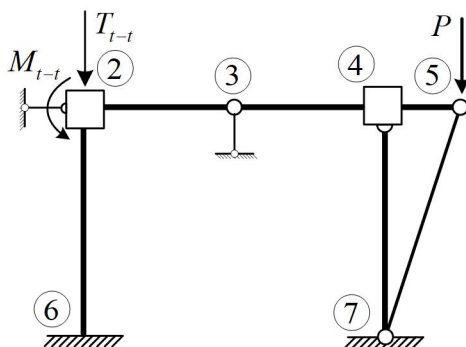
**Slika 3.7:** Skica zglobne sheme sa spriječenim translacijama

Dodavanjem veza na zglobnu shemu koje sprječavaju vertikalni pomak čvora 3 (oznake  $w_3$ ) i horizontalni pomak čvorova 2, 3, 4 i 5 (oznake  $u$ ), stupanj je slobode gibanja jednak nuli (slika 3.7), što znači da je sistem postao geometrijski nepromjenjiv, odnosno statički određen. Stoga su translacijski pomaci (ili kraće rečeno pomaci)  $w_3$  i  $u$  dodatne nepoznanice u inženjerskoj metodi pomaka.

Sumarno, prema inženjerskoj metodi pomaka zadani statički sistem ima četiri nepoznanice:  $\varphi_2 = ?$ ,  $\varphi_4 = ?$ ,  $w_3 = ?$  i  $u = ?$ .

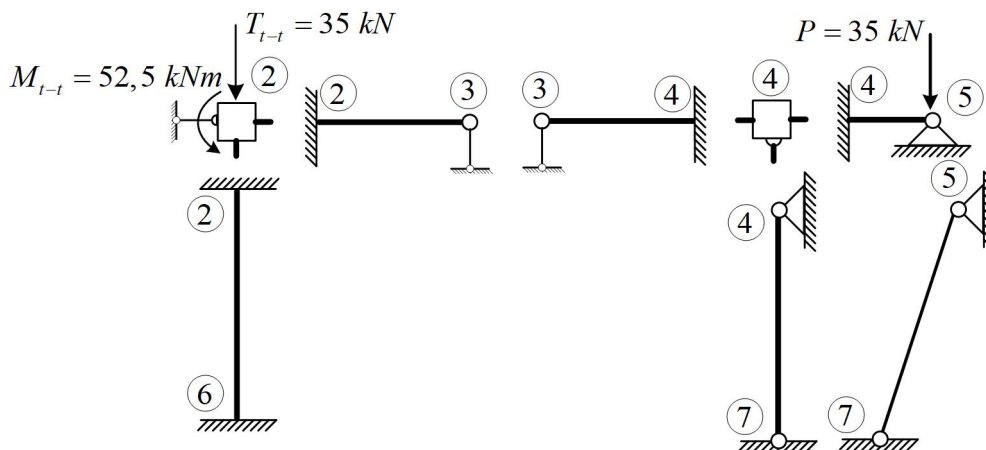
U prvoj fazi inženjerske metode pomaka svi se definirani nepoznati pomaci (pri tom se misli i na translacijske pomake i na zaokrete čvorova) sprečavaju. Ta se faza stoga naziva *fazom spriječenih pomaka* ili *fazom upetosti*. Translacijski se pomaci sprečavaju dodavanjem zglobnih štapova u smjeru i na mjestu nepoznatoga pomaka, dok se rotacije čvorova sprečavaju fiksiranjem čvorova za podlogu zamišljenim momentnim spojem (na slici 3.8 u čvorovima 2 i 4 za prikaz je spriječenih zaokreta upotrijebljen kvadrat). Dodavanjem tih veza nastaje statički sistem s većim brojem prekobrojnih veza u odnosu na zadani sistem koji se naziva osnovnim sistemom (slika 3.8). Prisjetimo se, u metodi sila osnovni sistem nastaje raskidanjem prekobrojnih (vanjskih ili unutarnjih) veza broj kojih je jednak stupnju slobode gibanja statički neodređenoga zadanog sistema. Prema tome, osnovni je sistem u metodi sila u pravilu statički određen, iz čega se može zaključiti da se statički određeni sistemi ne mogu rješavati primjenom metode sila. S druge strane, u nastavku će se pokazati da se inženjerskom metodom pomaka (kao i "točnom" metodom pomaka) mogu odrediti sile i na krajevima elemenata statički određeni zadanog sistema.

Sistem sa spriječenim pomacima rastavlja se na elemente: obostrano upete kao što je element 2 – 6 i/ili jednostrano upete kao što je element 2 – 3 (slika 3.9).



Slika 3.8: Faza upetosti: skica spriječenih pomaka

Elementi se u fazi upetosti opterećuju zadanim vanjskim opterećenjem za koje treba odrediti vrijednosti momenata savijanja na krajevima elemenata (nastalih zbog djelovanja tog opterećenja). Momente savijanja na krajevima elemenata u fazi upetosti nazivamo *momentima upetosti*,  $\overline{M}_{i,j}$ . Opterećenje koje djeluje u čvoru zaokret kojega se sprečava (na primjer, čvor 2) ostaje u tom čvoru, jer se elementi izdvajaju iz sistema sa spriječenim pomacima presijecanjem neposredno prije spoja elementa i upetoga čvora.



Slika 3.9: Faza upetosti: rastav na elemente i čvorove

Sila  $P$  djeluje u čvoru 5 koji je ujedno i (nepomični) ležaj te se u cijelom iznosu prenosi u ležajnu reakciju ne uzrokujući pritom moment upetosti na drugom (upetom)

kraju elementa 4 – 5. Dakle, za zadano vanjsko opterećenje sve su vrijednosti momenata upetosti nula:

$$\bar{M}_{6,2} = \bar{M}_{2,6} = \bar{M}_{2,3} = \bar{M}_{4,3} = \bar{M}_{4,5} = 0$$

Nakon faze upetosti (u kojoj su nepoznate translacije i zaokreti spriječeni) slijedi faza u kojoj se istodobno oslobađaju (dopuštaju) svi prethodno spriječeni pomaci. Ta se faza naziva *fazom dopuštenih pomaka*.

Pritom se čvorovi zaokreću uvijek u smjeru dogovorene pozitivne rotacije, a reaktivni momenti na krajevima elemenata od utjecaja dopuštenih zaokreta čvorova 2 i 4 jednaki su (prema izrazima iz tablica momenata upetosti):

$$\begin{aligned} m_{2,6}(\varphi_2) &= 4 \cdot \frac{EI_{2,6}}{\ell_{2,6}} \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 & m_{4,3}(\varphi_4) &= 3 \cdot \frac{EI_{4,3}}{\ell_{4,3}} \cdot \varphi_4 = 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_4 \\ m_{6,2}(\varphi_2) &= 2 \cdot \frac{EI_{2,6}}{\ell_{2,6}} \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 & m_{4,5}(\varphi_4) &= 3 \cdot \frac{EI_{4,5}}{\ell_{4,5}} \cdot \varphi_4 = 3 \cdot \frac{EI}{1,0} \cdot \varphi_4 \\ m_{2,3}(\varphi_2) &= 3 \cdot \frac{EI_{2,3}}{\ell_{2,3}} \cdot \varphi_2 = 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_2 & & \end{aligned}$$

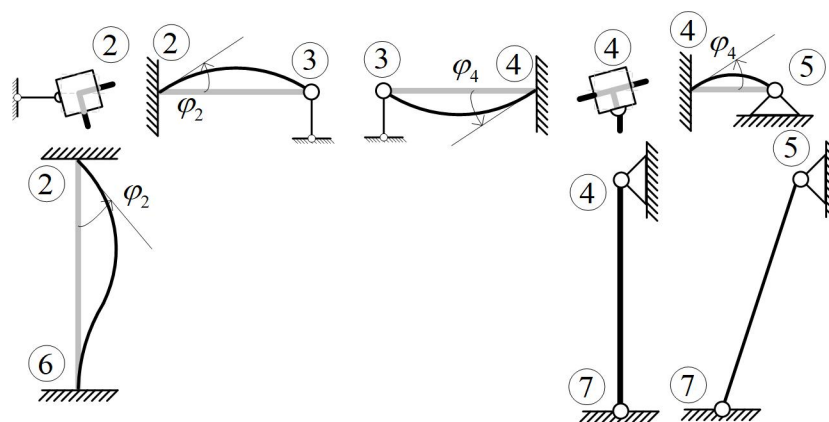
Tim vrijednostima treba pribrojiti iznose momenata savijanja na krajevima elemenata koji nastaju zbog dopuštanja translacijskih pomaka  $w_3$  i  $u$ . Koji se elementi zakreću (i za koliki kut) dopuštanjem navedenih pomaka, određuje se na temelju plana pomaka.

Budući da zadani statički sistem ima dva nepoznata translacijska pomaka, za svaki treba skicirati plan pomaka dopuštajući naizmjenično jedan od njih uz istodobno sprječavanje drugoga. Na slikama 3.11 i 3.12 prikazani su planovi pomaka za translacijske pomake  $w_3$  i  $u$ .

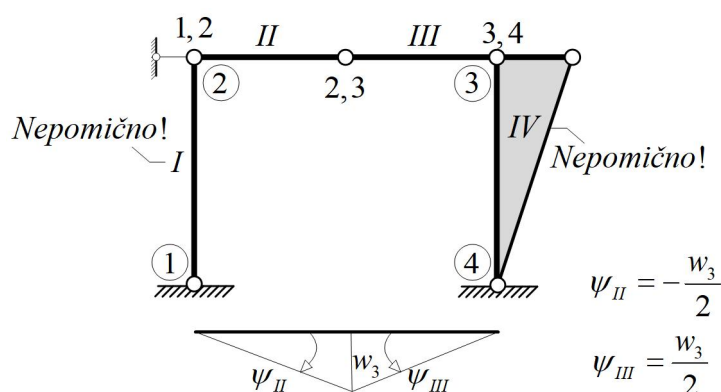
Napomena: pomaci su u planu pomaka puno manji od duljina elemenata, riječ je o malim pomacima i malim kutovima zaokreta, te vrijedi  $\varphi \approx \tan(\varphi)$ .

U planu pomaka sa slika 3.11 i 3.12 disk s oznakom *IV* tvore tri elementa, odnosno tri zglobno spojena štapa. S obzirom na to da su tri zglobna štapa povezana u trokut pomaci kojega su jednaki onima krutoga tijela, zglobne štapove možemo smatrati dijelom jednoga krutoga diska.



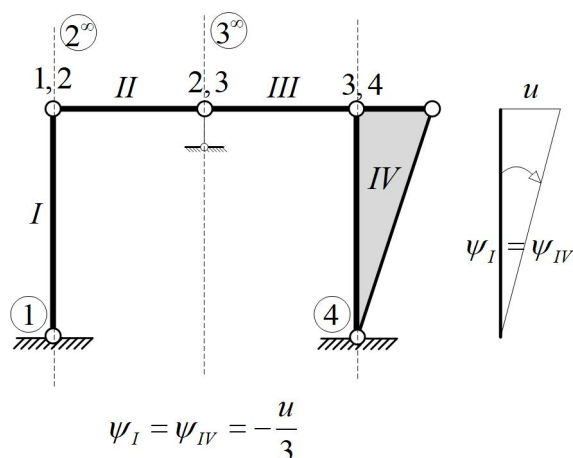


Slika 3.10: Faza dopuštenih pomaka: zakretanja čvorova 2 i 4


 Slika 3.11: Faza dopuštenih pomaka: plan pomaka za  $w_3$ 

Naravno, isti se plan pomaka dobiva i ako se tri zglobna štapa promatraju svaki kao posebno tijelo (disk), pri čemu su njihovi zaokreti međusobno jednaki, jer rotiraju oko iste nepomične točke (apsolutnoga pola).

Nadalje, u planu pomaka sa slike 3.11 diskovi *I* i *IV* su nepomični. Razlog leži u činjenici da se prilikom određivanja polova apsolutni polovi diska *I* i njegova "susjeda" (diska *II*) nalaze na disku *I* iz čega slijedi da su sve njegove točke nepomične. Isto se može zaključiti za disk *IV*. Odnosno, pažljivijim promatranjem može se uočiti da su diskovi *I* i *IV* zapravo proste grede.



**Slika 3.12:** Faza dopuštenih pomaka: plan pomaka za  $u$

Reaktivni momenti na krajevima elemenata od utjecaja dopuštenih translacija  $w_3$  i  $u$  su (prema izrazima iz tablica momenata upetosti)

$$\begin{aligned}
 m_{2,3}(w_3) &= -3 \cdot \frac{EI_{2,3}}{\ell_{2,3}} \cdot \psi_{II} = -3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \left(-\frac{w_3}{2}\right) = \frac{3EI}{4} \cdot w_3 \\
 m_{4,3}(w_3) &= -3 \cdot \frac{EI_{4,3}}{\ell_{4,3}} \cdot \psi_{III} = -3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \left(\frac{w_3}{2}\right) = \frac{-3EI}{4} \cdot w_3 \\
 m_{2,6}(u) &= -6 \cdot \frac{EI_{2,6}}{\ell_{2,6}} \cdot \psi_I = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \left(-\frac{u}{3}\right) = \frac{2EI}{3} \cdot u \\
 m_{6,2}(u) &= -6 \cdot \frac{EI_{2,6}}{\ell_{2,6}} \cdot \psi_I = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \left(-\frac{u}{3}\right) = \frac{2EI}{3} \cdot u \\
 m_{4,5}(u) &= -3 \cdot \frac{EI_{4,5}}{\ell_{4,5}} \cdot \psi_{IV} = -3 \cdot \frac{EI}{1} \cdot \left(-\frac{u}{3}\right) = EI \cdot u
 \end{aligned}$$

Ukupni momenti savijanja na krajevima elemenata u fazi dopuštenih pomaka nastaju zbrajanjem momenata od dopuštenih zaokreta čvorova i dopuštenih translacija,  $m_{i,j} = m_{i,j}(\varphi_i) + m_{i,j}(\delta_i)$ :

$$\begin{aligned}
 m_{2,3} &= 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_2 + \frac{3EI}{4} \cdot w_3 \\
 m_{4,3} &= 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{4} \cdot w_3 \\
 m_{2,6} &= 4 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 + \frac{2EI}{3} \cdot u \\
 m_{6,2} &= 2 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 + \frac{2EI}{3} \cdot u \\
 m_{4,5} &= 3 \cdot \frac{EI}{1,0} \cdot \varphi_4 + \frac{3EI}{1} \cdot u
 \end{aligned}$$

Superpozicijom dva koraka inženjerske metode pomaka osnovni se sistem dovodi u stanje pomaka jednako onom zadanoga sistema. Konačni su momenti savijanja na krajevima elemenata jednaki stoga zbroju momenata iz obje faze inženjerske metode pomaka,  $M_{i,j} = \bar{M}_{i,j} + m_{i,j}$ :

$$\begin{aligned}
 M_{2,3} &= 0 + 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_2 + \frac{3EI}{4} \cdot w_3 \\
 M_{4,3} &= 0 + 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{4} \cdot w_3 \\
 M_{2,6} &= 0 + 4 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 + \frac{2EI}{3} \cdot u \\
 M_{6,2} &= 0 + 2 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 + \frac{2EI}{3} \cdot u \\
 M_{4,5} &= 0 + 3 \cdot \frac{EI}{1,0} \cdot \varphi_4 + \frac{3EI}{1} \cdot u
 \end{aligned}$$

Za određivanje vrijednosti nepoznatih pomaka i rotacija potrebne su četiri jednadžbe s nepoznicama u obliku nepoznatih zaokreta i translacija zadanoga statičkog sistema.

Zahtjev iščezavanja reaktivnih sila (i momenata) u dodanim vezama (dodanih prilikom tvorbe osnovnoga sistema) daje sustav jednadžbi iz kojega se mogu odrediti nepoznati pomaci (i zaokreti) zadanoga sistema, a taj je zahtjev jednak uvjetu ravnoteže čvorova zadanoga sistema.

Analogno uvjetu iščezavanja momenta u dodanom momentnom spoju (u čvorovima 2 i 4), treću i četvrtu jednadžbu pišemo kao uvjet iščezavanja reaktivne sile u dodanim vezama (zglobnim štapovima koji sprečavaju pomake  $w_3$  i  $u$ ). Taj se zahtjev

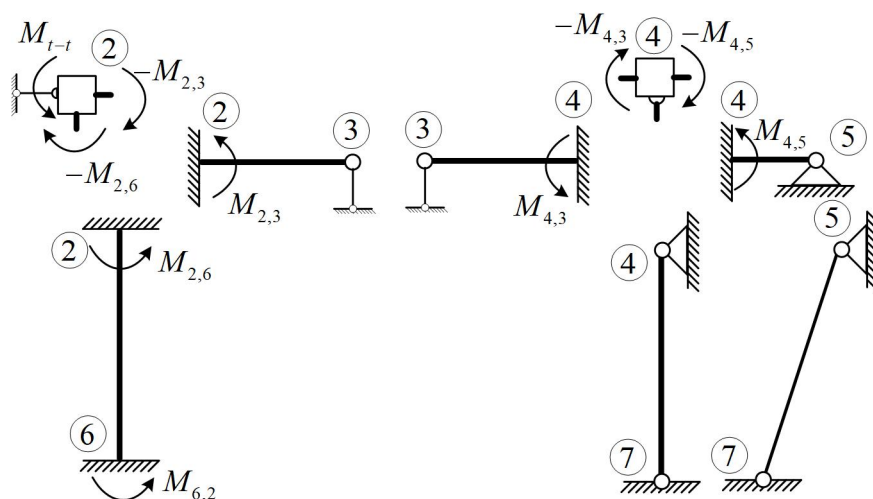
može iskazati kao neki uvjet ravnoteže pogodno odabranoga dijela sistema. Međutim, često je dodatnu jednadžbu lakše izvesti primjenom *teorema o virtualnim pomacima* u mehanici krutih tijela (što je zapravo alternativni iskaz uvjeta ravnoteže).

Teorem glasi: ako je ukupni rad aktivnih sila na bilo kojim virtualnim pomacima jednak nuli, tada je kruto tijelo u ravnoteži. Virtualni su pomaci u mehanici krutih tijela zamišljeni „dovoljno mali pomaci” omogućeni u sistemu. Dakle, virtualnim se pomacima mogu smatrati i pomaci  $w_3$  i  $u$  (pritom im se dodjeljuje jedinična vrijednost).

Zaključno, u čvorovima s nepoznatim zaokretima pišemo uvjete iščezavanja momenata ( $\sum M_{i,j} = 0$ , slika 3.13),

$$\begin{aligned} -M_{2,6} - M_{2,3} + M_{t-t} &= 0 \\ -M_{4,3} - M_{4,5} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ -4 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 - \frac{2EI}{3} \cdot u - 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_2 - \frac{3EI}{4} \cdot w_3 + 52,5 &= 0 \\ -3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_4 + \frac{3EI}{4} \cdot w_3 - 3 \cdot \frac{EI}{1,0} \cdot \varphi_4 - EI \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

dok se na temelju planova pomaka za  $w_3$  i  $u$  određuju zbrojevi radova vanjskih i unutarnjih sila koji moraju (prema navedenom teoremu) biti jednaki nuli.



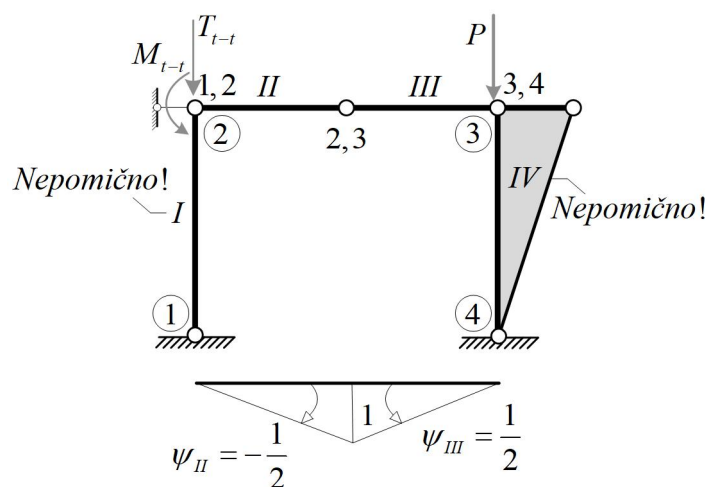
Slika 3.13: Skica konačnih momenata krajeva elemenata i u čvorovima 2 i 4

Na temelju plana pomaka za virtualni pomak  $w_3 = 1$  određuje se ukupan rad aktivnih sila (vanjskih i unutarnjih) koje vrše rad na virtualnim pomacima sa slike 3.14:

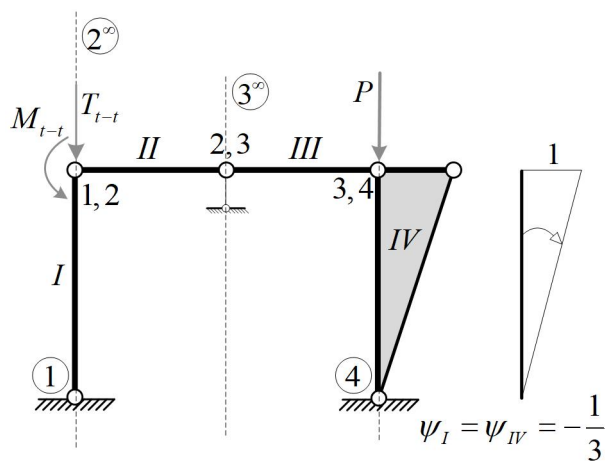
$$M_{2,3} \cdot \psi_{II} + M_{4,3} \cdot \psi_{III} = 0$$

.....

$$\left( 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_2 + \frac{3EI}{4} \cdot w_3 \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + \left( 3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{4} \cdot w_3 \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \right) = 0$$



Slika 3.14: Plan pomaka za virtualni pomak  $w_3 = 1$  s naznačenim vanjskim opterećenjem



Slika 3.15: Plan pomaka za virtualni pomak  $u = 1$  s naznačenim vanjskim opterećenjem

Na temelju plana pomaka za virtualni pomak  $u = 1$  određuje se ukupan rad aktivnih sila (vanjskih i unutarnjih) koje vrše rad na virtualnim pomacima sa slike 3.15:

$$\begin{aligned} & (M_{2,6} + M_{6,2}) \cdot \psi_I + M_{4,5} \cdot \psi_{IV} = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \left( 4 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 + \frac{2EI}{3} \cdot u + 2 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 + \frac{2EI}{3} \cdot u \right) \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) + \left( 3 \cdot \frac{EI}{1,0} \cdot \varphi_4 + \frac{3EI}{1,0} \cdot u \right) \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) = 0 \end{aligned}$$

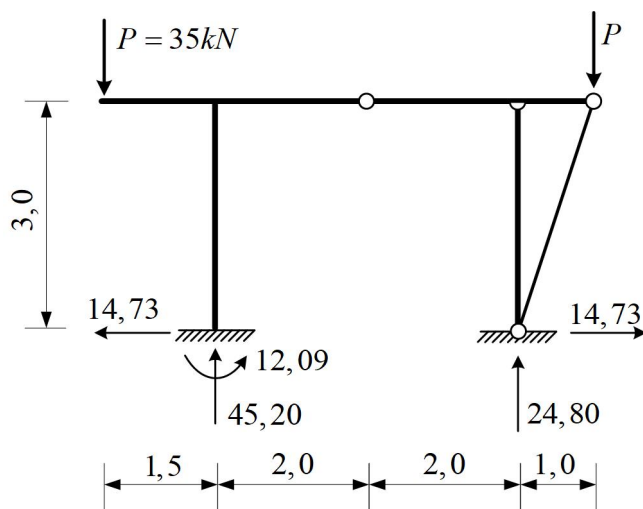
Rad vanjskog opterećenja u tim jednadžbama (virtualnoga rada) jednak je nuli, jer na mjestu i na pravcu sila  $P$  i  $T_{t-t}$ , u oba plana pomaka, ne postoji pomak. Koncentrirani moment  $M_{t-t}$  ne vrši rad (u slučaju obje jednadžbe virtualnog rada), jer je mjesto njegova djelovanja čvor (s indeksom 2), a u planu pomaka zaokreću se elementi kao kruta tijela.

Sustav jednadžbi i njegovo rješenje, iznosi momenata savijanja na krajevima elemenata, skica stvarnih djelovanja i dijagrami unutarnjih sila prikazani su u nastavku.

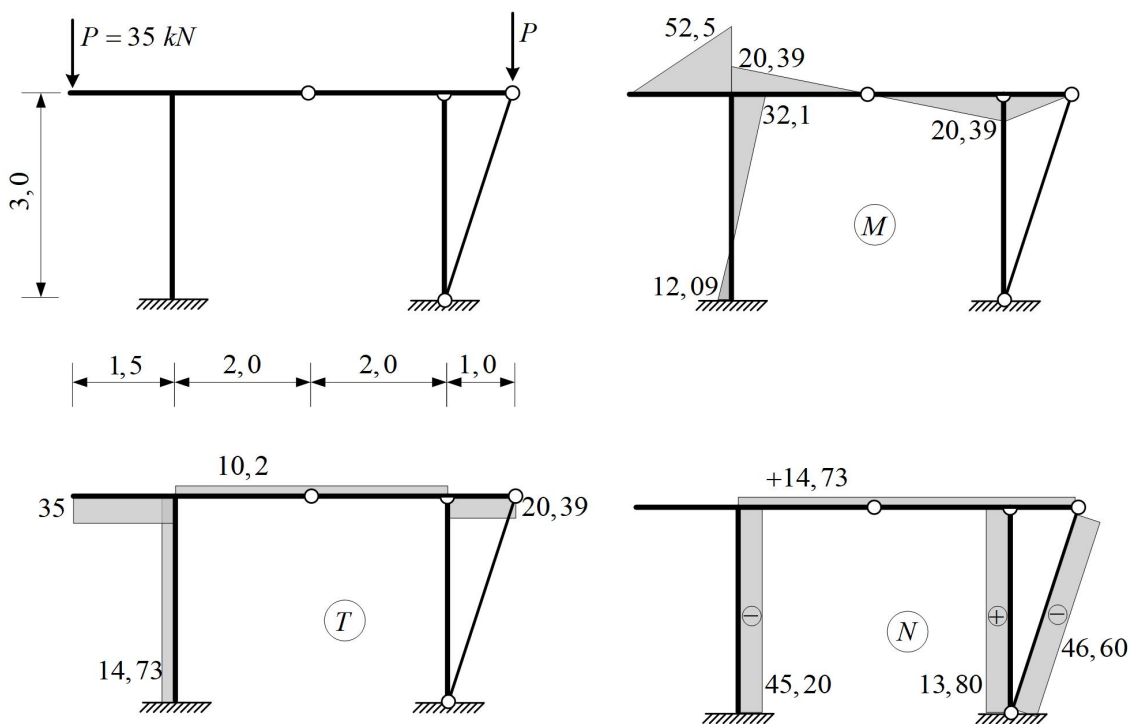
$$\begin{aligned} -17 \cdot \frac{EI}{6} \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{4} \cdot w_3 - \frac{2EI}{3} \cdot u &= -52,5 \\ 0 \cdot \varphi_2 - 9 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \varphi_4 + \frac{3EI}{4} \cdot w_3 - EI \cdot u &= 0 \\ -3 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{4} \cdot w_3 + 0 \cdot u &= 0 \\ -2 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2 - EI \cdot \varphi_4 + 0 \cdot w_3 - 13 \cdot \frac{EI}{9} \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \frac{16695}{556 \cdot EI}, \quad \varphi_4 = -\frac{1575}{556 \cdot EI}, \quad w_3 = -\frac{9135}{278 \cdot EI}, \quad u = -\frac{6615}{556 \cdot EI}$$

$$\begin{aligned} M_{2,3} &= 20,39 \text{ kNm} \\ M_{4,3} &= 20,39 \text{ kNm} \\ M_{2,6} &= 32,10 \text{ kNm} \\ M_{6,2} &= 12,09 \text{ kNm} \\ M_{4,5} &= -20,39 \text{ kNm} \end{aligned}$$



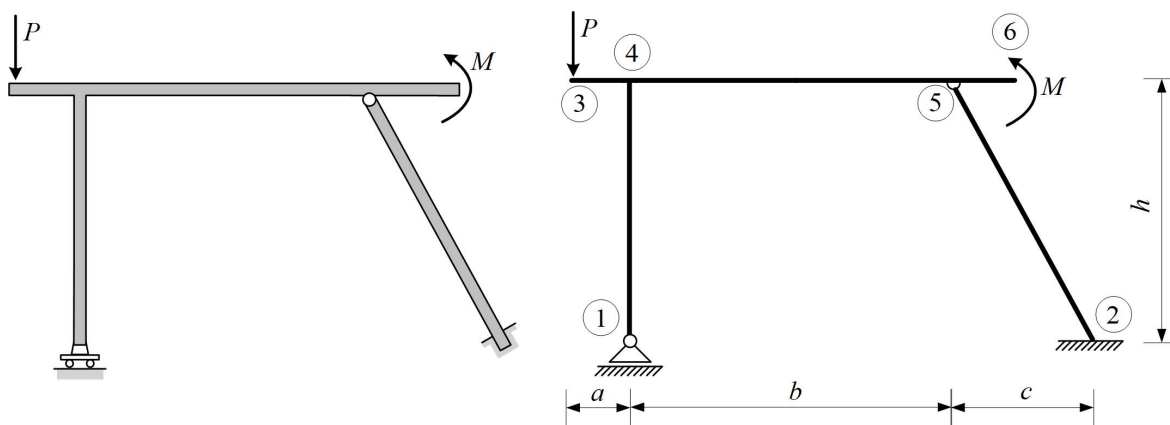
Slika 3.16: Skica stvarnih djelovanja



Slika 3.17: Dijagrami unutarnjih sila

### 3.3 Pomični okvir s kosim stupom

Za zadani statički sistem sa slike 3.18 inženjerskom će se metodom pomaka odrediti dijagrami unutarnjih sila. Pritom je vrijednost umnoška  $EI = const.$



**Slika 3.18:** Skica statičkoga sistema i njegova proračunska interpretacija s oznakama čvorova

Sistem sa slike 3.18 ima dva prepusta: element 3 – 4 i element 5 – 6. Kao i u primjeru 1, prepust je statički određeni dio zadanoga sistema i vrijednosti unutarnjih sila prepusta mogu se odrediti samo iz jednadžbi ravnoteže. Određivanjem vrijednosti unutarnjih sila na mjestima spojeva prepusta s ostatkom zadanoga sistema prepuste se može isključiti iz daljnje proračuna zamjenom njihovih utjecaja na ostatak sistema silama u tim spojevima.

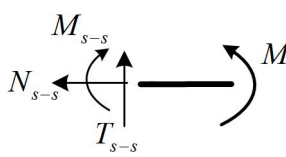
$$\begin{array}{lll}
 \Sigma N = 0 & \Sigma T = 0 & \Sigma M = 0 \\
 N_{t-t} = 0 & T_{t-t} + P = 0 & M_{t-t} + P \cdot a = 0 \\
 & T_{t-t} = -P & M_{t-t} = -P \cdot a
 \end{array}$$

**Slika 3.19:** Određivanje unutarnjih sila u spoju elementa 3 – 4 i ostatka zadanoga sistema

U nastavku će se prepusti isključiti iz proračuna, odredit će se nepoznanice zada-



noga sistema u inženjerskoj metodi pomaka, prikazati izrazi za momente savijanja na krajevima elemenata u fazi upetosti i u fazi dopuštenih pomaka te definirati sustav jednadžbi koji treba riješiti radi određivanja vrijednosti nepoznatih pomaka.



$$\begin{aligned} \Sigma N &= 0 & \Sigma T &= 0 & \Sigma M &= 0 \\ N_{s-s} &= 0 & T_{s-s} &= 0 & M_{s-s} - M &= 0 \\ & & & & M_{s-s} &= M \end{aligned}$$

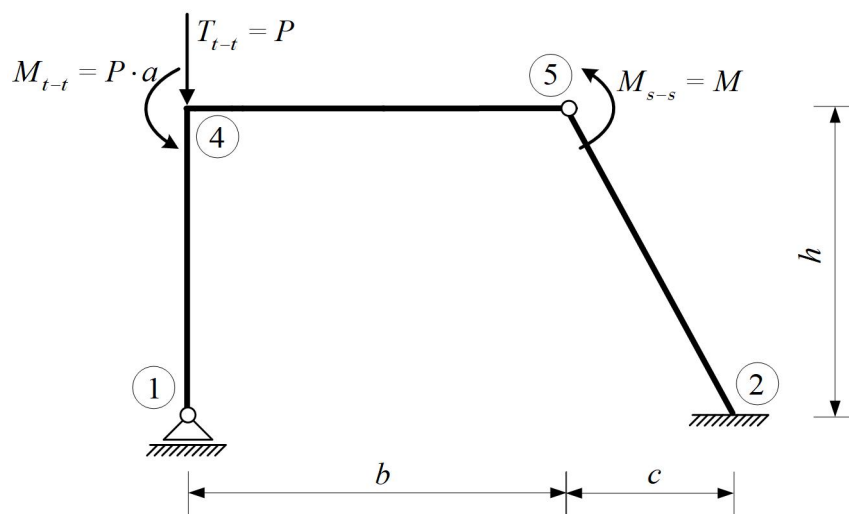
**Slika 3.20:** Određivanje unutarnjih sila u spoju elementa 5 – 6 i ostatka zadanoga sistema

U čvoru s indeksom 4 poznat je samo moment savijanja koji je zamijenio utjecaj prepusta, dok su ostala dva momenta elemenata koji se priključuju u taj čvor nepoznata ( $M_{4,5} = ?$ ,  $M_{4,1} = ?$ ). Također, nepoznat je i kut zaokreta čvora 4. Zbog nepoznavanja momenata savijanja svih elemenata priključenih u čvor 4 i njegova zaokreta, zaokret  $\varphi_4$  proglašava se jednom od nepoznanica zadanoga sistema u inženjerskoj metodi pomaka.

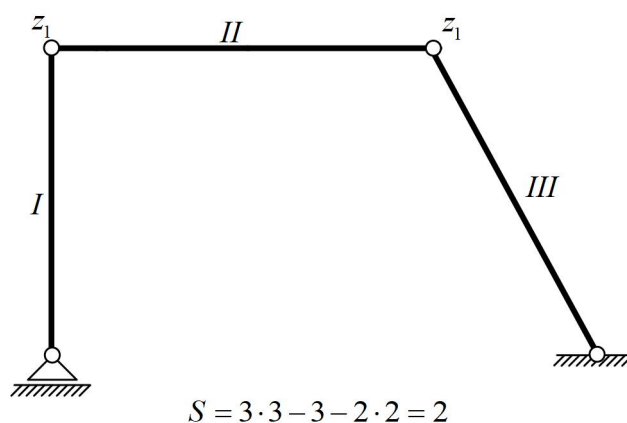
S druge strane, u čvoru s indeksom 5 poznate su vrijednosti svih momenata savijanja elemenata koji se priključuju u taj čvor:

$$\begin{aligned} M_{5,2} &= 0 \\ M_{5,4} &= -M_{s-s} \end{aligned}$$

Moment savijanja  $M_{5,2}$  jednak je nuli zbog zglobne veze elementa 2 – 5 u čvoru 5, a vrijednost momenta  $M_{5,4}$  može se odrediti iz jednoga ravnoteže (zbroja momenata) čvora 5, iz čega proizlazi da je  $M_{5,4}$  jednak po iznosu, a suprotnoga smjera vrtnje u odnosu na moment  $M_{s-s}$ . Prethodno određene vrijednosti momenata savijanja elemenata koji se spajaju u čvor 5 zapravo su konačne vrijednosti (ne smiju se promijeniti tijekom proračuna po inženjerskoj metodi pomaka) i cijeli se čvor može "pretvoriti" u zglob (slika 3.21). Također, zbog nepoznavanja momenata savijanja svih elemenata na mjestu njihova priključka u čvor 5, zaokret tog čvora nije nepoznanica u inženjerskoj metodi pomaka.

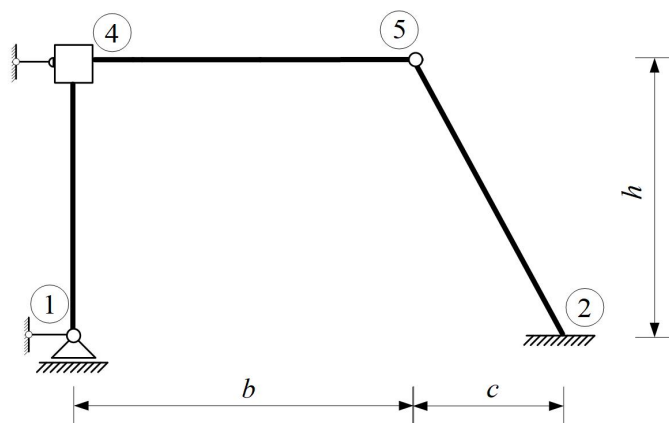


Slika 3.21: Zamjena utjecaja prepusta sa silama u spoju prepusta i ostatka zadanoga sistema

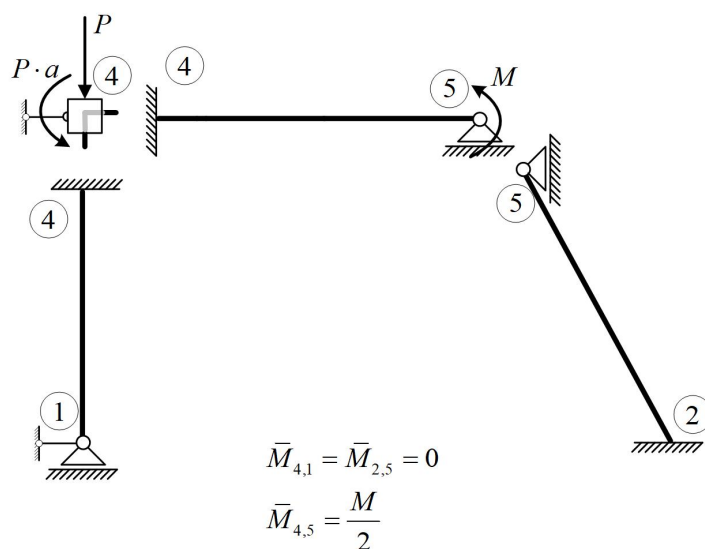


Slika 3.22: Zglobna shema i njezin stupanj slobode gibanja

Na slici 3.22 određen je stupanj slobode gibanja zglobne sheme  $S = 2$ , što znači da postoje dvije neovisne translacije zadanoga sistema (svi ostali pomaci mogu se izraziti kao njihove funkcije). Lako je zaključiti da je jedna od njih translacija klznoga ležaja (u horizontalnom smjeru). Druga je moguća translacija horizontalan pomak vrhova stupova, odnosno čvorova 4 i 5. Naime, zbog malih vrijednosti pomaka u uzdužnom smjeru grede (u odnosu na pomake izazvane momentima savijanja), produljenje se ili skraćenje elemenata zanemaruje, što znači da se sve točke grede 4 – 5 transliraju u horizontalnom smjeru za isti iznos.

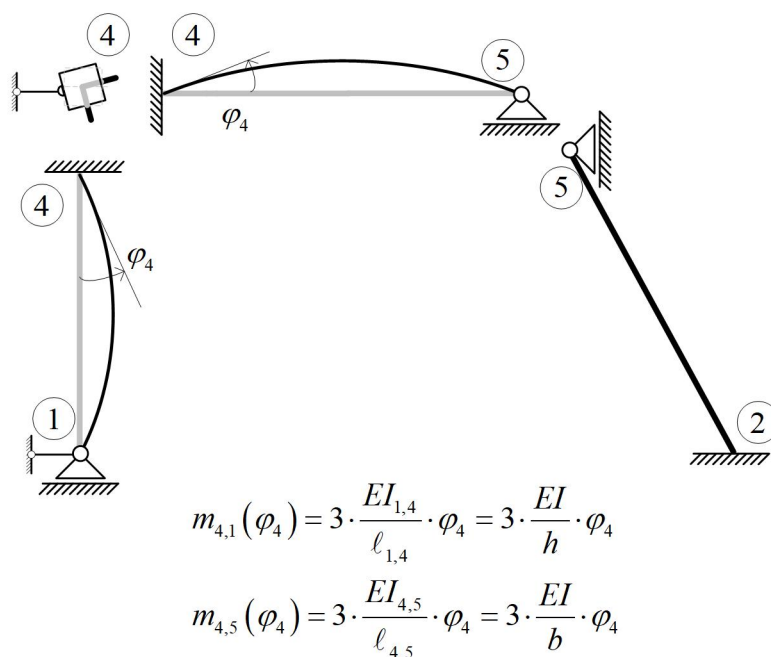


Slika 3.23: Osnovni sistem prema inženjerskoj metodi pomaka



Slika 3.24: Faza upetosti: momenti upetosti od vanjskoga opterećenja

Sumarno, nepoznanice su zadanoga sistema u inženjerskoj metodi pomaka zaokret čvora 4, horizontalni pomak čvora 1 i horizontalni pomak čvorova 4 i 5 (odnosno elementa 4 – 5):  $\varphi_4 = ?$ ,  $u_1 = ?$ ,  $u_{4,5} = ?$ . Skica statičkoga sistema sa spriječenim pomacima (pritom se misli i na zaokret) nalazi se na slici 3.23.



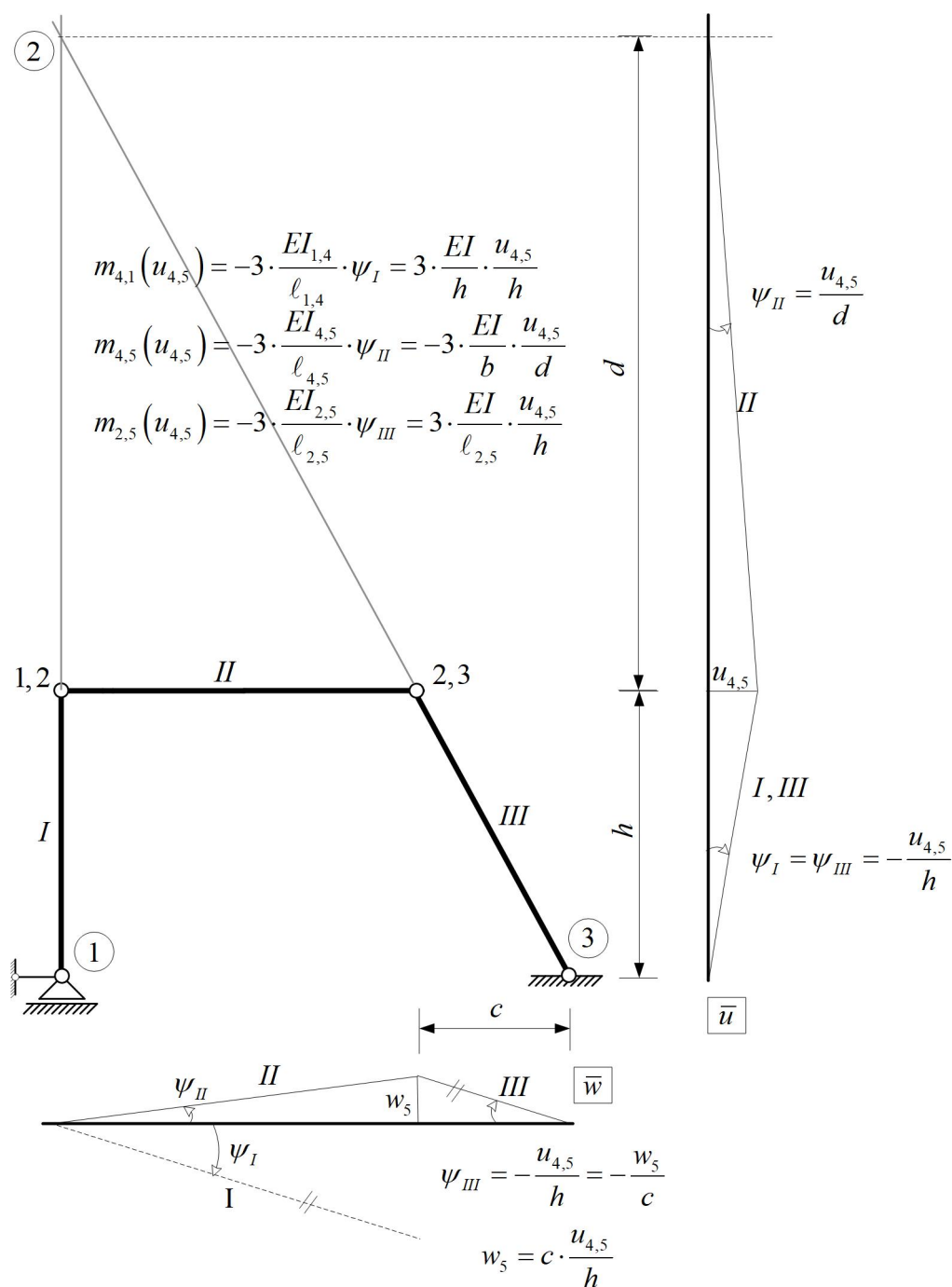
**Slika 3.25:** Faza dopuštenih pomaka: momenti na krajevima elemenata uslijed zaokreta čvora 4

U nastavku je prikazan postupak tvorbe sustava jednadžbi s nepoznicama koje su nepoznati pomaci zadanoga sistema. Izrazi su za konačne momente savijanja na krajevima elemenata

$$M_{4,1} = 0 + 3 \cdot \frac{EI}{h} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{h^2} \cdot u_1 + \frac{3EI}{h^2} \cdot u_{4,5}$$

$$M_{4,5} = \frac{M}{2} + 3 \cdot \frac{EI}{b} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{b \cdot d} \cdot u_{4,5}$$

$$M_{2,5} = 0 + \frac{3EI}{\ell_{2,5} \cdot h} \cdot u_{4,5}$$

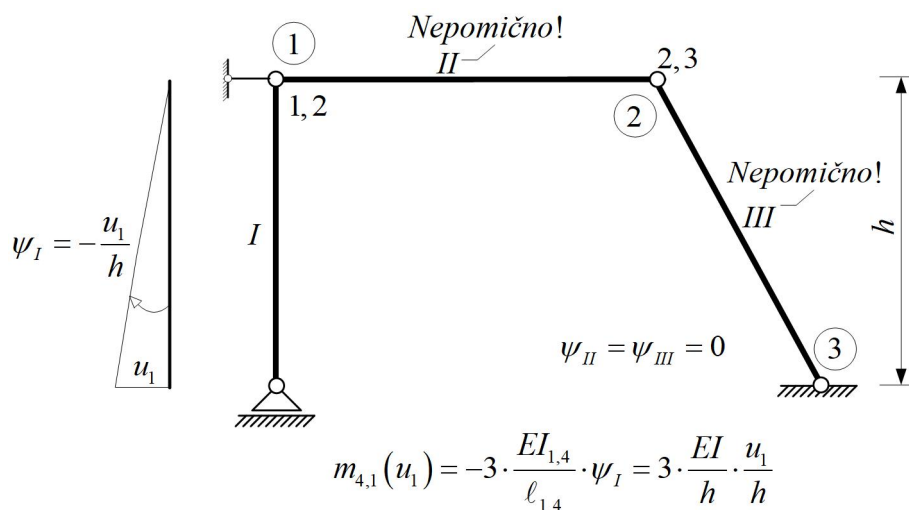


**Slika 3.26:** Faza dopuštenih pomaka: plan pomaka za  $u_{4,5}$  i momenti na krajevima elementa zbog zaokreta elemenata,  $\psi_i$

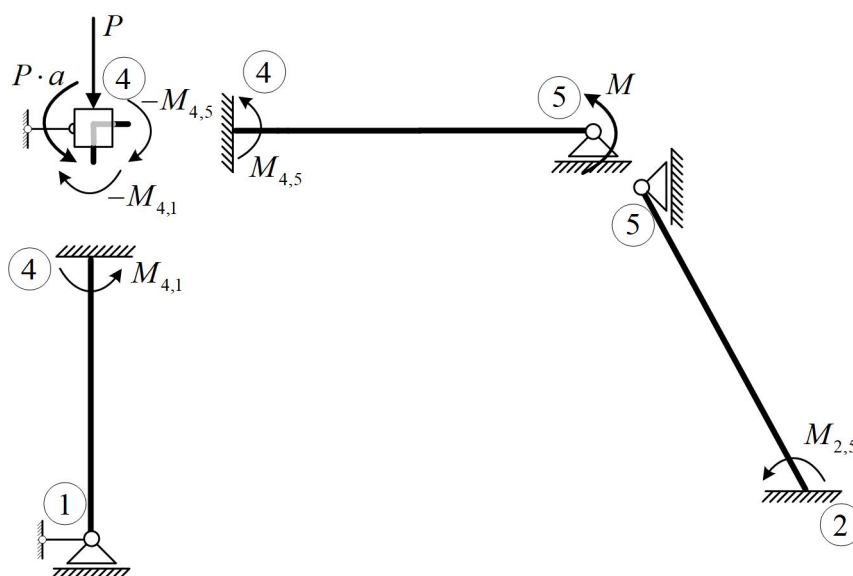
U čvoru s nepoznatim zaokretom zadovoljava se jednadžba ravnoteže momenata (odnosno, reaktivni moment savijanja u dodanom momentnom spoju mora iščeznuti),

te prema slici 3.28 vrijedi:

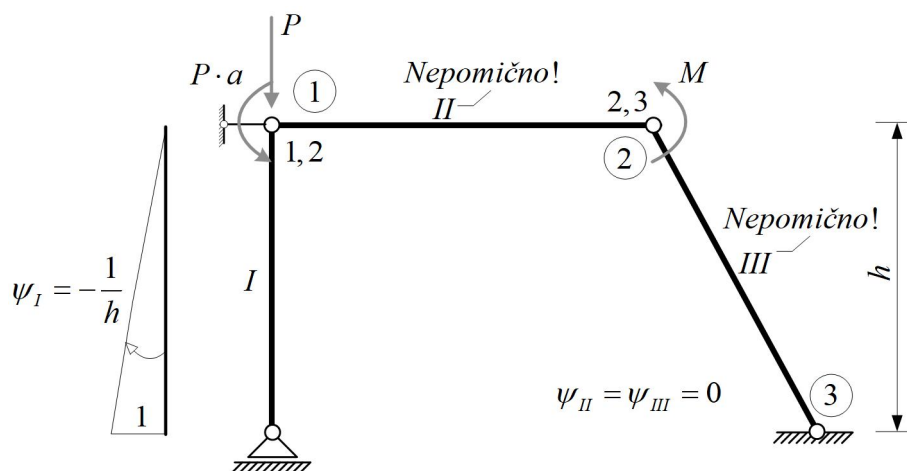
$$\begin{aligned}
 & -M_{4,1} - M_{4,5} + P \cdot a = 0 \\
 & -3 \cdot \frac{EI}{h} \cdot \varphi_4 + \frac{3EI}{h^2} \cdot u_1 - \frac{3EI}{h^2} \cdot u_{4,5} - \frac{M}{2} - 3 \cdot \frac{EI}{b} \cdot \varphi_4 + \frac{3EI}{b \cdot d} \cdot u_{4,5} + P \cdot a = 0
 \end{aligned}$$



Slika 3.27: Faza dopuštenih pomaka: plan pomaka za  $u_1$  i momenti na krajevima elementa zbog zaokreta  $\psi_i$



Slika 3.28: Ravnoteža čvora 4



**Slika 3.29:** Jednadžba virtualnog rada na virtualnim pomacima zbog  $u_1 = 1$

Ostale jednadžbe potrebne za tvorbu sustava jednadžbi s tri nepoznanice (koje su nepoznati pomaci i zaokret zadanoga statičkog sistema) definiraju se na temelju teorema o virtualnom radu. Na slici 3.29 prikazani su virtualni pomaci nastali zbog jediničnoga virtualnog pomaka  $u_1$ , te pripadna jednadžba virtualnoga rada glasi

$$M_{4,1} \cdot \psi_I = 0$$

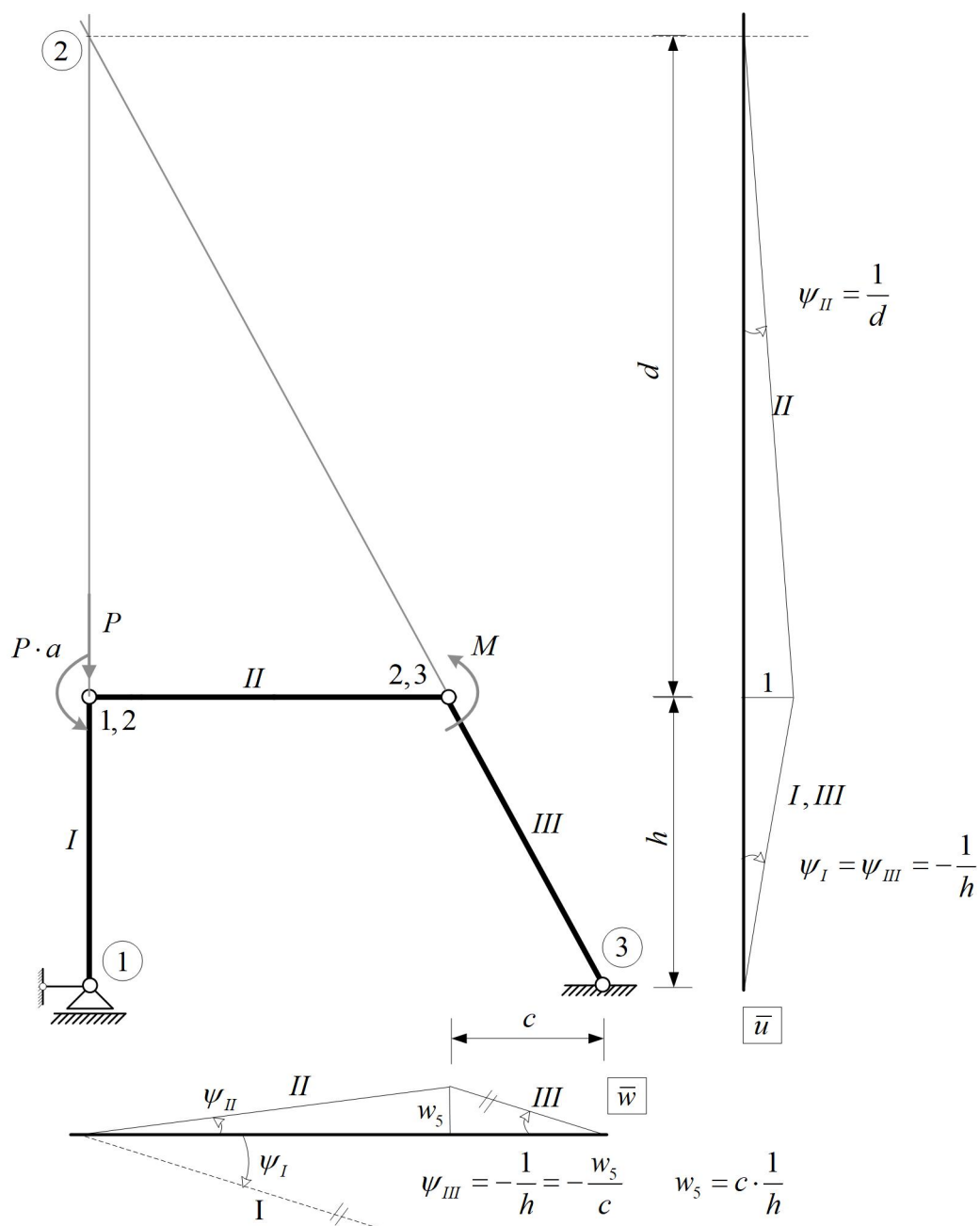
$$\left( 3 \cdot \frac{EI}{h} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{h^2} \cdot u_1 + \frac{3EI}{h^2} \cdot u_{4,5} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} \right) = 0$$

Nadalje, na slici 3.30 skicirani su virtualni pomaci zbog jediničnoga virtualnog pomaka  $u_{4,5}$ . Ukupan je rad vanjskih i unutarnjih sila na virtualnim pomacima jednak nuli, odnosno je sistem u ravnoteži te vrijedi:

$$M_{4,1} \cdot \psi_I + M_{4,5} \cdot \psi_{II} + M_{2,5} \cdot \psi_{III} + M \cdot \psi_{II} = 0$$

$$\left( 3 \cdot \frac{EI}{h} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{h^2} \cdot u_1 + \frac{3EI}{h^2} \cdot u_{4,5} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} \right) +$$

$$\left( \frac{M}{2} + 3 \cdot \frac{EI}{b} \cdot \varphi_4 - \frac{3EI}{b \cdot d} \cdot u_{4,5} \right) \cdot \frac{1}{d} + \left( \frac{3EI}{\ell_{2,5} \cdot h} \cdot u_{4,5} \right) \cdot \left( -\frac{1}{h} \right) + M \cdot \frac{1}{d} = 0$$



Slika 3.30: Virtualni pomaci zbog  $u_{4,5} = 1$  i vanjsko opterećenje – oblikovanje jednadžbe virtualnoga rada



Nakon sređivanja sustav triju jednažbi s tri nepoznanice dobiven na temelju prethodnog razmatranja glasi:

$$\begin{aligned} EI \cdot \varphi_4 \cdot \left( \frac{b+h}{h \cdot b} \right) - \frac{EI}{h^2} \cdot u_1 - EI \cdot u_{4,5} \cdot \left( \frac{-b \cdot d + h^2}{h^2 \cdot b \cdot d} \right) &= -\frac{M}{6} + \frac{P \cdot a}{3} \\ -\frac{EI}{h^2} \cdot \varphi_4 + \frac{EI}{h^3} \cdot u_1 - \frac{EI}{h^3} \cdot u_{4,5} &= 0 \\ -EI \cdot \varphi_4 \cdot \left( \frac{-b \cdot d + h^2}{h^2 \cdot b \cdot d} \right) - \frac{EI}{h^3} \cdot u_1 + EI \cdot u_{4,5} \cdot \left( \frac{b \cdot d^2 \cdot \ell_{2,5} + h \cdot \ell_{2,5} + b \cdot d^2 \cdot h}{h^3 \cdot b \cdot d^2 \cdot \ell_{2,5}} \right) &= \frac{M}{2d} \end{aligned}$$

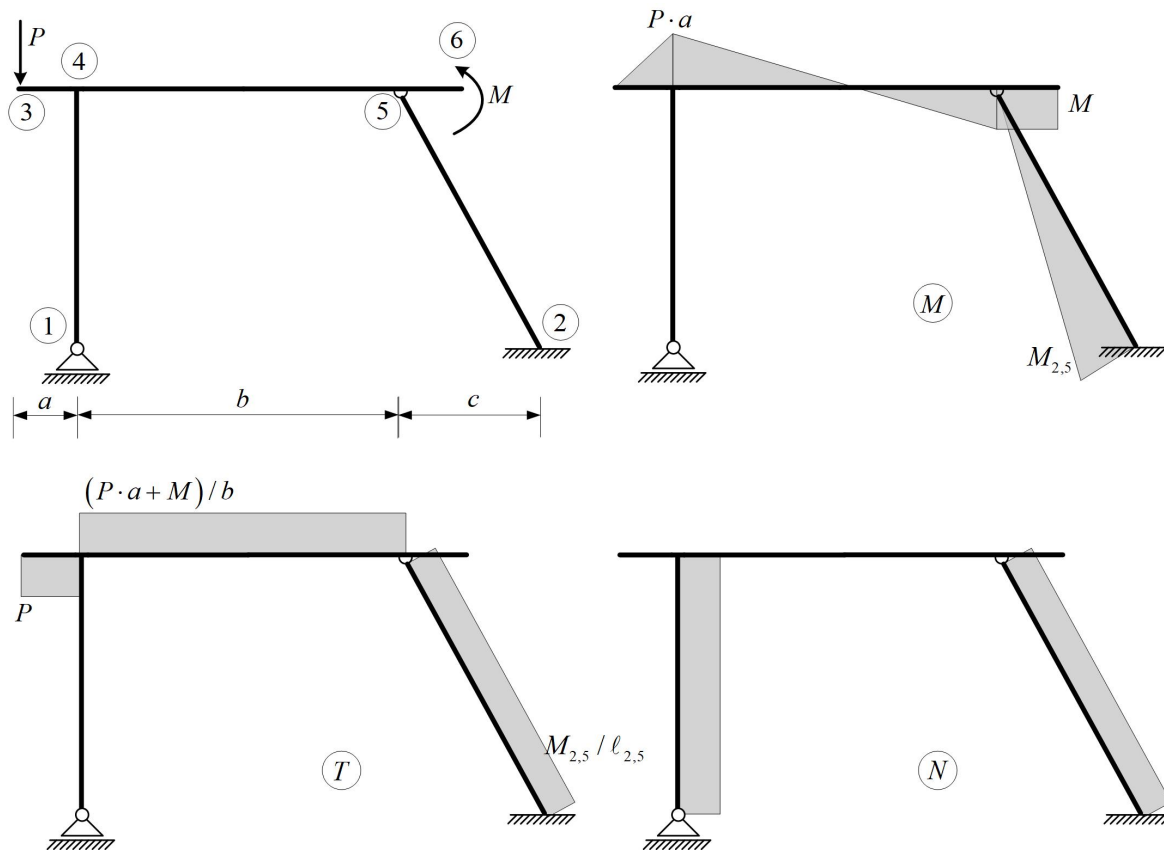
Sustav je simetričan, pozitivno definitan i dijagonalno dominantan, te ima jedno realno rješenje:

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= \frac{(2P \cdot a - M) \cdot b^2 \cdot d^2 + 3M \cdot b \cdot h^2 \cdot \ell_{2,5} + (2P \cdot a \cdot \ell_{2,5} - M \cdot \ell_{2,5}) \cdot b}{6 \cdot (EI \cdot b \cdot d^2 - EI \cdot h^2 \cdot \ell_{2,5} + EI \cdot \ell_{2,5})}, \\ u_1 &= \frac{3M \cdot b \cdot h^3 \cdot \ell_{2,5} + 2 \cdot (P \cdot a \cdot \ell_{2,5} + M \cdot \ell_{2,5}) \cdot b \cdot d \cdot h^2 +}{6 \cdot (EI \cdot b \cdot d^2 - EI \cdot h^2 \cdot \ell_{2,5} + EI \cdot \ell_{2,5})} + \\ &\quad \frac{\left( (2P \cdot a - M) \cdot b^2 \cdot d^2 + (2P \cdot a \cdot \ell_{2,5} - M \cdot \ell_{2,5}) \cdot b \right) \cdot h}{6 \cdot (EI \cdot b \cdot d^2 - EI \cdot h^2 \cdot \ell_{2,5} + EI \cdot \ell_{2,5})}, \\ u_{4,5} &= \frac{(P \cdot a \cdot \ell_{2,5} + M \cdot \ell_{2,5}) \cdot b \cdot d \cdot h^2}{3 \cdot (EI \cdot b \cdot d^2 - EI \cdot h^2 \cdot \ell_{2,5} + EI \cdot \ell_{2,5})}. \end{aligned}$$

Konačne su vrijednosti momenata savijanja na krajevima elemenata zadanoga sistema

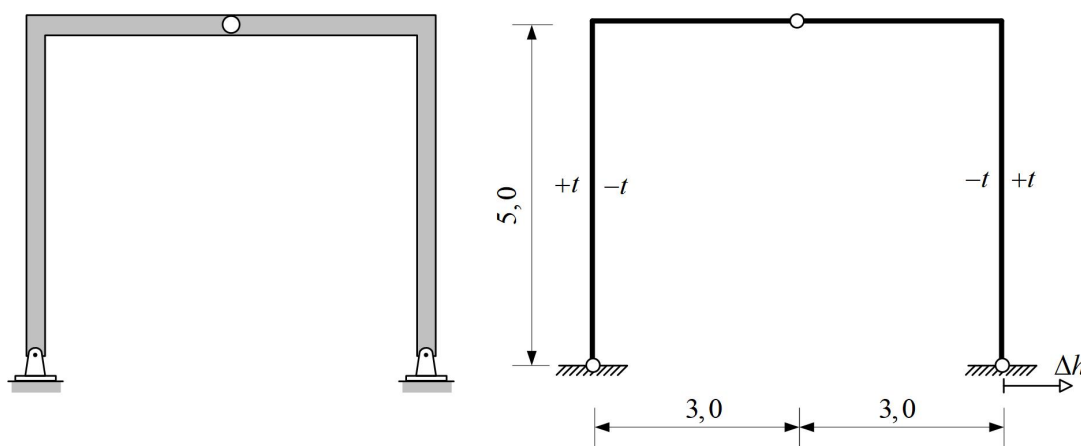
$$\begin{aligned} M_{4,1} &= 0, \\ M_{4,5} &= P \cdot a, \\ M_{2,5} &= \frac{(P \cdot a + M) \cdot b \cdot d \cdot h^2 \cdot \ell_{2,5}^2 + 9(EI)^2 \cdot b \cdot d^2 - 9 \cdot \left( (EI)^2 \cdot h^2 - (EI)^2 \right) \cdot \ell_{2,5}}{3 \cdot \left( EI \cdot b \cdot d^2 \cdot \ell_{2,5} - (EI \cdot h^2 - EI) \cdot \ell_{2,5}^2 \right)}. \end{aligned}$$

Kvalitativni dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 3.31.

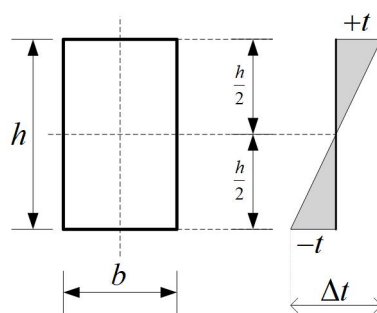


Slika 3.31: Dijagrami unutarnjih sila zadanoga statičkog sistema

### 3.4 Utjecaj promjenjive temperature i prisilnih pomaka



Slika 3.32: Skica statičkoga sistema i njegov proračunski model



Slika 3.33: Promjena temperature po visini poprečnoga presjeka

Za zadani statički sistem sa slike 3.32 inženjerskom će se metodom pomaka odrediti dijagrami unutarnjih sila. Pritom je vrijednost umnoška  $EI = 45\,000 \text{ kNm}^2$ , toplinski koeficijent je zadan s  $\alpha_t = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , vrijednost temperature  $+t = 20^\circ\text{C}$ ,  $-t = 20^\circ\text{C}$ , a visina je presjeka elemenata na kojima djeluje temperatura  $h = 50 \text{ cm}$ .

Zadani je statički sistem (očito) statički određeni, naziva trozglobni nosač. No, da li se statički određeni sistemi mogu rješavati (inženjerskom) metodom pomaka? Naime, u poglavlju 1 rečeno je da se zbog tipa osnovnoga sistema na kojem se postupak provodi statički određeni sistemi ne mogu rješavati metodom sila. Međutim,

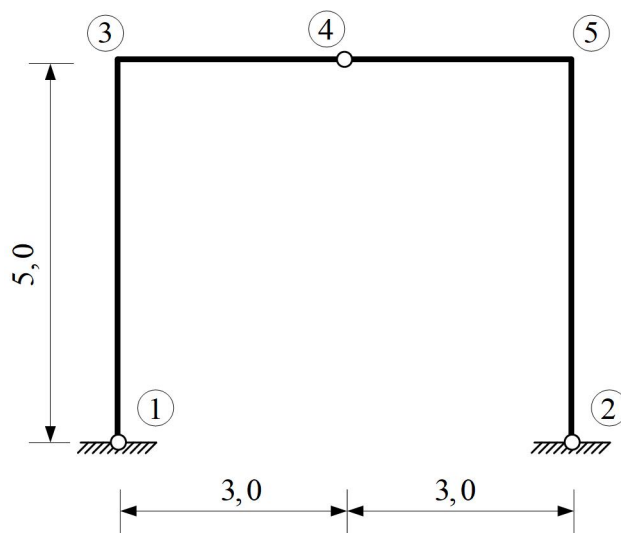
osnovni sistemi metoda pomaka statički su neodređeni (čiji su izrazi sila i momenata na krajevima poznati), pa su i statički određeni sistemi rješivi ovim metodama.

Prema izrazu za zakrivljenost grede,  $\kappa_t$  (kao posljedica savijanja zbog utjecaja promjenjive temperature), ona ovisi o temperaturnom koeficijentu materijala ( $\alpha_t$ ), ukupnoj razlici u temperaturi po visini poprečnoga presjeka ( $\Delta t$ ) i visini presjeka ( $h$ ), te je konstantna ako su navedene vrijednosti konstantne:

$$\kappa_t = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h}$$

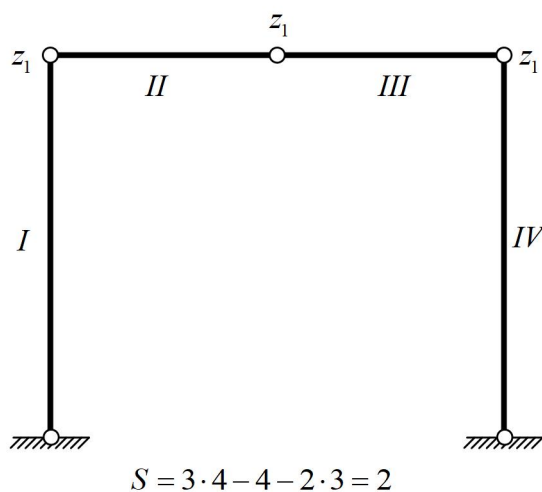
Temperatura i prisilni pomak oblici su vanjskih djelovanja, te se stoga njihov utjecaj na vrijednosti sila na krajevima elemenata u inženjerskoj metodi pomaka određuje u fazi upetosti. Prije faze upetosti treba odrediti nepoznate zaokrete i translacije zadanoga sistema, te ih se u fazi upetosti sprečava.

Na slici 3.34 označeni su čvorovi sistema. U čvoru s indeksom 3 nepoznati su momenti savijanja elemenata koji se sastaju u tom čvoru, kao i kut zaokreta čvora zbog vanjskoga djelovanja. Prema tome, zaokret čvora 3 proglašava se nepoznatim u inženjerskoj metodi pomaka.



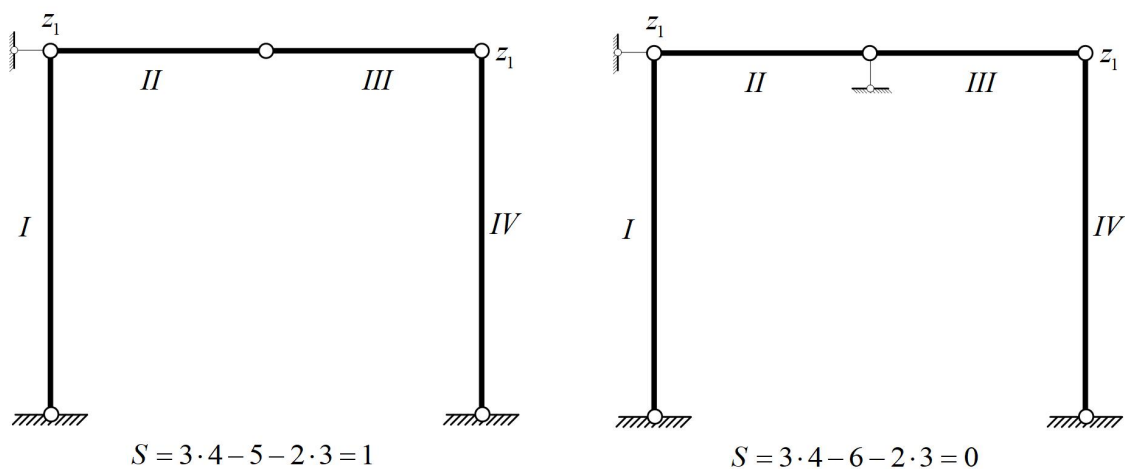
**Slika 3.34:** Skica zadanoga sistema s oznakama čvorova

Analogno, zaokret čvora 5 također je nepoznanica u toj metodi. Stupanj slobode gibanja zglobne sheme definirat će je li zadani sistem pomičan, odnosno postoje li dodatne nepoznanice u obliku translacijskih pomaka čvorova zadanoga sistema (slika 3.35).



**Slika 3.35:** Skica zglobne sheme zadanoga sistema

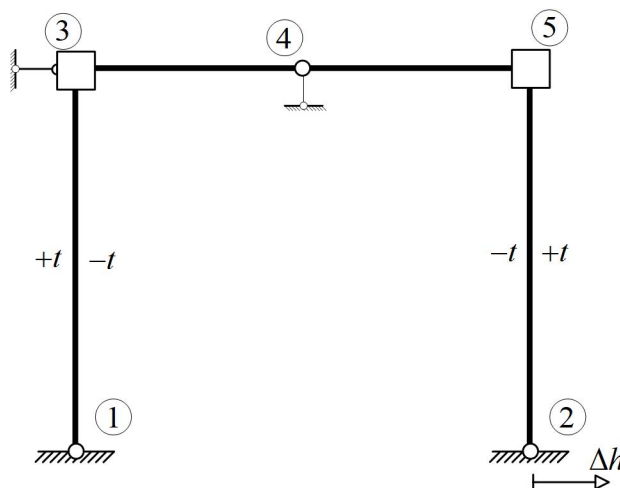
S obzirom na to da je stupanj slobode gibanja zglobne sheme jednak  $+2$ , radi se o mehanizmu s moguće dvije neovisne translacije.



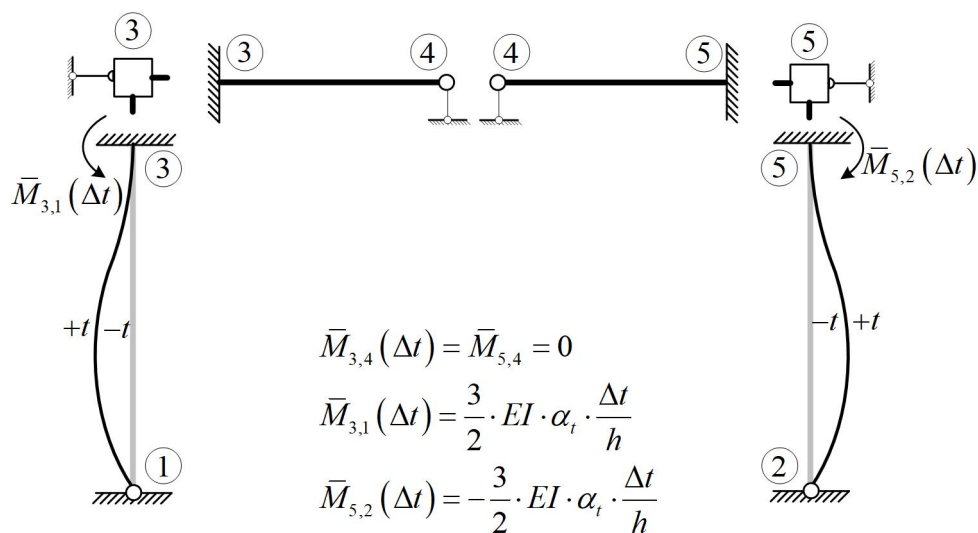
**Slika 3.36:** Skica zglobne sheme zadanoga sistema s postupnim sprečavanjem pomaka

Ako se pridruženoj rešetki (odnosno zglobnoj shemi) spriječi horizontalni pomak vrhova stupova, (dodavanjem zglobnog štapa na mjestu i pravcu tog pomaka), stupanj slobode gibanja smanjuje se za jedan (slika 3.36 lijevo). Ako se novonastalom mehanizmu (s jednom mogućom translacijom) na isti način spriječi vertikalni pomak srednjega zgloba na gredi, nastaje statički određeni sistem ( $S = 0$ ) sa slike 3.36 desno.

Zaključno, pomake sprečavanjem kojih se dovelo mehanizam zglobne sheme u stanje geometrijske nepromjenjivosti (bez mogućih translacijskih pomaka) smatramo dodatnim nepoznicama u inženjerskoj metodi pomaka; nazvat ćemo ih  $u$  (horizontalni pomak vrhova stupova) i  $w_4$  (vertikalni pomak čvora 4), pa su nepoznanice zadanoga sistema u inženjerskoj metodi pomaka  $\varphi_3 = ?$ ,  $\varphi_5 = ?$ ,  $u = ?$ ,  $w_4 = ?$ .



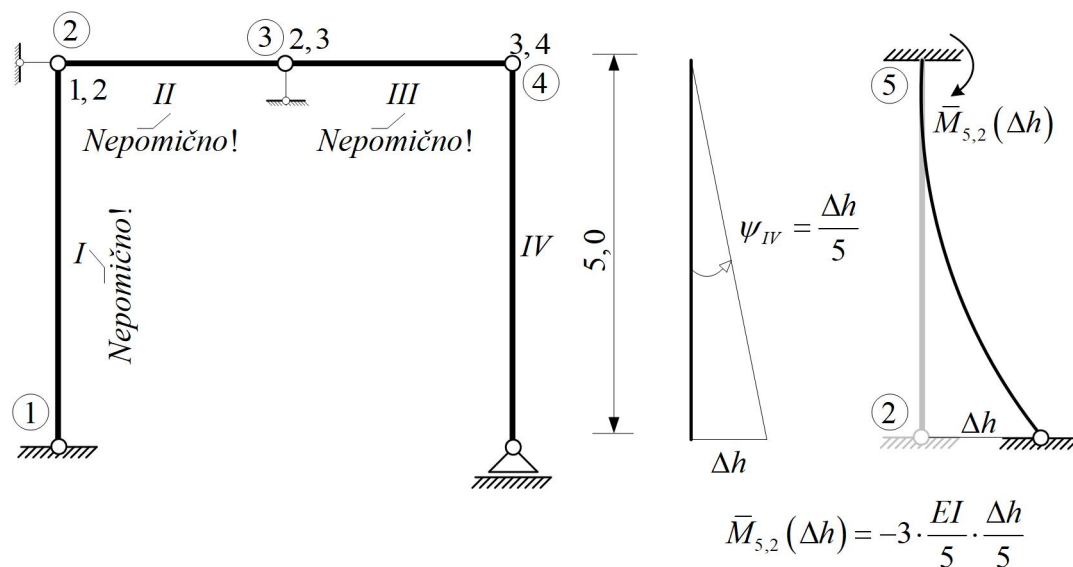
Slika 3.37: Skica osnovnoga sistema u inženjerskoj metodi pomaka



Slika 3.38: Utjecaj promjenjive temperature na momente upetosti

Prva faza inženjerske metode pomaka faza je upetosti. Osnovni sistem koji nastaje sprečavanjem svih nepoznatih pomaka i zaokreta, prikazan je na slici 3.37. Izrazi

za momente upetosti na krajevima elemenata od utjecaja promjenjive temperature prikazani su na slici 3.38. Za određivanje utjecaja prisilnoga pomaka potrebna je skica plana pomaka (slika 3.39).

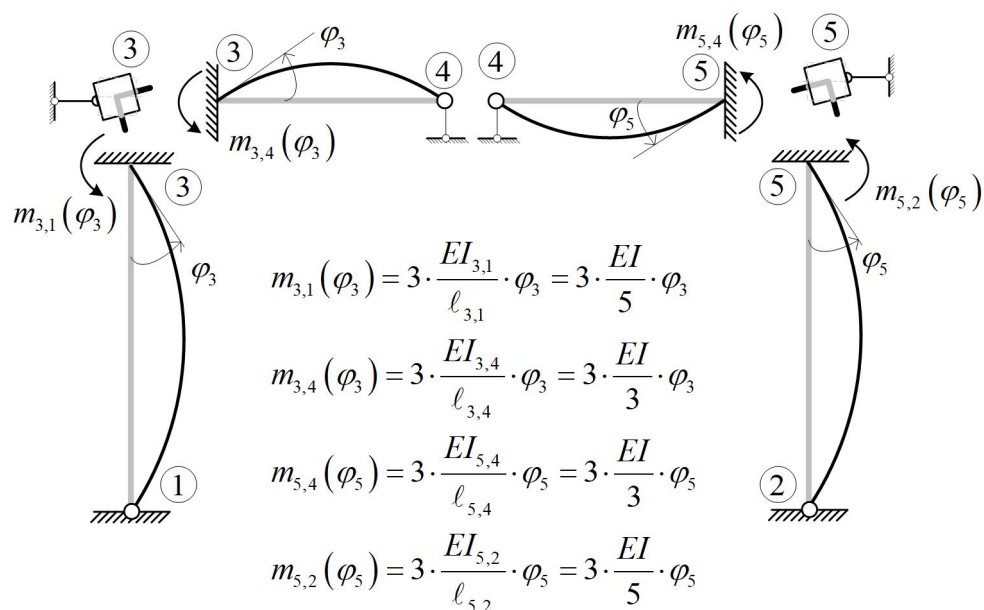


**Slika 3.39:** Utjecaj prisilnoga pomaka na momente upetosti – plan pomaka za prisilni pomak  $\Delta h$

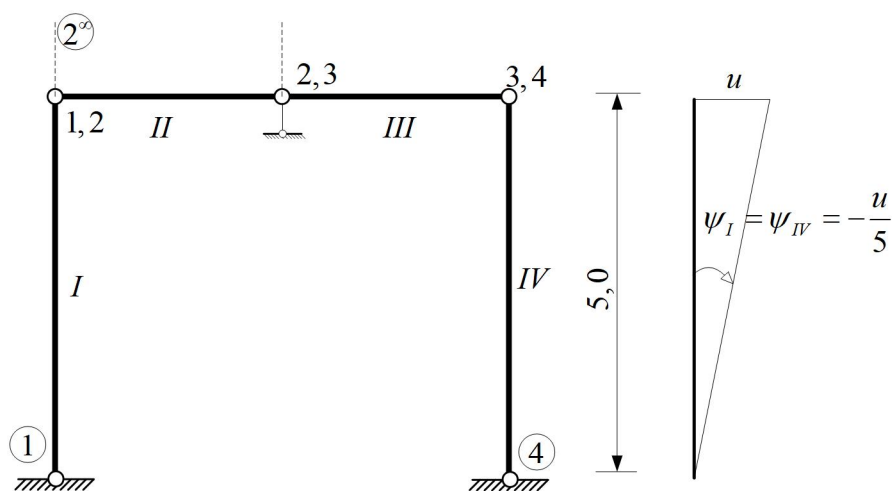
Posebno treba naglasiti da je mehanizam sa slike 3.39 nastao sprečavanjem svih mogućih translacija zglobne sheme (dodana su dva zglobna štapa na mjestu i na pravcu pomaka  $u$  i  $w_4$ ), uz dopuštanje samo pomaka za koji se plan pomaka skicira (dakle, oslobođena je vanjska veza na desnom nepomičnom ležaju koja omogućava pomak  $\Delta h$ ).

Općenito, mehanizam pomoću kojega se skicira plan pomaka za bilo koji pomak mora biti stupnja slobode gibanja +1, odnosno mehanizam mora biti pomičan jedino na mjestu i na pravcu pomaka za koji se plan pomaka određuje. Štoviše, apsolutne polove diskova mehanizma stupnja slobode gibanja većeg od +1 nemoguće je odrediti.

U drugoj se fazi inženjerske metode pomaka dopuštaju nepoznati pomaci i zaokreti (faza dopuštenih pomaka). Na slici 3.40 određeni su momenti na krajevima elemenata koji nastaju zbog dopuštanja zaokreta čvorova 3 i 5, dok su na slikama 3.41 i 3.42 skicirani planovi pomaka za nepoznate translacijske pomake  $u$  i  $w_4$  te su određeni izrazi za momente savijanja na krajevima elemenata zbog dopuštanja pomaka  $u$  i  $w_4$  u fazi dopuštenih pomaka.



Slika 3.40: Faza dopuštenih pomaka – zakretanje čvorova 3 i 5



$$m_{3,1}(u) = -3 \cdot \frac{EI_{3,1}}{l_{3,1}} \cdot \psi_I = -3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \left(-\frac{u}{5}\right) = \frac{3EI}{25} \cdot u$$

$$m_{5,2}(u) = -3 \cdot \frac{EI_{5,2}}{l_{5,2}} \cdot \psi_{IV} = -3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \left(-\frac{u}{5}\right) = \frac{3EI}{25} \cdot u$$

 Slika 3.41: Faza dopuštenih pomaka – plan pomaka za  $u$ 

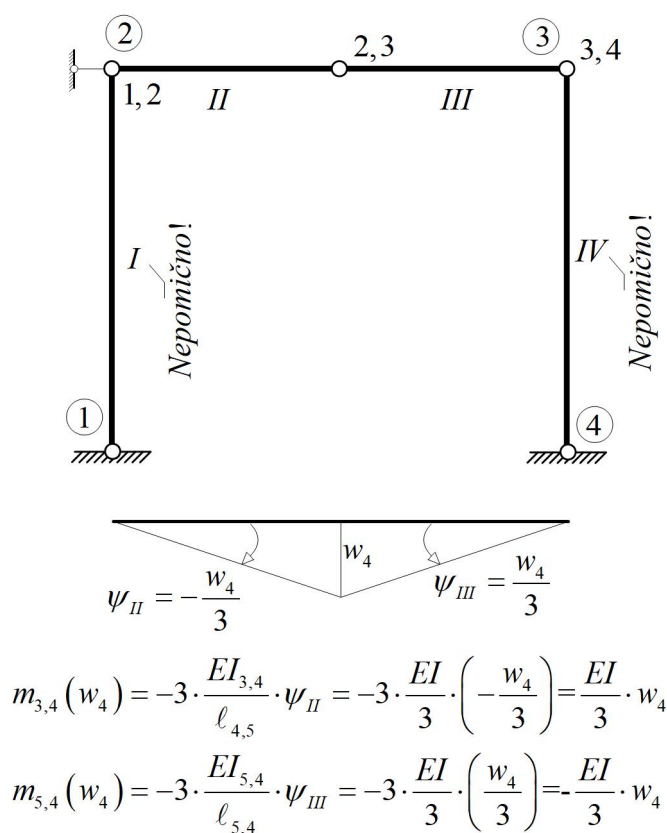
Za određivanje vrijednosti četiri nepoznata pomaka (pritom se misli i na translacijske pomake i na zaokrete) treba sastaviti sustav od četiri jednadžbe s četiri



nepoznanice.

Dvije su nepoznanice zaokreti čvorova, te se za čvorove s nepoznatim zaokretima zapisuju jednadžbe ravnoteže momenata, odnosno uvjet iščezavanja reaktivnih momenata savijanja u dodanim momentnim spojevima osnovnoga sistema.

Druge dvije jednadžbe definiraju se primjenom alternativnoga uvjeta ravnoteže. Pri tome se upotrebljava teorem o virtualnim pomacima na temelju kojega se određuje zbroj radova aktivnih sila na virtualnim pomacima (pomaci  $u$  i  $w_4$  smatraju se virtualnima i zadaje im se jedinična vrijednost).

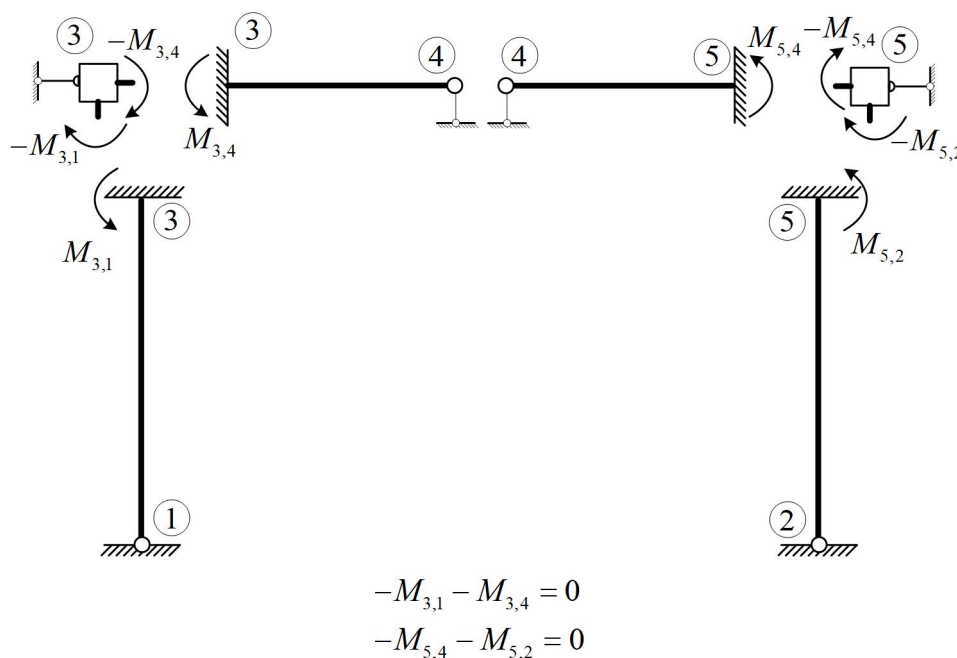


Slika 3.42: Faza dopuštenih pomaka – plan pomaka za  $w_4$

Zbrajanjem momenata savijanja iz faze upetosti i faze dopuštenih pomaka definiraju se izrazi za njihove konačne vrijednosti:

$$\begin{aligned}
 M_{3,4} &= EI \cdot \varphi_3 + \frac{EI}{3} \cdot w_4 \\
 M_{3,1} &= \frac{3}{2} \cdot EI \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 + \frac{3EI}{25} \cdot u \\
 M_{3,1} &= 54 + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 + \frac{3EI}{25} \cdot u \\
 M_{5,2} &= -\frac{3}{2} \cdot EI \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} - 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{\Delta h}{5} + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_5 + \frac{3EI}{25} \cdot u \\
 M_{5,2} &= -54 - 5400 \cdot \Delta h + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_5 + \frac{3EI}{25} \cdot u \\
 M_{5,4} &= EI \cdot \varphi_5 - \frac{EI}{3} \cdot w_4
 \end{aligned}$$

Na slikama 3.43, 3.44 i 3.45 prikazani su čvorovi s dodanim momentnim spojevima u kojima se postavlja uvjet iščezavanja momenata, kao i planovi virtualnih pomaka  $u = 1$  i  $w_4 = 1$ .

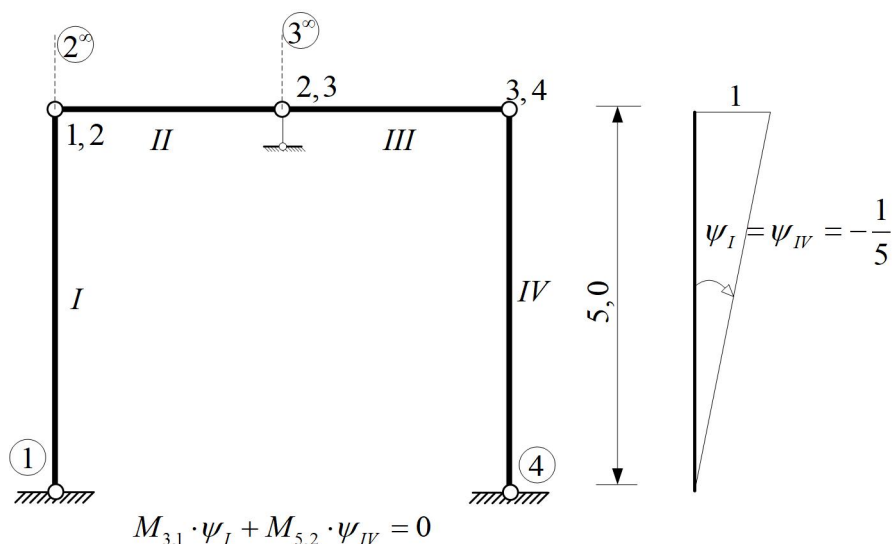


Slika 3.43: Jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima 3 i 5

Jednadžbe ravnoteže momenata savijanja u čvorovima 3 i 4 glase (slika 3.43):

$$8 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_5 + \frac{3EI}{25} \cdot u + \frac{EI}{3} \cdot w_4 = -54$$

$$0 \cdot \varphi_3 + 8 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_5 + \frac{3EI}{25} \cdot u - \frac{EI}{3} \cdot w_4 = 54 + 5400 \cdot \Delta h$$



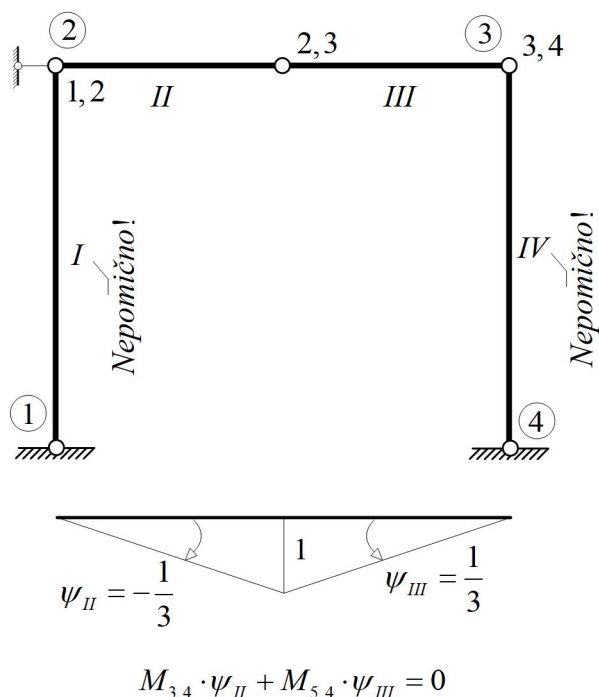
**Slika 3.44:** Jednadžba virtualnoga rada na planu pomaka za virtualni pomak  $u = 1$

Na slici 3.44 prikazan je plan virtualnih pomaka mehanizma s mogućim pomakom na mjestu nepoznatoga pomaka  $u$  vrijednost kojega je zadana kao jedinična, pa jednadžba virtualnoga rada na prikazanim pomacima glasi:

$$-3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \varphi_3 - 3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot \frac{EI}{125} \cdot u + 0 \cdot w_4 = -1080 \cdot \Delta h$$

Na jednak se način određuje rad sila na virtualnim pomacima sa slike 3.45:

$$-\frac{EI}{3} \cdot \varphi_3 + \frac{EI}{3} \cdot \varphi_5 + 0 \cdot u - 2 \cdot \frac{EI}{9} \cdot w_4 = 0$$



**Slika 3.45:** Jednačba virtualnoga rada na planu pomaka za  $w_4 = 1$

Sustav jednačbi koji daje vrijednosti nepoznatih zaokreta i translacijskih pomaka glasi:

$$\begin{aligned}
 8 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_5 + \frac{3EI}{25} \cdot u + \frac{EI}{3} \cdot w_4 &= -54, \\
 0 \cdot \varphi_3 + 8 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_5 + \frac{3EI}{25} \cdot u - \frac{EI}{3} \cdot w_4 &= 54 + 5400 \cdot \Delta h, \\
 -3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \varphi_3 - 3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot \frac{EI}{125} \cdot u + 0 \cdot w_4 &= -1080 \cdot \Delta h, \\
 -\frac{EI}{3} \cdot \varphi_3 + \frac{EI}{3} \cdot \varphi_5 + 0 \cdot u - 2 \cdot \frac{EI}{9} \cdot w_4 &= 0,
 \end{aligned}$$

dok je njegovo rješenje

$$\varphi_3 = -\frac{90 \cdot (50 \cdot \Delta h + 1)}{EI}, \quad \varphi_5 = \frac{90 \cdot (50 \cdot \Delta h + 1)}{EI}, \quad u = \frac{22500 \cdot \Delta h}{EI}, \quad w_4 = \frac{270 \cdot (50 \cdot \Delta h + 1)}{EI}.$$

Uvrštavanjem iznosa translacija i zaokreta u izraze konačnih momenata savijanja na krajevima elemenata zadanoga sistema dobivaju se sljedeće njihove vrijednosti:

$$M_{3,4} = 0,$$

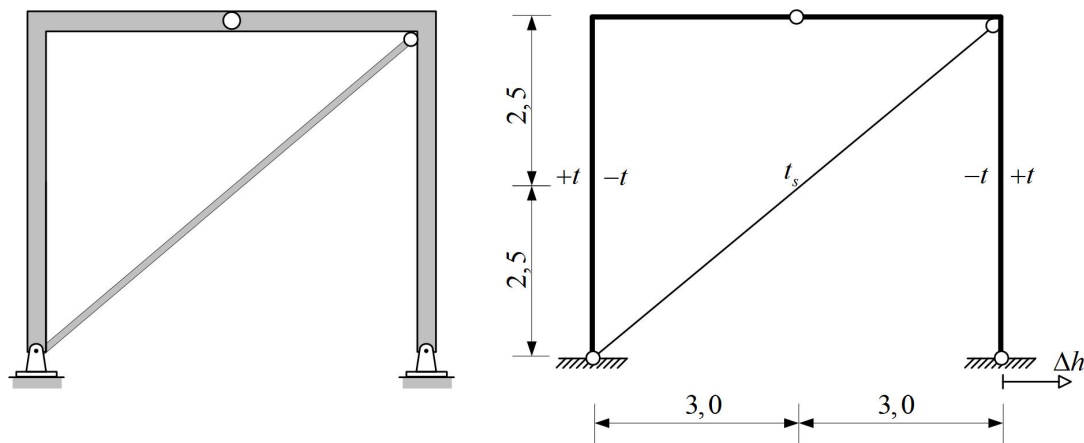
$$M_{3,1} = 0,$$

$$M_{5,2} = 0,$$

$$M_{5,4} = 0.$$

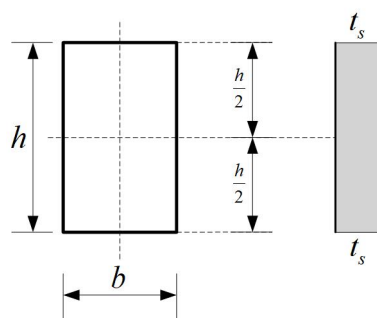
Na zadani sistem sa slike [3.32](#) djeluju prisilni pomak i promjenjiva temperatura uzrokujući pomake njegovih točaka bez pojave momenata savijanja (općenito, unutarnjih sila).

### 3.5 Utjecaj jednolike temperature



Slika 3.46: Skica statičkoga sistema i njegova proračunska interpretacija

Za zadani statički sistem sa slike 3.46, inženjerskom metodom pomaka odredit će se dijagrami unutarnjih sila. Pri tome je vrijednost umnoška  $EI = 45\,000\text{ kNm}^2$ , toplinski je koeficijent zadan s  $\alpha_t = 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ , vrijednosti su temperature  $+t = 20^\circ\text{C}$ ,  $-t = 20^\circ\text{C}$ , a visina je elemenata na kojima djeluje temperatura  $h = 50\text{ cm}$ , dok je vrijednost srednje temperature  $t_s = 15^\circ\text{C}$ . Iznos je zadanoga prisilnog pomaka  $\Delta h = 1\text{ cm}$ .



Slika 3.47: Dijagram jednolike temperature po visini poprečnoga presjeka

Zadani je statički sistem jedanput statički neodređen. U odnosu na zadani sistem sa slike 3.32, sistemu sa slike 3.46 dodana je zatega na koju djeluje temperature u obliku koji se naziva *srednjom* ili *jednolikom temperaturom*. Naime, jednolika temperatura (s oznakom  $t_s$ ) uzrokuje ravnomjerno zagrijavanje (ili hlađenje) poprečnoga

presjeka, kao što je prikazano na slici 3.47. Stoga će element na koji djeluje jednolika temperatura promijeniti duljinu za iznos

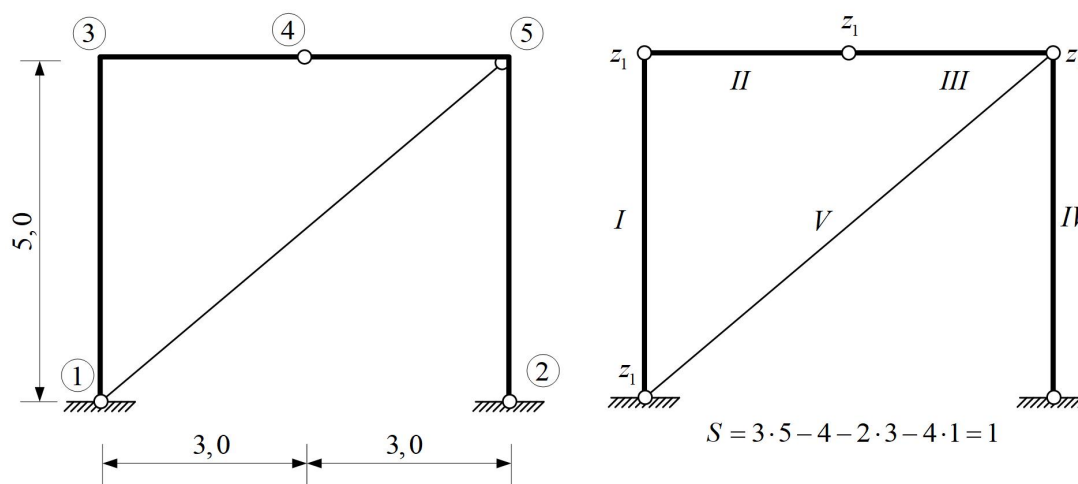
$$\Delta l = \alpha_t \cdot t_s \cdot l$$

U tom je izrazu  $\alpha_t$  koeficijent toplinskog širenja materijala, dok je  $l$  (početna) duljina elementa pod utjecajem jednolike temperature  $t_s$ . Poznavajući duljinu  $l$  i njezinu promjenu  $\Delta l$ , može se odrediti iznos deformacije od temperature  $t_s$  prema izrazu  $\epsilon_t = \frac{\Delta l}{l}$ . Produljenje zatege statičkoga sistema sa slike 3.46 na koju djeluje temperatura  $t_s$  jednako je

$$\Delta l = \alpha_t \cdot t_s \cdot l = 10^{-5} \cdot 15 \cdot \sqrt{61} = 0,00117 \text{ m.}$$

Produljenje zatege karakterizira se kao prisilni pomak, odnosno utjecaj produljena na ostale elemente statičkoga sistema određuje se na temelju skice plana pomaka za "prisilan pomak"  $\Delta l$ .

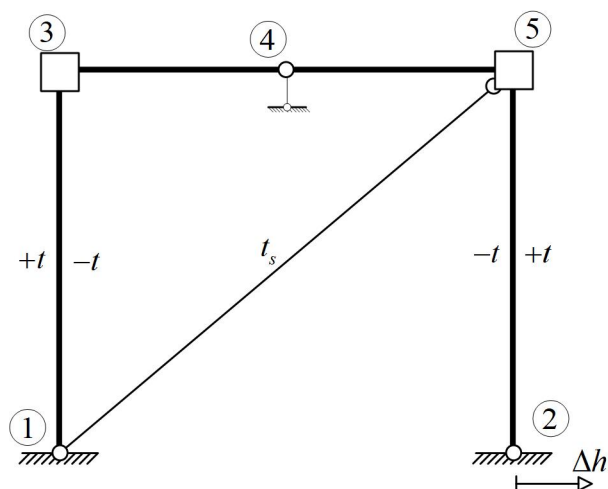
Prethodno treba odrediti čvorove zadanoga sistema te nepoznate zaokrete i/ili translacijske pomake. Na slikama 3.48 i 3.49 prikazano je redom: oznake čvorova i zglobna shema te osnovni sistem koji nastaje sprečavanjem nepoznatih zaokreta i translacija.



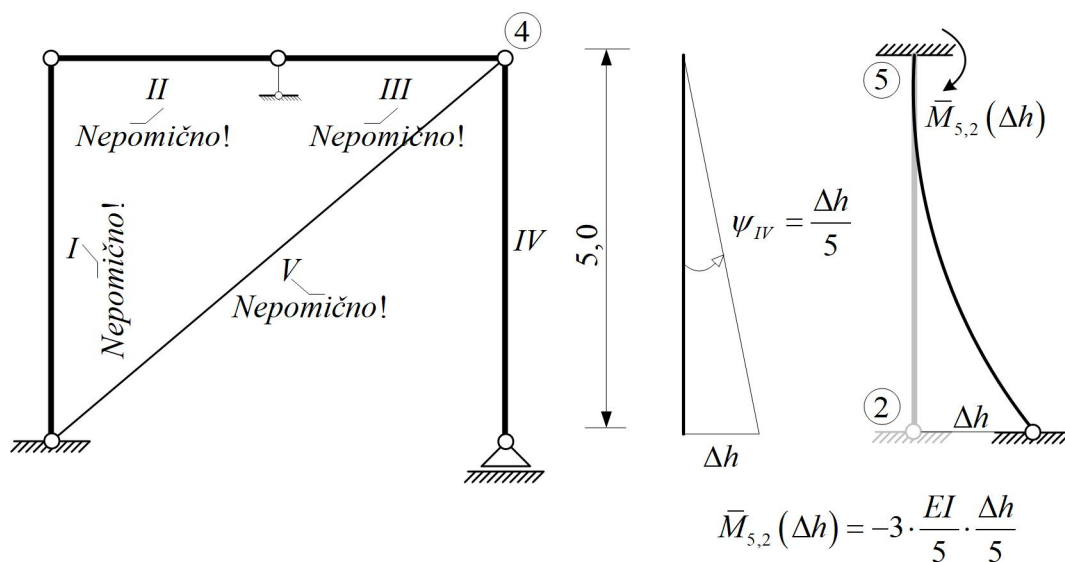
Slika 3.48: Oznake čvorova zadanoga sistema i zglobna shema

Kao što je već rečeno, u čvorovima s oznakama 3 i 5 nepoznati su kutovi zaokreta. Na temelju stupnja slobode gibanja zglobne sheme (slika 3.48) zaključuje se da je zadani sistem pomičan, odnosno da postoji jedna dodatna nepoznanica u inženjerskoj metodi pomaka u obliku translacije (stupanj slobode gibanja zglobne sheme je  $S = 1$ ).

Dodavanjem zglobnoga štapa na mjesto čvora 4 i u pravcu vertikalnoga pomaka navedenoga čvora zglobna shema postaje geometrijski nepromjenjivom (odnosno statički određenom,  $S=0$ ). Dakle, nepoznanice su zadanoga sistema  $\varphi_3 = ?$ ,  $\varphi_5 = ?$ ,  $w_4 = ?$ , a osnovni je sistem prikazan na slici 3.49.

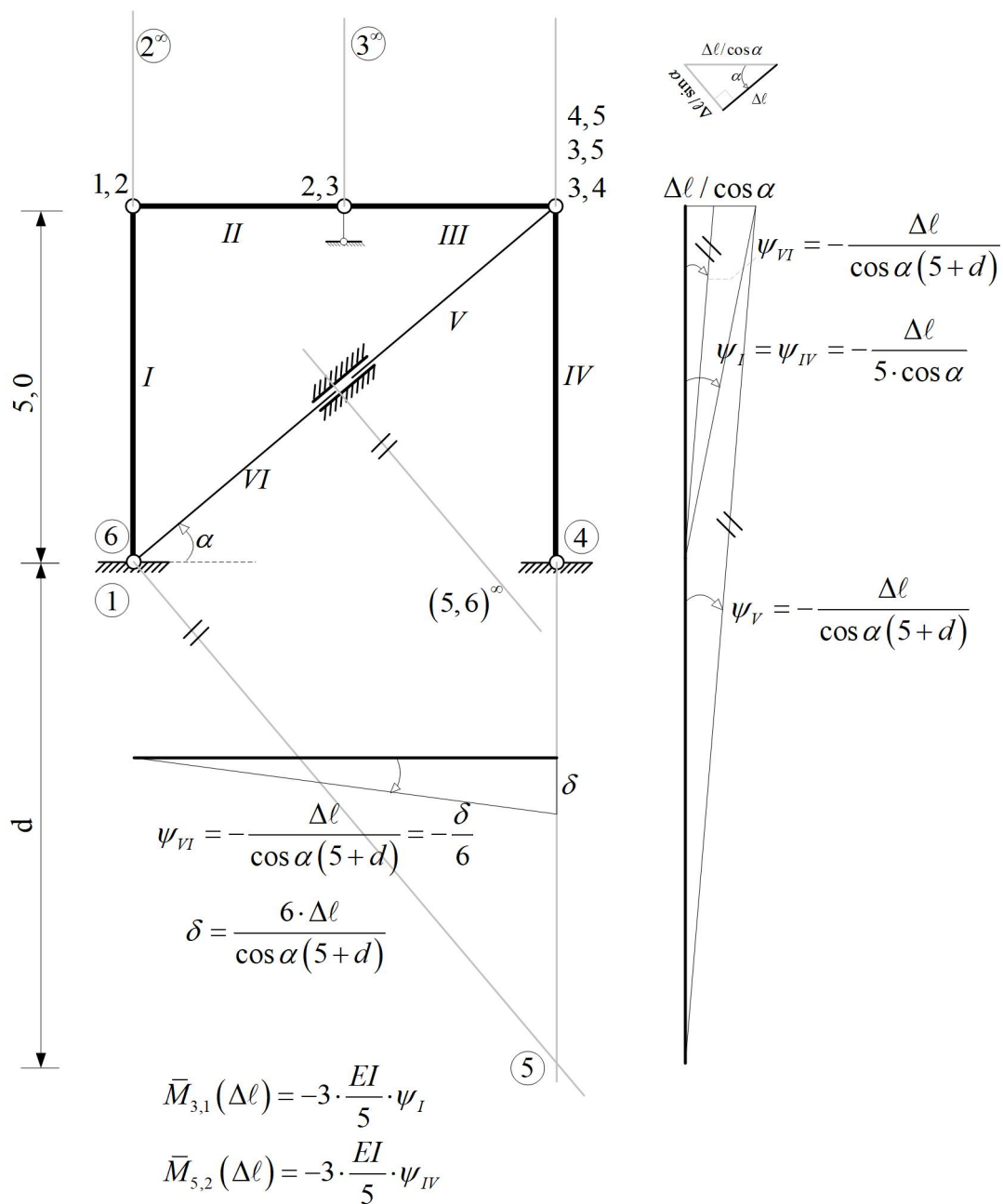


Slika 3.49: Osnovni sistem zadanoga statičkog sistema – spriječene nepoznate rotacije i translacijski pomak



Slika 3.50: Plan pomaka za prisilni pomak  $\Delta h$





**Slika 3.51:** Faza upetosti - plan pomaka za pomak  $\Delta l$

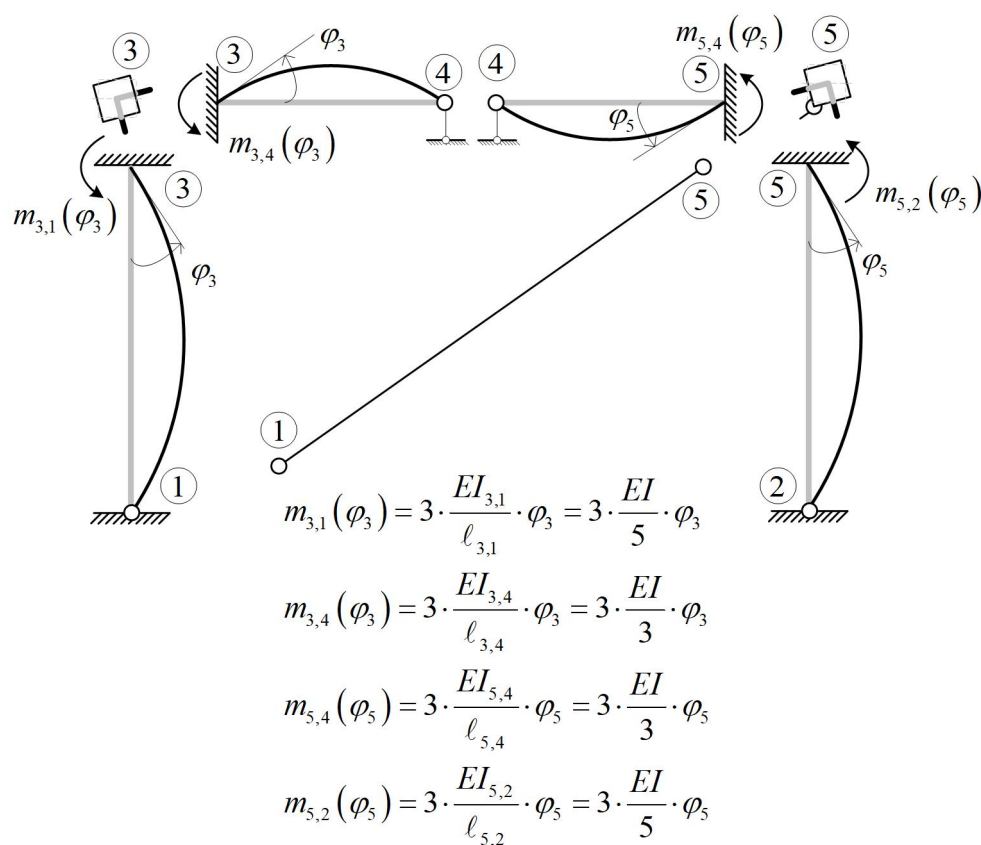
U prvoj fazi (fazi upetosti) elementi koji tvore osnovni sistem opterećeni su vanjskim opterećenjem, te se određuju momenti na krajevima elemenata koje nazivamo momentima upetosti. Momenti upetosti koje uzrokuje promjenjiva temperatura ( $\Delta t$ ) prikazani su na slici 3.38.

Za prisilni pomak  $\Delta h$  skicirat će se plan pomaka radi određivanja utjecaja na-

vedenoga pomaka na zaokrete elemenata. Na slici 3.50 određen je izraz za moment upetosti koji uzrokuje pomak  $\Delta h$ .

Kao što je već objašnjeno, jednolika temperatura  $t_s$  produljuje zategu i time uzrokuje zaokrete elemenata zadanoga sistema; stoga je na slici 3.51 skiciran plan pomaka za  $\Delta \ell$  („prisilni pomak“ nastao od temperature), određeni su momenti upetosti uzrok kojih je produljenje zatege.

Na slici 3.51 zatega, koja se produljuje za  $\Delta \ell$ , prekinuta je bilo gdje između krajnjih točaka. Na mjestu prekida dopušta se pomak u smjeru produljenja definiranjem klizno-upete unutarnje veze. Za nastali mehanizam (stupnja slobode gibanja  $S = 1$ ) određeni su polovi.

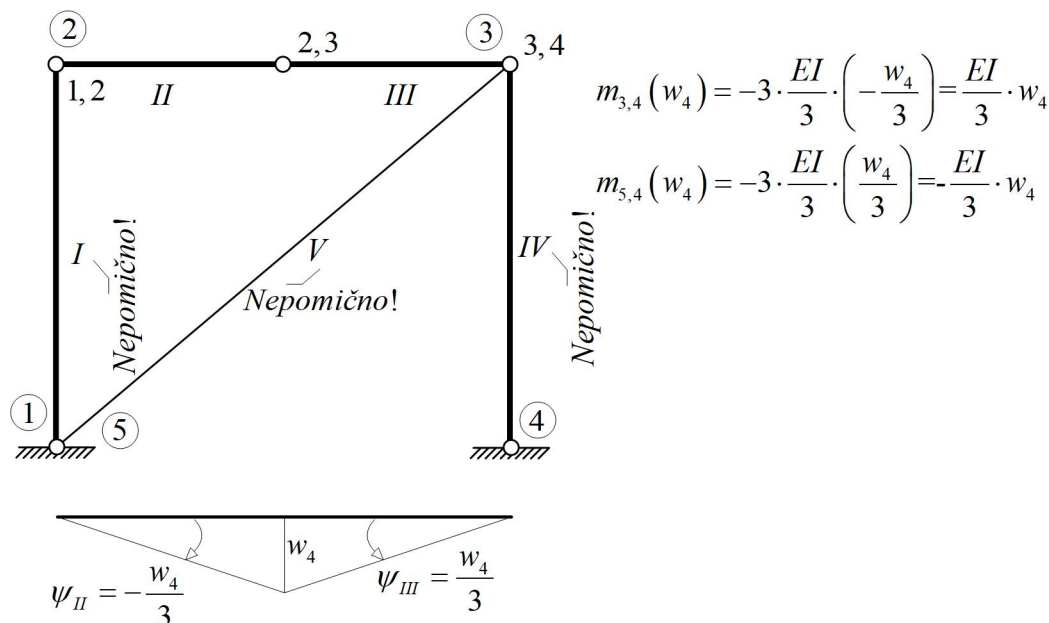


**Slika 3.52:** Faza dopuštenih pomaka – zakretanja čvorova 3 i 5

Posebno treba naglasiti da se čvorovi 3, 4 i 5 u nastalom mehanizmu transliraju iskuljučivo u horizontalnom smjeru (što slijedi iz položaja apsolutnih polova diskova II i III u beskonačno dalekoj točki vertikalnih pravaca koji prolaze točkama relativnih polova (1, 2) i (2, 3)), a produljenje zatege odvija se u smjeru pružanja

osi zatege, dok se (općenito) kruta tijela u planovima pomaka rotiraju po okomici na pravac diska. Stoga, na temelju pravokutnoga trokuta skiciranoga na slici 3.51 horizontalni pomak čvorova 3, 4 i 5 iznosi  $\frac{\Delta\ell}{\cos\alpha}$ .

Na slikama 3.52 i 3.53 određeni su izrazi za momente na krajevima elemenata u fazi dopuštenih pomaka.



Slika 3.53: Faza dopuštenih pomaka – plan pomaka za pomak  $w_4$

Izrazi su za konačne momente na krajevima elemenata zadanoga sistema

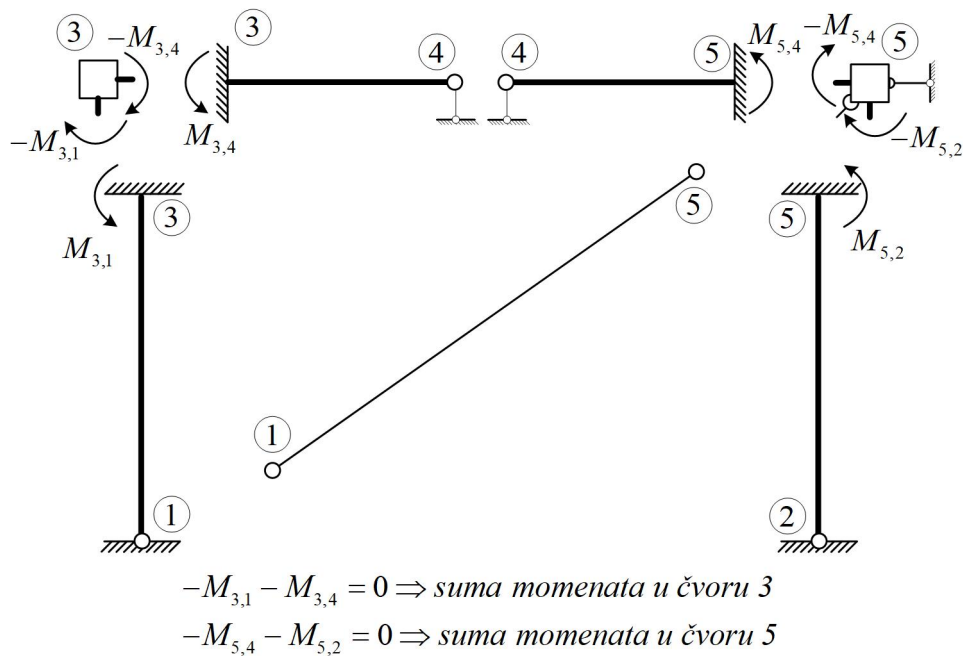
$$M_{3,4} = EI \cdot \varphi_3 + \frac{EI}{3} \cdot w_4$$

$$M_{5,4} = EI \cdot \varphi_5 - \frac{EI}{3} \cdot w_4$$

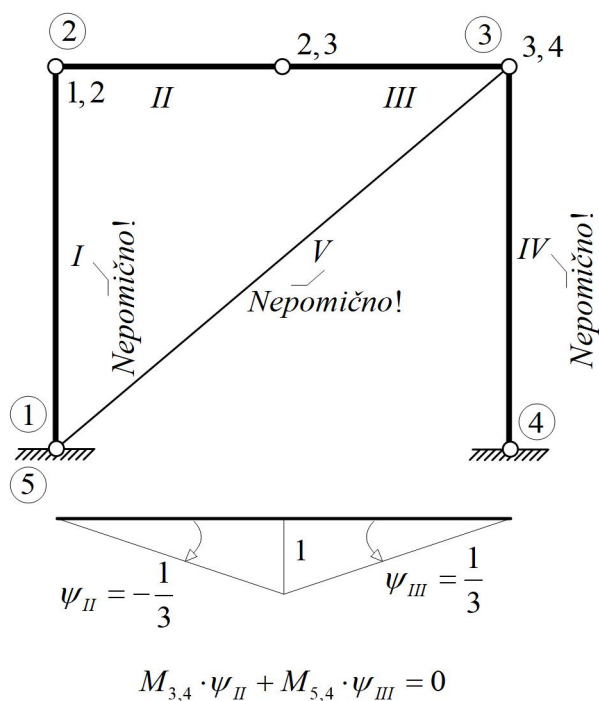
$$M_{3,1} = 3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \frac{\Delta\ell}{\cos\alpha} + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3$$

$$M_{5,2} = -3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \Delta h + 3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \frac{\Delta\ell}{\cos\alpha} + 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_5$$

Na slikama 3.54 i 3.55 postavljene su jednadžbe koje tvore sustav s tri nepoznanice jednake nepoznanicama zadanoga sistema u inženjerskoj metodi pomaka.



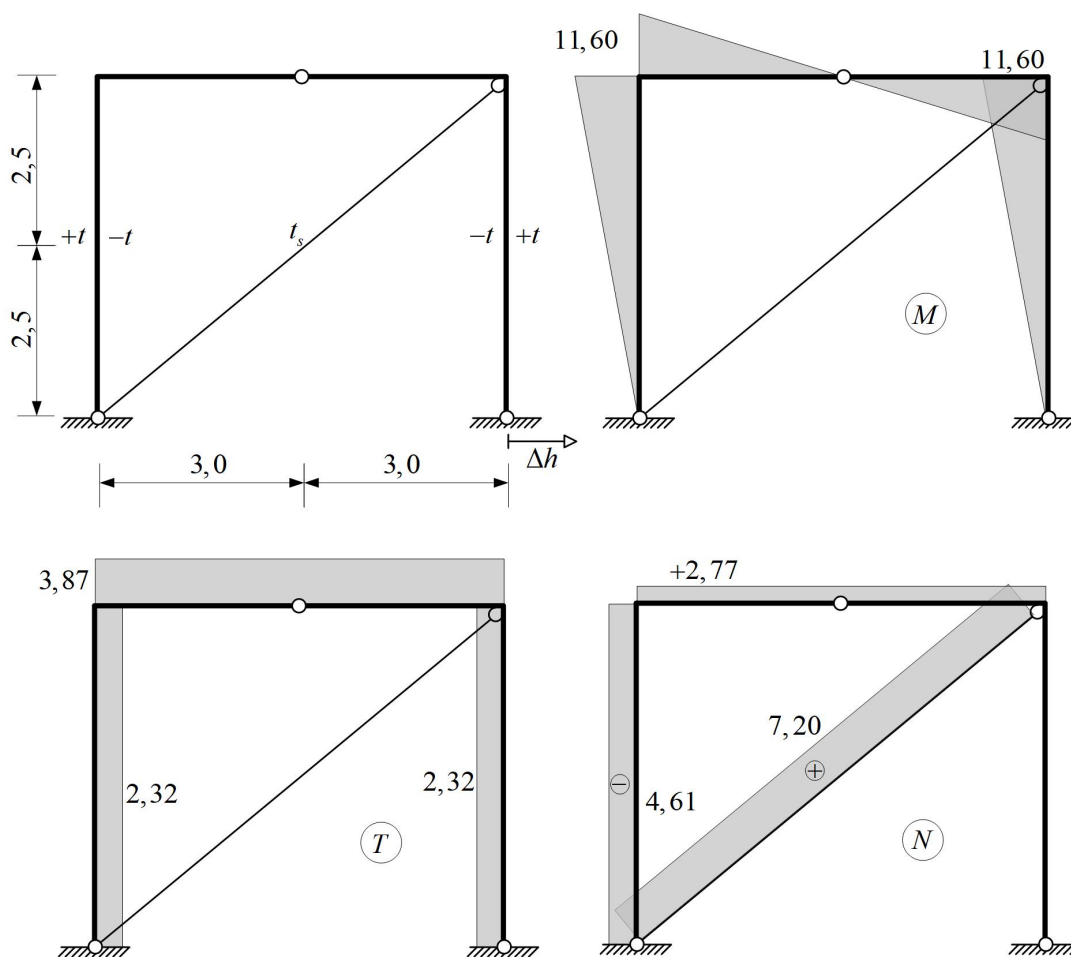
Slika 3.54: Jednadžbe ravnoteže momenata u čvoru 3 i čvoru 5



Slika 3.55: Jednadžba virtualnoga rada na planu pomaka za  $w_4 = 1$

Sustav jednadžbi koji treba riješiti glasi:

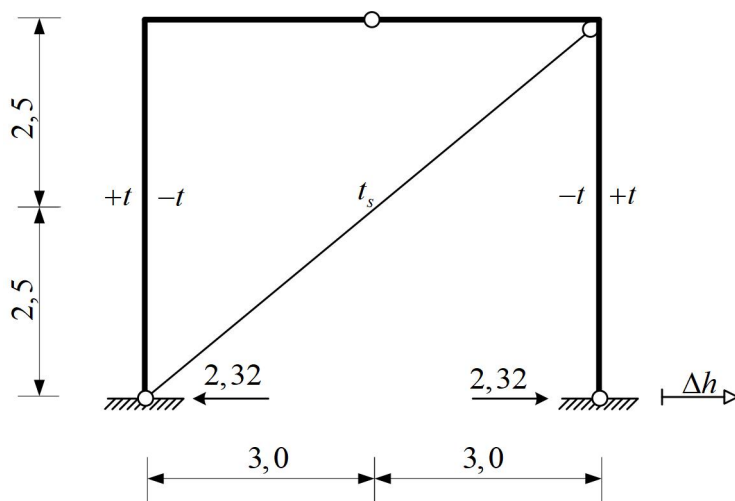
$$\begin{aligned}
 8 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_5 + \frac{EI}{3} \cdot w_4 &= -3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \frac{\Delta \ell}{\cos \alpha}, \\
 0 \cdot \varphi_3 + 8 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_5 - \frac{EI}{3} \cdot w_4 &= 3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \Delta h - 3 \cdot \frac{EI}{25} \cdot \frac{\Delta \ell}{\cos \alpha}, \\
 -\frac{EI}{3} \cdot \varphi_3 + \frac{EI}{3} \cdot \varphi_5 - 2 \cdot \frac{EI}{9} \cdot w_4 &= 0.
 \end{aligned}$$



Slika 3.56: Dijagrami unutarnjih sila zadanoga statičkog sistema

Dijagrami unutarnjih sila sa slike 3.56 dobiveni su uz poznavanje rješenja navedenoga sustava jednadžbi, kao i iznosa konačnih momenata savijanja krajeva elemenata zadanoga sistema:

$$\begin{array}{ll} \varphi_3 = -0,00274 \text{ m}^\circ & M_{3,4} = -11,60 \text{ kNm} \\ \varphi_5 = 0,00326 \text{ m}^\circ & M_{5,4} = 11,60 \text{ kNm} \\ w_4 = -0,0090 \text{ m} & M_{3,1} = 11,60 \text{ kNm} \\ & M_{5,2} = -11,60 \text{ kNm} \end{array}$$



Slika 3.57: Skica stvarnih djelovanja

## Poglavlje 4

# Relaksacijske metode

## 4.1 O relaksacijskim metodama

Metode pomaka, kao i metoda sila zahtijevaju rješavanje sustava linearnih jednadžbi broj kojih je jednak broju nepoznanica statičkoga sistema. U slučaju većih (okvirnih) sistema broj jednadžbi u sustavu može onemogućiti ili otežati njegovo direktno rješavanje. Radi izbjegavanja problema velikih sustava jednadžbi Konstantin Čališev godine 1923. definira metodu za *Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija* [8]. Čališev [7, 9] je tim radom (i metodom) postao pionir u primjeni iteracijskih relaksacijskih metoda za proračun okvirnih statičkih sistema [18].

Međutim, poznatija je iteracijska metoda Hardyja Crossa [6] koji je uočio (nekoliko godina nakon Čališeva) da se vrijednosti momenata na krajevima elemenata nepomičnoga statičkog sistema mogu izračunati izravno, bez potrebe za određivanjem kutova zaokreta koji su momente uzrokovali. Naime, u Čališevljevom se postupku vrijednosti momenata na krajevima elemenata određuju naknadno, dok se tijekom iteracijskoga postupka određuju kutovi zaokreta čvorova nepomičnoga sistema.

U postupku po Crossu prihvaćaju se pretpostavke koje vrijede u inženjerskoj metodi pomaka, a oba postupka započinju istom fazom (fazom upetosti): za nepomične statičke sisteme onemogućuju se rotacije krutih i mješovitih kruto-zglobnih čvorova, te se određuju momenti upetosti elemenata nastalih od utjecaja vanjskoga djelovanja. Čvorovi statičkoga sistema sa spriječenim zaokretima (u fazi upetosti) nisu u stanju ravnoteže. Dodavanjem momenta savijanja u **jedan** neuravnoteženi čvor intenziteta jednakoga iznosu neuravnoteženoga momenta (odabranoga čvora), a suprotnoga smisla vrtnje, odabrani je čvor postigao stanje ravnoteže. Opisanim je postupkom čvor uravnotežen zakretanjem za kut (iznos kojega u postupku po Crossu ne treba odrediti) potreban da se uravnoteži moment savijanja iz faze upetosti, dakle stanje je upetosti odabranoga čvora "oslabljeno", odnosno *relaksirano*.

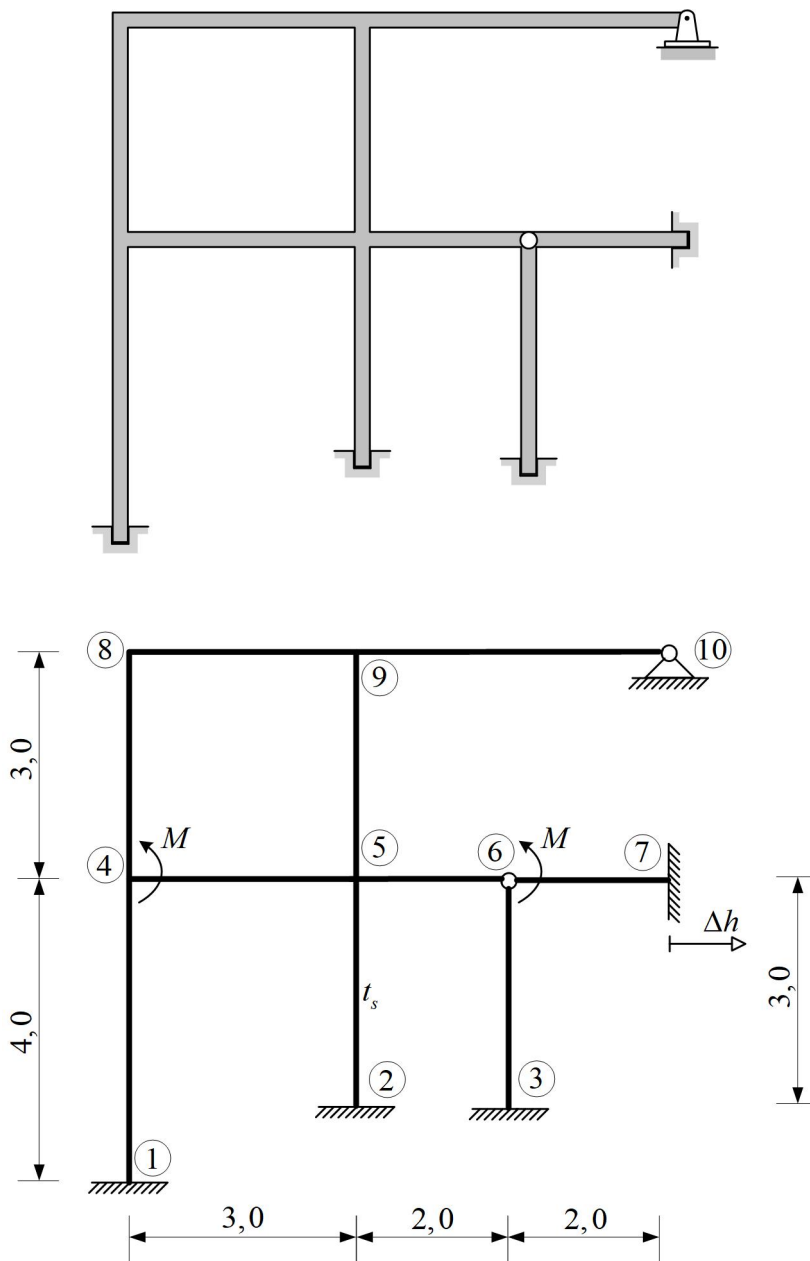
Nadalje, iznos dodanoga uravnotežujućeg momenta savijanja mora se raspodijeliti na priključene elemente čvora u omjerima rotacijskih krutosti elemenata i njihova zbroja. Zaokretanjem (relaksiranjem) jednoga čvora javljaju se momenti savijanja na drugim krajevima elemenata priključenih u odabrani čvor. Opisani se postupak ponavlja za svaki čvor sa spriječenim zaokretom, a zbog pojave momenata savijanja na drugim krajevima priključenih elemenata u čvor postupak se mora ponavljati i u prethodno uravnoteženim čvorovima, što Crossov postupak čini iteracijskim.



U slučaju pomičnih statičkih sistema prethodno opisani postupak ne daje konačne momente savijanja na krajevima elemenata, već treba nastaviti proračun uzimajući u obzir mogućnost pomaka. Točnije, u fazi upetosti pomičnih statičkih sistema sprečavaju se (dodavanjem veza) moguće rotacije čvorova i mogući translacijski pomaci što uzrokuje pojavu reaktivnih sila u dodanim vezama kao posljedica Crossovoga relaksacijskog postupka za uravnoteženje momenata savijanja. Proširenje Crossovoga postupka uključuje dopuštanje svake translacije pojedinačno te (iteracijsko) određivanje momenata savijanja u čvorovima sistema nastalih od omogućene translacije.

U slučaju okvira s vertikalnim stupovima i horizontalnim gredama, jednakim ležajnim uvjetima stupova te istih visina katova moguće je primijeniti postupak *Wenera i Csonke* na zamjenjujućem poluokviru [32, 33] skraćujući postupak koji se naziva *proširenim Crossovim postupkom*.

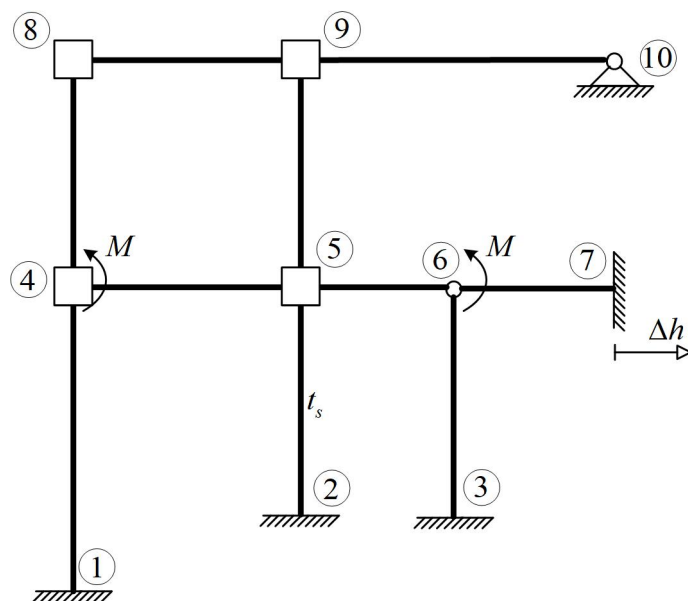
## 4.2 Nepomični višetažni okviri



Slika 4.1: Skica statičkoga sistema i njegova proračunska interpretacija s oznakama čvorova

Za zadani statički sistem sa slike 4.1, Crossovim će se relaksacijskim postupkom odrediti dijagrami unutarnjih sila. Pri tome je vrijednost umnoška  $EI = 55\,000$

$kNm^2$ , toplinski je koeficijent zadan s  $\alpha_t = 10^{-5} K^{-1}$ , a vrijednost je temperature  $t_s = -14^\circ C$ . Vrijednost koncentriranoga momenta savijanja s oznakom  $M$  jest  $25 kNm$ , dok je iznos prisilnoga pomaka čvora 7 u horizontalnom smjeru  $\Delta h = 2 cm$ .

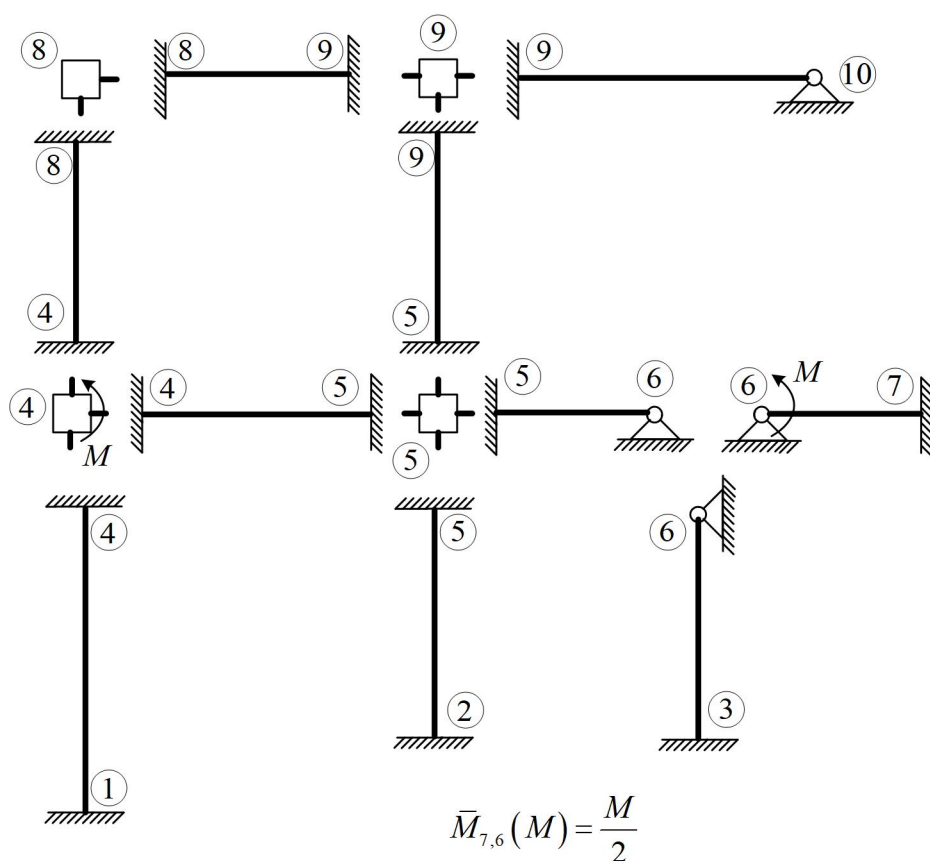


Slika 4.2: Crossov postupak – faza upetosti

Kao i inženjerska metoda pomaka, Crossov postupak započinje fazom upetosti (slika 4.2). Dakle, zadanom se sistemu sprečavaju nepoznati zaokreti (dodavanjem momentnih spojeva u čvorove s nepoznatim zaokretom) i nepoznate translacije (dodavanjem zglobnih štapova na mjestu i pravcu nepoznatih translacija). Ima li zadani statički sistem nepoznatih translacija "otkriva" (kao i u inženjerskoj metodi pomaka) zglobna shema. Zadani statički sistem sa slike 4.1 nema nepoznatih translacijskih pomaka (stupanj slobode gibanja zglobne sheme je  $S = 0$ ), te se sistem definira kao nepomični. Nepoznati su zaokreti čvorova 4, 5, 8 i 9.

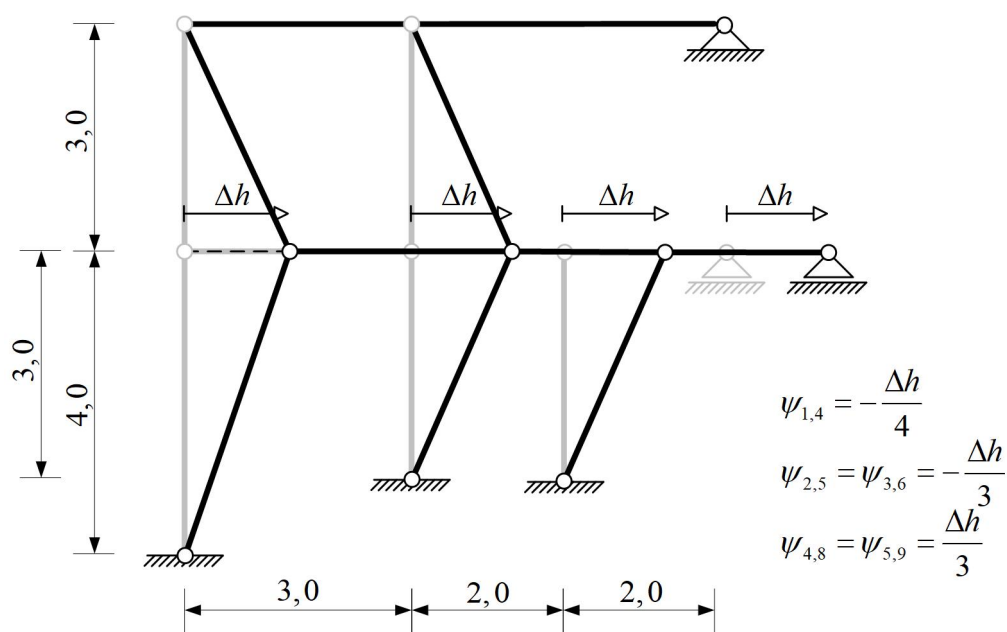
U fazi upetosti opterećenje je osnovnoga sistema zadano vanjsko opterećenje utjecaj kojega se na momente na krajevima elemenata osnovnoga sistema određuje na jednaki način kao i u inženjerskoj metodi pomaka. Dakle, osnovni se sistem "raspada" na elemente (obostrano ili jednostrano upete grede), a momenti savijanja na krajevima tih elemenata određuju se prema poznatim izrazima zapisanima u tablicama momenata upetosti (prema tome, utjecaj se prisilnih pomaka ležajeva i temperature na momente savijanja krajeva elemenata određuje na jednaki način kao i u inženjerskoj metodi pomaka, a isto vrijedi i za bilo koji oblik vanjskog

opterećenja). „Raspadom“ osnovnoga sistema sa slike 4.2 na elemente  $i - j$ , vanjski koncentrirani moment  $M$  zadan u čvoru (s indeksom 4) zaokret kojega se u fazi upetosti sprečava, **ostaje u čvoru** i ne uzrokuje momente upetosti na krajevima elemenata na koje se osnovni sistema "raspada" (prisjetimo se, osnovni se sistem „raspada“ na elemente odvajajući elemente neposredno prije njegova spoja s čvorom zaokret kojega se sprečava, slika 4.3). Moment savijanja s istom oznakom ( $M$ ) zadan u čvoru zaokret kojega nije nepoznanica zadanoga sistema (te se stoga u fazi upetosti ne sprečava) dio je elementa 6 – 7 te uzrokuje moment upetosti navedenoga elementa,  $\bar{M}_{7,6}$ .



**Slika 4.3:** Crossov postupak – faza upetosti („raspad“ na elemente) i utjecaj koncentriranih momenata  $M$

Radi određivanja utjecaja prisilnoga pomaka  $\Delta h$  na momente savijanja na krajevima elemenata osnovnoga sistema u fazi upetosti skiciran je plan pomaka (slika 4.4).

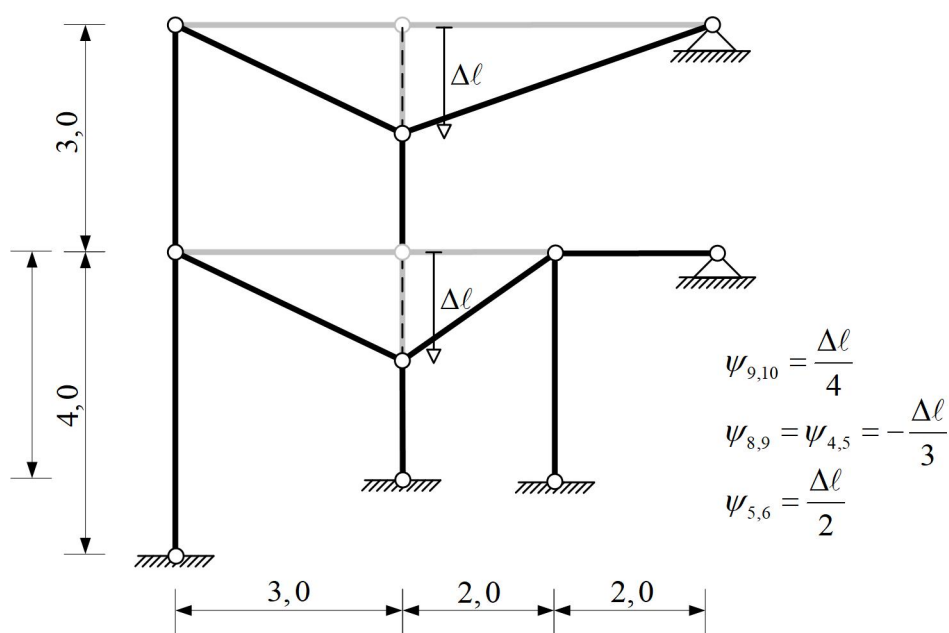


Slika 4.4: Crossov postupak – faza upetosti i utjecaj prisilnoga pomaka  $\Delta h$

Vrijednosti su momenata savijanja na krajevima elemenata zbog prisilnoga pomaka  $\Delta h$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{1,4}(\Delta h) &= \bar{M}_{4,1}(\Delta h) = -6 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_{1,4} \\ \bar{M}_{2,5}(\Delta h) &= \bar{M}_{5,2}(\Delta h) = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \psi_{2,5} \\ \bar{M}_{3,6}(\Delta h) &= -3 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \psi_{3,6} \\ \bar{M}_{4,8}(\Delta h) &= \bar{M}_{8,4}(\Delta h) = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \psi_{4,8} \\ \bar{M}_{5,9}(\Delta h) &= \bar{M}_{9,5}(\Delta h) = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \psi_{5,9}\end{aligned}$$

Jednolika temperatura  $t_s$  uzrokuje skraćenje elementa na kojem djeluje u iznosu  $\Delta \ell = t_s \cdot \alpha_t \cdot \ell = 14 \cdot 10^{-5} \cdot 3 = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Utjecaj skraćenja elementa 2 – 5 na momente savijanja na krajevima elemenata osnovnoga sistema u fazi upetosti određuje se u planu pomaka (slika 4.5).



Slika 4.5: Crossov postupak – faza upetosti i utjecaj temperature  $t_s$

Vrijednosti su momenata savijanja nastalih zbog skraćenja elementa 5 – 2

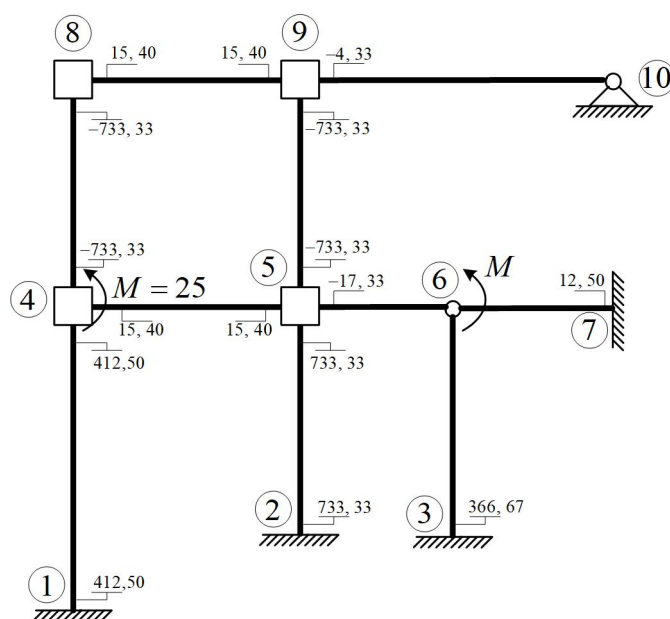
$$\begin{aligned}\bar{M}_{9,10}(\Delta\ell) &= -3 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_{9,10} \\ \bar{M}_{8,9}(\Delta\ell) &= \bar{M}_{9,8}(\Delta\ell) = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \psi_{8,9} \\ \bar{M}_{4,5}(\Delta\ell) &= \bar{M}_{5,4}(\Delta\ell) = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \psi_{4,5} \\ \bar{M}_{5,6}(\Delta\ell) &= -3 \cdot \frac{EI}{2} \cdot \psi_{5,6}\end{aligned}$$

Ukupni su momenti savijanja na krajevima elemenata u fazi upetosti

$$\begin{aligned}\bar{M}_{1,4} &= \bar{M}_{1,4}(\Delta h) = 412,50 \text{ kNm} & \bar{M}_{9,10} &= \bar{M}_{9,10}(\Delta\ell) = -4,33 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{4,1} &= \bar{M}_{4,1}(\Delta h) = 412,50 \text{ kNm} & \bar{M}_{8,9} &= \bar{M}_{8,9}(\Delta\ell) = 15,40 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{2,5} &= \bar{M}_{2,5}(\Delta h) = 733,33 \text{ kNm} & \bar{M}_{9,8} &= \bar{M}_{9,8}(\Delta\ell) = 15,40 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{5,2} &= \bar{M}_{5,2}(\Delta h) = 733,33 \text{ kNm} & \bar{M}_{4,5} &= \bar{M}_{4,5}(\Delta\ell) = 15,40 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{3,6} &= \bar{M}_{3,6}(\Delta h) = 366,67 \text{ kNm} & \bar{M}_{5,4} &= \bar{M}_{5,4}(\Delta\ell) = 15,40 \text{ kNm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{5,6} &= \bar{M}_{5,6}(\Delta\ell) = -17,33 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{4,8} &= \bar{M}_{4,8}(\Delta h) = -733,33 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{8,4} &= \bar{M}_{8,4}(\Delta h) = -733,33 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{5,9} &= \bar{M}_{5,9}(\Delta h) = -733,33 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{9,5} &= \bar{M}_{9,5}(\Delta h) = -733,33 \text{ kNm} \\ \bar{M}_{7,6} &= 12,50 \text{ kNm}\end{aligned}$$

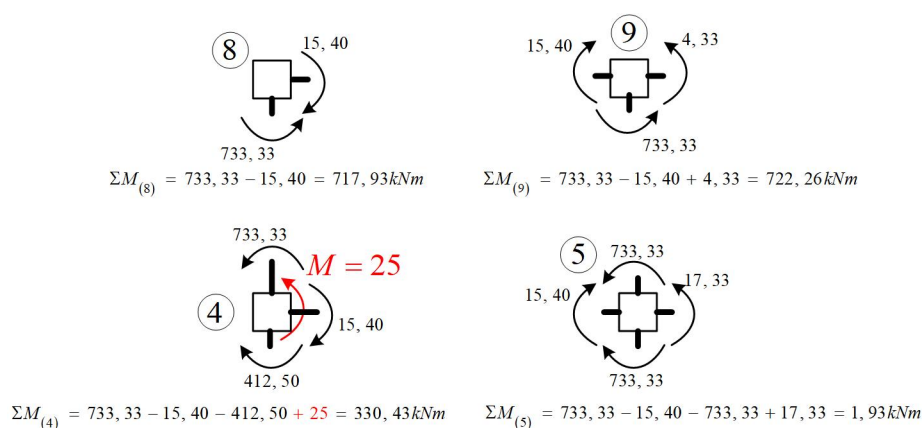
Nakon faze upetosti, u inženjskoj metodi pomaka dopuštaju se nepoznati zaokreti i translacije (koji su u fazi upetosti bili spriječeni), te se nakon određivanja izraza za ukupne momente savijanja na krajevima elemenata osnovnoga sistema zapisuju jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima s nepoznatim zaokretom, odnosno definiraju se jednadžbe virtualnoga rada aktivnih sila na virtualnim pomacima. Na taj se način sastavlja sustav jednadžbi koji (uvijek) ima jedno realno rješenje (matrica je sustava simetrična, dijagonalno dominantna i pozitivno definitna). Drugim riječima, tvorbom sustava jednadžbi *istodobno* se zadovoljavaju jednadžbe ravnoteže pojedinih (odabranih) dijelova osnovnoga sistema.



**Slika 4.6:** Crossov postupak – faza upetosti (ukupni momenti upetosti na krajevima elemenata)

U Crossovom postupku (za nepomične sisteme) *pojedinačno* se zadovoljavaju jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima s nepoznatim zaokretima, čvor po čvor.

Postupak može započeti u bilo kojem čvoru s nepoznatim zaokretom, ali najbrže se (u najmanjem broju koraka) dolazi do (zadovoljavajućega) rješenja ako se krene od čvora s najvećim neuravnoteženim momentom savijanja (pritom se uspoređuju apsolutne vrijednosti momenata savijanja). Na primjer, na slici 4.6 prikazani su momenti upetosti na osnovnom sistemu koji djeluju na krajevima elemenata toga sistema. Ako se iz osnovnoga sistema izdvoje čvorovi sa spriječenim zaokretima (čvorovi s indeksima 4, 5, 8, 9), smjer rotacije momenata savijanja s kraja elementa se mijenja (slika 4.7), ali vanjski koncentrirani moment (s iznosom  $M = 25$  kNm) zadržava smjer vrtnje, jer djeluje u čvoru (a ne na nekom od elemenata, kao što je slučaj s momentima upetosti).

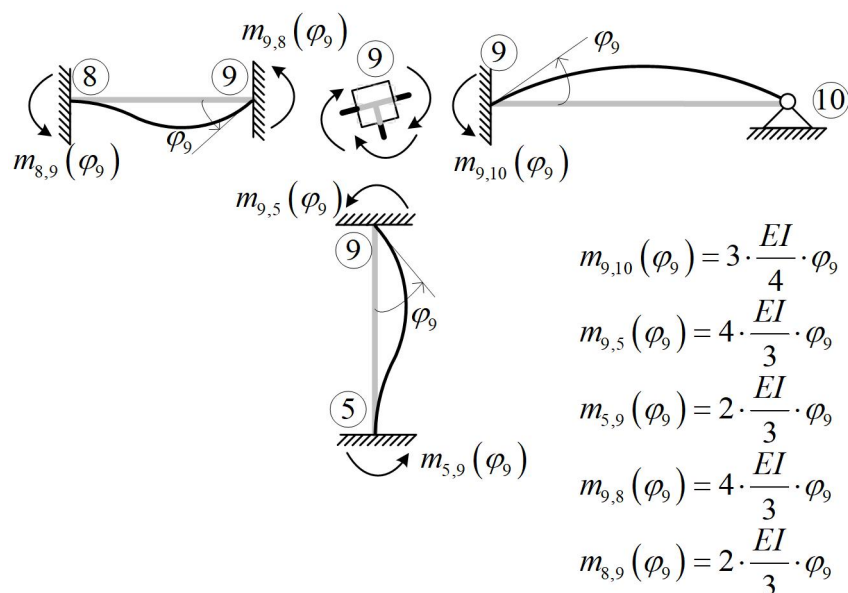


**Slika 4.7:** Crossov postupak – faza upetosti (momenti upetosti u čvorovima)

Prema zbroju momenata sa slike 4.7, najveći je neurevnoteženi moment savijanja u čvoru s indeksom 9, pa stoga Crossov postupak započinje u tom čvoru. Očito čvor 9 nije u ravnoteži, ali ako se u čvor unese moment iznosa  $-722,26$  kNm, zbroj je momenata u čvoru 9 nula, odnosno, postignuta je ravnoteža čvora 9. Što se događa (fizički) s tim čvorom dodavanjem momenta savijanja određenoga iznosa? Odgovor je da se čvor zaokreće. Drugim riječima, dopušta se zaokret čvora koji je u fazi upetosti spriječen i dodavanjem momenta savijanja u čvor na taj se način postiže ravnoteža.

Zakretanjem čvora 9 javljaju se momenti savijanja na krajevima elemenata koji se spajaju u tom čvoru (slika 4.8, rotacija je čvora pozitivna).





Slika 4.8: Crossov postupak – zakretanje čvora 9

Za bilo koju vrijednost zaokreta  $\varphi_9$  izrazi se za momente savijanja sa slike 4.8 ne mijenjaju. Budući da se radi o malom zaokretu (vrijedi teorija I. reda), veza je između vrijednosti momenta savijanja krajeva elemenata i kuta zaokreta koji te momente izaziva linearna. Ako je  $\varphi_9 = 1$ , iznosi se momenta savijanja na krajevima elemenata koji se u čvor 9 priključuju nazivaju (pojednostavnjeno) **rotacijskim krutostima elemenata**. Za  $n$  puta veću vrijednost kuta  $\varphi_9$  momenti savijanja na krajevima elemenata su  $n$  puta veći od rotacijskih krutosti pojedinih elemenata. Također, rotacijom čvora 9 za bilo koji kut odnosi između iznosa momenta savijanja krajeva elemenata (koji se u taj čvor priključuju) ostaju nepromijenjenima: ako je rotacijska krutost elementa  $i - j$  dvostruko veća od rotacijske krutosti elementa  $m - n$ , tada će i moment savijanja koji se javlja na elementu  $i - j$  zbog zaokreta njihova zajedničkog čvora biti dvostruko veći.

Poznavajući prethodno navedeno postavimo se u ulogu projektanta koji tada lako može utjecati na oblik dijagrama momenata savijanja povećanjem ili smanjenjem dimenzija nosivih elemenata statičkog sistema i time "usmjeriti" tok sila prema (rotacijski) krućem elementu.

Konkretno, u zadanom se zadatku čvor 9 uravnotežuje dodavanjem momenta savijanja u čvor iznosa  $-722,26$  kNm, odnosno čvor se zaokreće za neki (negativan) kut, te se javljaju momenti savijanja na krajevima elemenata koji se u čvor 9

priključuju, a njihove su vrijednosti uvijek u omjerima rotacijskih krutosti. Taj se omjer naziva **razdjelnim koeficijentom** ( $\mu_{i,j}$ ) koji se određuje kao odnos rotacijske krutosti pojedinoga elementa ( $k_{i,j}$ ) i ukupne rotacijske krutosti elemenata koji se u čvor priključuju ( $\Sigma k_{(i)}$ ):

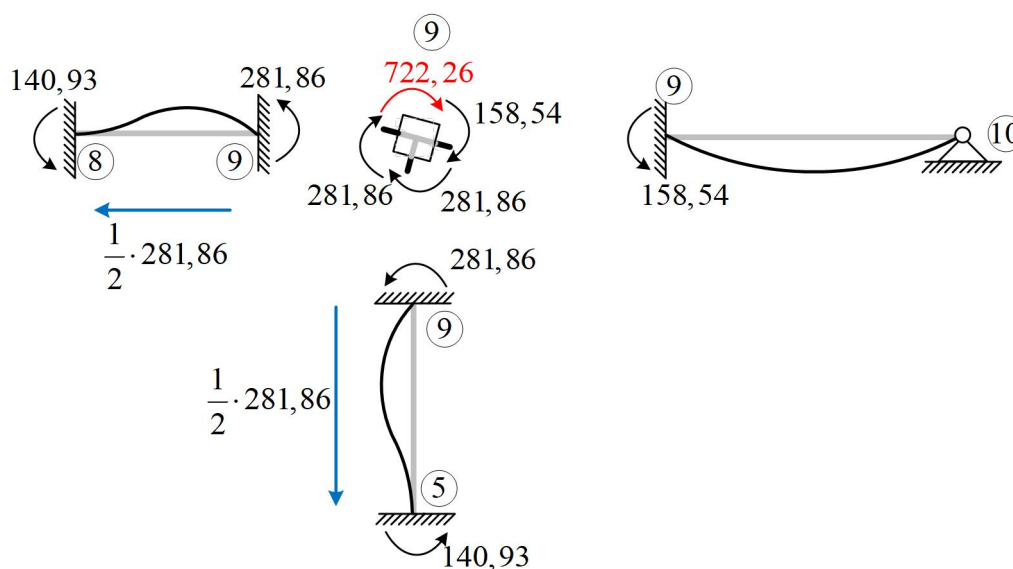
$$k_{9,10} = 3 \cdot \frac{EI}{4} \Rightarrow \mu_{9,10} = \frac{\frac{3EI}{4}}{\frac{41EI}{12}} = \frac{9}{41}$$

$$k_{9,5} = 4 \cdot \frac{EI}{3} \Rightarrow \mu_{9,5} = \frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{41EI}{12}} = \frac{16}{41}$$

$$k_{9,8} = 4 \cdot \frac{EI}{3} \Rightarrow \mu_{9,8} = \frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{41EI}{12}} = \frac{16}{41}$$

.....

$$\Sigma k_{(9)} = k_{9,10} + k_{9,5} + k_{9,8} = \frac{41}{12} \cdot EI$$

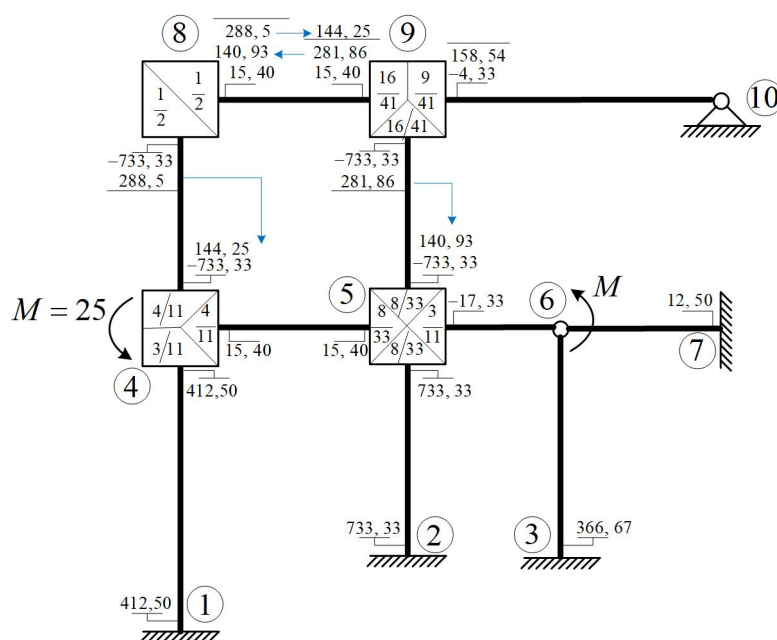


Slika 4.9: Crossov postupak – ravnoteža čvora 9

Primijetimo, zbroj je razdjelnih koeficijenata čvora 9 jednak jedan, a isto vrijedi za svaki čvor za koji se razdjelni koeficijenti određuju. Naime, dodavanjem momenta

u čvor i njegovom razdiobom na priključene elemente dio dodanoga momenta ne može nestati, već se moment u svom punom iznosu razdjeljuje na elemente (a to osigurava jedinični zbroj razdjelnih koeficijenata).

Množenjem momenta  $-722,26$  kNm (koji se dodaje u čvor 9 radi njegova uravnoteženja) s razdjelnim koeficijentima elemenata dobivaju se momenti savijanja na krajevima elemenata koji nastaju zbog (dopuštanja) zakretanja čvora 9 (slika 4.9). Primijetimo, momenti savijanja koji nastaju množenjem dodanoga momenta u čvor s razdjelnim koeficijentima imaju u čvoru isti smjer vrtnje kao i moment od kojeg su nastali (jer ga ne uravnotežuju), dok su na krajevima elemenata momenti savijanja suprotnih rotacija od onih u čvoru. Također, na slici 4.9 rotacija je čvora u smjeru negativnoga kuta zaokreta (prema dogovoru to je smjer kazaljki na satu), ali rotacija momenata na krajevima elemenata ne prati smjer rotacije čvora, jer momenti predstavljaju otpor toj rotaciji (dodani se momentni spoj uklanja i čvor se zakreće u smjeru neuravnoteženoga momenta u čvoru, a dodavanjem momenta radi postizanja ravnoteže rotiramo čvor u suprotnom smjeru).



**Slika 4.10:** Crossov postupak – ravnoteža čvora 9 (prvi korak postupka) i čvora 8 (drugi korak postupka)

Zakret čvora 9 uzrokuje momente savijanja na suprotnim krajevima elemenata u odnosu na čvor 9. Na primjer, za obostrano upetu gredu 8 – 9 pojava momenta savijanja  $m_{9,8} = 281,86$  kNm uzrokuje upola manji moment savijanja

$m_{8,9} = \frac{1}{2} \cdot (281,86) = 140,93 \text{ kNm}$ . Kažemo, moment savijanja prenosi se na drugi kraj obostrano upetog elementa, a **prijenosni** je *koeficijent*  $\frac{1}{2}$ . Odnos momenata savijanja krajeva grede nastalih zbog zaokreta jednoga njezinog kraja vidljiv je na slici 4.8:  $m_{i,j}(\varphi_i) = \frac{1}{2} \cdot m_{j,i}(\varphi_i)$ .

Postupak prikazan na primjeru čvora 9 primjenjuje se za svaki sljedeći čvor koji se uravnotežuje Crossovim postupkom. Sljedeći je čvor onaj s trenutačno najvećom (apsolutnom) vrijednosti neuravnoteženoga momenta (to je čvor 8), a njegovo se uravnoteženje smatra drugim korakom Crossovoga postupka.

Radi preglednosti postupka upotrebljava se shema sa slike 4.10 u koju su upisani razdjelni koeficijenti čvorova 8, 9, 4 i 5, momenti upetosti na krajevima elemenata i izračunani momenti savijanja krajeva elemenata iz prvoga i drugoga koraka Crossovoga postupka.

Razdjelni su koeficijenti za čvorove 4, 5 i 8

$$\begin{array}{ll}
 k_{4,1} = 4 \cdot \frac{EI}{4} \Rightarrow \mu_{4,1} = \frac{\frac{4EI}{12}}{44EI} = \frac{3}{11} & k_{5,6} = 3 \cdot \frac{EI}{2} \Rightarrow \mu_{5,6} = \frac{\frac{3EI}{2}}{11EI} = \frac{3}{11} \\
 k_{4,5} = 4 \cdot \frac{EI}{3} \Rightarrow \mu_{4,5} = \frac{\frac{4EI}{12}}{44EI} = \frac{4}{11} & k_{5,4} = 4 \cdot \frac{EI}{3} \Rightarrow \mu_{5,4} = \frac{\frac{4EI}{2}}{11EI} = \frac{8}{33} \\
 k_{4,8} = 4 \cdot \frac{EI}{3} \Rightarrow \mu_{4,8} = \frac{\frac{4EI}{12}}{44EI} = \frac{4}{11} & k_{5,9} = 4 \cdot \frac{EI}{3} \Rightarrow \mu_{5,9} = \frac{\frac{4EI}{2}}{11EI} = \frac{8}{33} \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 \Sigma k_{(4)} = k_{4,1} + k_{4,5} + k_{4,8} = \frac{44}{12} \cdot EI & k_{5,2} = 4 \cdot \frac{EI}{3} \Rightarrow \mu_{5,2} = \frac{\frac{4EI}{2}}{11EI} = \frac{8}{33} \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \Sigma k_{(5)} = k_{5,6} + k_{5,4} + k_{5,9} + k_{5,2} = \frac{11}{2} \cdot EI
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 k_{8,9} &= 4 \cdot \frac{EI}{3} & \Rightarrow \mu_{8,9} &= \frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{8EI}{3}} = \frac{1}{2} \\
 k_{8,4} &= 4 \cdot \frac{EI}{3} & \Rightarrow \mu_{8,4} &= \frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{8EI}{3}} = \frac{1}{2} \\
 \dots\dots\dots & & & \\
 \Sigma k_{(8)} &= k_{8,9} + k_{8,4} = \frac{1}{2} \cdot EI
 \end{aligned}$$

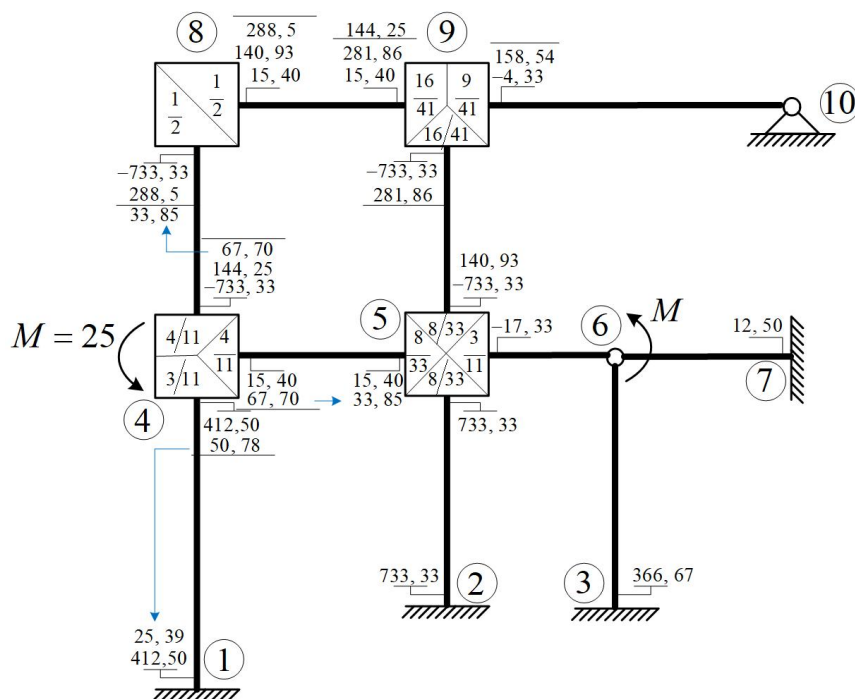
Drugi korak: u čvoru 8 vrijednost je neuravnoteženoga momenta savijanja  $-577,0 \text{ kNm}$  (predznak se odnosi na zbroj momenata savijanja koji djeluju na krajevima elemenata), te treba dodati moment savijanja od  $+577,0 \text{ kNm}$  (na krajeve elemenata) i rasporediti ga u omjeru krutosti na priključene elemente čvora 8 i na kraju prenijeti polovine raspodijeljenih momenata na druge krajeve priključenih elemenata (naznačeno plavom strelicom na slici 4.10). Nakon svakoga se koraka (a radi isticanja uravnoteženih momenata iznad i reziduala ispod) podvlači crta ispod/iznad momenata savijanja koji su u ravnoteži.

Ponovno naglašavamo, momenti savijanja na slici 4.10 djeluju na krajevima elemenata te im je smjer rotacije suprotan od onoga u čvoru, jednako kao što je smjer rotacije (pa time i predznak) momenta savijanja koji se dodaje u čvor radi njegovoga uravnotežavanja suprotan smjeru kojim on djeluje na elemente (slika 4.9).

U drugom je koraku čvor 8 uravnotežen, međutim narušena je ravnoteža momenata savijanja postignuta u prvom koraku (u kojem je uravnotežen čvor 9). To znači da je Crossov postupak **iteracijski** jer se do rješenja dolazi nakon niza koraka (odnosno iteracija) u kojima se iznova postiže ravnoteža pojedinih čvorova. Prema tome, postupak je **približan** jer se rješenje "prihvaća" kao dovoljno točno nakon određenoga broja iteracija, odlučujući kolika se točnost (blizina rješenju) želi. I još, postupak je **relaksacijski** jer se u svakom koraku čvor pomalo zaokreće, odnosno relaksira u odnosu na početno stanje upetosti.

Na slici 4.11 prikazan je treći korak Crossovoga postupka. Pritom je uravnotežen čvor 4. Treći korak: prema zbroju sa slike 4.7 neuravnoteženo je  $+330,43 \text{ kNm}$ , koliko iznosi zbroj momenata upetosti u čvoru 4 i vanjskoga koncentriranog momenta  $M = 25 \text{ kNm}$  koji u čvoru ima pozitivan smjer rotacije.

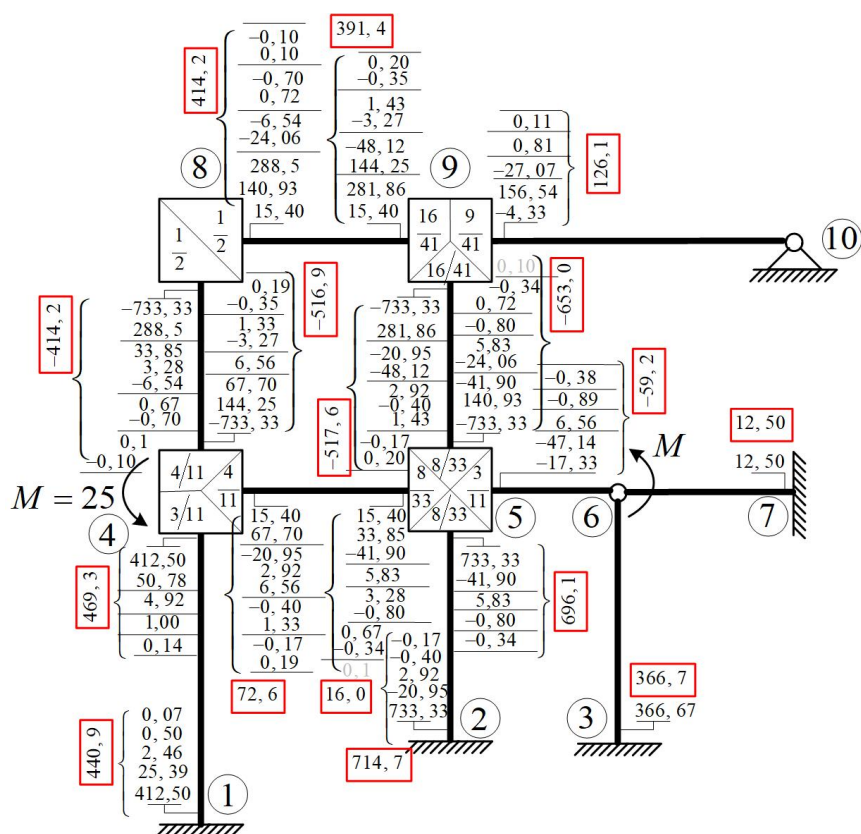
Međutim, u shemu Crossovog postupka (kao što je ona sa slike 4.11) upisuju se momenti na krajevima elemenata, te treba promijeniti predznak zbroja sa slike 4.7 ili promijeniti predznak koncentriranoga momenta dobivajući iznos neuravnoteženoga momenta kao  $412,50 + 15,40 - 733,33 - 25 = -330,43 \text{ kNm}$ . Toj se vrijednosti dodaje moment od  $144,25 \text{ kNm}$  koji je prijenosni moment nastao uravnotežavanjem čvora 8 (drugi korak), te je ukupni moment koji treba uravnotežiti jednak  $-330,43 + 144,25 = -186,18 \text{ kNm}$ . Moment iznosa  $+186,18 \text{ kNm}$  dodaje se na krajeve elemenata koji se sastaju u čvoru 4 i množi s razdjelnim koeficijentima toga čvora, te se polovina razdjeljenih momenata prenosi na druge krajeve elemenata koji se spajaju u navedenom čvoru.



**Slika 4.11:** Crossov postupak – ravnoteža čvora 4 (treći korak postupka)

Opisani se koraci ponavljaju dok prijenosni momenti ne postanu decimalni brojevi s jednom ili dvije decimalne znamenke jednake nuli (u stvari govori se o odabranoj točnosti). Redoslijed obilaska čvorova ovisi o trenutno najvećem neuravnoteženom momentu (četvrti korak u zadanom zadatku odnosi se na ravnotežu čvora 5 s neuravnoteženim momentom od  $+172,85 \text{ kNm}$ , a daljnji je redoslijed obilaska čvorova sljedeći: 9, 5, 4, 8, 5, 9, 4, 8, 5, 4, 9, 8).

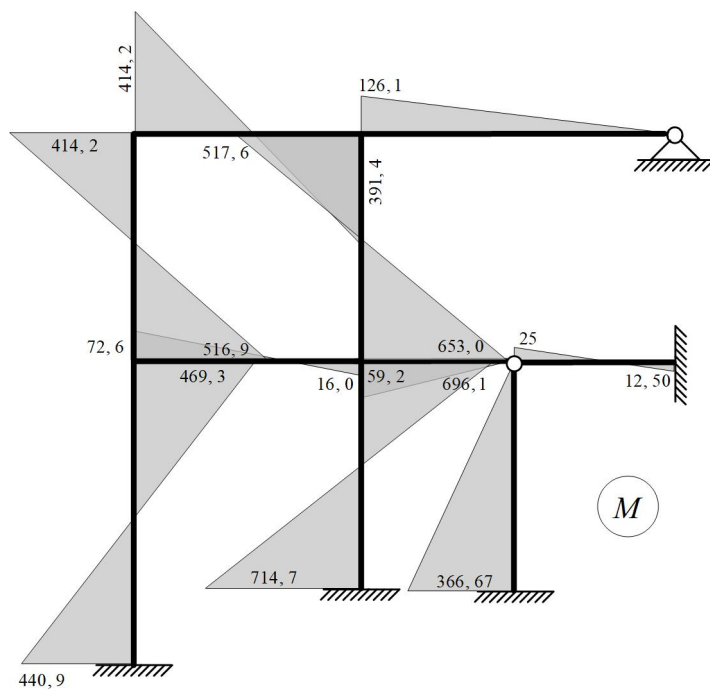
Konačni su momenti na krajevima elemenata jednaki zbrojevima momenata svih koraka, odnosno u shemi Crossovog postupka momenti savijanja na određenom kraju elementa iz pojedinih koraka zapisuju se jedan ispod drugoga i tvore stupac, a konačna vrijednost momenta savijanja tog kraja elementa jednaka je zbroju momenata iz stupca (slika 4.12).



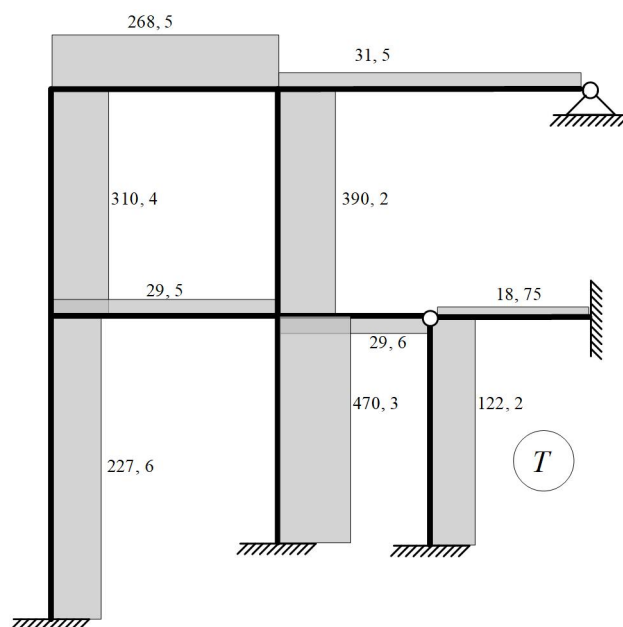
Slika 4.12: Crossov postupak

Na temelju momenata savijanja na krajevima elemenata određenih Crossovim postupkom (slika 4.12) skiciran je dijagram konačnih momenata savijanja (slika 4.13).

Dijagram poprečnih sila sa slike 4.14 dobiven je na temelju poznavanja diferencijalnoga odnosa funkcije momenta savijanja i poprečne sile.



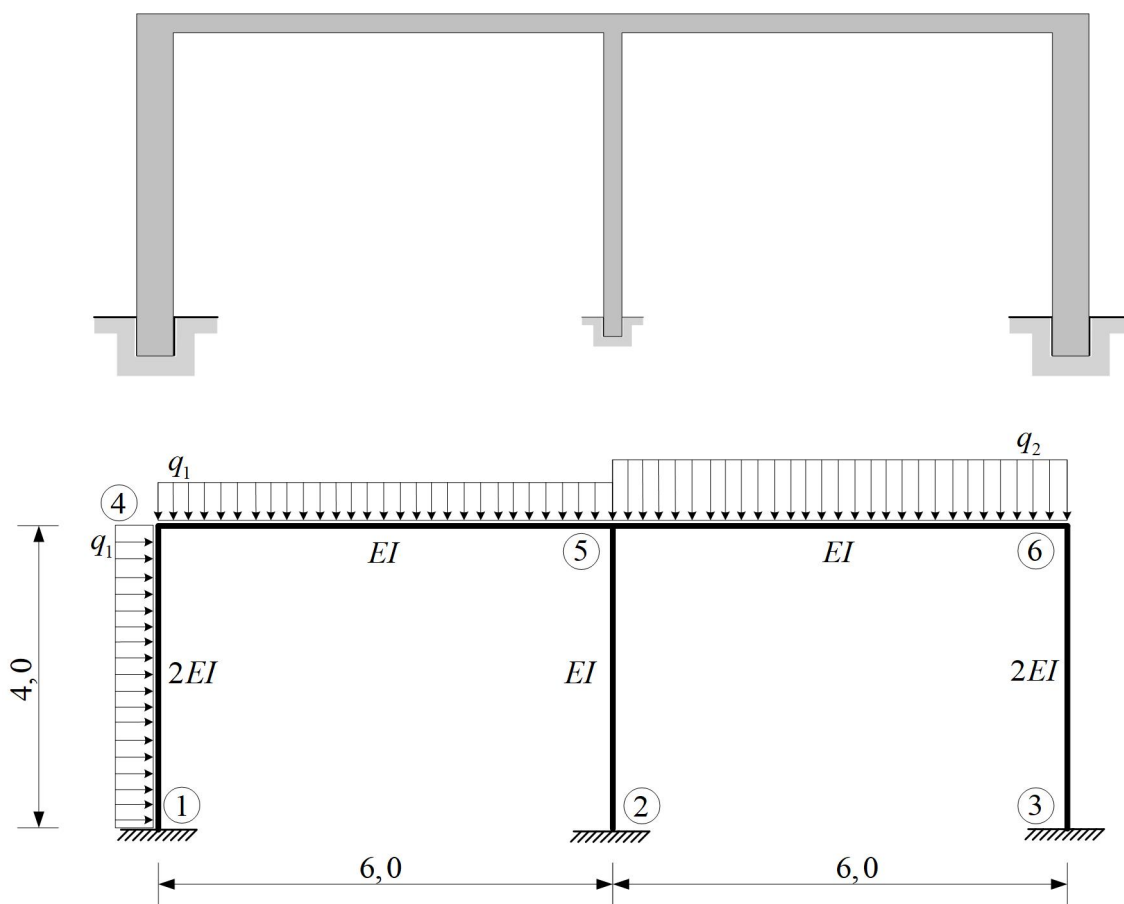
Slika 4.13: Dijagram momenata savijanja dobiven Crossovim postupkom



Slika 4.14: Dijagram poprečnih sila



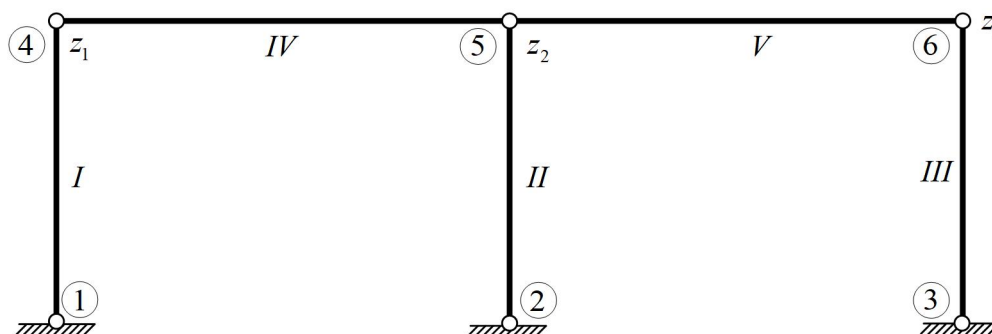
### 4.3 Pomični višetažni okvir – primjena postupka Wernera i Csonke



**Slika 4.15:** Skica statičkoga sistema i njegova proračunska interpretacija s oznakama čvorova

Za zadani će se statički sistem sa slike 4.15 relaksacijskim postupcima odrediti dijagrami unutarnjih sila. Pritom je vrijednost umnoška  $EI = 50\,000\text{ kNm}^2$ , jednoliko je kontinuirano opterećenje  $q_1 = 12\text{ kN/m}$ , dok je  $q_2 = 20\text{ kN/m}$ .

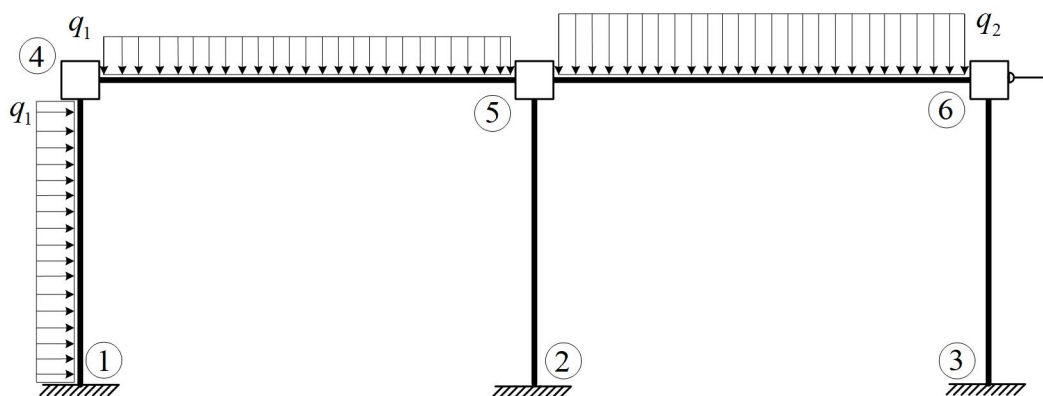
Statički sistem sa slike 4.15 šest je puta statički neodređen. U čvorovima 4, 5 i 6 nepoznati su kutovi rotacija, a sistem je **pomičan**. Naime, zglobna je shema sa slike 4.16 stupnja slobode gibanja  $S = 1$ , što znači da u zadanom sistemu postoji jedna neovisna translacija. Lako je zaključiti da se radi o horizontalnom pomaku vrhova stupova, odnosno horizontalom pomaku greda 4 – 5 i 5 – 6.



$$S = 3 \cdot 5 - 6 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 1$$

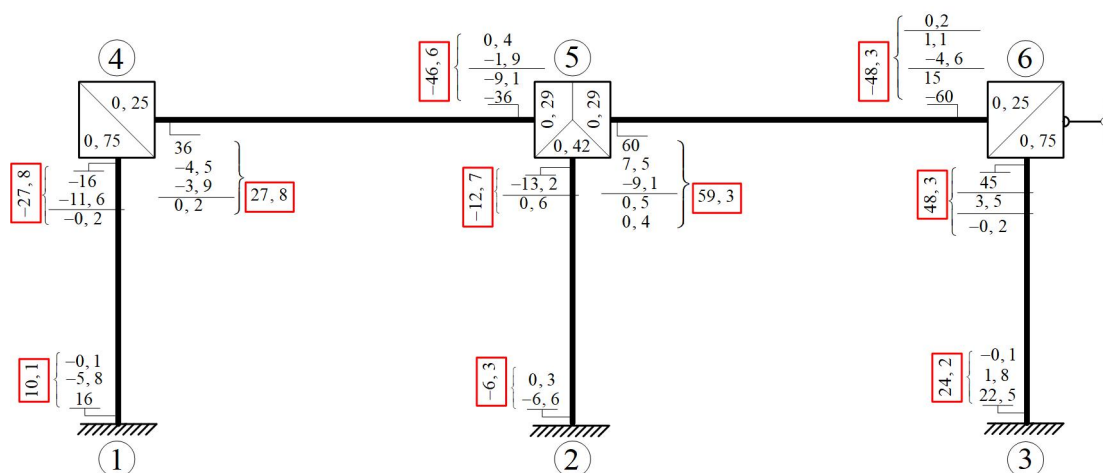
**Slika 4.16:** Skica zglobne sheme i njezin stupanj slobode gibanja

Crossov relaksacijski postupak moguće je provesti na nepomičnom sistemu, što svakako nije zadani sistem sa slike 4.15. Ako zadanom sistemu spriječimo moguću translaciju (kao i moguće rotacije čvorova, slika 4.17), relaksacijski se Crossov postupak može primijeniti, no dobiveni momenti na krajevima elemenata nisu oni konačni. Nadalje, reakciju u pridržanju (zglobnom štapu na mjestu i pravcu moguće translacije) moguće je odrediti rješavanjem jednadžbi ravnoteže pogodno odabranih presjeka.

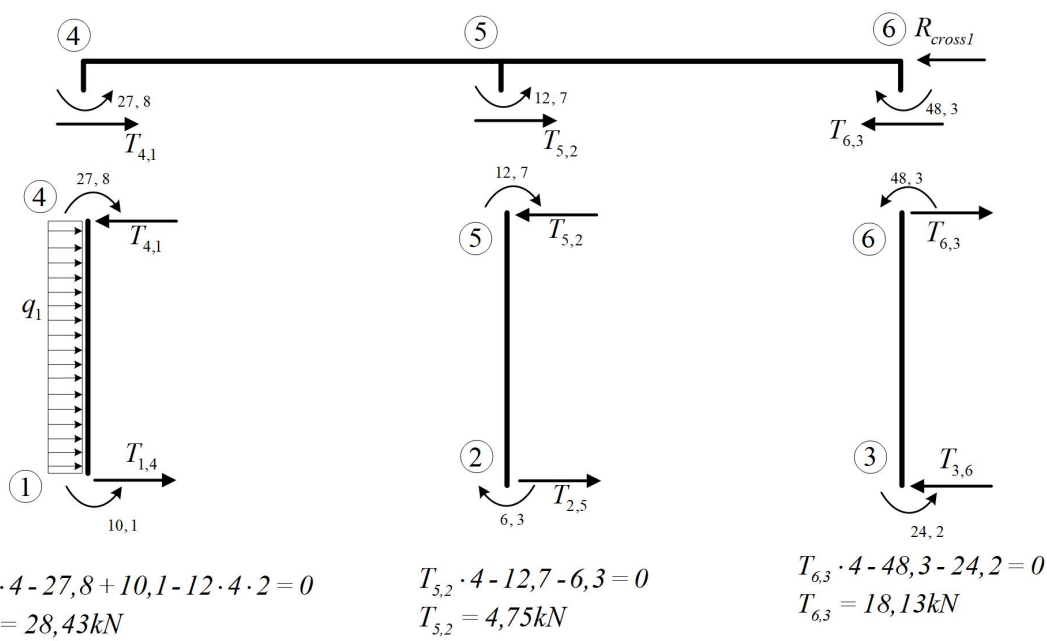


**Slika 4.17:** Osnovni sistem – spriječene moguće rotacije i translacije (faza upetosti)

Na slici 4.18 proveden je Crossov postupak za zadani sistem (pri tom su momenti upetosti određeni na temelju izraza iz tablica momenata upetosti, a razdjelni su koeficijenti definirani postupkom objašnjenim u prethodnom primjeru nepomičnoga okvira).



Slika 4.18: Crossov postupak



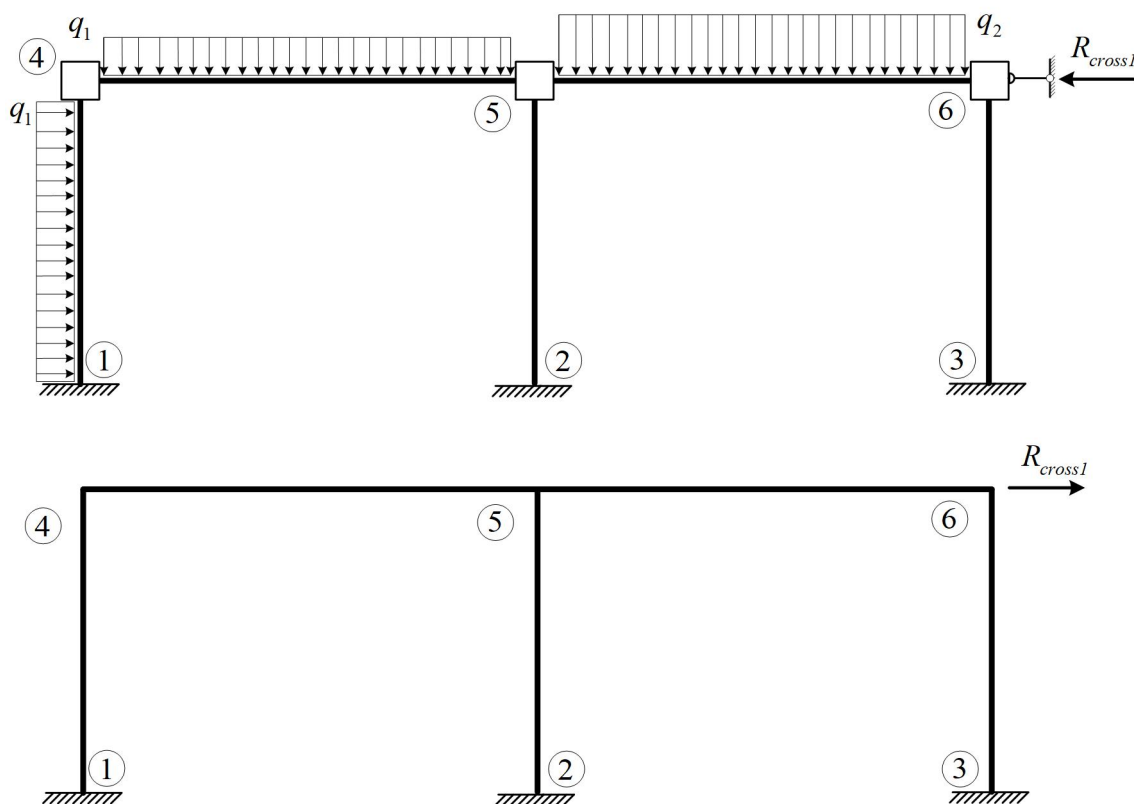
Slika 4.19: Određivanje reakcije u pridržanju

Na slici 4.19 presjekom kroz vrhove stupova zadanoga sistema određene su vrijednosti poprečnih sila na tim vrhovima. Na temelju jednadžbe ravnoteže (zbroy sila u horizontalnom smjeru jednak je nuli) određena je vrijednost reakcije u pridržanju kao

$$R_{cross1} - T_{4,1} - T_{5,2} + T_{6,3} = 0$$

$$R_{cross1} = 15,05 \text{ kN}$$

Kao što je već rečeno, dobiveni momenti savijanja na krajevima elemenata (sa slike 4.18) ne mogu biti konačne vrijednosti. Proračun se može nastaviti primjenom postupka Wernera i Csonke.



Slika 4.20: Reakcija u pridrzanju nakon Crossovog postupka i opterećenje u postupku Wernera i Csonke

Ideja je Otta Wernera (nekadašnjega profesora na Građevinskom fakultetu u Zagrebu na kolegiju *Teorija konstrukcija*, danas *Građevna statika* [10]) i Pala Csonke "poništiti" utjecaj pridrzanja na momente savijanja zadavanjem koncentriranoga opterećenja na mjestu i pravcu reakcije pridrzanja, ali suprotnoga smjera.

Na slici 4.20 prikazana su opterećenja zadanoga sistema utjecaj kojih se na momente savijanja mora uzeti u obzir prilikom određivanja dijagrama unutarnjih sila relaksacijskim postupcima. Pritom se prvi dio rješava Crossovim postupkom (kao što je prikazano na slici 4.18), a utjecaj sile u pridrzanju uzima se u obzirom primjenom

postupka Wenera i Csonke. Konačne se vrijednosti momenata na kraju elemenata zadanoga sistema određuju zbrajanjem utjecaja dvaju navedenih opterećenja.

Međutim, fizička interpretacija postupka Wenera i Csonke otkrit će da se statički sistem sa slike 4.20 dolje može zamijeniti (ekvivalentnim po polju pomaka) jednostavnijim sistemom. Naime, zadanom se sistemu u postupku Wenera i Csonke dopušta translacija, odnosno sistem se "gura" po pravcu moguće translacije, a u smjeru koji je posljedica zadanoga vanjskog opterećenja (na primjer, na slici 4.20 dolje sistem je "pogurnut" u desnu stranu, jer je reakcija u pridržanju smjera  $\leftarrow$ ).

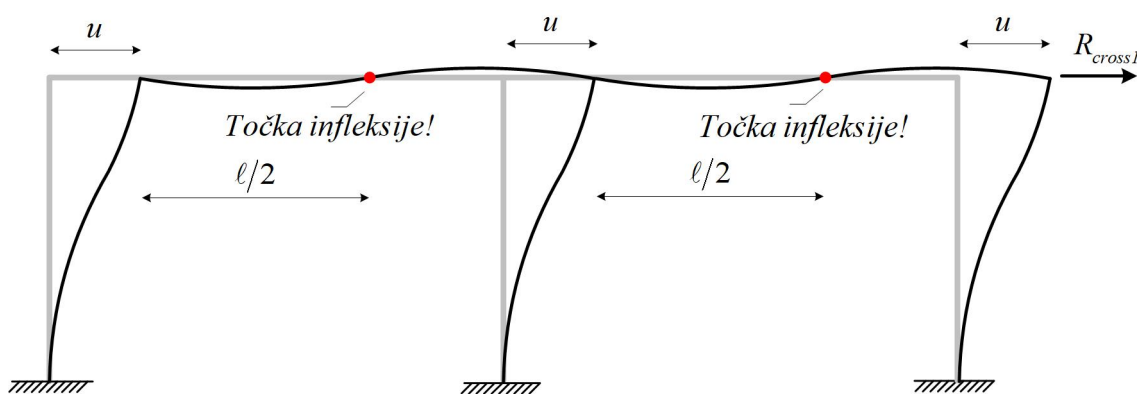
Polje je pomaka (simetričnoga) statičkog sistema sa slike 4.20 dolje, opterećenoga antimetričnim opterećenjem, antimetrično (slika 4.21). Takvo polje pomaka ima točku infleksije u polovini raspona svakoga polja. Zatim, poznat je izraz za drugu derivaciju progibne funkcije:

$$w''(x) = \frac{M(x)}{EI},$$

a matematički vrijedi

$$w''(x) = \kappa(x),$$

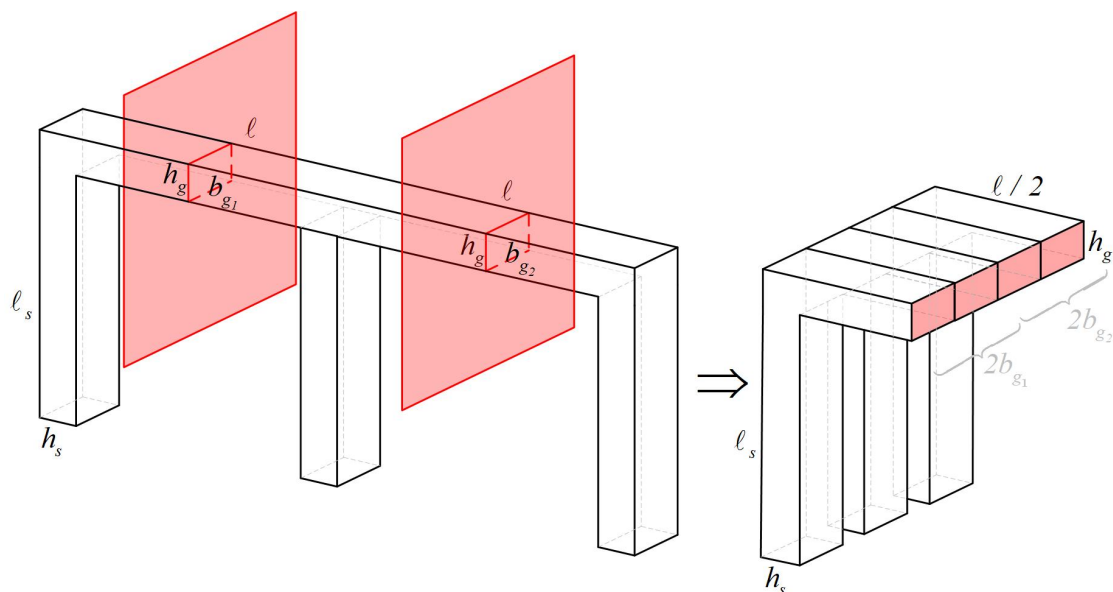
odnosno druga derivacija progibne funkcije ( $w(x)$ ) jednaka je funkciji njezine zakrivljenosti ( $\kappa(x)$ ). Također, poznato je da matematička funkcija u točki infleksije ima zakrivljenost jednaku nuli, dakle na polovini je (svakoga) raspona simetričnoga okvira zakrivljenost nula, pa je prema tome (na temelju gornjih izraza) lako zaključiti da je i vrijednost funkcije momenta savijanja ( $M(x)$ ) u točki infleksije nula.



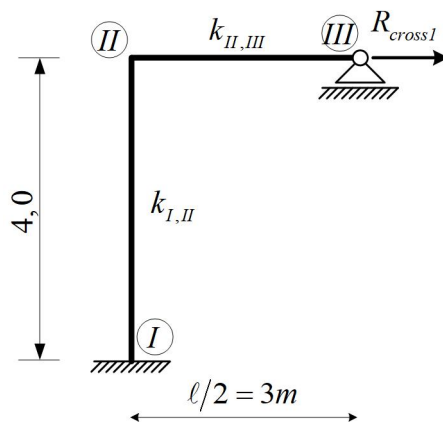
**Slika 4.21:** Antimetrično polje pomaka simetrične konstrukcije pri antimetričnom opterećenju

Također, simetričan okvir opterećen kao na slici 4.21 u polovini raspona ima

vertikalni pomak jednak nuli (što naprosto proizlazi iz činjenice da je polje pomaka antimetrično).



Slika 4.22: Stvaranje poluokvira za postupak Wernera i Csonke



Slika 4.23: Skica poluokvira za postupak Wernera i Csonke

Ako se svaki raspon zadanoga sistema presiječe kroz točku infleksije te se dobivene polovice preklape jedna iza druge (kao na slici 4.22), a u točki presjeka zadovolje uvjeti antimetrije (da je  $M(x = \frac{\ell}{2}) = 0$  i  $w(x = \frac{\ell}{2}) = 0$ ), nastaje sistem koji se naziva *poluokvirom* (slika 4.23). Preklapanjem stupova zbroj karakterističnih krutosti ( $k_{i,j}$ ) stupova zadanoga statičkog sistema tvori karakterističnu krutost stupova poluokvira

( $k_{i,j}^{wc}$ ). Međutim, karakteristična krutost grede poluokvira nastaje zbrajanjem karakterističnih krutosti greda (svakoga raspona zadanoga sistema) koje su prethodno pomnožene s 4:

$$k_{I,II} = k_{1,4} + k_{2,5} + k_{3,6} = \frac{2EI}{4} + \frac{EI}{4} + \frac{2EI}{4} = \frac{5EI}{4}$$

$$k_{II,III} = 4k_{4,5} + 4k_{5,6} = 4 \cdot \frac{EI}{6} + 4 \cdot \frac{EI}{6} = \frac{4EI}{3}$$

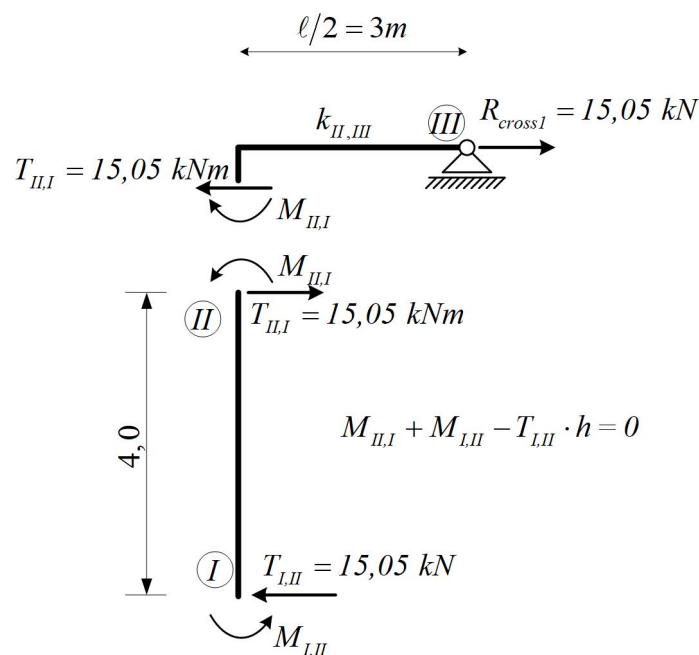
Zašto s 4? Karakteristična je krutost definirana kao omjer umnoška  $EI$  i duljine elementa (i nije jednaka rotacijskoj krutosti). Kod tvorbe grede poluokvira grede se zadanoga sistema presijecaju po pola (u točki infleksije) i polovice se preklapaju. Tako nastaje greda u poluokviru za postupak Wernera i Csonke. Na slici 4.22 vidljivo je da se pritom visina grede ne mijenja, ali se mijenja njezina širina, dakle preklapajući gredu jednoga raspona, u poluokviru nastaje greda dvostruke širine, što znači da je moment tromosti ( $I$ ) grede poluokvira dvostruko veći od momenta tromosti grede zadanoga sistema, a duljina joj je upola kraća od one iz zadanoga okvira. Prema tome, karakteristična je krutost grede poluokvira

$$k_{i,j}^{wc} = \frac{E \cdot 2I}{\frac{\ell}{2}} = 4 \cdot \frac{EI}{\ell} = 4 \cdot k_{i,j}$$

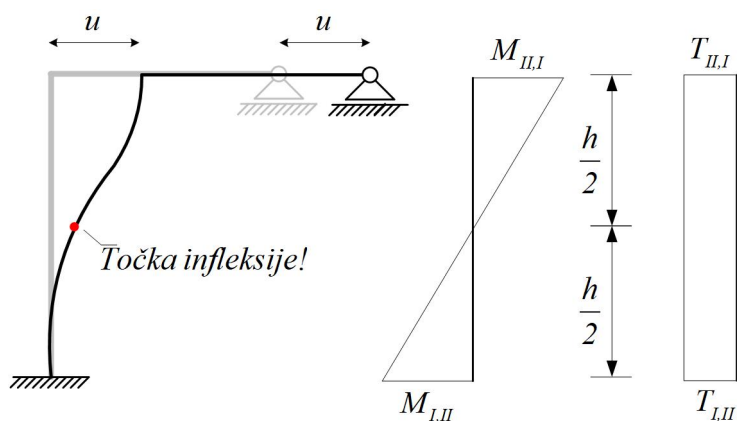
Zadani sistem ima dva raspona koja se istodobno presijecaju i preklapaju, te se prilikom određivanja karakteristične krutosti grede poluokvira karakteristične krutosti obje grede moraju množiti s 4.

U nastavku postupka treba odrediti momente na krajevima elemenata poluokvira koji nastaju od djelovanja sile u pridržanju zadanoga sistema (ali suprotnoga smjera djelovanja). Na slici 4.24 na temelju su jednadžbi ravnoteže određeni iznos poprečnih sila stupa poluokvira i izraz za momente savijanja na krajevima toga stupa.

Nepoznati su momenti na dnu i vrhu stupa, te jednadžba ima bezbroj rješenja. Međutim, analizom polja pomaka poluokvira (uz napomenu da je horizontalna translacija vrha stupa dopuštena) zaključujemo da su momenti na krajevima stupova poluokvira međusobno jednaki (slika 4.25).



Slika 4.24: Određivanja momenata na krajevima elemenata poluokvira



Slika 4.25: Polje pomaka poluokvira za postupka Wenera i Csonke i pripadni dijagram momenata savijanja i poprečnih sila

Zašto? Ponovno se uočava točka infleksije polja pomaka poluokvira koja se nalazi na polovini visine stupa (primijetite da se greda poluokvira ne zaokreće već samo translacija). Na temelju određenih vrijednosti poprečnih sila na krajevima



stupa, zaključujemo da je funkcija momenata savijanja na stupu linearna (zbog diferencijalnoga odnosa momenta savijanja i poprečne sile: ako je  $T(x) = \text{const.}$ , onda je  $M(x) = A \cdot x + B$ ) te u polovini visine ta linearna funkcija ima nultočku. Linearna funkcija s nultočkom na polovini visine stupa skicirana na slici 4.25, iz čega se zaključuje:

$$M_{I,II} = M_{II,I} = \frac{1}{2} \cdot T_{I,II} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 15,05 \cdot 4 = 30,1 \text{ kNm.}$$

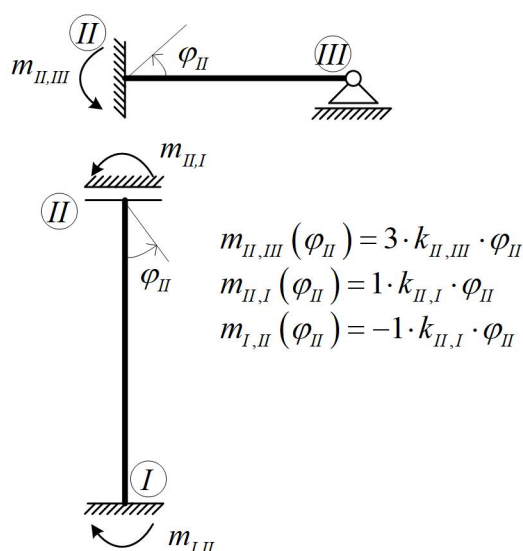
Čvor  $II$  poluokvira nije u ravnoteži. Primjenom relaksacijskoga postupka čvor će se uravnotežiti. Zato su potrebni (kao i u Crossovom postupku) razdjelni koeficijenti u čvoru te prijenosni koeficijent.

Razdjelni koeficijenti određeni su kao omjeri rotacijskih krutosti elemenata koji se priključuju u čvor  $II$ :

$$k_{I,II}^* = 1 \cdot k_{I,II} = \frac{5EI}{4} \Rightarrow \mu_{II,I} = \frac{\frac{5EI}{4}}{\frac{21EI}{4}} = \frac{5}{21}$$

$$k_{II,III}^* = 3k_{II,III} = 3 \cdot \frac{4EI}{3} = 4EI \Rightarrow \mu_{II,III} = \frac{\frac{4EI}{4}}{\frac{21EI}{4}} = \frac{16}{21}$$

$$\Sigma k_{(n)}^* = \frac{5EI}{4} + 4EI = \frac{21EI}{4}$$



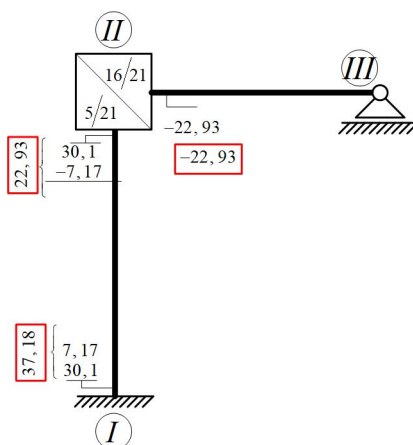
Slika 4.26: Rotacijske krutosti elemenata poluokvira za postupak Wernera i Csonke

Primijetimo da je greda poluokvira jednostrano upeta, te je njezina rotacijska krutost  $k_{II,III}^* = 3 \cdot k_{II,III}$ .

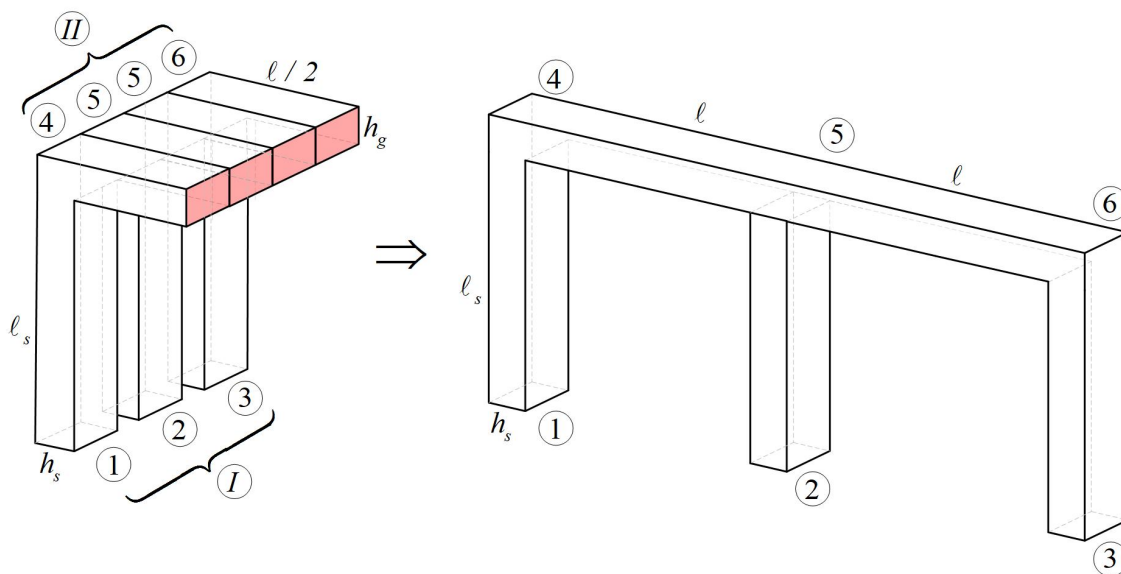
Stup na jednom ležaju ima upetu vezu sa tlom, dok je na drugom kraju povezan s gredom. Greda ima dopušten horizontalni pomak, što znači da je i vrh stupa pomičan u istom smjeru. Dakle, stup izdvojen iz poluokvira je statički sistem sa slike 4.26, a prijenosni je koeficijent u postupku Wernera i Csonke jednak  $-1$ .

Pojasnimo, pri relaksaciji se čvora poluokvira kod zaokretanja čvora zaokreće i priključeni kraj. Kraj grede (i vrh stupa i čvor) se ne zaokreću pri izračunavanju momenata upetosti jer je u osnovnom sistemu zaokret spriječen, ali dopušten je pomak - to je razlika osnovnih sistema u postupku Wernera i Csonke i postupku Crossa. Prijenosni koeficijent po stupovima je  $-1$  jer je pri zaokretu čvora moment konstantan po visini stupa (dopušten je pomak, pa nema poprečne sile).

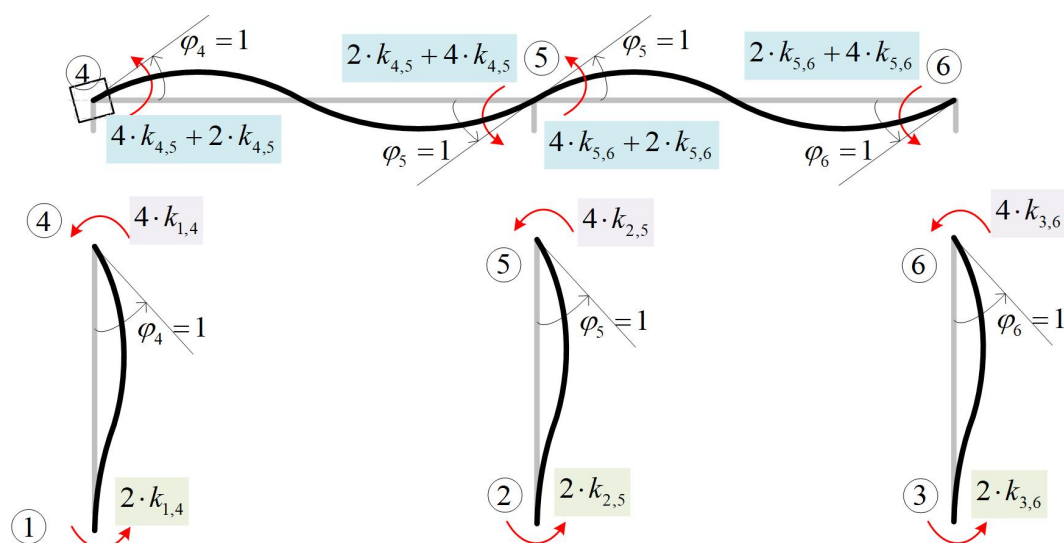
Na slici 4.27 uravnotežen je čvor  $II$  dodavanjem momenta iznosa  $-30,10 \text{ kNm}$ .



Slika 4.27: Relaksacijski postupak Wernera i Csonke



Slika 4.28: "Rastvaranje" polukvira u postupku Wernera i Csonke



Slika 4.29: Prisilna rotacija čvora II polukvira u postupku Wernera i Csonke

Relaksacijski postupak Wernera i Csonke zahtijevao je tvorbu polukvira koji je na slici 4.27 doveden u stanje ravnoteže. Momenti savijanja na krajevima elemenata polukvira moraju se (u nastavku postupka) „vratiti“ na početni (zadani) sistem, odnosno polukvir se „rastvara“ kao što je prikazano na slici 4.28. „Vraćanje“ momenata savijanja s polukvira na zadani sistem vrši se u omjerima rotacijskih krutosti elemenata koji „nastaju rastvaranjem“. Pritom treba imati na umu koji

čvorovi zadanoga okvira čine pojedine čvorove poluokvira: u čvoru s indeksom  $I$  poluokvira preklapaju se čvorovi s indeksima 1, 2 i 3 zadanoga sistema, dok se u čvoru  $II$  preklapaju čvorovi 4, 5 i 6 (slika 4.28).

Ako se čvor  $II$  poluokvira (prisilno) zaokrene za jedinični kut, za isti se kut zaokrenu i čvorovi 4, 5 i 6. Na slici 4.29 određeni su izrazi za momente savijanja zbog navedenoga jediničnog djelovanja. Prema (pojednostavljenoj) definiciji, izrazi s te slike rotacijske su krutosti.

Moment savijanja  $M_{II,III} = -22,93 \text{ kNm}$  mora se raspodijeliti na momente savijanja oznaka  $M_{4,5}$ ,  $M_{5,4}$ ,  $M_{5,6}$  i  $M_{6,5}$ . Zbroj je rotacijskih krutosti na navedenim mjestima (slika 4.29)

$$4 \cdot k_{4,5} + 2 \cdot k_{4,5} + 4 \cdot k_{4,5} + 2 \cdot k_{4,5} + 4 \cdot k_{5,6} + 2 \cdot k_{5,6} + 4 \cdot k_{5,6} + 2 \cdot k_{5,6},$$

odnosno:

$$2 \cdot (6 \cdot k_{4,5}) + 2 \cdot (6 \cdot k_{5,6}) = 12 \cdot \frac{EI}{6} + 12 \cdot \frac{EI}{6} = 4 \cdot EI.$$

Momenti se na krajeve grede zadanoga sistema raspodjeljuju množenjem momenta savijanja na kraju grede poluokvira omjerom pojedine rotacijske krutosti (označene plavo na slici 4.29) i toga zbroja:

$$M_{4,5} = \frac{6 \cdot k_{4,5}}{4EI} \cdot (-22,93) = -5,733 \text{ kNm}$$

$$M_{5,4} = \frac{6 \cdot k_{4,5}}{4EI} \cdot (-22,93) = -5,733 \text{ kNm}$$

$$M_{5,6} = \frac{6 \cdot k_{5,6}}{4EI} \cdot (-22,93) = -5,733 \text{ kNm}$$

$$M_{6,5} = \frac{6 \cdot k_{4,5}}{4EI} \cdot (-22,93) = -5,733 \text{ kNm}$$

U slučaju da su neki elementi zadanoga statičkog sistema jednostrano upete grede, izrazi se za rotacijske krutosti takvih elemenata razlikuju od izraza sa slike 4.29.

Isto načelo vrijedni za određivanje (raspodjelu s poluokvira) momenata savijanja na krajevima stupova:

$$M_{4,1} = \frac{4 \cdot k_{1,4}}{4 \cdot k_{1,4} + 4 \cdot k_{2,5} + 4 \cdot k_{3,6}} \cdot (22,93) = 9,172 \text{ kNm}$$

$$M_{5,2} = \frac{4 \cdot k_{2,5}}{4 \cdot k_{1,4} + 4 \cdot k_{2,5} + 4 \cdot k_{3,6}} \cdot (22,93) = 4,586 \text{ kNm}$$

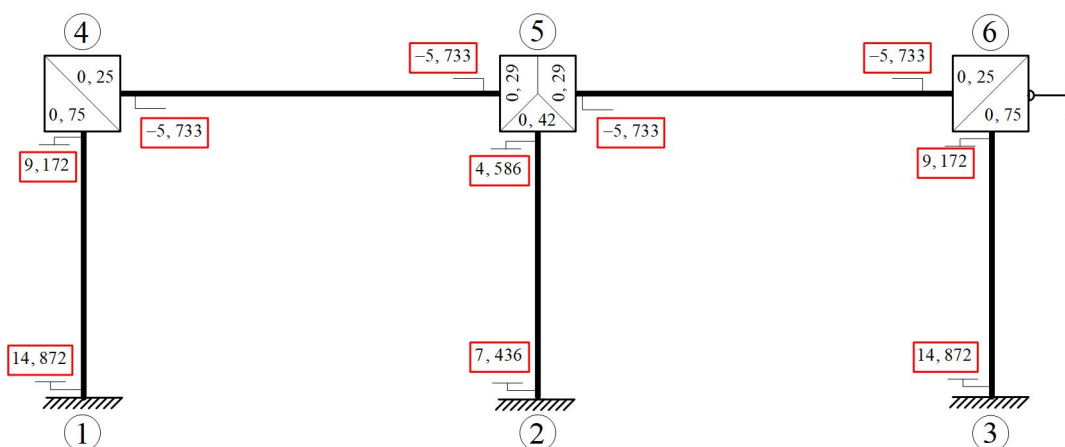
$$M_{6,3} = \frac{4 \cdot k_{3,6}}{4 \cdot k_{1,4} + 4 \cdot k_{2,5} + 4 \cdot k_{3,6}} \cdot (22,93) = 9,172 \text{ kNm}$$

$$M_{1,4} = \frac{2 \cdot k_{1,4}}{2 \cdot k_{1,4} + 2 \cdot k_{2,5} + 2 \cdot k_{3,6}} \cdot (37,18) = 14,872 \text{ kNm}$$

$$M_{2,5} = \frac{2 \cdot k_{2,5}}{2 \cdot k_{1,4} + 2 \cdot k_{2,5} + 2 \cdot k_{3,6}} \cdot (37,18) = 7,436 \text{ kNm}$$

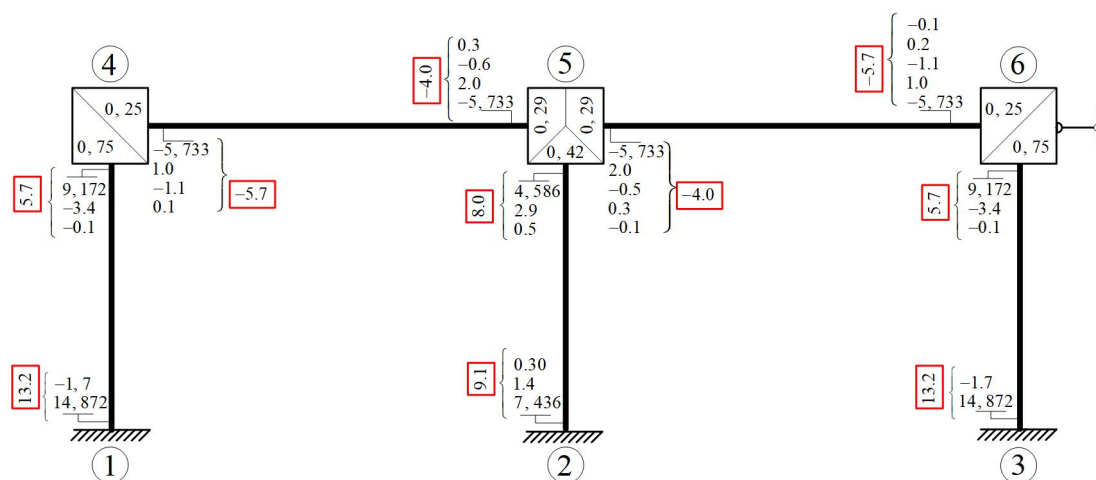
$$M_{3,6} = \frac{2 \cdot k_{3,6}}{2 \cdot k_{1,4} + 2 \cdot k_{2,5} + 2 \cdot k_{3,6}} \cdot (37,18) = 14,872 \text{ kNm}$$

Nadalje, nakon razdiobe momenata savijanja s poluokvira na zadani sistem (uvažavajući omjere rotacijskih krutosti preklapljenih mjesta) dobiveni momenti savijanja nisu u ravnoteži (slika 4.30).

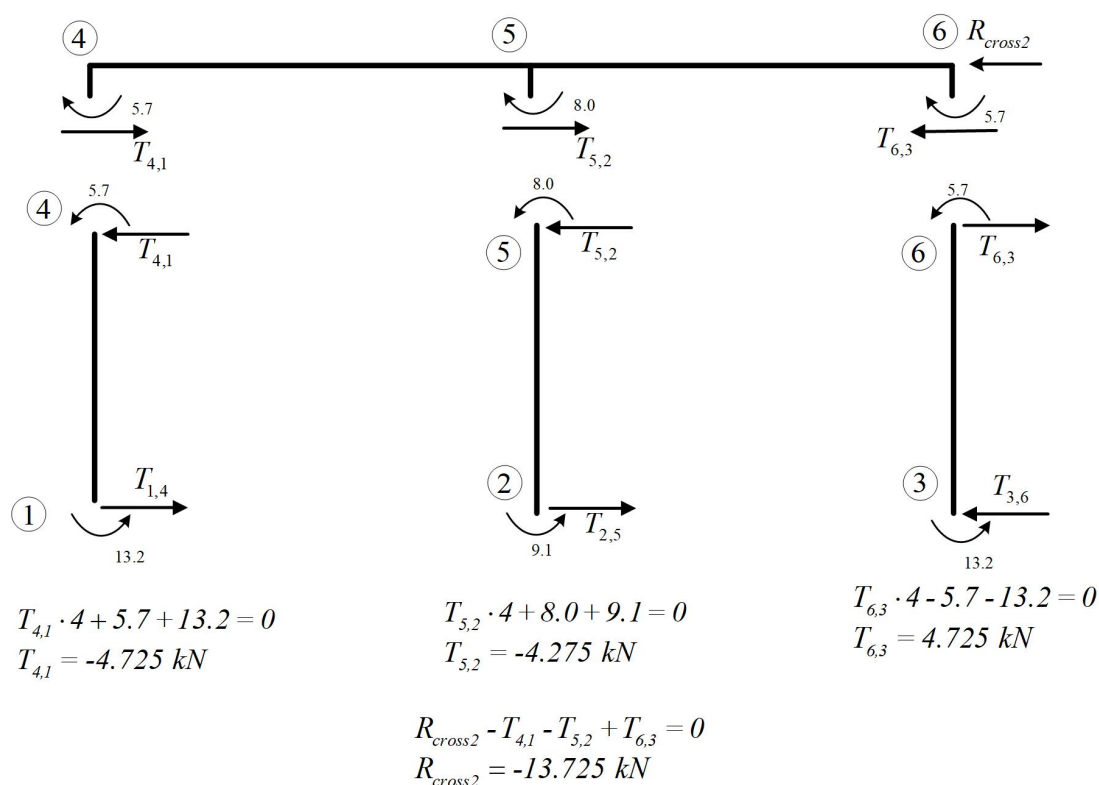


Slika 4.30: Razdijeljeni momenti savijanja na zadani sistem

Momente s te slike treba uravnotežiti primjenom Crossovoga relaksacijskog postupka (slika 4.31).



Slika 4.31: Crossov postupak – drugi put



Slika 4.32: Određivanje reakcije u pridržanju nakon drugoga Crossovog postupka

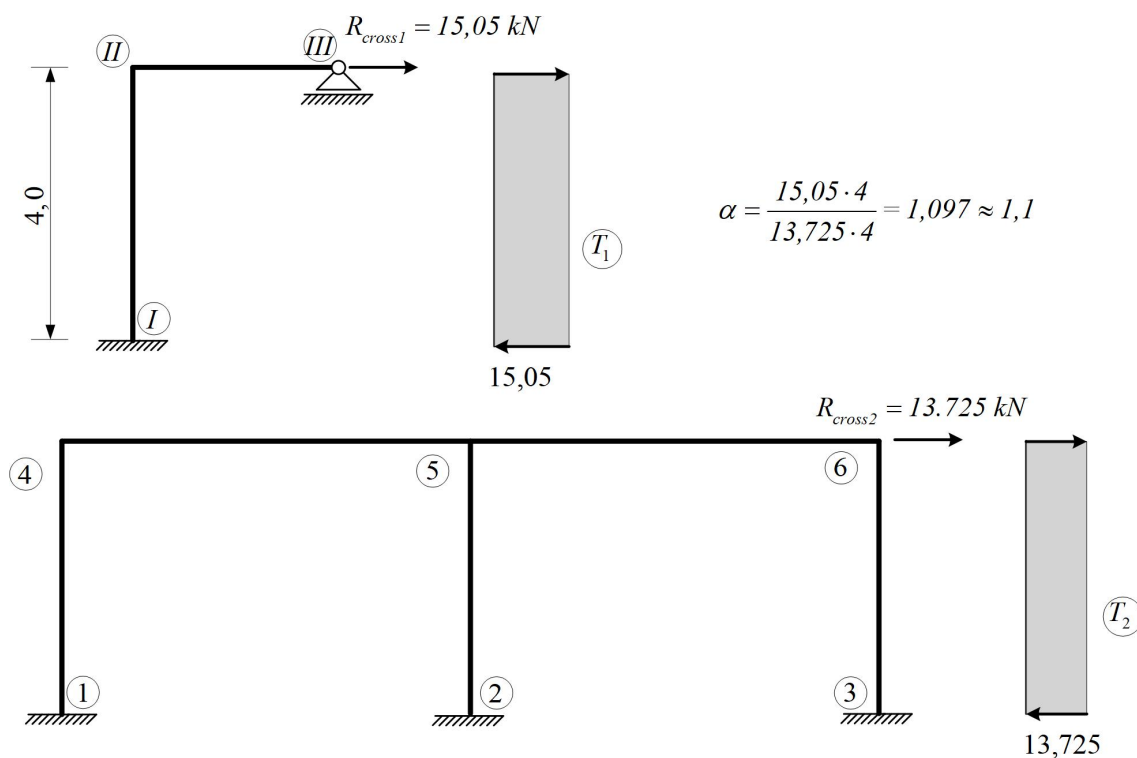
Na slici 4.31 vidljivo je (a proizlazi i iz osnovnih pretpostavaka Crossovoga postupka) da se pomak vrhova stupova ponovno sprečava, te se stoga tijekom relaksacijskoga postupka pojavljuje reakcija u pridržanju,  $R_{cross2}$ , koja se određuje jednadž-

bama ravnoteže pogodno odabranih dijelova zadanoga sistema (slika 4.32).

Reakcija  $R_{cross1}$  koja opterećuje poluokvir u postupku Wernera i Csonke (slika 4.23) i reakcija  $R_{cross2}$  određena na slici 4.32 istoga su smjera, a razlikuju se za iznos

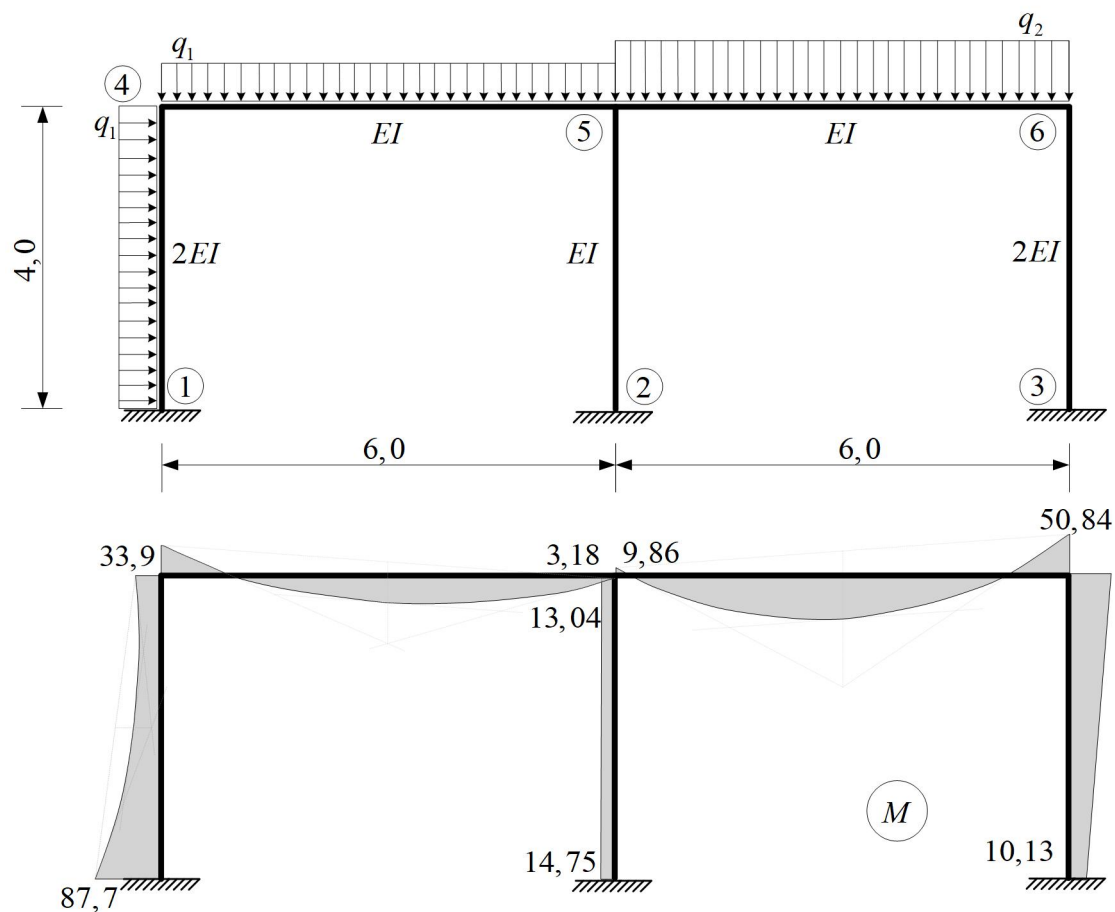
$$\Delta T = R_{cross1} - R_{cross2} = 15,05 - 13,725 = +1,325 \text{ kN}$$

Zaključujemo da se tijekom drugoga Crossovog postupka poremetila ravnoteža poprečnih sila (ostvarena postupkom Wernera i Csonke na poluokviru), te iznose momente svijanja sa slike 4.31 treba korigirati (ili još jednom provesti postupak Wernera i Csonke na poluokviru s opterećenjem jednakim vrijednosti  $\Delta T$ ).



Slika 4.33: Određivanje popravnoga koeficijenta  $\alpha$

Popravni koeficijent kojim se izbjegava novi ciklus relaksacije na poluokviru označit će se s  $\alpha$ , a određuje se kao omjer ploština dijagrama poprečnih sila poluokvira i dijagrama poprečnih sila na zadanom sistemu nakon drugoga Crossovog postupka (slika 4.33).



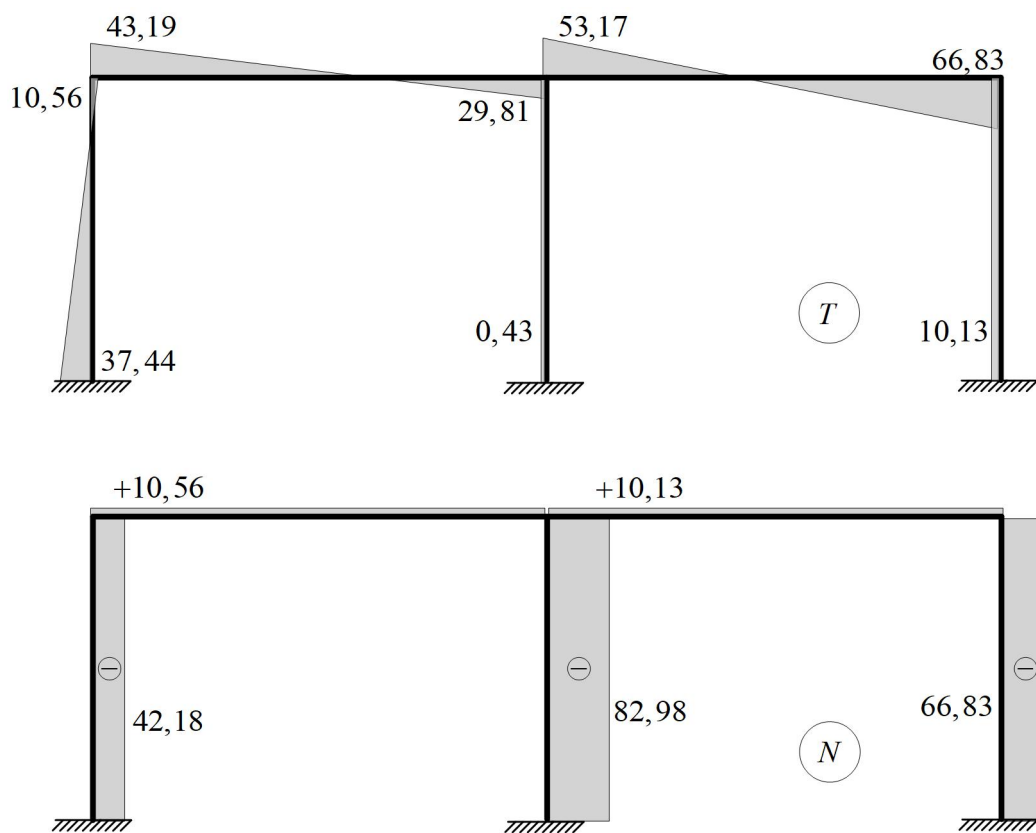
Slika 4.34: Dijagram momenata savijanja

Konačne vrijednosti momenata svijanja na zadanom sistemu jednake su zbrojevima momenata dobivenih nakon prvoga Crossovog postupka (slika 4.18) i momenata dobivenih na temelju drugoga Crossovog postupka (slika 4.31) korigiranim popravnim koeficijentom  $\alpha = 1, 1$ :

$$M(x) = M_{cross1} + \alpha \cdot M_{cross2};$$

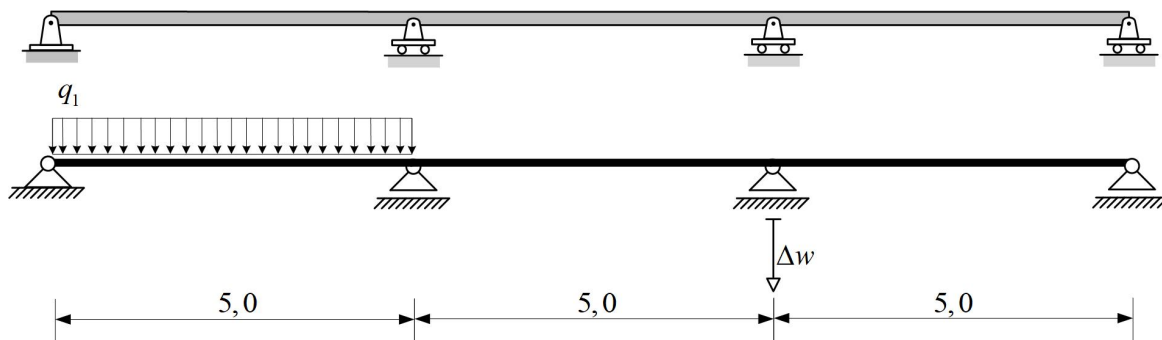
pritom je popravni koeficijent pozitivan, jer je vrijednost  $\Delta T$  također pozitivna. U suprotnom popravni koeficijent ima negativnu vrijednost. Fizikalna je interpretacija navedenoga sljedeća: opterećenje poluokvira silom smjera  $\rightarrow$  nedovoljno je „gurnulo“ poluokvir u odnosu na stvarni pomak zadnoga sistema, te momente raspodijeljene s poluokvira na zadani sistem treba popravnim koeficijentom povećati. Također, vrijednost popravnoga koeficijenta ne smije biti znatno različita od 1 (dakle, oko 0,9 do 1,2).





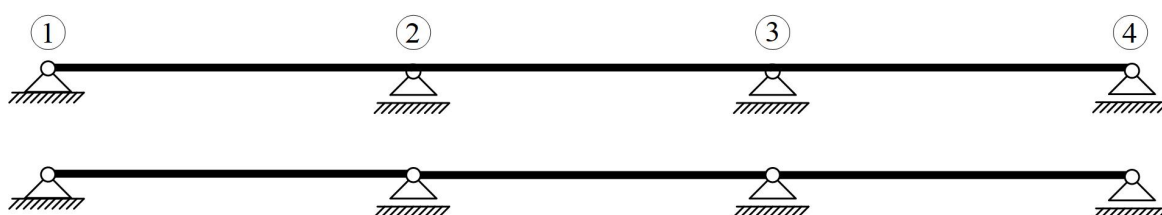
Slika 4.35: Dijagram poprečnih i uzdužnih sila

## 4.4 Kontinuirani nosač



Slika 4.36: Zadani statički sistem

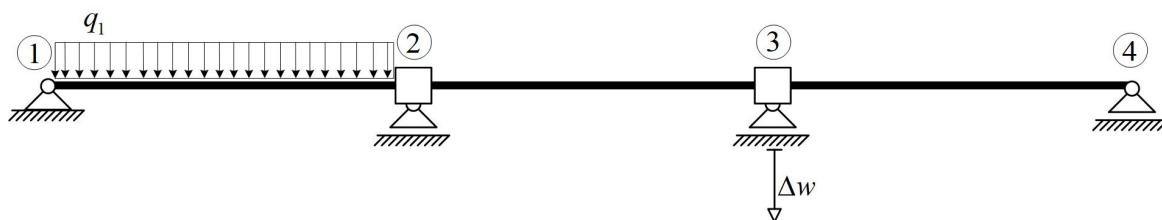
Relaksacijskim će se postupkom odrediti dijagrami unutarnjih sila statičkoga sistema sa slike 4.36. Pri tome je vrijednost linijskoga opterećenja  $q = 12,0 \text{ kN/m}$ , a prisilnoga vertikalnog pomaka  $\Delta w = 5 \text{ cm}$ , dok je umnožak modula elastičnosti materijala i momenta tromosti poprečnog presjeka iznosa  $EI = 75\,000 \text{ kNm}^2$ .



$$S = 3 \cdot 3 - 5 - 2 \cdot 2 = 0$$

Slika 4.37: Definicija čvorova i pripadna pridružena rešetka

Čvorovi zadanoga statičkoga sistema definirat će se na mjestima ležajeva (slika 4.37), odnosno na mjestima očekivanih promjena funkcija unutarnjih sila. Oslobođanjem u čvorovima rotacijskoga stupnja slobode nastaje pripadna zglobna shema (ili pridružena rešetka, slika 4.37). Zadani je statički sistem nepomičan (stupanj je slobode gibanja zglobne sheme nula), te se iznosi momenata savijanja na krajevima elemenata mogu odrediti Crossovim relaksacijskim postupkom. Stoga se u prvom koraku sprečavaju (mogući) zaokreti čvorova 2 i 3 (naime, momenti savijanja u navedenim su čvorovima nepoznati za razliku od momenata savijanja čvorova 1 i 4, a zaokreti se čvorova s nepoznatim momentima savijanja u prvom koraku Crossove metode sprečavaju), slika 4.38.



**Slika 4.38:** Faza upetosti – spriječeni zaokreti čvorova s nepoznatim iznosima konačnih momenata savijanja

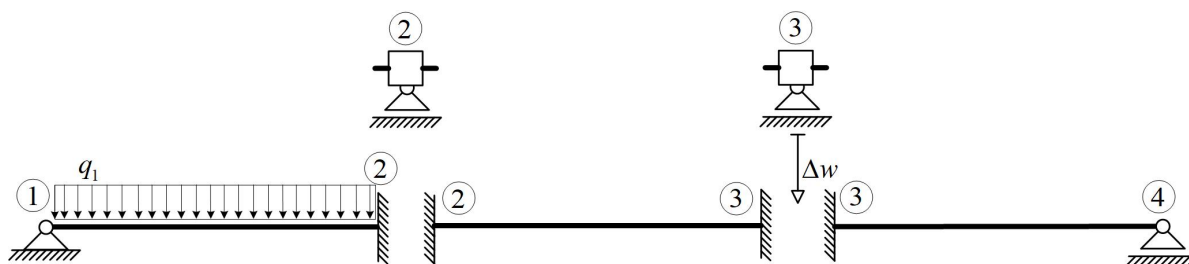
„Uklještenje“ čvorova 2 i 3 omogućuje raspad sistema sa slike 4.38 na tri elementa (jednostrano odnosno obostrano upete grede, slika 4.39) čiji se iznosi sila na krajevima lako mogu odrediti iz poznatih izraza dobivenih metodom sila i upisanih u tablice momenata upetosti:

$$\bar{M}_{21} = -\frac{q \cdot \ell}{8} = -\frac{12 \cdot 5}{8} = -7,5 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{23} = -6 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \left(-\frac{\Delta w}{5}\right) = 900 \text{ kNm}$$

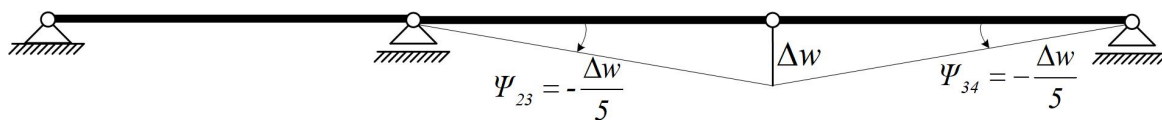
$$\bar{M}_{32} = -6 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \left(-\frac{\Delta w}{5}\right) = 900 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{34} = -3 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \frac{\Delta w}{5} = -450 \text{ kNm}$$



**Slika 4.39:** Faza upetosti – raspad na elemente

Pri tome su momenti upetosti  $\bar{M}_{23}$ ,  $\bar{M}_{32}$  i  $\bar{M}_{34}$  uzrokovani prisilnim pomakom  $\Delta w$ . Prisilni pomak  $\Delta w$  uzrokuje zaokretanje elemenata 2 – 3 i 3 – 4, kao što je prikazano na slici 4.40).



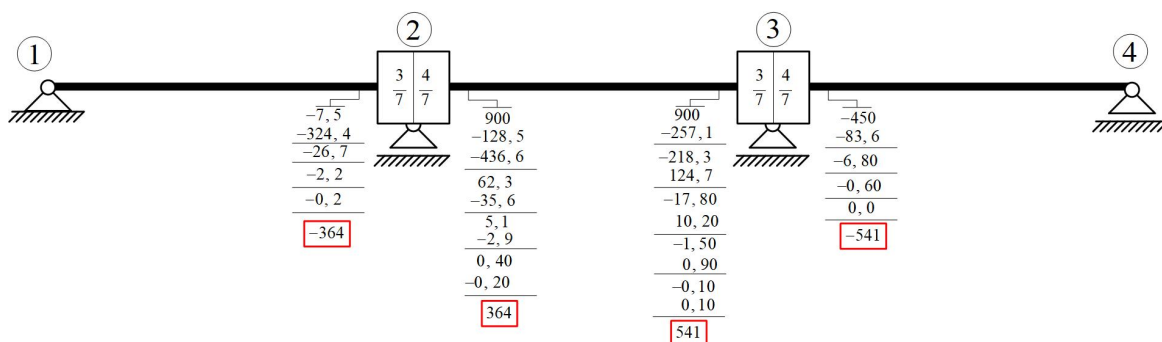
Slika 4.40: Plan pomaka nastao od prisilnoga pomaka  $\Delta w$

U općem slučaju za skiciranje plana pomaka treba spriječiti moguće pomake zglobne sheme zadanoga statičkog sistema, a omogućiti pomak za koji se plan pomaka određuje. S obzirom na to da je zglobna shema sa slike 4.37 stupnja slobode gibanja  $S = 0$ , ne postoje mogući pomaci čvorova zadanoga statičkoga sistema, pa je za skiciranje plana pomaka sa slike 4.40 dovoljno dopustiti pomak  $\Delta w$ .

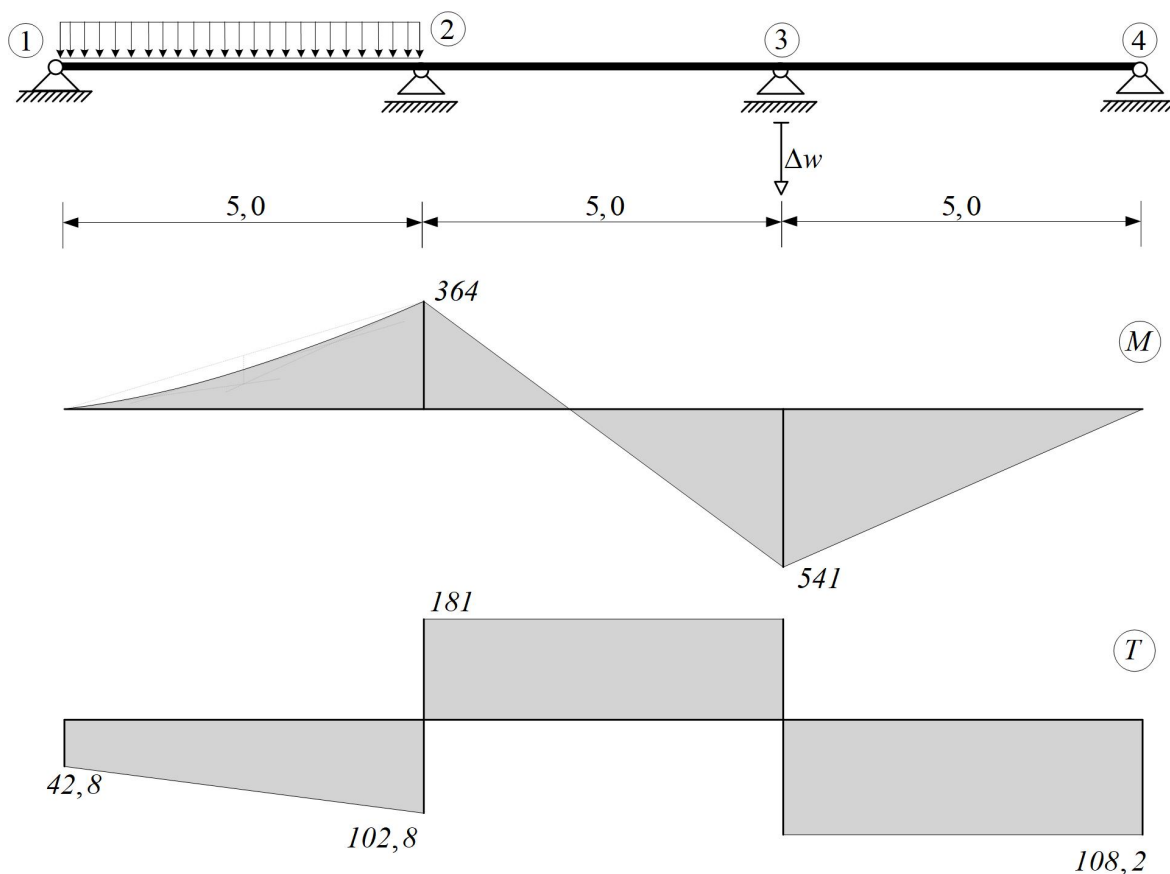
Očito je da momenti upetosti nisu u ravnoteži. Ravnoteža će se postići postupnim zaokretanjem čvorova 2 i 3 čiji su zaokreti u prvom koraku ovoga relaksacijskog postupka bili spriječeni momentnim spojem. Kao što je već rečeno, zaokretanje čvorova ostvaruje se dodavanjem momenta savijanja u čvor koji se uravnotežuje iznosa jednakoga iznosu neuravnoteženoga momenta a koji se još naziva rezidual. Svaki element priključen u čvor preuzima dio momenta ovisno o rotacijskoj krutosti, pa stoga u nastavku postupka treba odrediti rotacijske krutosti elemenata ( $k_{i,j}$ ) i njihove omjere koji se nazivaju razdjelnim koeficijentima,  $\mu_{i,j}$ :

$$\begin{aligned}
 k_{21} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} = \frac{3EI}{5} & \mu_{21} &= \frac{k_{21}}{\Sigma k_{(2)}} = \frac{\frac{3EI}{5}}{\frac{3EI}{5} + \frac{4EI}{5}} = \frac{3}{7} \\
 k_{23} &= 4 \cdot \frac{EI}{5} = \frac{4EI}{5} & \mu_{23} &= \frac{k_{23}}{\Sigma k_{(2)}} = \frac{\frac{4EI}{5}}{\frac{3EI}{5} + \frac{4EI}{5}} = \frac{4}{7} \\
 k_{32} &= 4 \cdot \frac{EI}{5} = \frac{4EI}{5} & \mu_{32} &= \frac{k_{32}}{\Sigma k_{(3)}} = \frac{\frac{4EI}{5}}{\frac{4EI}{5} + \frac{3EI}{5}} = \frac{4}{7} \\
 k_{34} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} = \frac{3EI}{5} & \mu_{34} &= \frac{k_{34}}{\Sigma k_{(3)}} = \frac{\frac{3EI}{5}}{\frac{4EI}{5} + \frac{3EI}{5}} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

Relaksacija po metodi Crossa prikazana je na slici 4.41.



Slika 4.41: Relaksacijski postupak po metodi Crossa

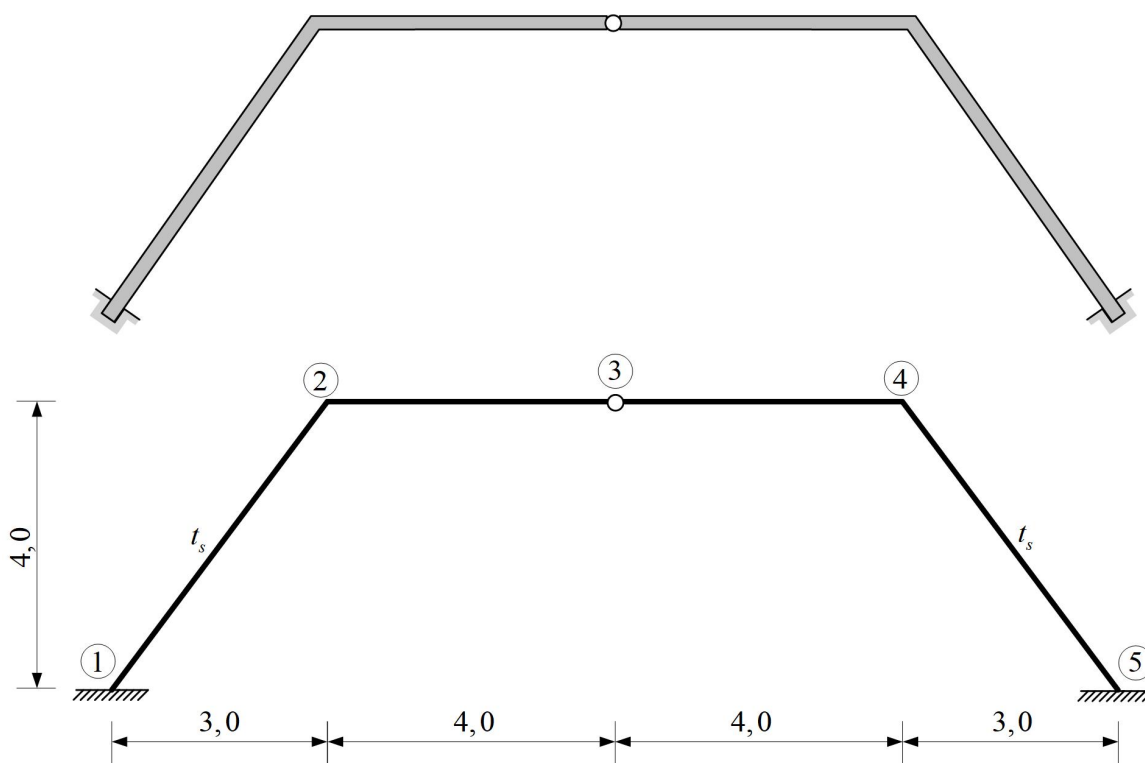


Slika 4.42: Dijagrami unutarnjih sila za zadani statički sistem i opterećenje

Zadani je statički sistem nepomičan (zglobna je shema stupnja  $S = 0$ ), pa su dobiveni momenti ujedno i konačni momenti na krajevima njegovih elemenata. Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 4.42.

## 4.5 Uvjeti simetrije

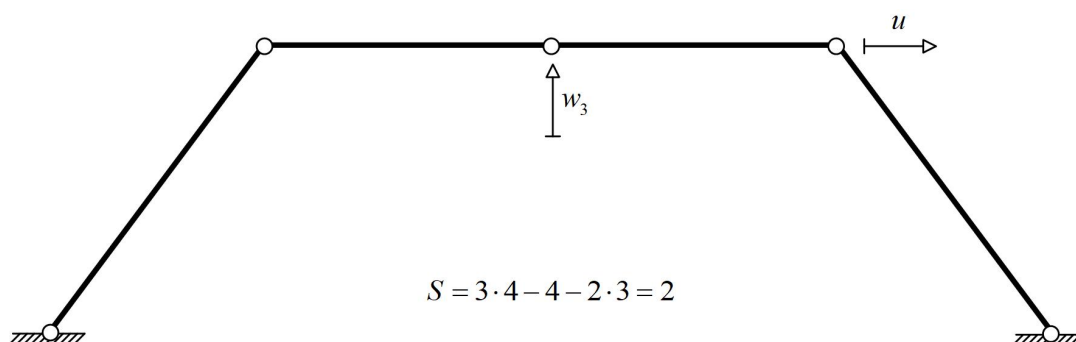
Na statički neodređeni sistem s dvije prekobrojne veze (slika 4.43) djeluje temperatura  $t_s = 20^\circ\text{C}$ , uz  $\alpha_t = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  i  $EI = 62\,000 \text{ kNm}^2$ . Definira se pet čvorova, a na temelju zglobne sheme koja nastaje omogućavanjem zaokreta čvorova 1, 2, 4 i 5, određen je stupanj slobode gibanja nastalog statičkog sistema (točnije, mehanizma) kao  $S = 2$  (slika 4.44).



Slika 4.43: Zadani statički sistem

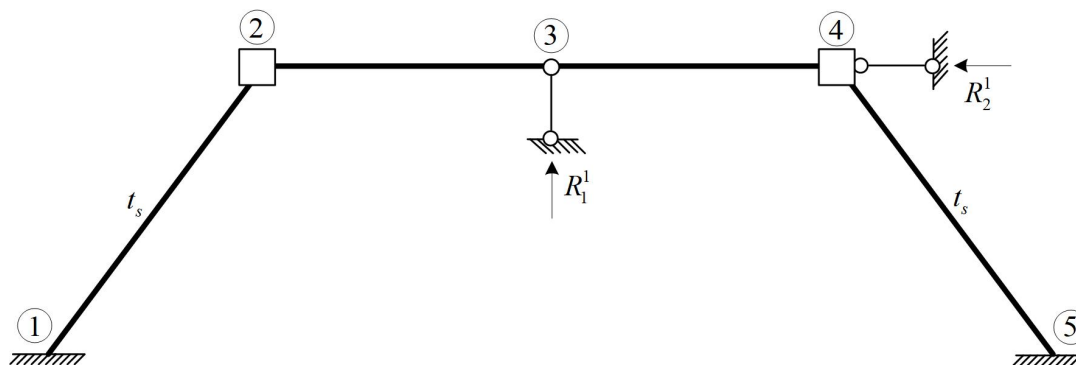
Prema stupnju slobode gibanja zglobne sheme zadani je statički sistem pomičan s dva moguća pomaka: horizontalnim pomakom čvorova 2, 3 i 4 (s oznakom  $u$ ) i vertikalnim pomakom čvora 3 (s oznakom  $w_3$ ). Koji su pomaci zglobne sheme mogući može se lako odrediti sprečavajući postupno moguće pomake čvorova sve dok dobiveni statički sistem ne bude stupnja  $S = 0$ , odnosno statički određen.

Crossova metoda vrijedi za nepomične sisteme, međutim postoji proširenje te metode koje se naziva *proširenim Crossim postupkom*, kojim se momenti na krajevima elemenata pomičnih sistema mogu odrediti relaksacijskim iteracijskim postupkom.



**Slika 4.44:** Zglobna shema zadanoga statičkoga sistema uz oznaku mogućih pomaka

Prvi je korak proširenoga Crossovog postupka spriječiti moguće pomake i zaokrete čvorova sistema i provesti „klasičnu“ Crossovu metodu kojom se nepomični statički sistem opterećen vanjskim (zadanim) opterećenjem dovodi u stanje ravnoteže. Na slici 4.45 prikazan je nepomičan statički sistem (spriječena su dva pomaka i dva zaokreta,  $w_3$  i  $u$ ,  $\varphi_2$  i  $\varphi_4$ ) s temperaturnim djelovanjem. Ravnotežno stanje toga sistema nije jednako ravnotežnom stanju zadanoga sistema (iako je jedno od mogućih rješenja), stoga se momentima na krajevima elemenata dobivenima u prvom koraku proširenoga Crossovog postupka mora dodati utjecaj pomaka  $w_3$  i  $u$  (čije stvarne vrijednosti ne znamo).



**Slika 4.45:** Zadani statički sistem sa spriječenim pomacima  $w_3$  i  $u$  (prvi koraka proširenoga Crossovog postupka)

Za određivanje momenata na krajevima elemenata statičkoga sistema koje uzrokuju pomaci, treba ih dopustiti tako da se jedan pomak omogući, a ostali spriječe, zatim se drugi omogući, dok su ostali spriječeni i tako dalje sve dok se ne odredi pojedinačni utjecaj svakoga mogućeg pomaka na momente na krajevima elemenata

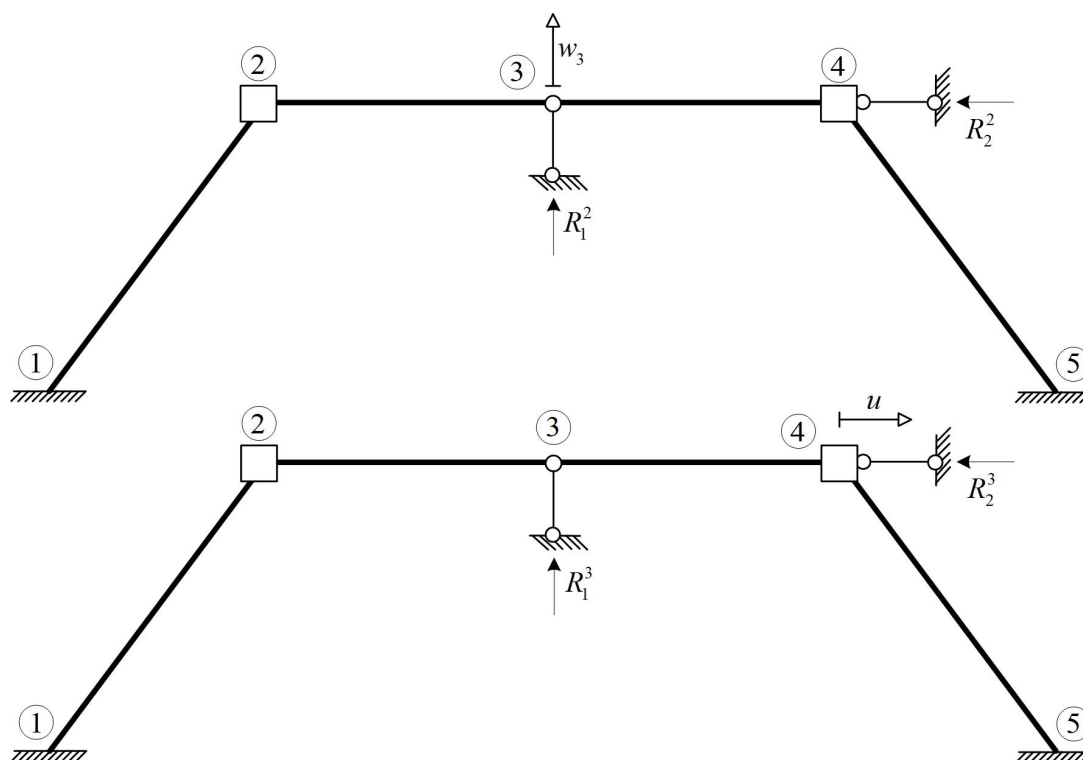
(slika 4.46). Konačne su vrijednosti momenata na krajevima elemenata linearna kombinacija njihovih vrijednosti iz prvoga koraka i svakog sljedećega u kojem se odredio utjecaj pojedinoga pomaka:

$$M_{ij} = \bar{M}_{ij} + \beta_1 \cdot M(w_1)_{ij} + \beta_2 \cdot M(w_2)_{ij} + \dots + \beta_i \cdot M(w_i)_{ij}.$$

Koeficijenti su linearne kombinacije  $\beta_i$  rješenje sustava jednadžbi koji slijedi iz činjenice da u zadanom statičkom sistemu ne postoje reakcije na mjestima spriječenih pomaka, odnosno da im je iznos jednak nuli. Na slici 4.45 i 4.46 označene su reakcije na mjestima spriječenih pomaka te sustav jednadžbi za određivanje koeficijenata linearne kombinacije glasi:

$$R_1^1 + \beta_1 \cdot R_1^2 + \beta_2 \cdot R_1^3 = 0$$

$$R_2^1 + \beta_1 \cdot R_2^2 + \beta_2 \cdot R_2^3 = 0$$



**Slika 4.46:** Statički sistem s prisilnim pomacima na mjestima mogućih pomaka zadanoga sistema (drugi i treći korak proširenoga Crossovog postupka)

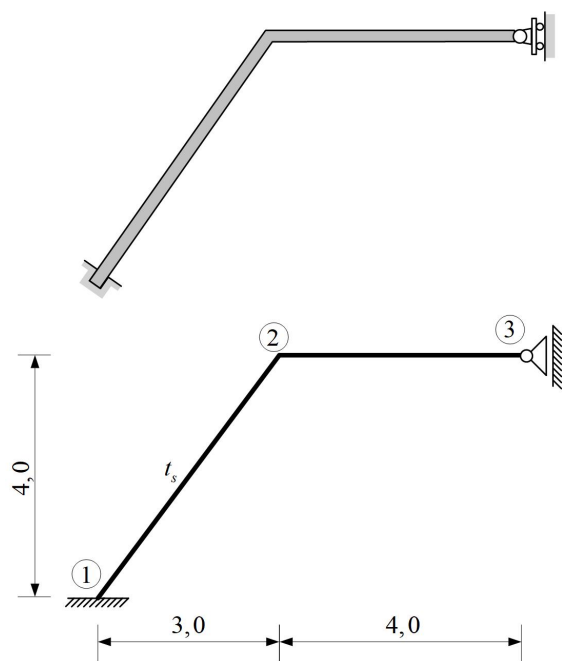


Dakle, za dobivanje konačnih momenata  $M_{ij}$  zadanoga statičkoga sistema treba tri puta primijeniti relaksacijski Crossov postupak: na nepomičnom sistemu na koji djeluje vanjsko opterećenje ( $t_s$ ), na nepomičnom sistemu na kojem postoji prisilni pomak  $w_3$  te na nepomičnom sistemu s prisilnim pomakom  $u$ . Pri tom se iznosi prisilnih pomaka odabiru po volji, jer po teoriji malih pomaka i malih deformacija (teorija I. reda) veza je pomaka i unutarnjih sila linearna (konkretno ako pomak od 2 cm uzrokuje moment savijanja od 12 kNm, onda će pomak od 4 cm uzrokovati moment od 24 kNm).

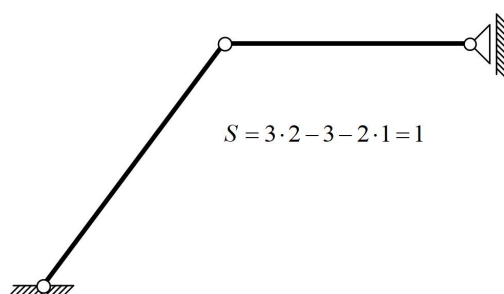
Opisani je postupak svakako zamoran te je u slučaju statičkih sistema s više mogućih pomaka prirodnije primijeniti neku drugu metodu proračuna (na primjer inženjersku metodu pomaka ili metodu sila). Međutim, u slučaju statičkoga sistema sa slike 4.43 moguće je Crossov prošireni postupak skratiti (točnije, može se ubrzati bilo koja metoda proračuna). Naime, geometrija i opterećenje zadanoga statičkog sistema simetrični su, što znači da i odgovor konstrukcije (pomaci, deformacije i unutarnje sile) mora biti simetričan. Os je simetrije vertikalna i prolazi čvorom 3 te su dijagrami unutarnjih sila (i polje pomaka) lijevoga dijela sistema jednaki onima na desnoj strani osi simetrije. Dakle, desni se dio statičkoga sistema u odnosu na os simetrije može odbaciti, a na mjestu čvora 3 (koji se nalazi na osi simetrije) postavljaju se rubni uvjeti (ležajevi) kojima simetričnost dijagrama unutarnjih sila i polja pomaka nije narušena.

Zbog simetrije polja pomaka čvor 3 može se translirati samo u vertikalnom smjeru, te se na mjestu čvora 3 postavlja klizni ležaj (slika 4.47). Moment je savijanja u čvoru 3 nula, jer je u zadanom statičkom sistemu na mjestu toga čvora zglob. U općem slučaju čvor na mjestu osi simetrije ima zaokret jednak nuli, jer time odgovor simetrične konstrukcije na simetrično opterećenje ostaje simetričan.

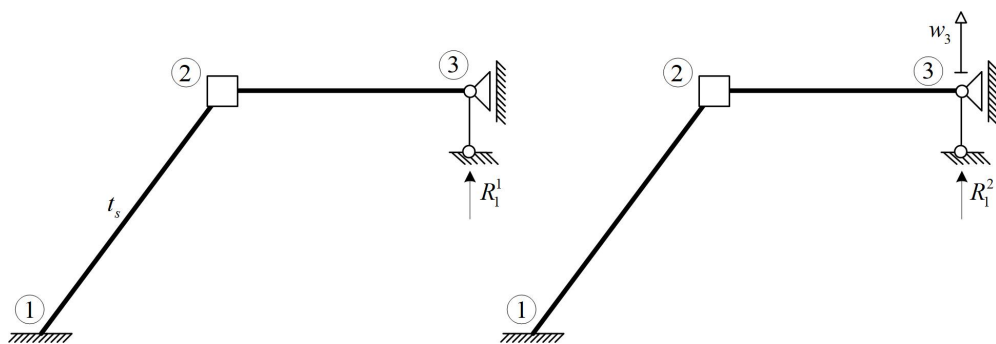
Na slici 4.47 prikazan je zamjenjujući statički sistem s rubnim uvjetom na osi simetrije koji osigurava zadovoljavanje uvjeta simetrije. Očito je i zamjenjujući statički sistem pomičan (slika 4.48), ali postoji samo jedna neovisna translacija ( $w_3$ ), pa se stoga prošireni Crossov postupak sastoji od dva koraka (slika 4.49): određivanje momenata savijanja na krajevima elemenata nepomičnoga zamjenjujućeg sistema na koji djeluje vanjsko opterećenje ( $t_s$ ) te na nepomičnom zamjenjujućem sistemu na kojem postoji prisilni pomak  $w_3$ .



Slika 4.47: Zamjenjujući statički sistem



Slika 4.48: Zglobna shema zamjenjujućega statičkog sistem



Slika 4.49: Zamjenjujući statički sistem: koraci proširenoga *Cross*-a

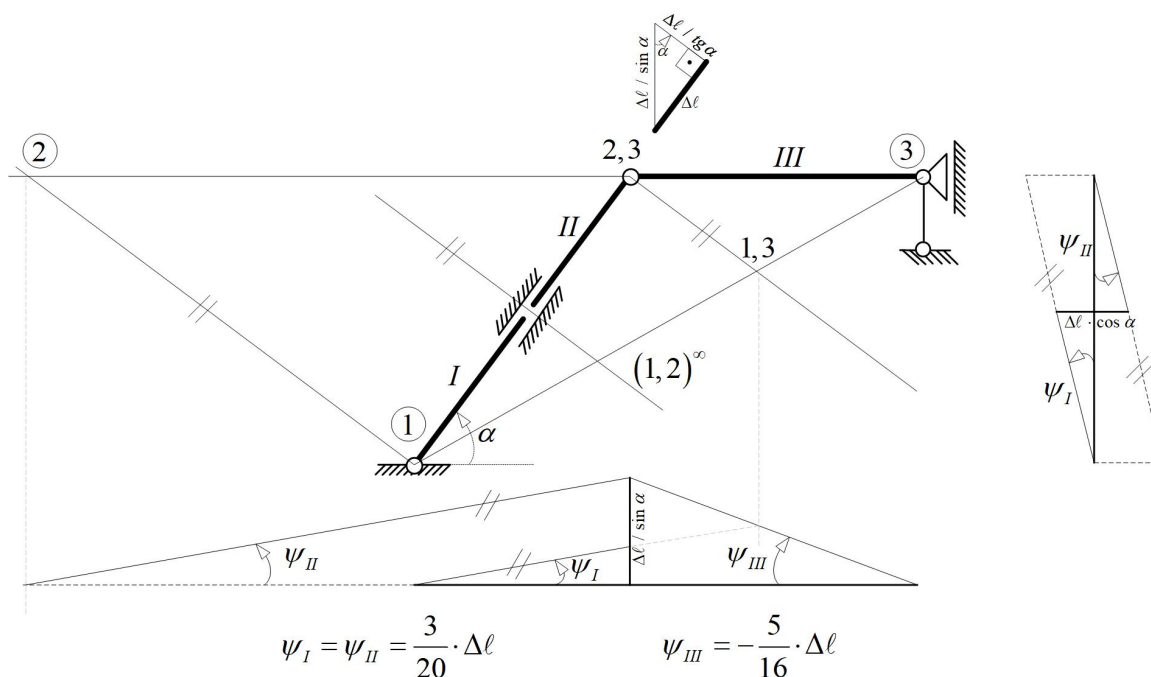
Za određivanje momenata upetosti od temperaturnoga vanjskog djelovanja  $t_s$  treba skicirati plan pomaka radi utvrđivanja kutova zaokreta ( $\psi_{ij}$ ) elemenata statičkoga sistema, pa je moment upetosti (prema izrazima iz tablica momenata upetosti) jednak

$$\bar{M}_{ij} = -3 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \psi_{ij}$$

za jednostrano upetu gredu, dok za obostrano upetu gredu vrijedi izraz

$$\bar{M}_{ij} = -6 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \psi_{ij}.$$

Plan pomaka koji nastaje nakon što se duljina elementa 1 – 2 poveća za  $\Delta\ell = \ell \cdot t_s \cdot \alpha_t = 0,001$  m prikazan je na slici 4.50.



**Slika 4.50:** Plan pomaka zamjenjujućega statičkog sistema uzrokovan promjenom duljine elementa 1 – 2

Slijedi da su momenti upetosti ne krajevima elemenata zamjenjujućega statičkog sistema

$$\bar{M}_{12} = -6 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \psi_I = -11,16 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{21} = -6 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \psi_I = -11,16 \text{ kNm}$$

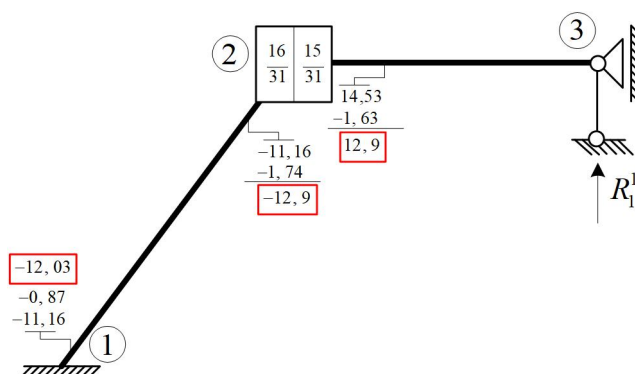
$$\bar{M}_{23} = -3 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_{III} = 14,53 \text{ kNm}$$

Budući da momenti upetosti nisu u ravnoteži, zamjenjujući sistem sa spriječenim pomacima dovest će se u ravnotežno stanje primjenom Crossovoga relaksacijskog postupka. Razdjelni su koeficijenti u čvoru 2

$$k_{21}^* = 4 \cdot \frac{EI}{5} = \frac{4EI}{5} \quad \mu_{21} = \frac{k_{21}^*}{\sum k_{(2)}^*} = \frac{\frac{4EI}{5}}{\frac{4EI}{5} + \frac{3EI}{4}} = \frac{16}{31}$$

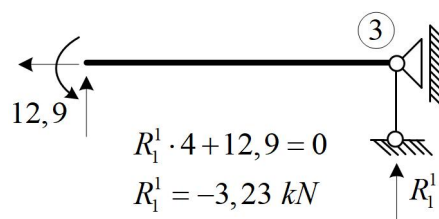
$$k_{23}^* = 3 \cdot \frac{EI}{4} = \frac{3EI}{4} \quad \mu_{23} = \frac{k_{23}^*}{\sum k_{(2)}^*} = \frac{\frac{3EI}{4}}{\frac{4EI}{5} + \frac{3EI}{4}} = \frac{15}{31}$$

Na slici 4.51 prikazan je relaksacijski postupak po Crossu kojim je zamjenjujući statički sistem sa spriječenim pomacima doveden u stanje ravnoteže za temperaturno djelovanje  $t_s$ .



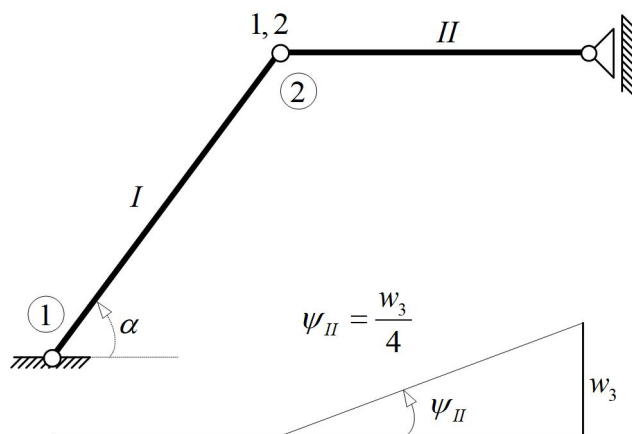
Slika 4.51: Zamjenjujući sistem: Crossov relaksacijski postupak za djelovanje temperature  $t_s$

Vertikalni je pomak čvora 3 spriječen dodavanje veze (štapa) na mjestu i u smjeru pomaka  $w_3$ , a reakcija u dodanom štapu lako se može odrediti na temelju jednadžbe ravnoteže, kao što je to prikazano na slici 4.52.



**Slika 4.52:** Određivanje reakcije u pridržanju koja nastaje zbog djelovanja temperature  $t_s$

Utjecaj pomaka  $w_3$  na momente savijanja na krajevima elemenata zamjenjujućega sistema određuje se na temelju plana pomaka koji nastaje dopuštanjem pomaka  $w_3$ . Određuju se momenti upetosti krajeva elemenata koje treba uravnotežiti primjenom relaksacijskoga Crossovog postupka. Plan pomaka zamjenjujućega statičkog sistema kojem je dopušten pomak čvora 3 prikazan je na slici 4.53.



**Slika 4.53:** Plan pomaka na zamjenjujućem sistemu za prisilni pomak  $w_3$

Moment upetosti koji nastaje zbog zaokreta  $\psi_{II}$  je jednak:

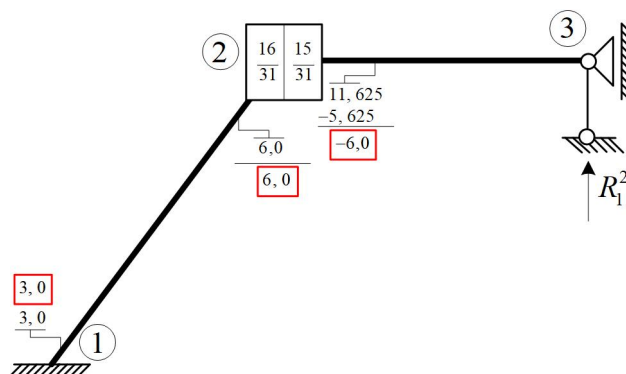
$$\bar{M}_{23} = -3 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_{II} = -11625 \cdot w_3.$$

Odabirom (po volji) iznosa pomaka svi će rezultati (koji ovise o pomaku  $w_3$ ) biti stupnjevani za odnos odabranoga pomaka i stvarnoga njegovog iznosa. Slijedom navedenoga može se zapisati

$$\beta = \frac{w_3^{\text{stvarni}}}{w_3^{\text{odabrani}}}$$

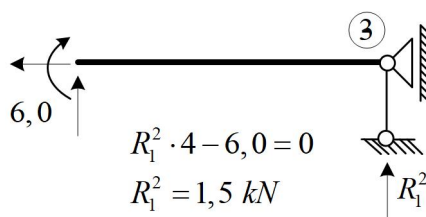
gdje je  $\beta$  koeficijent linearnosti kojim se množe iznosi momenata savijanja na krajevima elemenata koji nastaju zbog odabranoga prisilnoga pomaka  $w_3^{\text{odabrani}}$ , a radi određivanja njihovih stvarnih iznosa.

U nastavku će se postupka odabrati  $w_3^{odabrani} = 10^{-3}$  m, što daje iznos momenta  $\overline{M}_{23} = -11,625 kNm$ . Relaksacijski postupak po Crossu prikazan je na slici 4.54.



Slika 4.54: Zamjenjujući sistem: Crossov relaksacijski postupak za prisilni pomak  $w_3^{odabrani} = 10^{-3}$  m

Reakcija u pridržanju određena je na slici 4.55.



Slika 4.55: Određivanje reakcije u pridržanju koja nastaje zbog prisilnoga pomaka  $w_3 = 10^{-3}$  m

Koeficijent linearnosti jednak je

$$R_1^1 + \beta \cdot R_1^2 = 0$$

$$-3,23 + \beta \cdot 1,5 = 0 \rightarrow \beta = 2,167.$$

Konačni momenti na krajevima elemenata zamjenjujućega statičkog sistema po postupku proširenoga Crossa jednaki su

$$M_{ij} = \overline{M}_{ij} + \beta \cdot M_{ij}^{w_3},$$

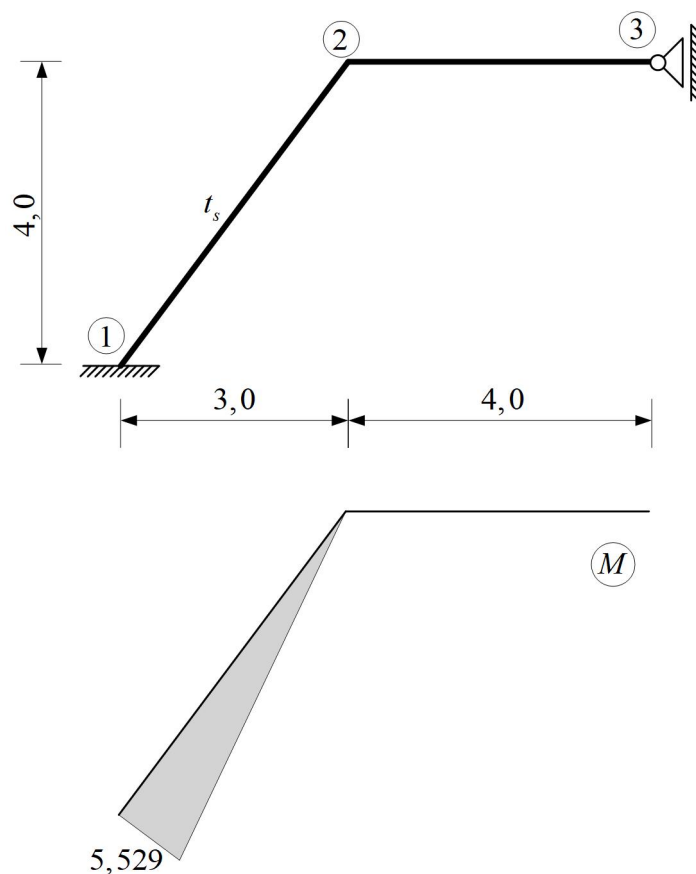
$$M_{12} = -12,03 + 2,167 \cdot 3,0 = -5,529 \text{ kNm},$$

$$M_{23} = -12,9 + 2,167 \cdot 6,0 = 0,102 \text{ kNm} \approx 0,$$

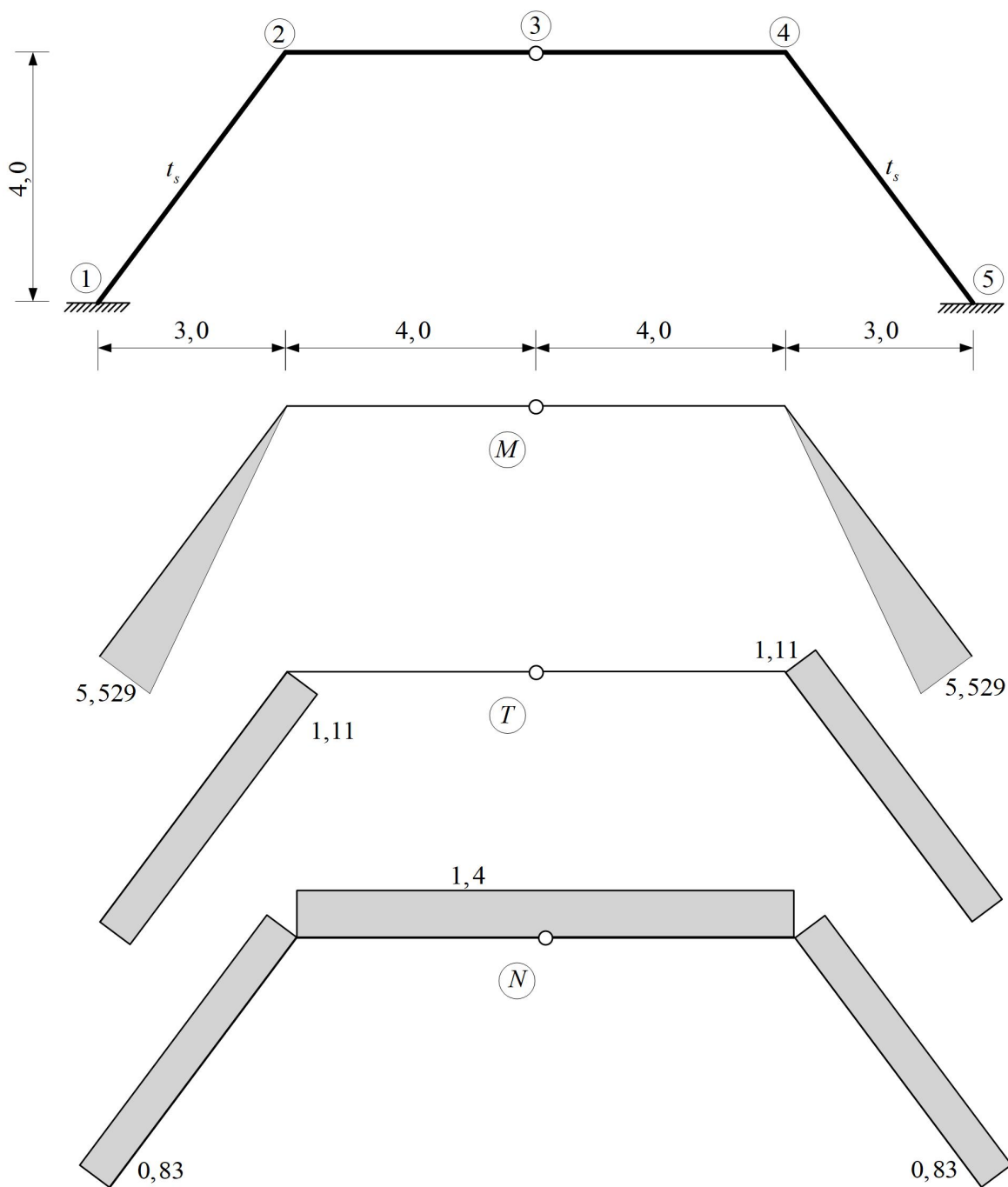
$$M_{32} = 12,9 + 2,167 \cdot -6,0 = -0,102 \text{ kNm} \approx 0.$$

Iznos momenata  $M_{21}$  i  $M_{23}$  mora biti nula, jer dijagrami unutarnjih sila moraju biti simetrični.

Stvarni (vertikalni) pomak čvora 3 iznosi  $w_3^{stvarni} = \beta \cdot w_3^{odabrani} = 2,167 \cdot 10^{-3}$  m. Dijagram momenata savijanja na zamjenjujućem statičkom sistemu prikazan je na slici 4.56, dok su dijagrami unutarnjih sila na zadanom sistemu prikazani na slici 4.57.



Slika 4.56: Dijagram momenata savijanja na zamjenjujućem statičkom sistemu



Slika 4.57: Dijagrami unutarnjih sila na zadanom statičkom sistemu



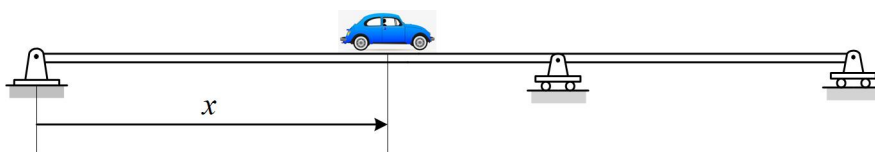
## Poglavlje 5

### Utjecajne funkcije

## 5.1 Definicija i postupci određivanja utjecajnih funkcija

Utjecajna funkcija prikazuje promjenu vrijednosti statičke veličine s obzirom na položaj jediničnoga opterećenja [3, 15, 16, 27] (dakle, varijabla je utjecajne funkcije položaj jediničnoga opterećenja, a vrijednosti su joj jednake iznosima statičke veličine za koju je funkcija *skicirana*).

Naravno, realno pokretno (a i statičko) opterećenje statičkih sistema nema jediničnu vrijednost (slika 5.1), no prema teoriji malih pomaka i malih deformacija vrijednosti su opterećenja i pomaka proporcionalni.



Slika 5.1: Pokretno opterećenje na nosivom sistemu

S obzirom na glavnu temu ovoga udžbenika, prikazat će se postupak određivanja (prikladnije bi bilo reći postupak *skiciranja*) utjecajnih funkcija za statičke veličine (kao što su momenti savijanja, poprečne sile te reakcije ležajeva) statički neodređenih sistema. Pri tome su tražene utjecajne funkcije krivulje višega stupanja (ili dijelovi krivulja) koje se određuju na temelju *teorema Müller–Breslaua* koji glasi: utjecajna je linije jednaka progibnoj liniji nosača zbog pogodno odabranoga prisilnog pomaka određene njegove točke.

Dva su postupka izvođenja funkcijskih izraza, odnosno crtanja grafa utjecajnih funkcija: statički i kinematički. U statičkom se postupku prati definicija utjecajne funkcije te se za različite položaje jediničnoga opterećenja određuje traženi funkcijski izraz graf kojega je utjecajna linija. Kinematički se postupak temelji na spomenutom teoremu Müller–Breslaua s položištem u *teoremu Enrica Bettija* o uzajamnosti radova sila u dva različita ravnotežna stanja [21].

Na temelju navedenih teorema, utjecajna se linija može skicirati kao progibna linija statički neodređenoga sistema s jediničnim pomakom (ili zaokretom) na mjestu i suprotnoga smjera od statičke veličine za koju se utjecajna linija određuje.

Pri tome vrijedi *Bernoulli–Eulerova teorija* savijanja štapova prema kojoj ravnine poprečnih presjeka ostaju okomite na deformiranu os štapa, te je odnos između funk-

cije momenata savijanja i funkcije zakrivljenosti osi štapa (konstitucijska jednadžba) linearan:

$$M(x) = EI \cdot \kappa(x)$$

Funkcija zakrivljenosti osi štapa  $\kappa(x)$  u teoriji I. reda (pomaci i deformacije su mali) može se aproksimirati sljedećim izrazom (pojmom skiciranje progibne linije koristimo se upravo zbog pojednostavnjenja funkcije zakrivljenosti zanemarivanjem vrlo malih veličina u nazivniku):

$$\kappa = -\frac{1}{R(x)} = -\frac{w'''}{(1+(w')^2)^{\frac{3}{2}}} \cong -w'''$$

Dakle, diferencijalna jednadžba koju treba riješiti prilikom određivanja funkcijskoga izraza za utjecajnu liniju glasi

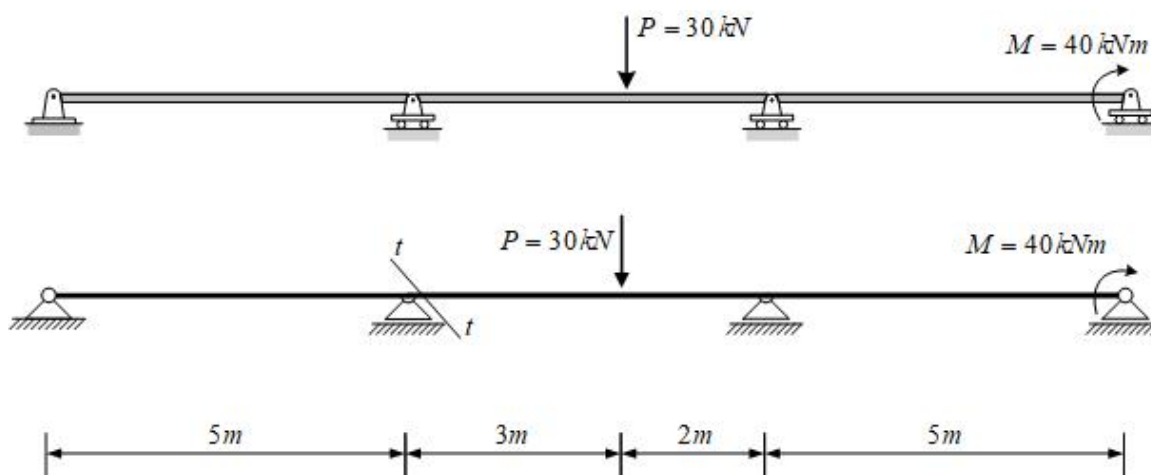
$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

Međutim, samo je u jednostavnim slučajevima analitičkim rješavanjem diferencijalne jednadžbe progibne linije lako odrediti funkcijski izraz za progibnu liniju. Češće se za skiciranje utjecajnih funkcija upotrebljava postupak temeljen na *Mohrovoj analogiji*.

Otto Mohr je na temelju sličnosti diferencijalne jednadžbe progibne linije i diferencijalne jednadžbe ravnotežne konfiguracije niti ( $\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{H}$ ) zaključio da se progibna linija grede može nacrtati kao dijagram momenata izazvanih zamišljenom "distribuiranom silom" vrijednosti koje su opisane funkcijom zakrivljenosti. A zakrivljenost je prema navedenoj konstitucijskoj jednadžbi jednaka funkciji momenta savijanja podijeljenoj s (najčešće) konstantom  $EI$ . Pritom, prema teoremu Müller-Breslaua momente savijanja uzrokuje jedinični pomak na mjestu, a suprotnog smjera od statičke veličine za koju se utjecajna linija skicira.

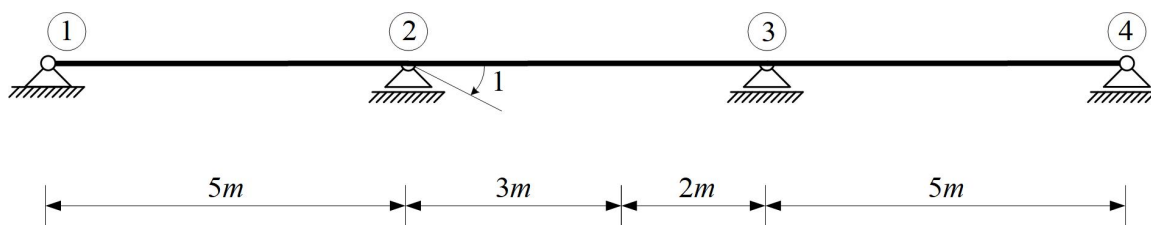
## 5.2 Određivanje utjecajne linije za moment savijanja u presjeku kontinuiranoga nosača

Primjenom utjecajne linije odredit će se iznos momenta savijanja u presjeku  $t-t$  uzrokovan zadanim opterećenjem (pritom je umnožak  $EI = 75\,000\text{ kNm}^2$ ). U postupku skiciranja utjecajne linije primijenit će se inženjerska metoda pomaka. Odabir metode ovisi o zadanom statičkom sistemu te o broju nepoznanica u pojedinoj metodi.



Slika 5.2: Zadani statički sistem s naznačenim presjekom  $t-t$  i zadano opterećenje

Djelovanje koje se zadaje u postupku skiciranja utjecajne linije ovisi o prirodi statičke veličine za koju se utjecajna linija određuje i o njezinom položaju na zadanom sistemu. Statička veličina za koju se traži utjecajna linija moment je savijanja u presjeku  $t-t$ . Prema tome, na statičkom se sistemu zadaje prisilni jedinični zaokret na mjestu momenta savijanja u presjeku  $t-t$ , kao što je prikazano na slici 5.3.



Slika 5.3: Zadani statički sistem s jediničnim djelovanjem

U slučaju traženja utjecajne linije za poprečnu silu u zadanom presjeku djelovanje je na statički sistem jedinični pomak poprečan na os štapa, a suprotnoga smjera od

pozitivnoga smjera poprečne sile, dok je jedinično djelovanje u postupku skiciranja utjecajne linije za (vertikalnu ili horizontalnu) reakciju zadanoga sistema jedinični prisilni pomak na mjestu  $a$ , suprotnoga smjera od pozitivnoga smjera reakcije. Kad je poznato djelovanje na zadani sistem u postupku skiciranja utjecajne linije, daljnji postupak ovisi o metodi koja se primjenjuje za određivanje funkcije momenata savijanja. Ta se funkcija može odrediti bilo kojom metodom za određivanje dijagrama unutarnjih sila statički neodređenih sistema, a u udžbeniku su obrađene metoda sila, (opća) metoda pomaka, inženjerska metoda pomaka te relaksacijske metode.

Inženjerskom će se metodom pomaka odrediti funkcija (točnije, dijagram) momenata savijanja. Stoga su nepoznanice zaokreti čvorova 2 i 3 ( $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ ), a momenti (upetosti) na krajevima elemenata u fazi upetosti jednaki su

$$\begin{aligned}\bar{M}_{2,3} &= -4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot 1 \\ \bar{M}_{3,2} &= -2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot 1 \\ \bar{M}_{2,1} &= \bar{M}_{3,4} = \bar{M}_{4,3} = 0\end{aligned}$$

U fazi dopuštenih pomaka zaokreću se čvorovi 2 i 3, te su vrijednosti momenata savijanja  $m_{i,j}$  jednaki

$$\begin{aligned}m_{2,1} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 \\ m_{2,3} &= 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\ m_{3,2} &= 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\ m_{3,4} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3\end{aligned}$$

Konačne su vrijednosti momenata na krajevima elemenata zbroj momenata iz dvije faze inženjerske metode pomaka:

$$\begin{aligned}
 M_{2,1} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 \\
 M_{2,3} &= -4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 M_{3,2} &= -2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3 \\
 M_{3,4} &= 3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \varphi_3
 \end{aligned}$$

Momenti savijanja na mjestima dodanih vanjskih veza koje sprečavaju zaokrete čvorova 2 i 3 moraju iščeznuti, odnosno njihovi su zbrojevi u pojedinim čvorovima jednaka nuli. Sustav jednadžbi koji nastaje sastoji se od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice te ima jedno realno rješenje:

$$\begin{aligned}
 M_{2,1} + M_{2,3} &= 0 \\
 M_{3,2} + M_{3,4} &= 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 \frac{7}{5} \cdot \varphi_2 + \frac{2}{5} \cdot \varphi_3 &= \frac{4}{5} \\
 \frac{2}{5} \cdot \varphi_2 + \frac{7}{5} \cdot \varphi_3 &= \frac{2}{5} \\
 \dots\dots\dots \\
 \varphi_2 &= \frac{168}{315} \\
 \varphi_3 &= \frac{6}{45}
 \end{aligned}$$

Konačne vrijednosti momenata savijanja na krajevima elemenata vidljive su na pripadnom dijagramu momenata savijanja sa slike 5.4.

Prema prethodno navedenoj konstitucijskoj jednadžbi, funkcija zakrivljenosti određuje se dijeljenjem funkcije momenata savijanja konstantom  $EI$ . Dijagram funkcije  $\kappa(x)$  prikazan je na slici 5.4.

Na temelju Mohrove analogije funkcija je zakrivljenosti zamišljena "distribuirana sila", a skica progibne funkcije (koja je prema teoremu Müller–Breslaua jednaka skici utjecajne funkcije) dijagram je momenata savijanja izazvanih zamišljenom distribuiranom silom  $\kappa(x)$ . Dijagram momenata savijanja afina je slika ravnotežne

konfiguracije niti istoga raspona i istoga opterećenja, koju nazivamo *verižnom krivuljom*.

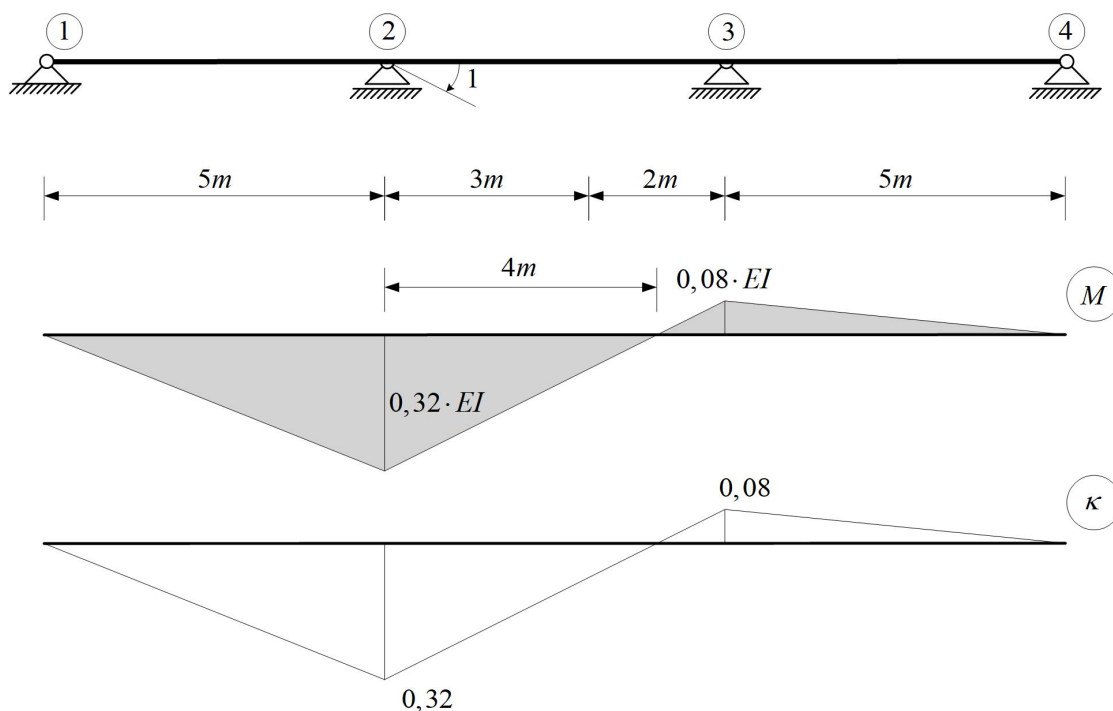
Za određivanje verižne krivulje zamišljena se distribuirana sila dijeli na dijelove i zamjenjuje (statički ekvivalentnim) sustavom koncentriranih sila  $\Phi_i$  vrijednosti kojih su jednake ploštinama dijelova dijagrama zakrivljenosti, te su stoga vrijednosti određenih integrala između dviju ordinala (granica dijelova površine) i mogu se smatrati kutovima između tangenata na progibnu liniju:

$$w''(x) = -\kappa(x)$$

$$\kappa(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

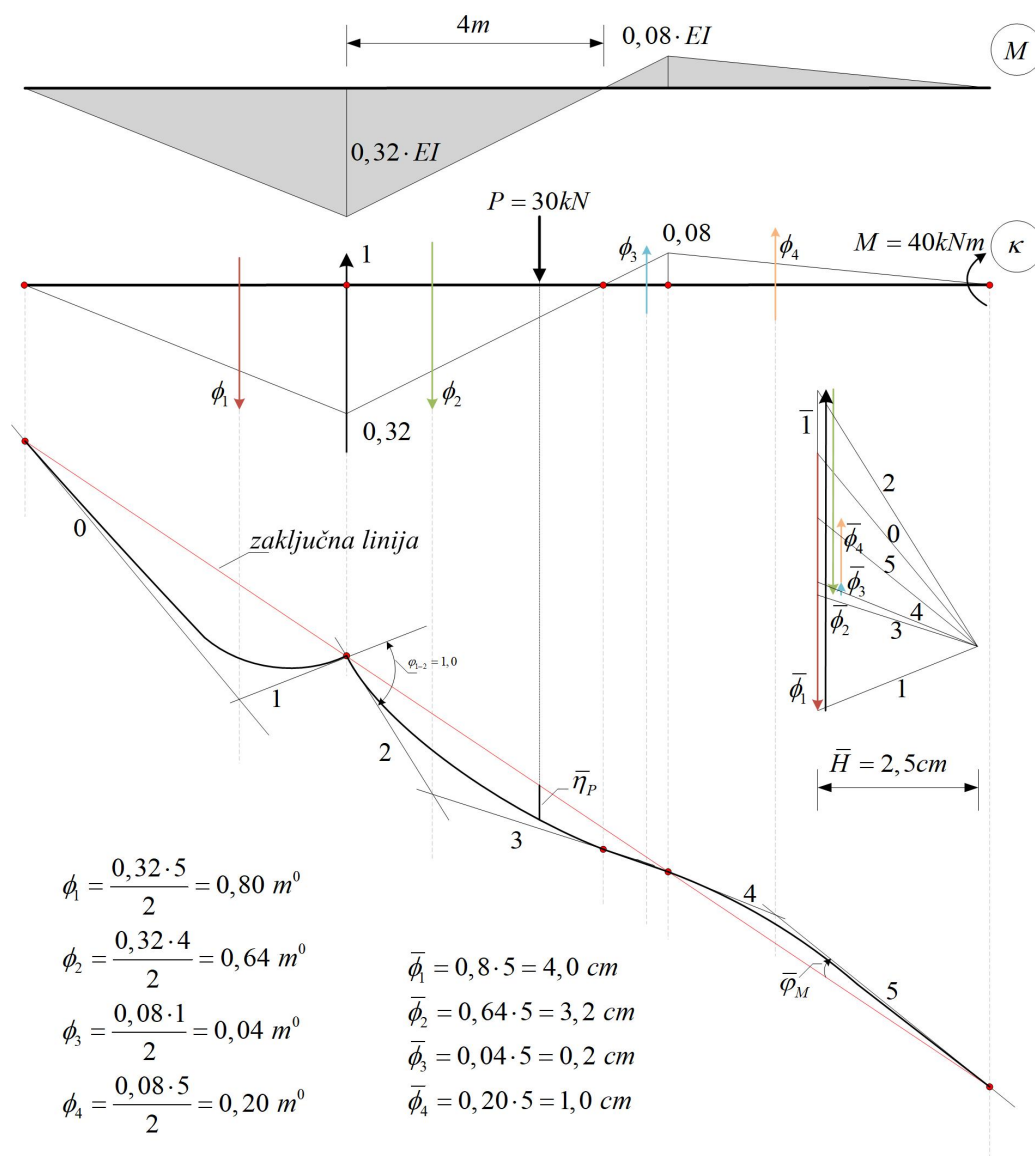
$$\int \kappa(x) dx = -w'(x) \Rightarrow \text{funkcija nagiba tangenata na progibnu liniju}$$

$$w'(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx$$



**Slika 5.4:** Dijagram momenata savijanja i dijagram zakrivljenosti

Pravci djelovanja zamišljenih koncentriranih sila prolaze težištima dijelova površine utjecaji kojih se određenim silama  $\phi_i$  zamjenjuju.



mjerilo kutova (fiktivnih sila)  $\rightarrow 1\text{ m}^0 :: \text{--- cm}$   
**ODABRATI po volji**, npr.  $1\text{ m}^0 :: 5\text{ cm}$

$$H = 1\text{ m}^0$$

$$\bar{H} = 5\text{ cm}$$

$n = 2$  .... odabrana prikmeta

$$\bar{H} = \frac{5\text{ cm}}{2} = 2,5\text{ cm}$$

Slika 5.5: Postupak skiciranja utjecajne linije za moment savijanja u presjeku  $t-t$



Prema tome, treba skicirati tangente na progibnu liniju (u točkama ordinala odnosno granica dijelova površine dijagrama zakrivljenosti), te upisati krivulju unutar dobivenoga tangentsnog poligona koja je utjecajna linija za traženu statičnu veličinu. Postupak je prikazan na slici 5.5.

Na mjestu presjeka  $t-t$  relativni je zaokret tangenata na progibnu liniju jednak jedan. Stoga se u polje zamišljenih sila (koje predstavljaju kutove između tangenata progibne linije) dodaje zamišljena jedinična sila. Za crtanje zamišljenih sila  $\phi_i$  u poligonu sila treba odabrati mjerilo zamišljenih (ili fiktivnih) sila pomoću kojega se veličine kutova (mjerne jedinice radijan) pretvaraju u duljine vektora (mjerne jedinice centimetar). Također se odabire prikladna veličina prikrate kojom se povećavaju progibi i nagibi tangenata na progibnu liniju.

Nakon konstrukcije verižnoga poligona zamišljenih sila njegove zrake tvore tangentsni poligon. Mjesta ordinala (granica podjele površine dijagrama zakrivljenosti) određuju točke skiciranih tangenata utjecajne linije koja se unutar dobivenoga tangentsnog poligona može skicirati. Zaključna linija zadovoljava rubne uvjete i za zadani se sistem sastoji iz jednoga pravca koji spaja točke vertikalni pomaci kojih su nula. Konačna skica utjecajne linije za moment savijanja u zadanom presjeku nakon izravnavanja zaključne linije prikazana je na slici 5.6.

Na temelju skice utjecajne linije za moment savijanja u presjeku  $t-t$ , moguće je odrediti vrijednost tog momenta za bilo koji tip ili kombinaciju opterećenja.

Na zadani statički sistem djeluju sila  $P$  i koncentrirani moment  $M$ . Očitavanje pomaka na mjestu djelovanja sile  $P$  iznosi  $\bar{\eta}_P = 0,003 m$ , dok je zaokret tangente s indeksom 5 u odnosu na zaključnu liniju jednak  $\bar{\varphi}_M = \frac{0,4}{2,5}$ . Stvarni se pomak određuje uvažavanjem mjerila duljina (kojim se crta zadani statički sistem), na primjer  $1 : m = 1 : 200$ , i odabrane prikrate  $n = 2$ , dok za određivanje stvarnoga nagiba tangente u odnosu na zaključnu liniju treba znati samo veličinu prikrate. Prema tome, vrijednost je momenta savijanja u presjeku  $t-t$

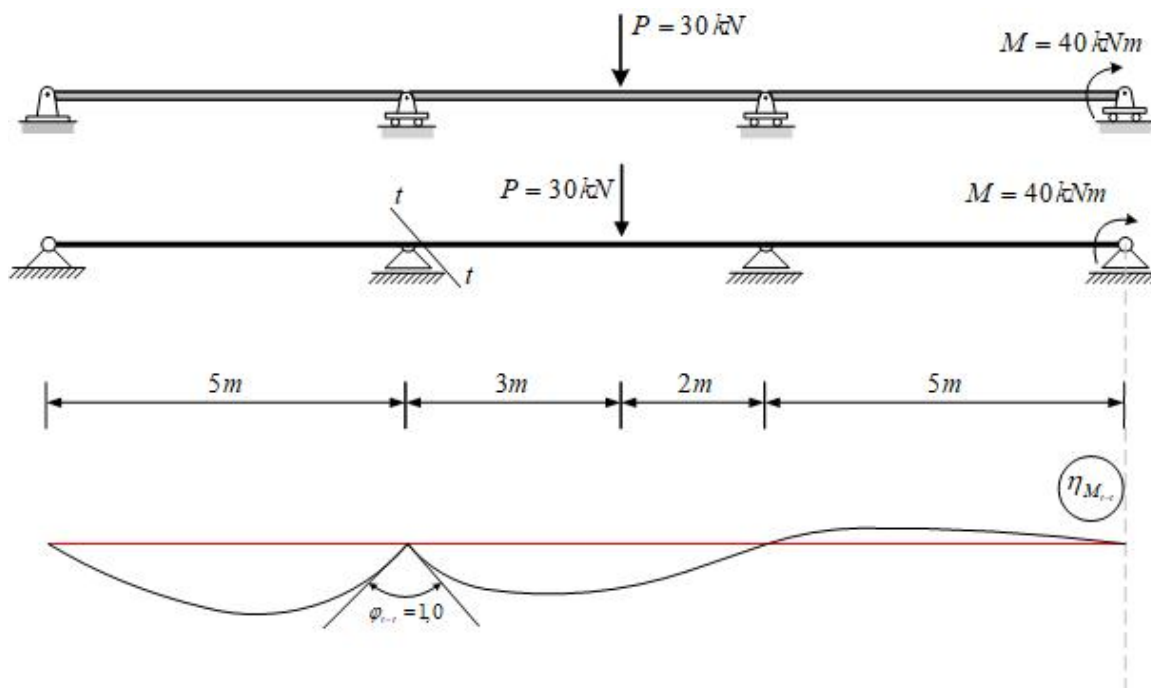
$$\bar{\eta}_P = 0,003 m$$

$$\bar{\varphi}_M = \frac{0,4}{2,5} rad$$

$$M_{t-t}(P, M) = \bar{\eta}_P \cdot \frac{m}{n} \cdot P + \bar{\varphi}_M \cdot \frac{1}{n} \cdot M$$

$$M_{t-t}(P, M) = 0,003 \cdot \frac{200}{2} \cdot 30 + \frac{0,4}{2,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 = 12,2 kNm$$

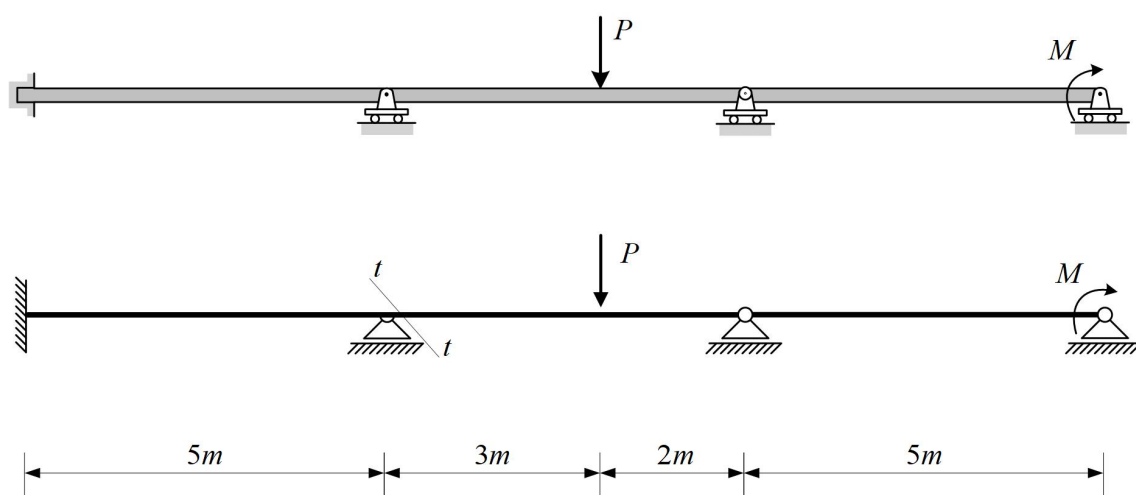
Kut između tangenata 1 i 2 (slika 5.5) jednak je jedan (kao što je i zamišljena sila između površine u dijagramu zakrivljenosti s oznakom  $\varphi_1$  i površine  $\varphi_2$  jedinična). Isto se može „očitati“ iz poligona sila: tangens je kuta koji zatvaraju zrake oznake 1 i 2  $\frac{1}{H} \cdot \frac{1}{n} = \frac{5,0}{2,5} \cdot \frac{1}{2} = 1,0$ . Pritom treba napomenuti kako se radi o malim pomacima i malim zaokretima (tangens kuta jednak je kutu).



Slika 5.6: Utjecajna linija za moment savijanja u zadanom presjeku

### 5.3 Određivanje utjecajne linije za poprečnu silu u presjeku kontinuiranoga nosača

Zadan je dva puta statički neodređen sistem sa slike 5.7. Skicirat će se utjecajna linija za poprečnu silu u presjeku  $t-t$ . Za određivanje dijagrama momenata savijanja od jediničnoga prisilnog pomaka (na mjestu, a suprotnog smjera u odnosu na pozitivan smjer poprečne sile) primijenit će se Crossov relaksacijski postupak. Zadani je sistem nepomičan, te se relaksacijski postupak sastoji iz jedne relaksacije po Crossu. I na kraju, za opterećenje silom  $P = 30 \text{ kN}$  i momentom  $M = 40 \text{ kNm}$  primjenom utjecajne linije odredit će se iznos poprečne sile u presjeku  $t-t$ .



Slika 5.7: Statički sistem s naznačenim mjestom presjeka  $t-t$

Na mjestima ležajeva zadanoga sistema definiraju se čvorovi, te se za jedinični pomak sa slike 5.8 određuju momenti upetosti:

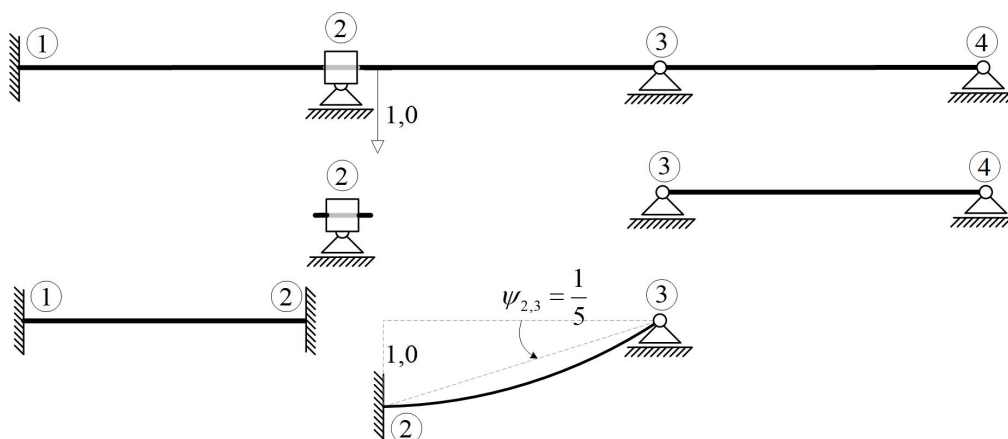
$$\begin{aligned}\bar{M}_{2,3} &= -3 \cdot \frac{EI}{5} \cdot \frac{1}{5} \\ \bar{M}_{3,2} &= 0 \\ \bar{M}_{1,2} &= \bar{M}_{2,1} = \bar{M}_{3,4} = \bar{M}_{4,3} = 0\end{aligned}$$

Element 1 – 2 obostrano je upeta greda, dok je element 2 – 3 jednostrano upeta greda, te su pripadni koeficijenti krutosti i razdjelni koeficijenti tih elemenata

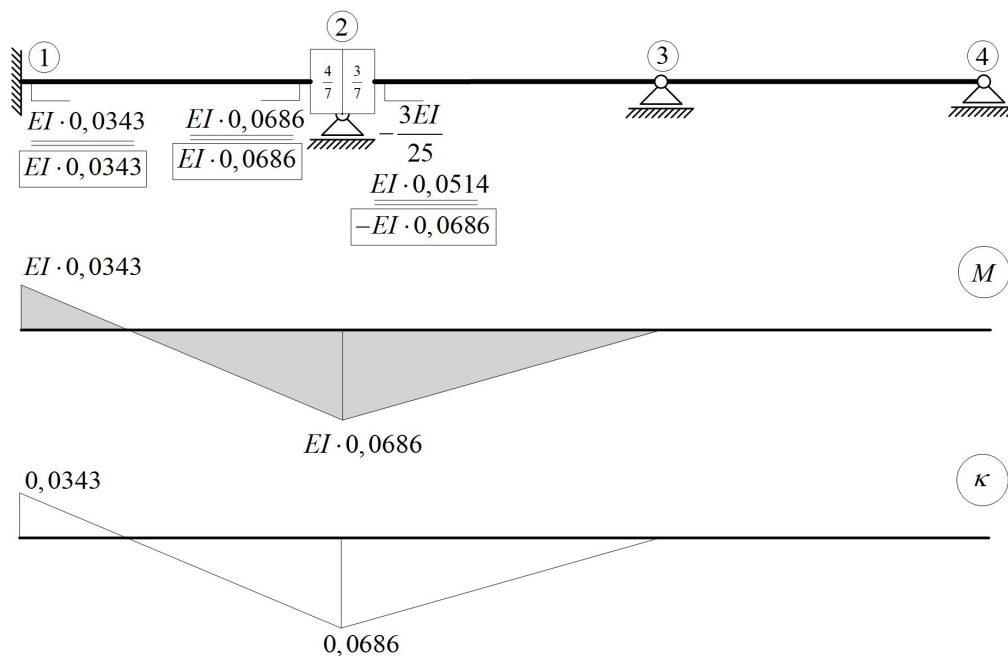
$$k_{1,2} = 4 \cdot \frac{EI}{5} \qquad \Sigma k_{(2)} = k_{1,2} + k_{2,3} = 7 \cdot \frac{EI}{5}$$

$$k_{2,3} = 3 \cdot \frac{EI}{5} \qquad \mu_{2,1} = \frac{k_{1,2}}{\Sigma k_{(2)}} = \frac{4}{7}$$

$$\mu_{2,3} = \frac{k_{2,3}}{\Sigma k_{(2)}} = \frac{3}{7}$$



Slika 5.8: Statički sistem sa spriječenim zaokretom i zadanim prisilnim pomakom



Slika 5.9: Crossova iteracijska shema, dijagram momenata savijanja i zakrivljenosti

U iteracijsku shemu upisuje se moment upetosti  $\overline{M}_{2,3}$ , a ravnoteža čvora 2 postignuta je nakon jednoga koraka iteracije (slika 5.9). Vrijednosti su zamišljenih sila  $\phi_i$  kao i odabrano mjerilo kutova te prik rata  $n$ :

$$\phi_1 = \frac{0,0343 \cdot 1,667}{2} = 0,0286 \text{ m}^0 \quad \overline{\phi}_1 = 0,0286 \cdot 30 = 0,858 \text{ cm}$$

$$\phi_2 = \frac{0,0686 \cdot 3,333}{2} = 0,1143 \text{ m}^0 \quad \overline{\phi}_2 = 0,1143 \cdot 30 = 3,429 \text{ cm}$$

$$\phi_3 = \frac{0,0686 \cdot 5}{2} = 0,1715 \text{ m}^0 \quad \overline{\phi}_3 = 0,1715 \cdot 30 = 5,145 \text{ cm}$$

mjerilo kutova (fiktivnih sila)  $\rightarrow 1 \text{ m}^0 :: \underline{\quad} \text{ cm}$

**ODABRANO po volji** :  $1 \text{ m}^0 :: 30 \text{ cm}$

$$H = 1 \text{ m}^0$$

$$\overline{H} = 30 \text{ cm}$$

$n = 12$  .... odabrana prik rata

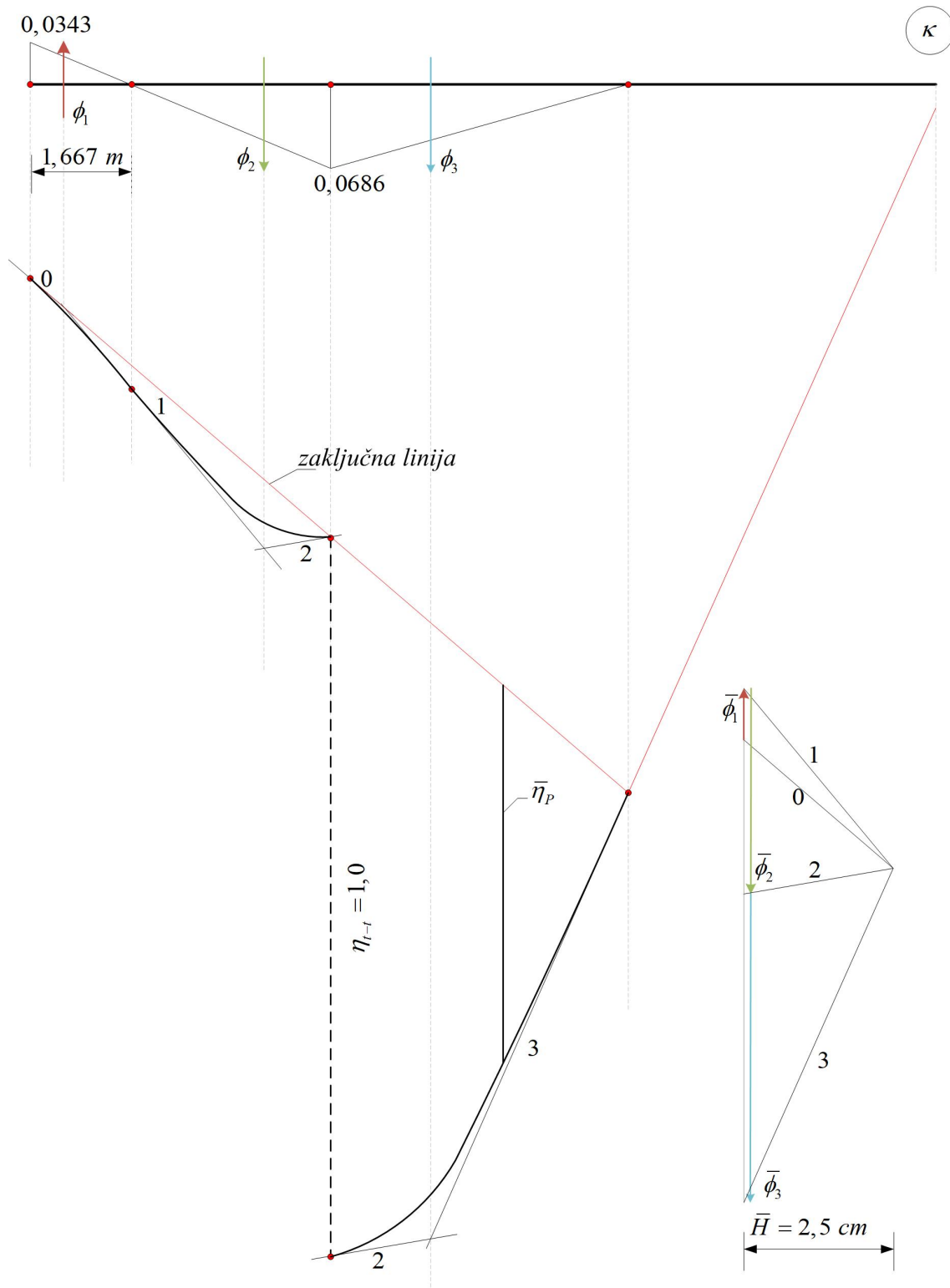
$$\overline{H} = \frac{30 \text{ cm}}{12} = 2,5 \text{ cm}$$

Utjecajna linija statički neodređenoga sistema jednaka je progibnoj liniji istoga sistema s relativnim jediničnim prisilnim pomakom (ili zaokretom) na mjestu (a suprotnog smjera) statičke veličine za koju se utjecajna linija određuje. Dakle, utjecajna linija za poprečnu silu mora imati jediničnu vrijednost na mjestu poprečnoga presjeka sa spomenutom poprečnom silom (kao što i progibna linija statičkoga sistema s jediničnim prisilnim pomakom na mjestu tog pomaka ima jediničnu vrijednost). Stoga se prilikom skiciranja utjecajne linije za poprečnu silu u zadanom presjeku prekida konstrukcija tangentsnoga poligona kod zajedničke komponente zamišljenih sila  $\phi_2$  i  $\phi_3$  (tangenta s indeksom 2) na mjestu zadanoga presjeka i pomiče za jediničnu vrijednost koja u mjerilu zamišljenih sila iznosi  $12 \text{ cm}$ , a u smjeru jednakom jediničnom pomaku sa slike 5.8:

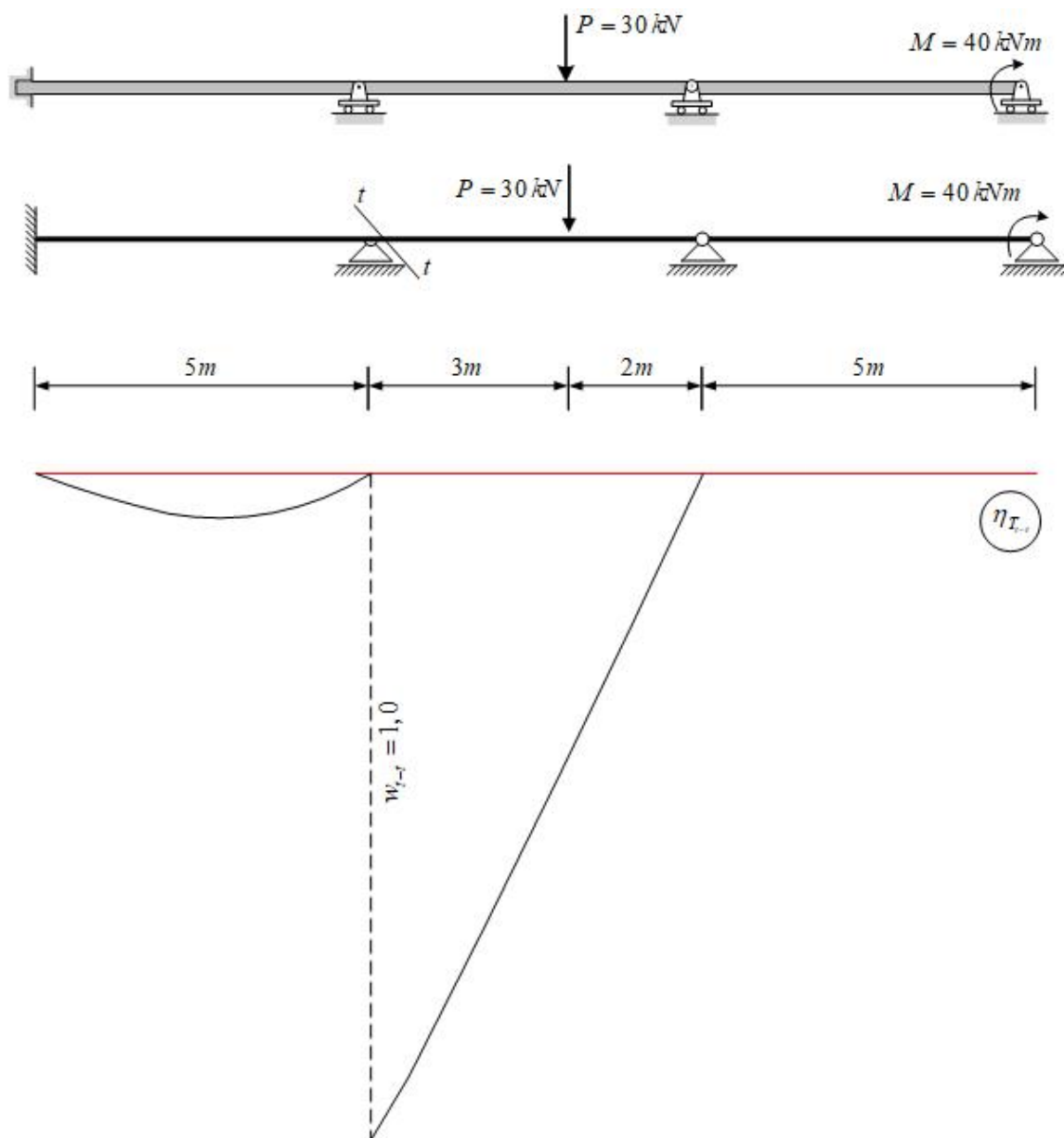
$$\eta_{t-t} = 1,0$$

$$1 = \overline{\eta}_{t-t} \cdot \frac{m}{n}$$

$$\overline{\eta}_{t-t} = \frac{n}{m} = \frac{12}{100} = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$$



Slika 5.10: Postupak skiciranja utjecajne linije za poprečnu silu u presjeku



**Slika 5.11:** Utjecajna linija za poprečnu silu u zadanom presjeku

Zaključna linija na slici 5.10 sastoji se iz dva pravca. Prvi pravac zadovoljava rubne uvjete diska između čvorova 1 i 3 zadanoga statičkog sistema. Čvorovi 1, 2 i 3 su ležajevi u kojima su vertikalni pomaci nula, dok je relativan vertikalni pomak čvora 2 i presjeka  $t-t$  jednak jedan. Pravac koji zadovoljava navedene uvjete spaja čvorove 1, 2 i 3, a ujedno je produžetak zrake tangentsnoga poligona s indeksom 0.

Druga se zaključna linija odnosi na disk između čvorova 3 i 4. Zakrivljenost diska

između navedenih čvorova jednaka je nuli, stoga utjecajna funkcija mora biti prvog stupnja (čiji je graf pravac). Vertikalni su pomaci čvorova 3 i 4 nula, te zaključna linija spaja navedene čvorove na zruci 3 (koja predstavlja utjecajnu funkciju diska između čvorova 3 i 4).

Očitavanjem vrijednosti utjecajne linije na mjestu djelovanja sile  $P$  i zaokreta tangente s indeksom 3 za zadano se opterećenje određuje vrijednost poprečne sile u presjeku  $t-t$  :

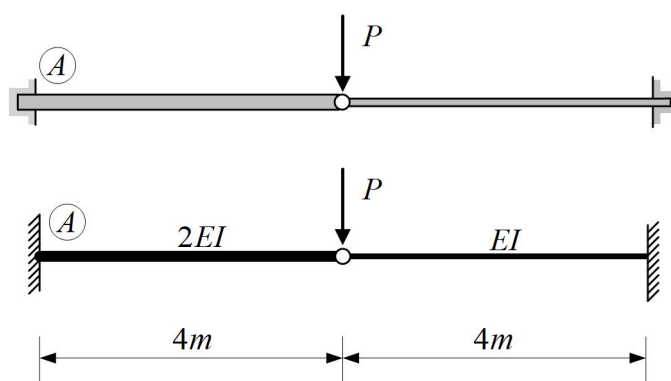
$$\begin{aligned}\bar{\eta}_P &= 0,063 \text{ m}, & \bar{\varphi}_M &= 0 \text{ rad} \\ M_{t-t}(P, M) &= \bar{\eta}_P \cdot \frac{m}{n} \cdot P + \bar{\varphi}_M \cdot \frac{1}{n} \cdot M \\ M_{t-t}(P, M) &= 0,063 \cdot \frac{100}{12} \cdot 30 + 0 \cdot \frac{1}{12} \cdot 40 = 15,75 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Izravnavanje zaključne linije i konačna skica utjecajne funkcije za poprečnu silu u zadanom presjeku prikazano je na slici [5.11](#).

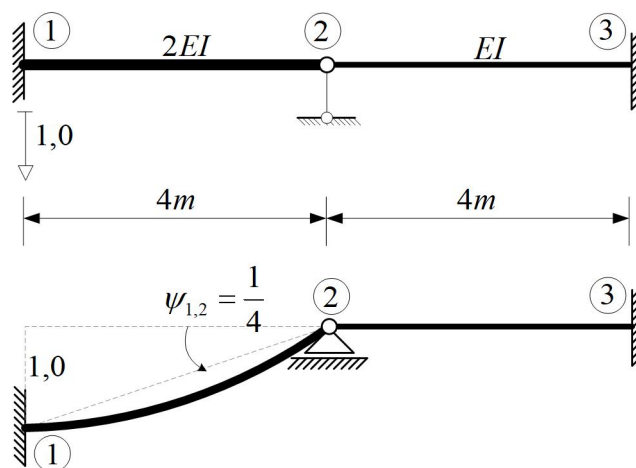


## 5.4 Određivanje utjecajne linije za reakciju u ležaju

Primjenom relaksacijskog postupka po Crossu odredit će se utjecajna linija za vertikalnu reakciju u ležaju  $A$  (slika 5.12). Očitavanjem vrijednosti utjecajne linije na mjestu zadane sile  $P$  odredit će se iznos vertikalne reakcije u ležaju  $A$  od utjecaja zadane sile  $P$ . Zadane su vrijednosti umnoška  $EI = 77\,000 \text{ kNm}^2$  i opterećenja  $P = 45 \text{ kN}$ .



Slika 5.12: Zadani sistem s naznačenim ležajem  $A$



Slika 5.13: Prva faza po Crossu – stanje spriječenih pomaka

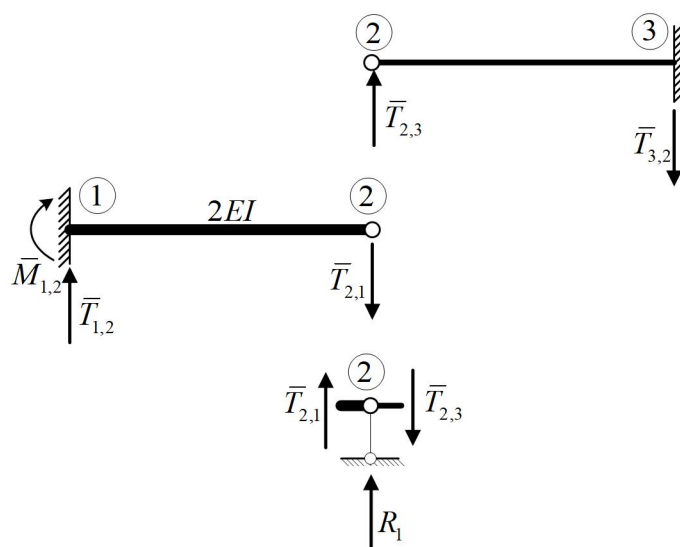
Zadani se sistem sastoji od dva zglobno povezana diska. Definiraju se tri čvora, odnosno dva elementa (slika 5.13). Sistem je pomičan, a postojeći se pomak u prvoj fazi „proširenoga“ Crossovog postupka sprečava dodavanjem zglobnoga štapa na mjestu  $i$  u smjeru pomaka (slika 5.13). Vanjsko je djelovanje prisilni jedinični pomak čvora 1 u smjeru suprotnom od pozitivnoga smjera vertikalne reakcije ležaja  $A$ .

Momenti upetosti elemenata 1-2 i 2-3 su

$$\bar{M}_{1,2} = -3 \cdot \frac{2EI}{4} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}EI$$

$$\bar{M}_{3,2} = 0$$

Na mjestu zglobnoga štapa koji sprečava pomak čvora 2 od utjecaja jediničnog prisilnog pomaka javlja se reakcija iznos koje se može odrediti iz pogodno odabranih presjeka kao na slici 5.14.



Slika 5.14: Određivanje reakcije  $R_1$  u pridržanju

Moment  $\bar{M}_{3,2}$  jednak je nuli, a iz uvjeta ravnoteže za element 2 – 3 proizlazi da su i poprečne sile  $\bar{T}_{2,3}$  i  $\bar{T}_{3,2}$  jednake nuli. Dakle, reakcija  $R_1$  istoga je iznosa, a suprotnoga smjera od poprečne sile  $\bar{T}_{2,1}$  i iznosi

$$\bar{T}_{1,2} - \bar{T}_{2,1} = 0$$

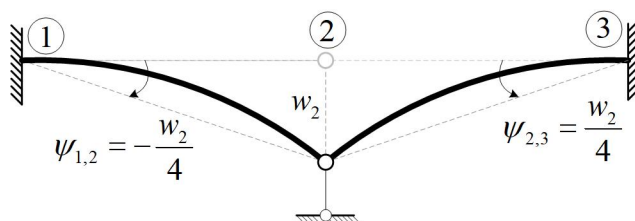
$$\bar{M}_{1,2} + \bar{T}_{1,2} \cdot 4 = 0$$

$$\bar{T}_{1,2} = -\frac{3}{8}EI \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \bar{T}_{2,1} = -\frac{3}{32}EI$$

$$R_1 = \frac{3}{32}EI$$

Prema postupku „proširenoga“ Crossa na mjestu spriječenoga pomaka raskida

se veza kojom je pomak spriječen i određuju se momenti na krajevima elemenata uzrokovanih dopuštenim pomakom (slika 5.15).

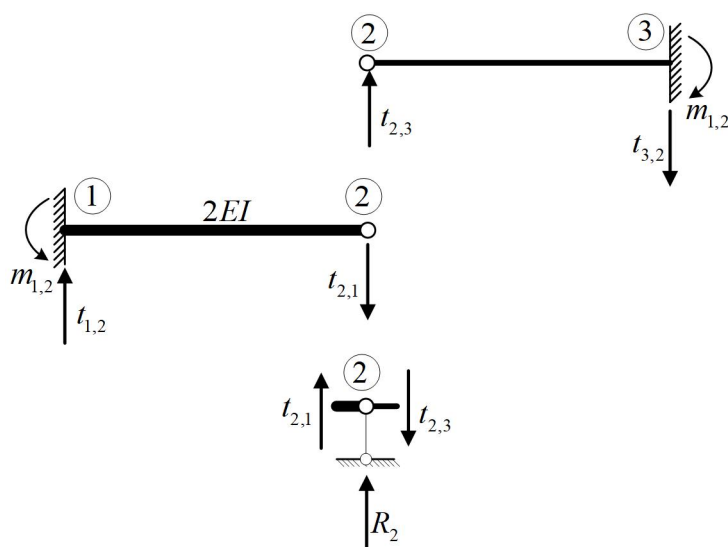


Slika 5.15: Druga faza po proširenom Crossu – stanje dopuštenih pomaka

Momenti na krajevima elemenata 1 – 2 i 2 – 3 od vertikalnog pomaka čvora 2 su

$$m_{1,2} = -3 \cdot \frac{2EI}{4} \cdot \left( -\frac{w_2}{4} \right)$$

$$m_{3,2} = -3 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \frac{w_2}{4}$$



Slika 5.16: Određivanje reakcije  $R_2$  u pridržanju

Vrijednost vertikalnog pomaka  $w_2^{odabrani}$  bira se po volji, a za iznos  $w_2^{odabrani} = \frac{8}{EI}$  momenti  $m_{i,j}$  su

$$m_{1,2} = -3 \cdot \frac{2EI}{4} \cdot \left( -\frac{8}{4EI} \right) = 3$$

$$m_{3,2} = -3 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \frac{8}{4EI} = -\frac{3}{2}$$

Osim pojave reakcija (sila i momenata) u upetim ležajevima, pomak  $w_2^{odabrani}$  uzrokuje reakciju u zglobnom štapu (kojim se sprečava pomak na mjestu čvora 2 različit od odabrane vrijednosti  $w_2 = \frac{8}{EI}$ ). Na slici 5.16 prikazani su presjeci statičkoga sistema, a postavljanjem pogodnih uvjeta ravnoteže za pojedine presjeke određuje se vrijednost reakcije  $R_2$  zglobnog štapa:

$$\begin{aligned} t_{1,2} - t_{2,1} &= 0 & t_{2,3} - t_{3,2} &= 0 \\ m_{1,2} - t_{1,2} \cdot 4 &= 0 & m_{3,2} + t_{3,2} \cdot 4 &= 0 \\ t_{1,2} = \frac{3}{4} &\Rightarrow t_{2,1} = \frac{3}{4} & t_{3,2} = -\frac{3}{8} &\Rightarrow t_{2,3} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$R_2 + t_{2,1} - t_{2,3} = 0$$

$$R_2 = -\frac{9}{8}$$

Zglobni štap kao i reakcija na mjestu štapa nisu dio zadanoga sistema, pa stoga konačna vrijednost reakcije na mjestu zglobnoga štapa mora biti nula. Postavlja se uvjet iščezavanja reakcije i definiranje koeficijenta  $\beta$  (koji je faktor proporcionalnosti stvarnoga i odabranoga pomaka):

$$R_1 + \beta \cdot R_2 = 0$$

$$\frac{3}{32} \cdot EI + \beta \cdot \left( -\frac{9}{8} \right) = 0$$

$$\beta = \frac{3}{36} \cdot EI$$

Na temelju izraza za konačne vrijednosti momenata savijanja prema postupku „proširenoga“ Crossa određeni su momenti na krajevima elemenata 1 – 2 i 2 – 3:

$$M(x) = M_{Cross1} + \beta \cdot M_{Cross2}$$

$$M_{1,2} = \bar{M}_{1,2} + \beta \cdot m_{1,2} \qquad M_{3,2} = \bar{M}_{3,2} + \beta \cdot m_{3,2}$$

$$M_{1,2} = -\frac{3}{8} \cdot EI + \frac{3}{36} \cdot EI \cdot 3 = -\frac{1}{8} \cdot EI \qquad M_{3,2} = 0 + \frac{3}{36} \cdot EI \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8} \cdot EI$$

$$M_{2,1} = 0 \qquad M_{2,3} = 0$$

Na slici 5.17 skicirana je utjecajna funkcija (primjenom Mohrove analogije) za reakciju na upetom ležaju zadanog sistema. Zaključna linija mora zadovoljiti rubne uvjete u dva upeta ležaja: u desnom su ležaju pomaci i zaokret su nula, dok je u lijevom ležaju vertikalni pomak jednak jedan, a horizontalni su pomak i zaokret nula.

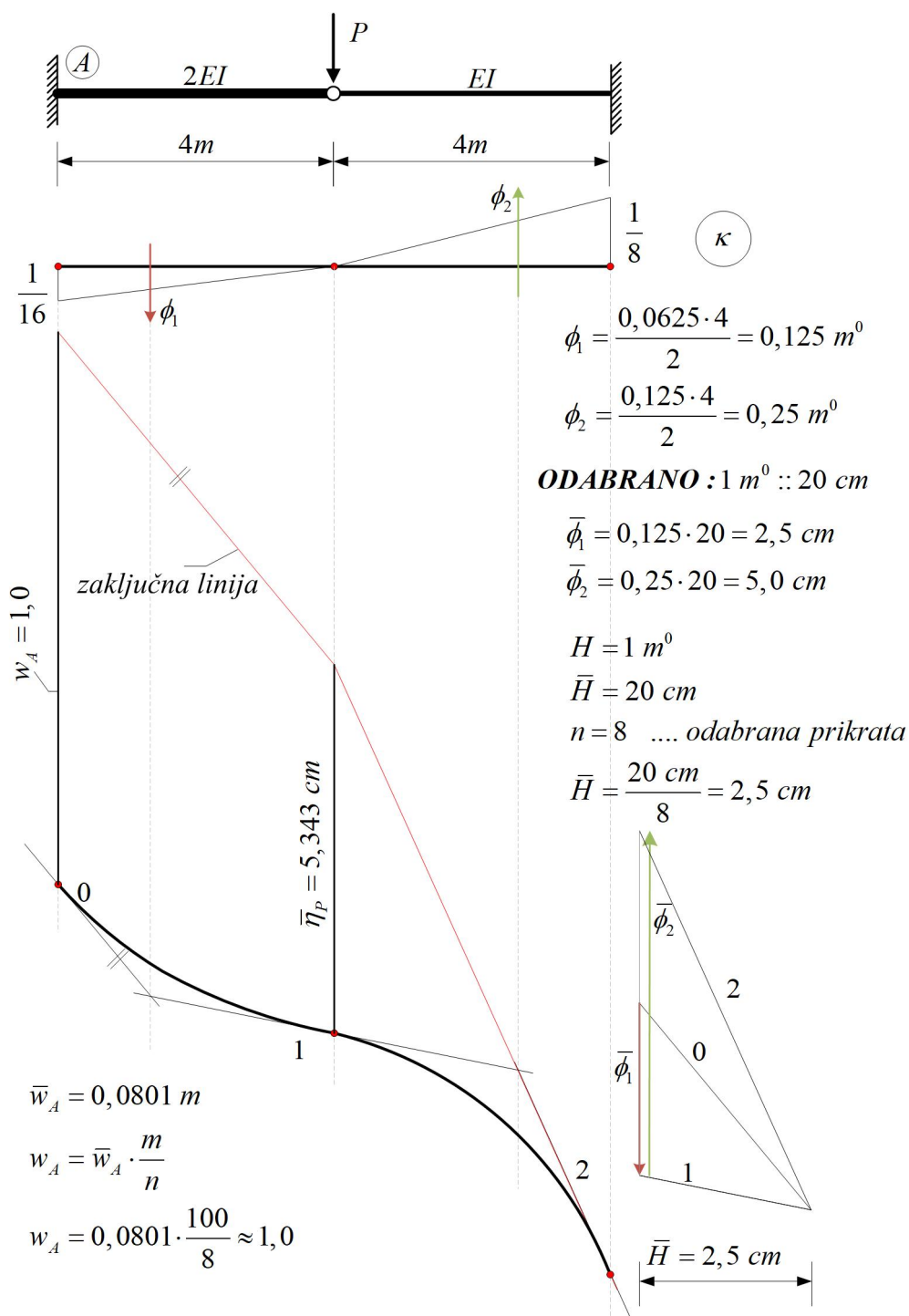
Zadani sistem tvore dva zglobno spojena diska, pa zaključna linija zapravo nije linija već dvije linije (pravci) sa zajedničkom točkom na mjestu zglobne veze dva diska (koji se nezavisno rotiraju, ali zajedno transliraju u vertikalnom smjeru na mjestu čvora 2).

Iznos je vertikalne reakcije ležaja  $A$  uzrokovane silom  $P$ :

$$\bar{\eta}_P = 0,05343 \text{ m}$$

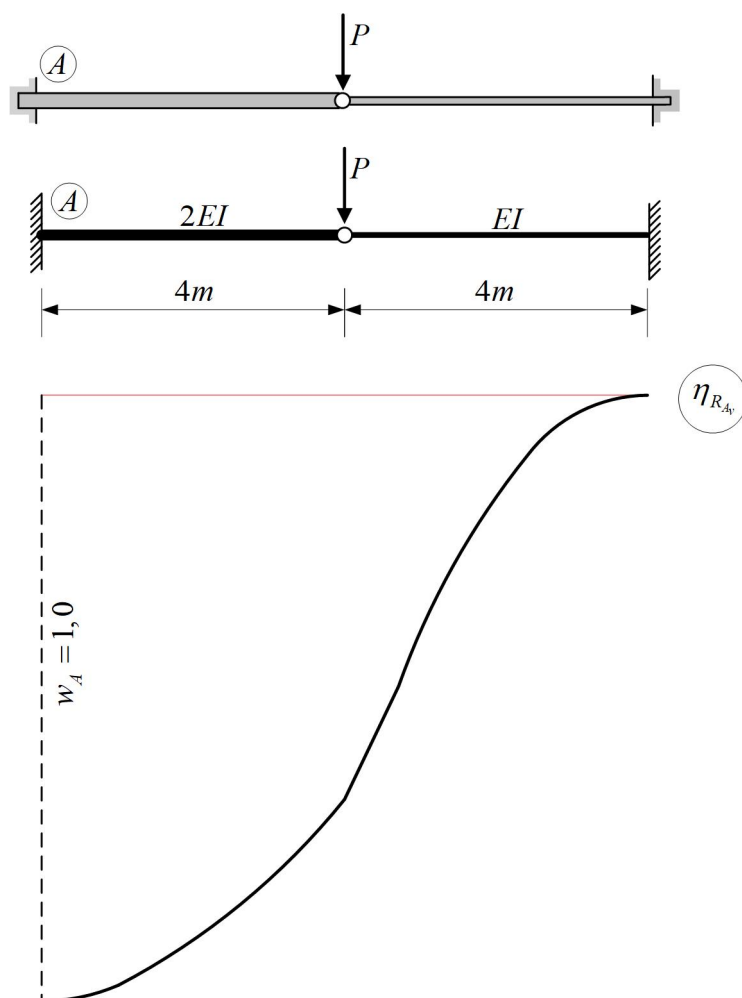
$$R_A(P) = \bar{\eta}_P \cdot \frac{m}{n} \cdot P$$

$$R_A(P) = 0,05343 \cdot \frac{100}{8} \cdot 45 = 30,05 \text{ kN}$$



Slika 5.17: Postupak skiciranja utjecajne linije za reakciju na upetom ležaju A

Nakon izravnavanja pravaca zaključne linije konačna je skica utjecajne linije prikazana na slici 5.18.

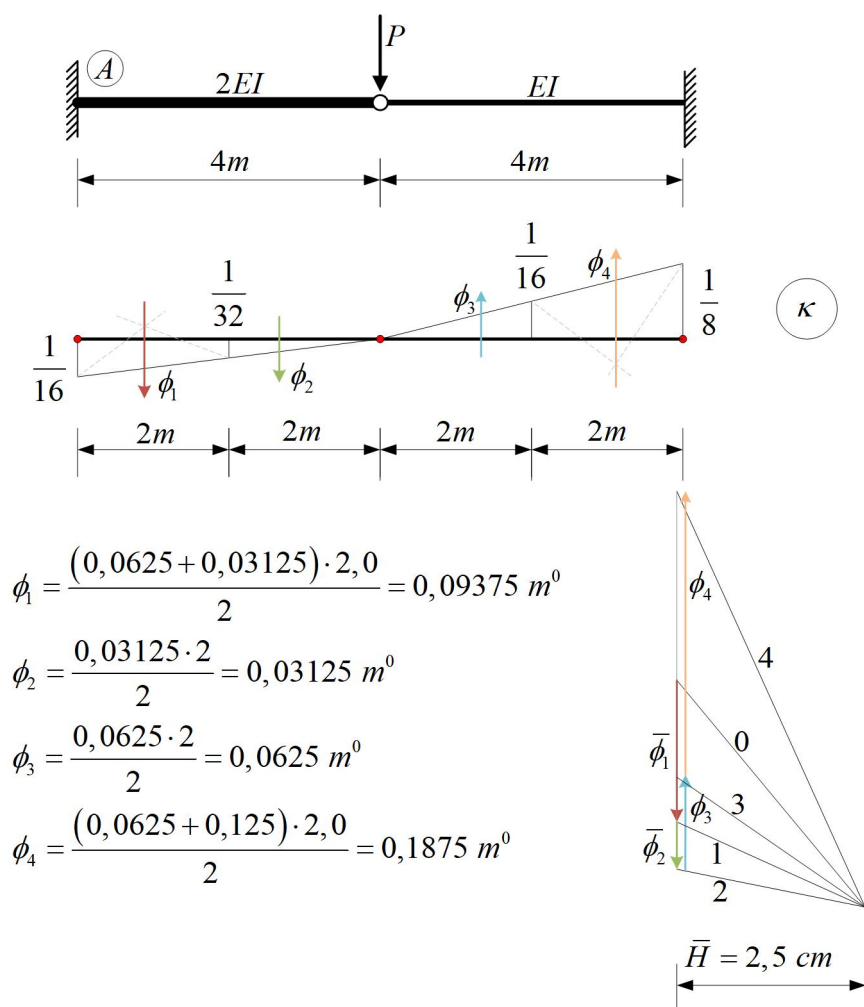


**Slika 5.18:** Skica utjecajne funkcije za reakciju na upetom ležaju  $A$

Na slici 5.17 dijagram zakrivljenosti podijeljen je u dvije površine s oznakama  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . U poligonu sila ove su površine (prema Mohrovoj analogiji to su zamišljene sile) rastavljene na ukupno tri komponente na zrakama s indeksima od 0 do 2, te se tangenti poligon sastoji od tri pravca (tangenata) pomoću kojih je utjecajna funkcija skicirana.

Međutim, ako se dijagram zakrivljenosti razdjeli na više područja zamišljenoga opterećenja, tangenti će poligon definirati veći broj tangenata funkcije koja se posljedično može točnije skicirati. Pritom se dijagram zakrivljenosti dijeli na zamišljena

opterećenja podjelom uzduž osi elemenata statičkoga sistema.



**Slika 5.19:** Podjela dijagrama zakrivljenosti na više dijelova

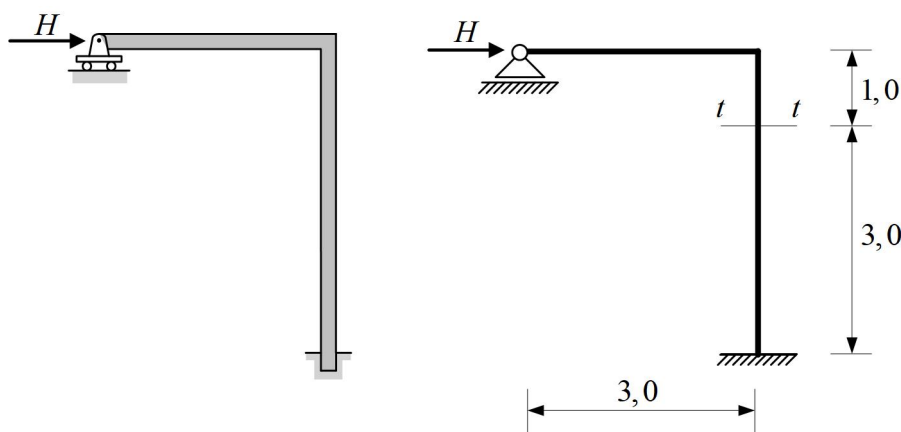
Naime, određivanjem iznosa zamišljene sile (rezultante zamišljenoga opterećenja) definira se iznos određenoga integrala funkcije zakrivljenosti s donjom granicom na koti početka zamišljenoga opterećenja i s gornjom granicom na koti njegovoga kraja. Ispravna podjela dijagrama zakrivljenosti na više područja zamišljenoga opterećenja (koji su u ovom primjeru slučajno jednakih duljina) prikazana je na slici 5.19 (uočimo da se trapezna površina zamišljenoga opterećenja ne dijeli na jednostavnije površine kao što su primjerice trokut i pravokutnik, jer se na taj način ne određuje iznos određenoga integrala funkcije zakrivljenosti).



## 5.5 Utjecajna linija okvirnoga sistema

Za zadani statički sistem sa slike 5.20 skicirat će se utjecajna linija za moment savijanja u presjeku  $t-t$ . Dijagram momenata savijanja od jediničnoga (relativnog) zaokreta na mjestu presjeka  $t-t$ , potreban za primjenu Mohrove analogije, određen je inženjerskom metodom pomaka.

Na temelju utjecajne linije odredit će se iznos momenta savijanja u presjeku  $t-t$  zbog opterećenja silom  $H = 50 \text{ kN}$ .

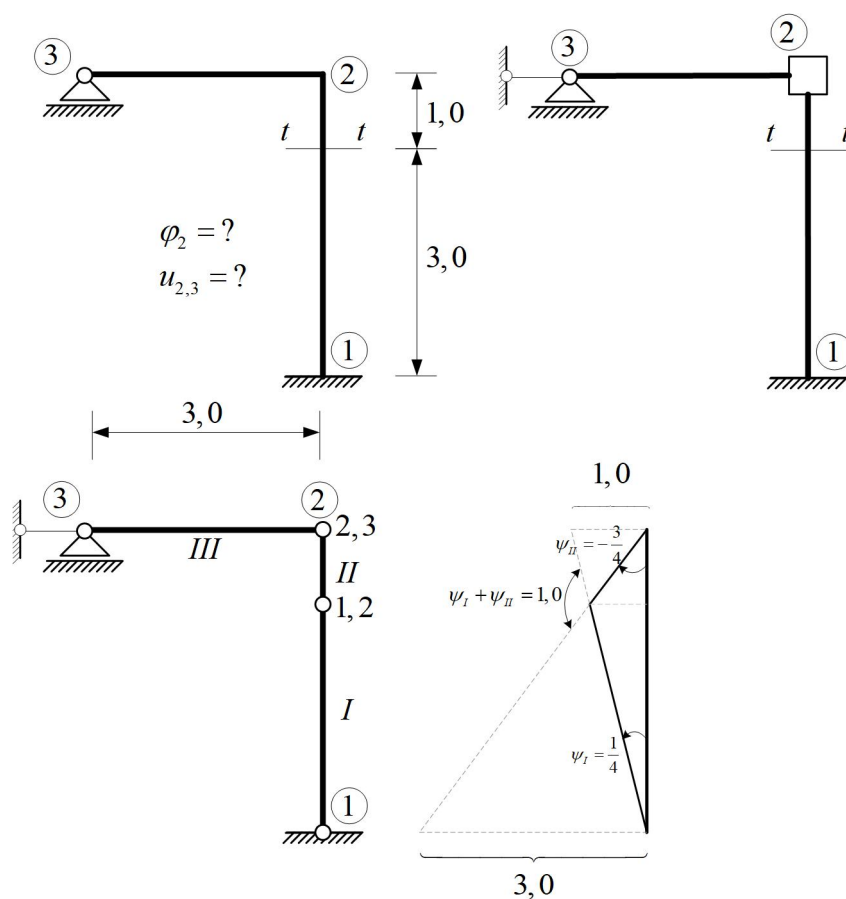


Slika 5.20: Zadani statički sistem – poluokvir

Na slici 5.21 za zadani sistem definirani su čvorovi 1, 2 i 3 kao i njihovi nepoznati pomaci i zaokreti (zaokret čvora 2,  $\varphi_2$ , i uzdužni pomak elementa 2 – 3,  $u_{2,3}$ ). U prvoj fazi inženjerske metode pomaka nepoznati se poopćeni pomaci sprečavaju dodavanjem veza na zadani sistem kao što je prikazano na slici 5.21.

Na temelju plana pomaka (napomena: apsolutni polovi elemenata  $I$ ,  $II$  i  $III$  slučajno su na istim mjestima i s istim oznakama kao i indeksi čvorova elemenata zadanoga sistema) zglobne sheme u kojoj je spriječena moguća translacija zadanoga sistema, a dopušten relativan zaokret na mjestu presjeka  $t-t$ , određeni su kutovi zaokreta elemenata (slika 5.21), dok su momenti upetosti njihovih krajeva

$$\begin{aligned}\bar{M}_{2,3} &= 0 \\ \bar{M}_{1,2} &= -4 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_I - 2 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_{II} \\ \bar{M}_{1,2} &= -\frac{EI}{4} + 3 \cdot \frac{EI}{8} = \frac{EI}{8} \\ \bar{M}_{2,1} &= -4 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_{II} - 2 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \psi_I \\ \bar{M}_{2,1} &= 3 \cdot \frac{EI}{4} - \frac{EI}{8} = \frac{5EI}{8}\end{aligned}$$



**Slika 5.21:** Čvorovi zadanoga sistema, shema spriječenih poopćenih pomaka i plan pomaka zglobne sheme za relativni zaokret na mjestu presjeka  $t-t$

U izrazima za momente upetosti koji nastaju zbog zaokreta  $\psi_I$  i  $\psi_{II}$  razlika je u odnosu na izraze iz faze dopuštenih pomaka inženjerske metode pomaka (u slučaju postojanja nepoznatih kutova zaokreta čvorova elementa zadanoga sistema), u pred-

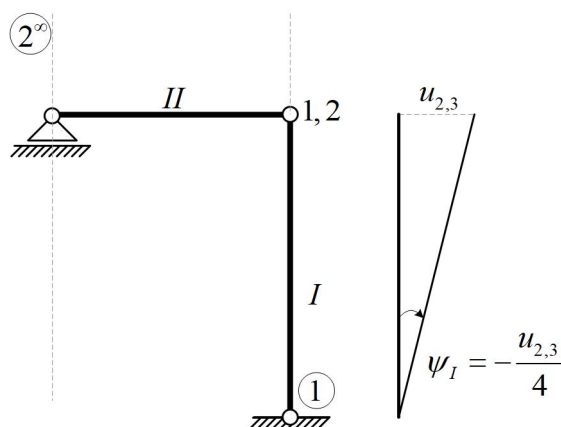
znaku ispred konstanta 4 i 3. Razlog leži u teoremu Müller–Breslaua prema kojem je progibna linija jednaka utjecajnoj ako je skicirana za slučaj djelovanja jediničnoga opterećenja na mjestu, ali suprotnoga smjera od dogovornoga pozitivnog smjera statičke veličine za koju se utjecajna linija određuje. S druge strane, u fazi dopuštenih pomaka inženjerske metode pomaka, pretpostavljamo uvijek pozitivan smjer (nepoznatih) kutova zaokreta, te su i momenti savijanja na krajevima elemenata u navedenoj fazi metode uvijek pozitivni.

Nakon određivanja momenata na krajevima elemenata u fazi spriječenih pomaka, dopuštaju se translacijski pomak  $u_{2,3}$  (slika 5.22) i zaokret  $\varphi_2$ , te su momenti na krajevima elemenata

$$m_{2,3} = 3 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \varphi_2$$

$$m_{1,2} = 2 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \left( -\frac{u_{2,3}}{4} \right)$$

$$m_{2,1} = 4 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot \frac{EI}{4} \cdot \left( -\frac{u_{2,3}}{4} \right)$$



**Slika 5.22:** Plan pomaka u fazi dopuštenih pomaka za nepoznati translacijski pomak  $u_{2,3}$

Konačni su momenti

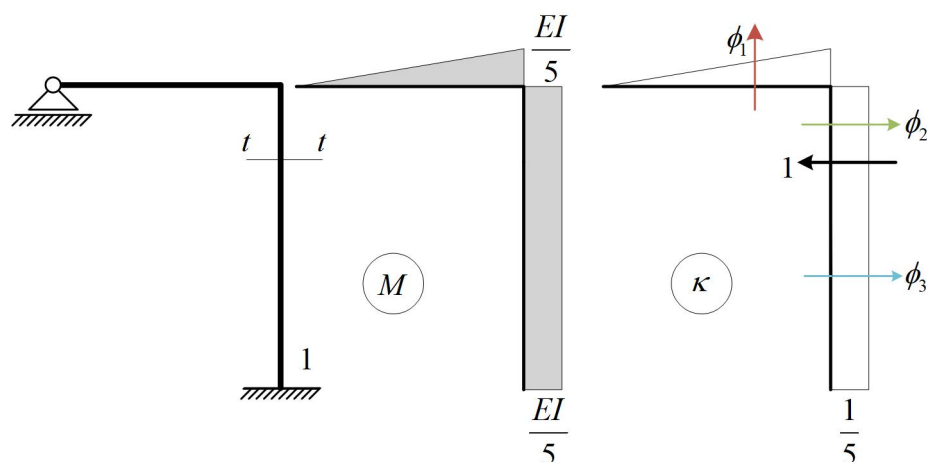
$$\begin{aligned} M_{2,3} &= EI \cdot \varphi_2 \\ M_{1,2} &= \frac{EI}{8} + \frac{EI}{2} \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \frac{EI}{8} \cdot u_{2,3} \\ M_{2,1} &= \frac{5EI}{8} + EI \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \frac{EI}{8} \cdot u_{2,3} \end{aligned}$$

Za izračunavanje nepoznatih pomaka sastavlja se sustav jednadžbi na temelju ravnoteže momenata čvora u kojem je nepoznat kut zaokreta, odnosno na temelju teorema o virtualnim pomacima. Sustav i pripadno rješenje su oblika

$$\begin{aligned} -M_{2,1} - M_{2,3} &= 0 \\ \frac{5EI}{8} + EI \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \frac{EI}{8} \cdot u_{2,3} + EI \cdot \varphi_2 &= 0 \\ M_{1,2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + M_{2,1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \left(\frac{EI}{8} + \frac{EI}{2} \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \frac{EI}{8} \cdot u_{2,3} + \frac{5EI}{8} + EI \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \frac{EI}{8} \cdot u_{2,3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \varphi_2 = -\frac{1}{5}, \quad u_{2,3} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih pomaka u izraze za konačne momente savijanja na krajevima elemenata zadanoga sistema određuje se njihova vrijednost ( $M_{1,2} = \frac{-EI}{5}$ ,  $M_{2,1} = \frac{EI}{5}$ ,  $M_{2,3} = \frac{-EI}{5}$ ), a pripadni je dijagram momenata savijanja prikazan na slici 5.23.

Zadani se statički sistem sastoji od horizontalnoga elementa 2 – 3 i vertikalnoga elementa 1 – 2. Prema tome, progibna linija za bilo koji slučaj opterećenja sastoji se od funkcije koja opisuje progibe horizontalnoga elementa i funkcije progiba vertikalnoga elementa.



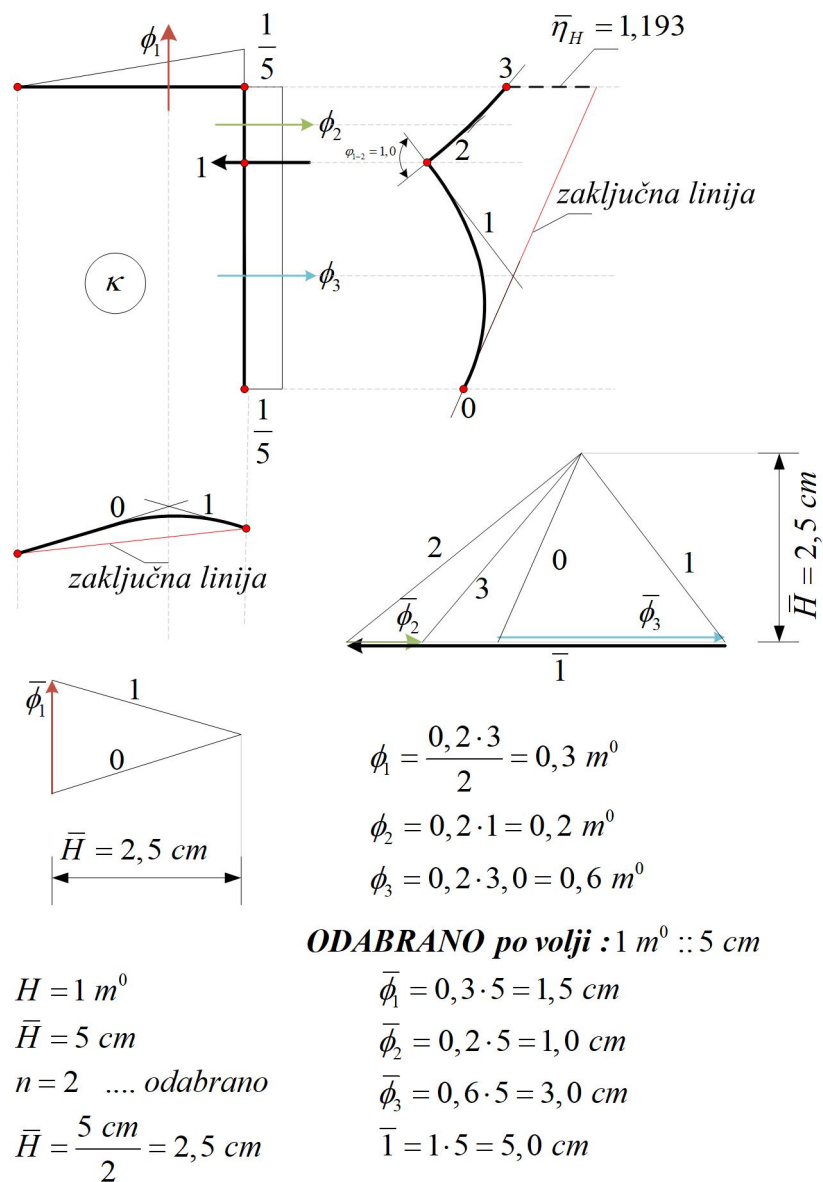
**Slika 5.23:** Dijagram momenata savijanja zadanoga sistema za slučaj djelovanja jediničnog pomaka na mjestu presjeka  $t-t$  te dijagram zakrivljenosti

Prema teoremu Müller–Breslaua utjecajna linija jednaka je progibnoj za već poznati slučaj jediničnoga djelovanja, iz čega slijedi da se utjecajna linija za moment savijanja u presjeku  $t-t$  na zadanom statičkom sistemu sa slike 5.20 sastoji od funkcije između čvorova 2 i 3 i funkcije između čvorova 1 i 2.

Obje se funkcije mogu skicirati primjenom Mohrove analogije u kojoj će rezultanta zamišljenoga opterećenja  $\phi_1$  poslužiti za sliku funkcije na elementu 2 – 3, dok su  $\phi_2$  i  $\phi_3$  rezultante zamišljenoga opterećenja elementa 1 – 2 i upotrebljavaju se za skiciranje dijela utjecajne funkcije od čvora 1 do čvora 2. Napomenut ćemo da se prikazuje postupak skiciranja utjecajne funkcije za moment savijanja u presjeku  $t-t$ , pa stoga tangente utjecajne funkcije na mjestu zadanoga presjeka moraju međusobno zatvarati jedinični kut što se postiže dodavanjem zamišljene jedinične sile na mjestu presjeka  $t-t$ .

Za svaki dio skice utjecajne funkcije definira se po jedna zaključna linija: na elementu 2 – 3 zaključnom se linijom zadovoljava rubni uvjet kliznoga ležaja dok će upeti ležaj elementa 1 – 2 definirati zaključnu liniju skice utjecajne funkcije navedenoga elementa. Elementi 1 – 2 i 2 – 3 dijele zajedničku točku (čvor 2) u kojoj se pod pravim kutom ti elementi sastaju, a vertikalni pomak koje je jednak nuli (zbog zanemarivanja utjecaja uzdužnih sila na pomake točaka konstrukcije).

Na slici 5.24 prikazan je postupak skiciranja utjecajne funkcije za poprečnu silu u presjeku  $t-t$  zadanoga sistema.



Slika 5.24: Postupak skiciranja utjecajne funkcije za moment savijanja u zadanom presjeku  $t-t$

Na mjestu  $i$  u smjeru djelovanja sile  $H$  očitana je vrijednost utjecajne linije  $\bar{\eta}_H = 1,193 \text{ cm}$  te je uz uvažavanje mjerila duljina  $i$  i odabrane prikrate određen iznos momenta savijanja u presjeku  $t-t$  uzrok kojega je sila  $H$ :

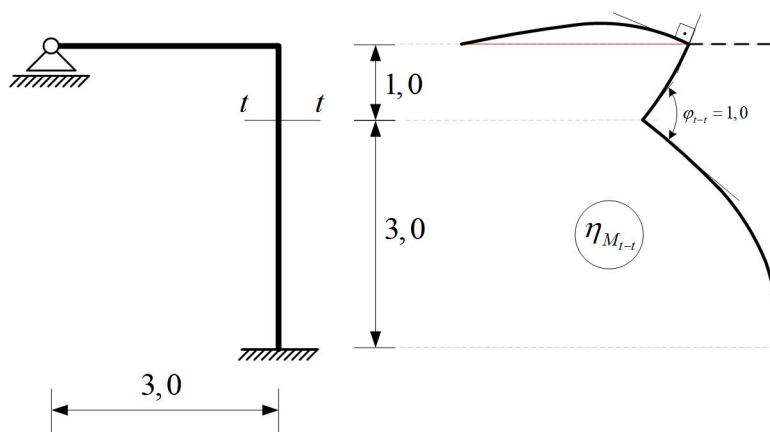
$$\bar{\eta}_H = 0,012341 \text{ m}$$

$$M_{t-t}(H) = \bar{\eta}_H \cdot \frac{m}{n} \cdot H$$

$$M_{t-t}(H) = -0,01193 \cdot \frac{100}{2} \cdot 50$$

$$M_{t-t}(H) = -23,86 \text{ kNm}$$

Nakon izravnavanja zaključnih linija dobivena je skica utjecajne linije za moment savijanja u zadanom presjeku statičkoga sistema (slika 5.25). Lako je primijetiti da su tangente na utjecajne funkcije u čvoru 2 međusobno okomite, točnije da se kut između osi elemenata zadanoga statičkog sistema nije promijenio.



Slika 5.25: Utjecajna linija za moment savijanja u zadanom presjeku  $t-t$

## Poglavlje 6

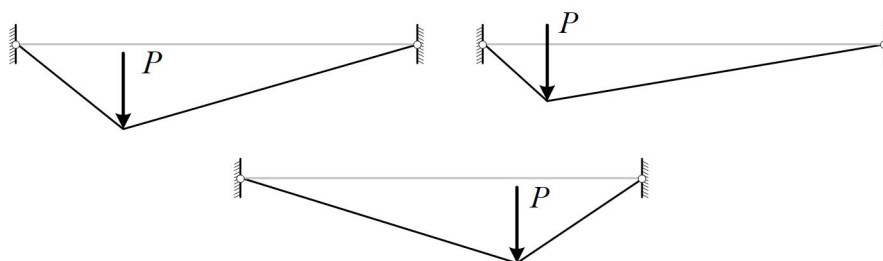
### Metoda gustoća sila



## 6.1 O mrežama prednapetih kabela i metodi gustoća sila

Metode obrađene u knjizi (do sada) primjenjive su na nosive sisteme čiji su pomaci i deformacije uzrokovane općim vanjskim opterećenjem mali. Stoga je oblik statičkoga sistema uvijek bio poznat (promjena oblika koja nastaje vanjskim djelovanjem ne utječe znatno na iznose unutarnjih sila), odnosno uvjeti ravnoteže postavljali su se na nedeformiranim oblicima zadanih sistema.

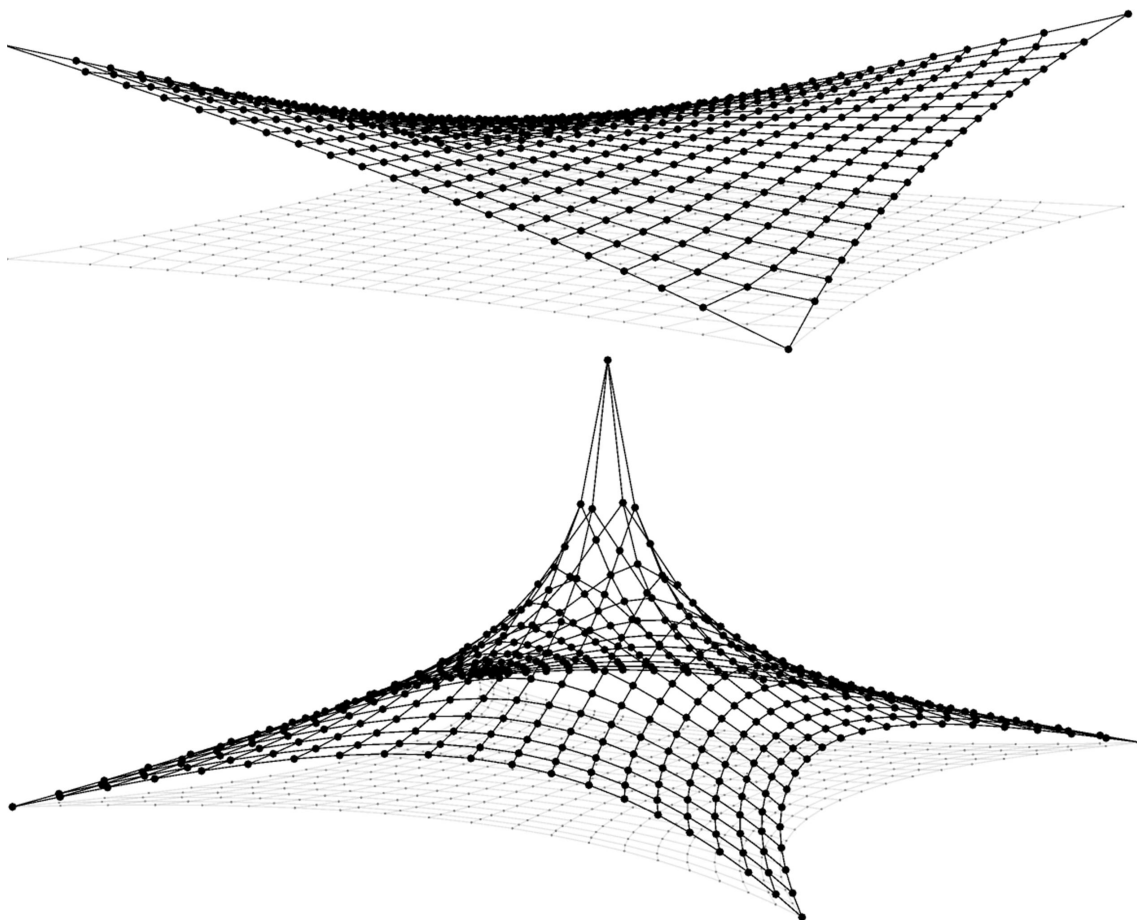
Međutim, postoje nosivi sistemi čiji pomaci od vanjskoga djelovanja znatno utječu na njihov ravnotežni oblik. Na primjer, uže slobodno ovješeno za svoje krajeve promijenit će oblik (ravnotežni položaj) ovisno o položaju (pravcu i smislu djelovanja) vanjske koncentrirane sile [16] (slika 6.1). Prilikom promjene oblika u poprečnom se presjeku užeta javlja (jedino) uravnotežavajuća vlačna sila.



**Slika 6.1:** Ravnotežni oblik užeta ovisan o položaju opterećenja

Naime, zbog zanemarive fleksijske krutosti u poprečnom se presjeku užeta ne može pojaviti moment savijanja (pa stoga niti poprečna sila) kao ni tlačna sila, te uže mora promijeniti oblik da bi se aktiviranjem vlačne sile uravnotežilo vanjsko (poprečno) djelovanje.

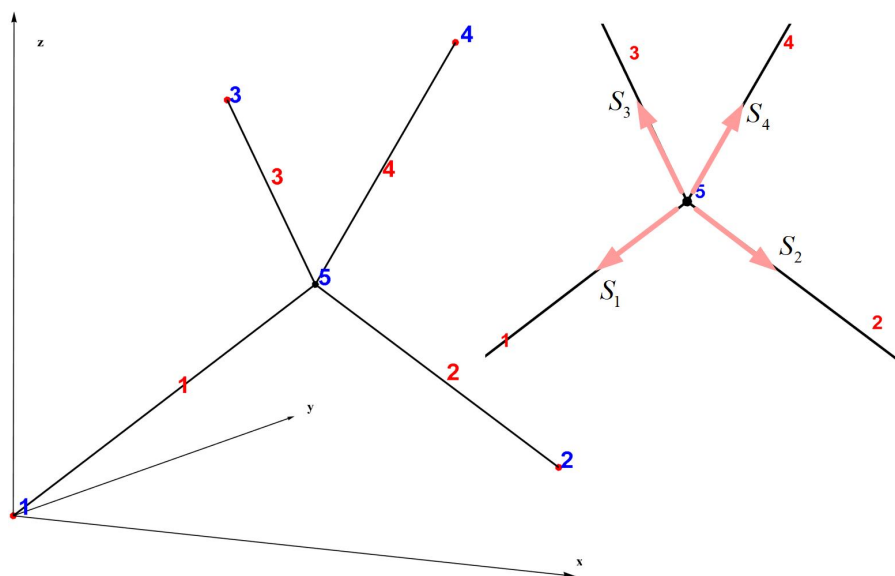
Zbog opisane osjetljivosti užeta na promjenu opterećenja, ona se "pletu" u mrežu koja tvori plohu dvostruke zakrivljenosti (antiklastična ploha) te se napinju znatnim prednaponskim silama (što omogućuje prijenos opterećenja aktiviranjem geometrijske krutosti). Upravo će oblik i prednapon definirati razinu nosivosti antiklastičnih mreža koje se u građevinarstvu nazivaju *mrežama prednapetih kabela* [11], slika 6.2. Ako se pronađe ravnotežni oblik mreže prednapetih kabela za definirane rubne uvjete i razinu prednapona, dobiveni oblik mreže zadržat će se (uz manje promjene) i nakon djelovanja (većine) vanjskih opterećenja ili njihovih kombinacija. Postupak čiji je rezultat ravnotežni oblik mreže prednapetih kabela naziva se *traženjem oblika* [4].



**Slika 6.2:** Primjeri ravnotežnih oblika mreža prednapetih kabela

U postupku traženja oblika pretpostavljaju se potpuno savitljivi kebeli koji se međusobno mimoilaze, no zbog male dimenzije kabela moguće je zamisliti da se kabeli sijeku.

Vlastita se težina kabela zanemaruje (zbog male vrijednosti) kao i vanjsko djelovanje (ali samo u fazi traženja oblika). Naime, nakon određivanja ravnotežnoga oblika mreže prednapetih kabela provodi se statički proračun u kojem se definiraju vanjska djelovanja i njihove kombinacije. Ravnotežni oblik dobiven u fazi traženja oblika neće se pri tome bitno promijeniti (točnije, ako se oblik znatno mijenja pod djelovanjem primjerice opterećenja vjetrom, postupak traženja oblika treba ponoviti te naći novi ravnotežni oblik s povećanim silama prednapona).



**Slika 6.3:** Slobodni čvor 5 izdvojen iz mreže prednapetih kabela (čvorovi od 1 do 4 su ležajni)

Zbog pretpostavke potpune savitljivosti kabel opterećen samo koncentriranim silama poprima oblik ravninske ili prostorne poligonalne linije. Stoga se dijelovi kabela između sjecišta mogu smatrati ravnima.

Izdvajanjem jednoga čvora iz mreže (slika 6.3) u kojem se sijeku četiri kabela (takvi se čvorovi nazivaju slobodnima), postavljaju se tri uvjeta ravnoteže. Iako je riječ o dijelu prostorne konstrukcije postoje samo tri nezavisna uvjeta ravnoteže jer, kao što je već rečeno, u poprečnim se presjecima kabela ne mogu pojaviti momenti savijanja zbog njegove zanemarive fleksijske krutosti. Prema tome, mjesta sjecišta kabela mogu se smatrati zglobovima.

Izdvajanjem slobodnoga čvora 5 sa slike 6.3 iz mreže kabela preostali se dio mreže mora zamijeniti vlačnim silama na pravcima spojnicama krajnjih točaka elemenata (kabela). Stoga će čvor 5 biti u ravnoteži ako je zbroj svih (vlačnih) sila koje djeluju na navedeni čvor jednak nuli, točnije:

$$\begin{aligned}\sum_i F(x) &= 0, \\ \sum_i F(y) &= 0, \\ \sum_i F(z) &= 0.\end{aligned}$$

Četiri se sile ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$ ) rastavljaju na komponente u smjeru koordinatnih osi, pa stoga tri jednadžbe ravnoteže poprimaju sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}\sum_i^m S_{ij} \cdot \cos\alpha_{ij} &= 0, \\ \sum_i^m S_{ij} \cdot \cos\beta_{ij} &= 0, \\ \sum_i^m S_{ij} \cdot \cos\gamma_{ij} &= 0.\end{aligned}$$

U tim se izrazima  $\cos\alpha_{i,j}$ ,  $\cos\beta_{i,j}$  i  $\cos\gamma_{i,j}$  nagibi elemenata  $i, j$  (točnije elemenata od 1 do 4) u odnosu na koordinatne osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Ti se nagibi mogu zapisati kao

$$\begin{aligned}\cos\alpha_{i,j} &= \frac{x_j - x_i}{\ell_{ij}}, \\ \cos\beta_{i,j} &= \frac{y_j - y_i}{\ell_{ij}}, \\ \cos\gamma_{i,j} &= \frac{z_j - z_i}{\ell_{ij}}.\end{aligned}$$

Nadalje, nazivnici izraza za nagibe elemenata u odnosu na osi koordinatnog sustava duljine su elemenata:

$$\ell_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

Uzimajući u obzir izraz za duljinu elementa kao i izraz za nagib elementa u odnosu na osi koordinatnoga sustava, tri jednadžbe ravnoteže slobodnog čvora mreže prednapetih kabela glase [19]:

$$\begin{aligned}\sum_i^m S_{ij} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_i^m S_{ij} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_i^m S_{ij} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0.\end{aligned}$$

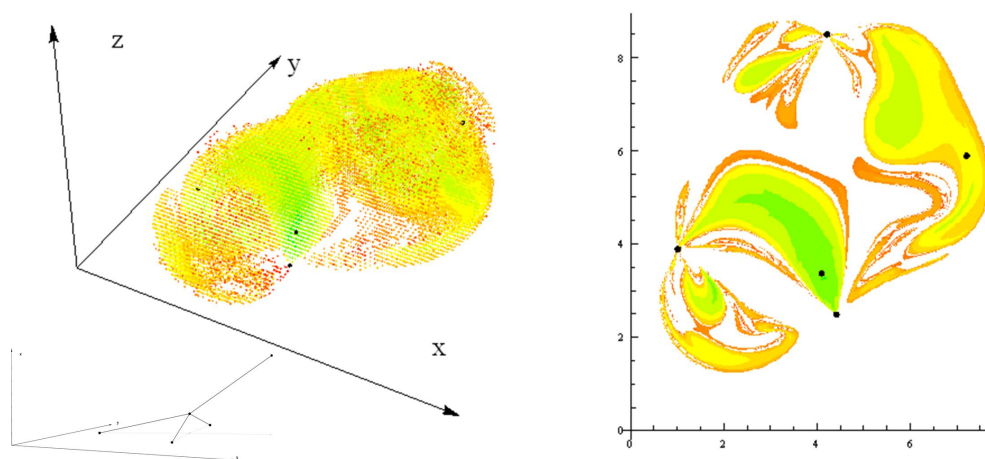
Taj sustav jednadžbi, zapisan za slučaj (jednostavne) mreže od četiri elementa (i jednim slobodnim čvorom, slika 6.3), glasi:

$$\begin{aligned}
 & S_1 \cdot \left( \frac{x_1 - x_5}{\sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2 + (z_1 - z_5)^2}} \right) + S_2 \cdot \left( \frac{x_2 - x_5}{\sqrt{(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 + (z_2 - z_5)^2}} \right) + \\
 & \quad S_3 \cdot \left( \frac{x_3 - x_5}{\sqrt{(x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2 + (z_3 - z_5)^2}} \right) + S_4 \cdot \left( \frac{x_4 - x_5}{\sqrt{(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2 + (z_4 - z_5)^2}} \right) = 0 \\
 & S_1 \cdot \left( \frac{y_1 - y_5}{\sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2 + (z_1 - z_5)^2}} \right) + S_2 \cdot \left( \frac{y_2 - y_5}{\sqrt{(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 + (z_2 - z_5)^2}} \right) + \\
 & \quad S_3 \cdot \left( \frac{y_3 - y_5}{\sqrt{(x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2 + (z_3 - z_5)^2}} \right) + S_4 \cdot \left( \frac{y_4 - y_5}{\sqrt{(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2 + (z_4 - z_5)^2}} \right) = 0 \\
 & S_1 \cdot \left( \frac{z_1 - z_5}{\sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2 + (z_1 - z_5)^2}} \right) + S_2 \cdot \left( \frac{z_2 - z_5}{\sqrt{(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 + (z_2 - z_5)^2}} \right) + \\
 & \quad S_3 \cdot \left( \frac{z_3 - z_5}{\sqrt{(x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2 + (z_3 - z_5)^2}} \right) + S_4 \cdot \left( \frac{z_4 - z_5}{\sqrt{(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2 + (z_4 - z_5)^2}} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Nepoznanice su tog sustava jednadžbi koordinate slobodnoga čvora  $(x_5, y_5, z_5)$ , kao i vlačne sile u elementima  $(S_1, S_2, S_3$  i  $S_4)$ . Dakle, tri su jednadžbe pomoću kojih je potrebno odrediti sedam nepoznanica. Općenito, mreža prednapetih kabela s  $n$  slobodnih čvorova i  $m$  elemenata ima  $3 \cdot n + m$  nepoznanica, a broj je jednadžbi ravnoteže  $3 \cdot n$ . Da bi sustav jednadžbi s većim brojem nepoznanica od broja jednadžbi u sustavu bio rješiv, propisuju se dodatna pravila za eliminaciju suvišnih nepoznanica pri tvorbi sustava jednadžbi [11]; primjerice:

1. unaprijed su zadane uravnotežene projekcije sila u svim elementima na ravninu  $xy$  („kvazilaplaceovo" pravilo),
2. zadan je omjer između iznosa sile i duljine svakoga elementa (pravilo „gustoća sila"),
3. zadani su iznosi sila u svim elementima (poopćeno pravilo „geodetske mreže"),

4. u nekim su elementima zadani iznosi sile, dok je u ostalima definirana linearna ovisnost sile o „deformaciji“ (točnije o duljini kabela) („kombinirano pravilo“),
5. u nekim su elementima zadane sile, a u drugima duljine (ili nedeformirane duljine).



**Slika 6.4:** Područje konvergencije metode *Newton-Raphson* za primjer mreže s jednim slobodnim čvorom i presjek kroz područje s ravninom  $XY = 0$  [20]

Također, sustav je jednadžbi ravnoteže slobodnih čvorova mreže prednapetih kabela (kao što je onaj mreže sa slike 6.3) nelinearan: nepoznate koordinate čvorova pojavljuju se u brojniku i nazivniku faktora uz iznos sile  $S_i$ . Sustavi se nelinearnih jednadžbi najčešće rješavaju numeričkim metodama od kojih je najpoznatija metoda *Newton-Raphson* [5, 20]. Metoda je iteracijska te zahtijeva odabir početnoga rješenja. Za jednadžbe izrazite nelinearnosti odabir dobrog početnog rješenja uvjetuje konvergenciju metode *Newton-Raphson*. Dakle, područje konvergencije metode ograničeno i izrazito nepravilno (slika 6.4), a „pogoditi“ dobro početno rješenje nije nimalo trivijalan zadatak [13].

Stoga će se primijeniti drugo pravilo po kojem treba zadati omjere sile i duljine svakoga elementa ( $\frac{S_{ij}}{\ell_{i,j}}$ ) [28]. Ako se taj omjer označi s  $q_i$ , tada se u svakom slobodnom čvoru zapisuju jednadžbi ravnoteže u obliku

$$\sum_i^m q_{ij} \cdot (x_j - x_i) = 0,$$

$$\sum_i^m q_{ij} \cdot (y_j - y_i) = 0,$$

$$\sum_i^m q_{ij} \cdot (z_j - z_i) = 0.$$

Konkretno, za slučaj mreže s jednim slobodnim čvorom sa slike 6.3 sustav jednadžbi ravnoteže sastoji se od sljedeće tri jednadžbe:

$$q_1 \cdot (x_1 - x_5) + q_2 \cdot (x_2 - x_5) + q_3 \cdot (x_3 - x_5) + q_4 \cdot (x_4 - x_5) = 0$$

$$q_1 \cdot (y_1 - y_5) + q_2 \cdot (y_2 - y_5) + q_3 \cdot (y_3 - y_5) + q_4 \cdot (y_4 - y_5) = 0$$

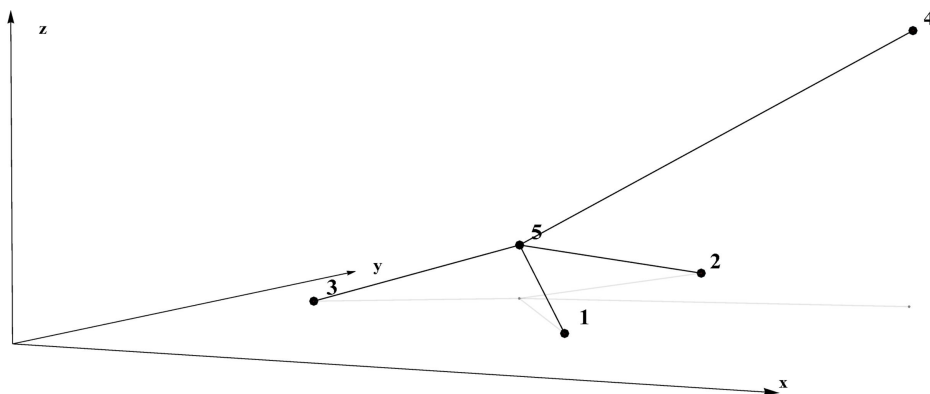
$$q_1 \cdot (z_1 - z_5) + q_2 \cdot (z_2 - z_5) + q_3 \cdot (z_3 - z_5) + q_4 \cdot (z_4 - z_5) = 0$$

Lako je uočiti da je taj sustav linearan i da ima tri nepoznanice (koordinate slobodnoga čvora 5,  $(x_5, y_5, z_5)$ ). Bitno je naglasiti da se vlačne sile u elementima računaju posredno, nakon rješavanja sustava linearnih jednadžbi, te da povećanje gustoća sila svih elemenata mreže za isti faktor neće utjecati na promjenu ravnotežnoga oblika mreže.

Opisano pravilo kojim se rješava problem prekobrojnih nepoznanica u odnosu na broj jednadžbi u sustavu uvođenjem faktora koji se naziva gustoćom sila ( $q_{i,j}$ ) definira *metodu gustoća sila* [28]. Metoda izvorno nije iteracijska, međutim postoji njezina iteracijska primjena [17] (u slučaju zadavanja dodatnih početnih uvjeta u obliku željenih sila i/ili duljina svih ili nekih elemenata mreže).

## 6.2 Metoda gustoća sila

Na slici 6.5 prikazana je mreža prednapetih kabela s četiri ležajna čvora (koordinate kojih su dane u tablici dolje) te jednim slobodnim čvorom (s indeksom 5). Ravnotežni položaj čvora 5 treba odrediti primjenom metode gustoća sila uz zadanu jediničnu vrijednost gustoća sila svih elemenata ( $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 1$ ,  $q_3 = 1$  i  $q_4 = 1$ ).



**Slika 6.5:** Primjer mreže prednapetih kabela sa slobodnim čvorom 5 u općem položaju

Jednadžbe ravnoteže čvora 5 glase (prije i nakon uvrštavanja ulaznih podataka):

$$\begin{aligned} q_1 \cdot (x_1 - x_5) + q_2 \cdot (x_2 - x_5) + q_3 \cdot (x_3 - x_5) + q_4 \cdot (x_4 - x_5) &= 0 \\ q_1 \cdot (y_1 - y_5) + q_2 \cdot (y_2 - y_5) + q_3 \cdot (y_3 - y_5) + q_4 \cdot (y_4 - y_5) &= 0 \\ q_1 \cdot (z_1 - z_5) + q_2 \cdot (z_2 - z_5) + q_3 \cdot (z_3 - z_5) + q_4 \cdot (z_4 - z_5) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (4, 4 - x_5) + 1 \cdot (4, 2 - x_5) + 1 \cdot (1, 0 - x_5) + 1 \cdot (7, 2 - x_5) &= 0 \\ 1 \cdot (2, 5 - y_5) + 1 \cdot (8, 5 - y_5) + 1 \cdot (3, 9 - y_5) + 1 \cdot (5, 9 - y_5) &= 0 \\ 1 \cdot (0 - z_5) + 1 \cdot (0 - z_5) + 1 \cdot (0 - z_5) + 1 \cdot (3 - z_5) &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje sustava glasi:

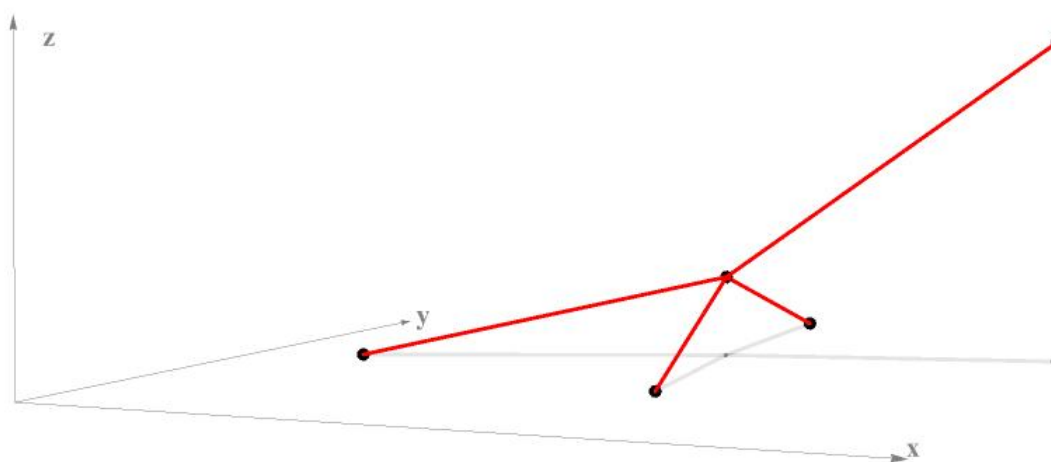
$$\begin{aligned} x_5 &= 4,2 \\ y_5 &= 5,2 \\ z_5 &= 0,75 \end{aligned}$$

Vlačne sile u elementima određuju se na temelju izraza za gustoću sila te iznose:



$$\begin{aligned} S_1 &= 2,81 \\ S_2 &= 3,38 \\ S_3 &= 3,53 \\ S_4 &= 3,81 \end{aligned}$$

Ravnotežni položaj prikazan je na slici 6.6.



**Slika 6.6:** Ravnotežni položaj mreže prednapetih kabela za jediničnu vrijednost gustoća sila

### 6.3 Iteracijska primjena metode gustoća sila

Ravnotežni položaj slobodnoga čvora mreže prednapetih kabela iz primjera 1 odredit će se uz uvjet željenih sila prednapona svih elemenata od 5 kN. Traženje oblika provest će se **iteracijskom primjenom metode gustoća sila** u kojoj se iznosi gustoća sila u koraku  $k$  iteracije određuju na temelju željene sile u elementu i duljine elementa iz prethodnoga koraka.:

$$q_{ij}^k = \frac{\bar{S}_{ij}}{\ell_{ij}^{k-1}}$$

Nakon rješavanja jednadžbi ravnoteže provjeravaju se trenutačni iznosi prednaponskih sila, a proračun završava kada je njihov iznos jednak željenom iznosu uz odabranu toleranciju odstupanja.

U prvom koraku neka je  $q_{ij}^1 = 1$  za sve elemente mreže prednapetih kabela, te je rješenje jednadžbi ravnoteže jednako rješenju iz primjera 1:

$$\begin{aligned}x_5^1 &= 4,2 \\y_5^1 &= 5,2 \\z_5^1 &= 0,75\end{aligned}$$

dok su sile u elementima mreže

$$\begin{aligned}S_1^1 &= 2,81 \\S_2^1 &= 3,38 \\S_3^1 &= 3,53 \\S_4^1 &= 3,81\end{aligned}$$

Gustoće sila elemenata u drugom su koraku iteracije

$$\begin{aligned}q_1^2 &= \frac{5,0}{2,81} = 1,78 \\q_2^2 &= \frac{5,0}{3,38} = 1,48 \\q_3^2 &= \frac{5,0}{3,53} = 1,42 \\q_4^2 &= \frac{5,0}{3,81} = 1,31\end{aligned}$$

(nazivnici tih izraza određuju se na temelju izraza  $\ell_{ij}^1 = \frac{S_{ij}^1}{q_{ij}^1}$ ). Jednadžbe ravnoteže sljedećega su oblika:

$$\begin{aligned}1,78 \cdot (4,4 - x_5^2) + 1,48 \cdot (4,2 - x_5^2) + 1,42 \cdot (1,0 - x_5^2) + 1,31 \cdot (7,2 - x_5^2) &= 0 \\1,78 \cdot (2,5 - y_5^2) + 1,48 \cdot (8,5 - y_5^2) + 1,42 \cdot (3,9 - y_5^2) + 1,31 \cdot (5,9 - y_5^2) &= 0 \\1,78 \cdot (0 - z_5^2) + 1,48 \cdot (0 - z_5^2) + 1,42 \cdot (0 - z_5^2) + 1,31 \cdot (3 - z_5^2) &= 0\end{aligned}$$

uz napomenu da eksponent nepoznanica u tom sustavu jednadžbi označava trenutajući korak iteracije. Rješenje sustava, pripadne sile i duljine elemenata mreže jesu

$$\begin{array}{lll}
 x_5^2 = 4,16 & S_1^2 = 4,71 & \ell_1^2 = 2,65 \\
 y_5^2 = 5,06 & S_2^2 = 5,18 & \ell_2^2 = 3,50 \\
 z_5^2 = 0,65 & S_3^2 = 4,85 & \ell_3^2 = 3,42 \\
 & S_4^2 = 5,15 & \ell_4^2 = 3,93
 \end{array}$$

Postupak se mora nastaviti jer sile prednapona u drugom koraku nisu postigle željeni iznos. Ponovno se određuje gustoća sila elemenata za novi, treći korak iteracije:

$$\begin{array}{l}
 q_1^3 = \frac{5,0}{2,65} = 1,89 \\
 q_2^3 = \frac{5,0}{3,50} = 1,43 \\
 q_3^3 = \frac{5,0}{3,42} = 1,46 \\
 q_4^3 = \frac{5,0}{3,93} = 1,27
 \end{array}$$

dok su pripadni sustav jednadžbi i rješenje:

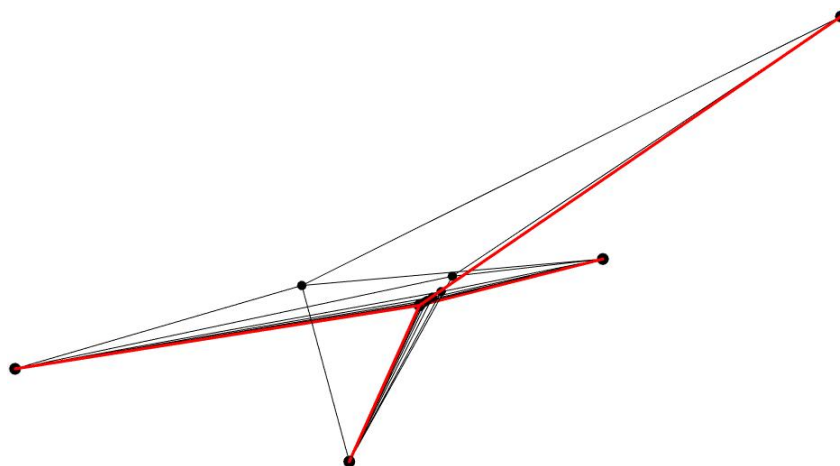
$$\begin{array}{l}
 1,89 \cdot (4,4 - x_5^3) + 1,43 \cdot (4,2 - x_5^3) + 1,46 \cdot (1,0 - x_5^3) + 1,27 \cdot (7,2 - x_5^3) = 0 \\
 1,89 \cdot (2,5 - y_5^3) + 1,43 \cdot (8,5 - y_5^3) + 1,46 \cdot (3,9 - y_5^3) + 1,27 \cdot (5,9 - y_5^3) = 0 \\
 1,89 \cdot (0 - z_5^3) + 1,43 \cdot (0 - z_5^3) + 1,46 \cdot (0 - z_5^3) + 1,27 \cdot (3 - z_5^3) = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 x_5^3 = 4,12 & S_1^3 = 4,84 & \ell_1^3 = 2,56 \\
 y_5^3 = 4,97 & S_2^3 = 5,12 & \ell_2^3 = 3,59 \\
 z_5^3 = 0,63 & S_3^3 = 4,90 & \ell_3^3 = 3,36 \\
 & S_4^3 = 5,08 & \ell_4^3 = 3,99
 \end{array}$$

Postupak se prekida kad je razlika željenih sila prednapona i sila u trenutačnom koraku iteracije jednaka  $10^{-4}$  (ili manja), a u konkretnom je primjeru iteracija prekinuta nakon 19 koraka. Koordinate slobodnoga čvora 5, sile prednapona i duljine elemenata u 19. su koraku

$$\begin{array}{lll}
 x_5^{19} = 4,06 & S_1^{19} = 4,9999 & \ell_1^{19} = 2,43 \\
 y_5^{19} = 4,84 & S_2^{19} = 5,0000 & \ell_2^{19} = 3,72 \\
 z_5^{19} = 0,60 & S_3^{19} = 4,9999 & \ell_3^{19} = 3,26 \\
 & S_4^{19} = 5,0000 & \ell_4^{19} = 4,09
 \end{array}$$

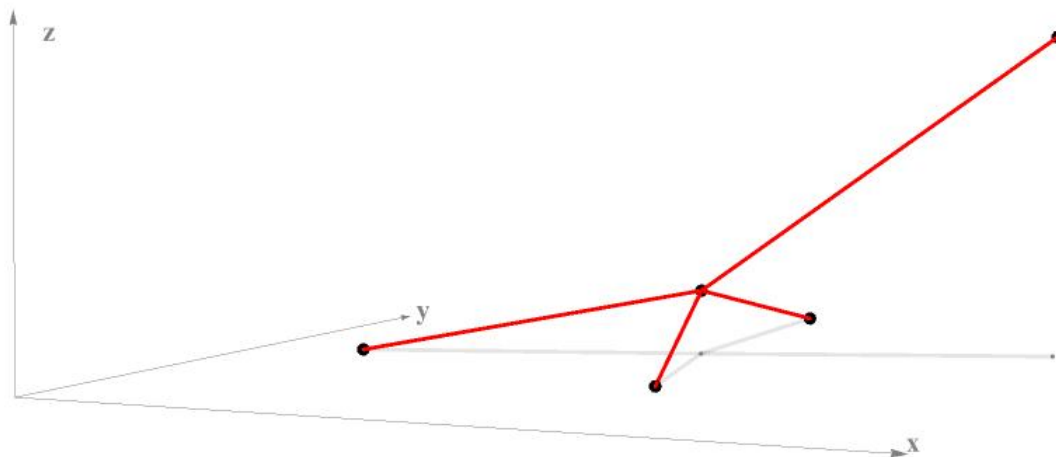
Na slici 6.7 prikazani su svi položaji koje zauzmu elementi prednapete mreže kabela od prvoga do devetnaestoga koraka iteracije, a položaj u kojem sile imaju željenu vrijednost istaknut je crvenom bojom.



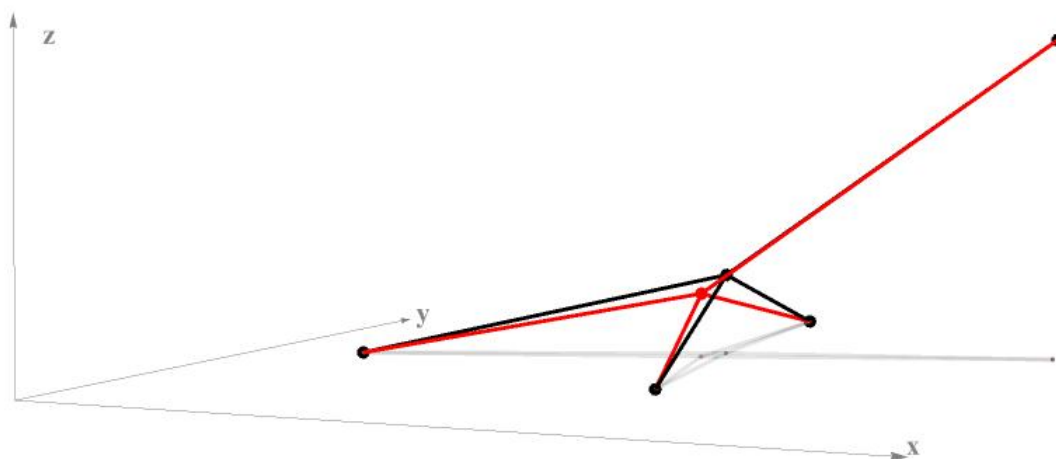
**Slika 6.7:** Ravnotežni položaji mreže prednapetih kabela po koracima iteracijske primjene metode gustoća sila

Primijetimo da se u svakom koraku iteracije mreža prednapetih kabela nalazi u ravnotežnom položaju te da se iteracija prekida u položaju ravnoteže koji zadovoljava početne uvijete. Osim iteracijske primjene metode gustoća sila uz uvjet željenih sila, metoda se može iteracijski primijeniti uz početno kinematičko ograničenje u obliku željenih duljina svih ili pojedinih elemenata. Tada se u svakoj iteraciji određuje iznos gustoća sila kao

$$q_{ij}^k = \frac{S_{ij}^{k-1}}{\ell_{ij}}.$$



**Slika 6.8:** Ravnotežni položaj mreže prednapetih kabela za željenu vrijednost sila prednapona



**Slika 6.9:** Ravnotežni položaj mreže prednapetih kabela iz poglavlja 6.2 (crni čvorovi i elementi) i položaj uz željenu vrijednost sila prednapona iz poglavlja 6.3 (crveni čvorovi i elementi)

# Literatura

- [1] V. Akmadžić, B. Trogrlić, K. Prusac: *Građevna statika II - Metoda sila kroz primjere*, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 2016.
- [2] V. Andrejev: *Mehanika. I dio. Statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
- [3] M. Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [4] J. H. Argyris, T. Angelopoulos, B. Bichat: *A general method for the shape finding of lightweight tension structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3 (1974), pp. 135–149.
- [5] N. Bičanić, K. H. Johnson: *Who was 'Raphson'?*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 14 (1979), pp. 148-152.
- [6] H. Cross: *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments*, Transactions of the American Society of Civil Engineers 96 (1932), pp. 1–10.
- [7] K. Čališev: *O dopunitbenim naprezanjima rešetkastih nosača*, Tehnički list Udruženja Jugoslavenskih inženjera i arhitekta, 4 (1922.) 1/2, str. 1-6.
- [8] K. Čališev: *Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija*, Tehnički list 5 (1923) 17, 18/19, 20, 21, str. 125–127, 141–143, 151–154, 157–158.
- [9] K. Čališev: *Primijenjena statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1951.
- [10] J. Dvornik: *Teorijska istraživanja u Zavodu za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu*, u *Spomenica u povodu 75. obljetnice Zavoda za tehničku mehaniku 1920–1995.*, urednik V. Šimić, Građevinski fakultet i Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1995., str. 82–104.
- [11] J. Dvornik, D. Lazarević: *Viseće konstrukcije od platna i užadi*, Građevni godišnjak '97, HDGI, Zagreb, 1997., str. 239–297.
- [12] J. Dvornik: *Matematički model*, natuknica u *Leksikonu građevinarstva*, urednik V. Simović, Masmedia, Zagreb, 2002.

- [13] J. Dvornik, D. Lazarević: *Fractals and formfinding—magic with real numbers*, Engineering Modelling **16** (2003) 1–2, pp. 1–11.
- [14] J. Dvornik, D. Lazarević, N. Bičanić: *O načelima i postupcima proračuna građevinskih konstrukcija*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2020.
- [15] K. Fresl: *Gradevna statika 1. Predavanja*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017., <http://master.grad.hr/nastava/gS/gS1/gS1.pdf>.
- [16] K. Fresl: *Gradevna statika 2. Predavanja*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2017., <http://master.grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf>.
- [17] K. Fresl, P. Gidak, R. Vrančić: *Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi*, Građevinar **65** (2013) 8, str. 707–720.
- [18] K. Fresl, P. Gidak, S. Hak: *Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka*, Građevinar, **62** (2010) 10, str. 959–970.
- [19] P. Gidak, K. Fresl: *Programming the force density method*, IASS-APCS 2012. From spatial structures to space structures, Seoul, South Korea, 2012, p. 197 (abstract, full paper on CD).
- [20] P. Gidak: *Ocjena stabilnosti postupaka za proračun oblika prednapetih mreža*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Zagreb, 2014.
- [21] J. Heyman: *Elements of the Theory of Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [22] J. Heyman: *Structural Analysis. A Historical Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [23] R. Kušević: *Ruder Bošković u povijesti građevinskog inženjerstva*, Građevinar **13** (1961) 10, str. 301–308; pretpisak: Građevinar **51** (1999) 1, str. 43–52.
- [24] D. Lazarević, J. Dvornik i K. Fresl: *Analiza oštećenja atrija Kneževa dvora u Dubrovniku*, Građevinar, **56** (2004) 10, str. 601–612.
- [25] Z. Maglajlić: *Metoda relaksacije: linearni i nelinearni problemi: konstrukcije u ravnini*, Štamparija "Fojnica", 2011.
- [26] I. P. Prokofjev: *Teorija konstrukcija I*, Građevinska knjiga, Beograd, 1959.
- [27] I. P. Prokofjev: *Teorija konstrukcija II*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
- [28] H.–J. Schek: *The force density method for form finding and computation of computation of general networks*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **3** (1974), pp. 115–134.
- [29] M. Sekulović: *Teorija linijskih nosača*, Građevinska knjiga, Beograd, 2005.

- [30] B. Shihua, G. Yaoqing: *Structural Mechanics*, Wuhan University of Technology Press, 2005.
- [31] V. Simović: *Građevna statika I*, Građevinski institut, 1988.
- [32] V. Simović: *Proračun horizontalno pomičnih okvira*, Građevinar **18** (1966) 1, str. 1–14.
- [33] V. Simović: *Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [34] S. P. Timoshenko: *History of Strength of Materials, with a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1953.; prijevod: *Istorija otpornosti materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
- [35] S. P. Timoshenko: *Strength of Materials. Elementary Theory and Problems*, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1958.; prijevod: *Otpornost materijala I*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- [36] H. Werner: *Mehanika I - Statika*, Hrvatski savez građevinskih inženjera, Zagreb, 2007.
- [37] H. Werner: *Uvod u proračun konstrukcija*, skripta, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1985.
- [38] O. Werner i S. Sablić: *Teorija konstrukcija. I. dio*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1963.