

Gravevna statika 1.

**Virtualne sile
i metoda jedinične sile**

rad virtualne sile na stvarnom pomaku:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W} &= \delta\vec{F} \cdot \vec{u} = \delta F_x u_x + \delta F_y u_y + \delta F_z u_z \\ &= \delta F^{\parallel} u = \delta F u^{\parallel}\end{aligned}$$

Na prošlom smo predavanju uveli pojam virtualnoga rada kao rada stvarnih sila na zamišljenim — virtualnim — pomacima.

No, zamišljene mogu biti sile, a pomaci stvarni, izazvani stvarnim silama, neovisnima o našim zamišljenim silama; stvarni pomaci mogu biti izazvani i temperaturnim promjenama, slijeganjima ležajeva *ét*d.

Zamišljene ćemo sile zvati *virtualnim silama*, a njihov rad na stvarnim pomacima, kao i rad stvarnih sila na virtualnim pomacima, *virtualnim radom*.

moguće stanje ravnoteže sistema

stvarno ravnotežno stanje sistema

Na prošlom smo predavanju uveli i pojam mogućega stanja pomakā sistema. Analogno, *moguće stanje ravnoteže sistema* skup je reakcija i unutarnjih sila koje su u ravnoteži sa zadanim vanjskim aktivnim silama. Polje pomakā izračunano iz unutarnjih sila i reakcija nekoga mogućeg stanja ravnoteže ne mora i najčešće neće zadovoljiti uvjete neprekinutosti i geometrijske rubne uvjete. No, jedno je od mogućih stanja ravnoteže stvarno ravnotežno stanje sistema koje ujedno zadovoljava te uvjete.

teorem o virtualnim pomacima (i stvarnim silama):

ravnoteža \iff jednakost radova

teorem o virtualnim silama (i stvarnim pomacima):

zadovoljenje kinematičkih uvjeta \iff jednakost radova

Teorem o virtualnim pomacima, koji smo na prošlom predavanju dokazali, izriče za *stvarne vanjske i unutarnje sile* istovrijednost njihova zadovoljavanja uvjeta ravnoteže i jednakosti njihovih radova na virtualnim pomacima i njihovim diferencijalima.

Teorem o virtualnim silama, koji ćemo iskazati (ali ne i dokazati) na ovom predavanju, izriče za *stvarne pomake i njihove diferencijale* istovrijednost njihova zadovoljavanja kinematičkih uvjeta i jednakosti radova virtualnih vanjskih i unutarnjih sila na njima.

kinematički uvjeti za Bernoulli–Eulerovu gredu:

- odnos pomakā i deformacija/deformacijskih veličina:

$$\varepsilon(x) = u'(x) \qquad \varepsilon(x) - u'(x) = 0$$

$$\kappa(x) = -w''(x) \qquad \kappa(x) + w''(x) = 0$$

- geometrijski/kinematički rubni uvjeti:

$$u(0) = \bar{u}_0, \quad u(\ell) = \bar{u}_\ell \qquad (\text{barem jedan})$$

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = \bar{w}_0, \quad w(\ell) = \bar{w}_\ell \\ w'(0) = -\bar{\varphi}_0, \quad w'(\ell) = -\bar{\varphi}_\ell \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{barem dva,} \\ \text{i to barem jedan za } w) \end{array}$$

Kinematički uvjeti svrstavaju se u dvije skupine: diferencijalne odnose pomakā i deformacija ili deformacijskih veličina, koji vrijede „unutar” nosača, te geometrijske rubne uvjete (nazvane i kinematičkim rubnim uvjetima), koje propisuju ležajevi.

dualnost:

sila \iff pomak

unutarnja sila \iff prirast/diferencijal polja pomakā

naprezanje \iff deformacija


ravnoteža \iff zadovoljenje kinematičkih uvjeta

(komplementarni) rad \iff rad

Između statičkih (na lijevoj) i kinematičkih veličina (na desnoj strani) postoji stanovita, iako ne baš potpuna dualnost: u nekim tvrdnjama i opisima postupaka mogu se statičke veličine zamijeniti kinematičkima, a kinematičke statičkima, pa dobiti istinite tvrdnje i opise ispravnih postupaka.

teorem o virtualnim silama:


Ako polja pomakā i polja deformacija $i(l_i)$ deformacijskih veličina sistema zadovoljavaju sve kinematičke uvjete onda je rad po volji odabranih vanjskih virtualnih sila na tim stvarnim poljima pomakā jednak radu uravnotežujućih unutarnjih virtualnih sila na njihovim infinitezimalnim prirastima (ili: na diferencijalima).

Dakle, teorem glasi . . . 

teorem o virtualnim silama:

Ako polja pomakā i polja deformacija $i(li)$ deformacijskih veličina sistema zadovoljavaju sve kinematičke uvjete onda je rad po volji odabranih vanjskih virtualnih sila na tim stvarnim poljima pomakā jednak radu uravnotežujućih unutarnjih virtualnih sila na njihovim infinitezimalnim prirastima (ili: na diferencijalima).

I obratno: ako je rad po volji odabranih vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomakā sistema jednak radu uravnotežujućih unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima (ili: na diferencijalima) tih polja, onda ta polja pomakā i polja deformacija $i(li)$ deformacijskih veličina zadovoljavaju sve kinematičke uvjete.

... a njegov je obrat... 

jednakost radova virtualnih sila na stvarnim pomacima
i deformacijama i(li) deformacijskih veličina:

$$\begin{aligned} & \delta N_0 u_0 + \delta N_\ell u_\ell + \delta T_0 w_0 \\ & + \delta T_\ell w_\ell + \delta M_0 \varphi_0 + \delta M_\ell \varphi_\ell \\ & + \sum_i \delta F_i u^\parallel(x_i) + \sum_j \delta M_j \varphi(x_j) \\ & + \int_0^\ell [\delta p(x) u(x) + \delta q(x) w(x)] dx \\ & = \int_0^\ell [\delta N(x) \varepsilon(x) + \delta M(x) \kappa(x)] dx \end{aligned}$$

Ograničit ćemo se na Bernoulli–Eulerovu gredu: u zadnjem retku, koji sadrži radove unutarnjih sila, nema rada poprečnih sila (jer u Bernoulli–Eulerovoj teorije one ne rade), a rad momenata savijanja izražen je pomoću zakrivljenosti κ .

jednakost radova virtualnih sila na stvarnim pomacima
i deformacijama i(li) deformacijskih veličina:

$$\begin{aligned}
 & \delta N_0 u_0 + \delta N_\ell u_\ell + \delta T_0 w_0 \\
 & + \delta T_\ell w_\ell + \delta M_0 \varphi_0 + \delta M_\ell \varphi_\ell \\
 & + \sum_i \delta F_i u^\parallel(x_i) + \sum_j \delta M_j \varphi(x_j) \\
 & + \int_0^\ell [\delta p(x) u(x) + \delta q(x) w(x)] dx \\
 & = \int_0^\ell [\delta N(x) \varepsilon(x) + \delta M(x) \kappa(x)] dx
 \end{aligned}$$

Pribojnici u trećem retku radovi su virtualnih koncentriranih sila i momenata koji su zadani u točkama $x_{\{i,j\}} \in \langle 0, \ell \rangle$ unutar raspona grede. (Koncentrirana djelovanja zapliću izvode i dokaze, pa smo ih izbacili iz dokaza teorema o virtualnim pomacima na prošlom predavanju. Morat ćete nam vjerovati da priča vrijedi i za njih.)

Budući da se pravac djelovanja sile $\vec{\delta F}_i$ ne mora poklapati s pravcem pomaka $\vec{u}(x_i)$ njezina hvatišta te da je pravac djelovanja sile poznat (zadajemo ga zadajući silu), a pravac pomaka često nije, rad izračunavamo kao umnožak vrijednosti sile i duljine ortogonalne projekcije pomaka na pravac djelovanja sile: $\vec{\delta F}_i \cdot \vec{u}(x_i) = \delta F_i u^\parallel(x_i)$.

jednakost radova virtualnih sila na stvarnim pomacima i deformacijama i(li) deformacijskih veličina:

$$\begin{aligned} & \delta N_0 u_0 + \delta N_\ell u_\ell + \delta T_0 w_0 \\ & + \delta T_\ell w_\ell + \delta M_0 \varphi_0 + \delta M_\ell \varphi_\ell \\ & + \sum_i \delta F_i u^\parallel(x_i) + \sum_j \delta M_j \varphi(x_j) \\ & + \int_0^\ell [\delta p(x) u(x) + \delta q(x) w(x)] dx \\ & = \int_0^\ell [\delta N(x) \varepsilon(x) + \delta M(x) \kappa(x)] dx \end{aligned}$$

Pribrojnici u prva dva retka radovi su virtualnih sila na krajevima štapa.

Neki od pomakā i zaokretā krajeva pomaci su po pravcima ležajnih spojeva i zaokreti oko njihovih osi, pa su ili spriječeni ili zadani kao prisilni pomaci i zaokreti ležajeva — to su geometrijski rubni uvjeti. Virtualne sile na tim pravcima i momenti oko tih osi uravnotežujuće su virtualne reakcije.

Na pravcima slobodnih pomaka krajeva i oko osi slobodnih zaokreta mogu se zadati virtualne koncentrirane sile i momenti. Da izbjegnemo njihovo posebno navođenje uzet ćemo da pribrojnici u trećem retku obuhvaćaju i njih, pa su $x_{\{i,j\}} \in [0, \ell]$. U prva dva retka ostaju samo pribrojnici koji sadrže virtualne reakcije. Da istaknemo da te reakcije rade na zadanim prisilnim pomacima ležajeva, prisilne ćemo pomake označavati s potezom iznad... (sljedeća stranica)

jednakost radova virtualnih sila na stvarnim pomacima
i deformacijama i(li) deformacijskih veličina:


$$\begin{aligned} & \delta N_0 \bar{u}_0 + \delta N_\ell \bar{u}_\ell + \delta T_0 \bar{w}_0 \\ & + \delta T_\ell \bar{w}_\ell + \delta M_0 \bar{\varphi}_0 + \delta M_\ell \bar{\varphi}_\ell \\ & + \sum_i \delta F_i u^\parallel(x_i) + \sum_j \delta M_j \varphi(x_j) \\ & + \int_0^\ell [\delta p(x) u(x) + \delta q(x) w(x)] dx \\ & = \int_0^\ell [\delta N(x) \varepsilon(x) + \delta M(x) \kappa(x)] dx \end{aligned}$$

U ovakvom zapisu pribrojnici u prva dva retka mogu postojati samo za ležajne spojeve. Primjerice, za jednostavno oslonjenu gredu kojoj je lijevi ležaj nepomičan mogu postojati $\delta N_0 \bar{u}_0$, $\delta T_0 \bar{w}_0$ i $\delta T_\ell \bar{w}_\ell$, a za konzolu kojoj je desni kraj upet $\delta N_\ell \bar{u}_\ell$, $\delta T_\ell \bar{w}_\ell$ i $\delta M_\ell \bar{\varphi}_\ell$. Najčešće će, međutim, pomaci ležajeva biti spriječeni, tako da će ti pribrojnici iščeznuti.

metoda jedinične sile:

$$\delta F_1 = 1 \quad \left[\delta p = 0, \quad \delta q = 0, \quad \delta M_j = 0 \right]$$

$$\begin{aligned} n_{1,0} \bar{u}_0 + n_{1,\ell} \bar{u}_\ell + t_{1,0} \bar{w}_0 \\ + t_{1,\ell} \bar{w}_\ell + m_{1,0} \bar{\varphi}_0 + m_{1,\ell} \bar{\varphi}_\ell \\ + 1 \cdot d_1^{\parallel} \\ = \int_0^\ell [n_1(x) \varepsilon(x) + m_1(x) \kappa(x)] dx \end{aligned}$$

Djeluje li samo jedna virtualna sila $\vec{\delta F}_1$ jediničnoga intenziteta, $\delta F_1 = 1, \dots$ 


Ortogonalnu projekciju pomaka na pravac djelovanja sile nazvali smo na prošlom predavanju *pomakom po pravcu djelovanja sile*. d_1^{\parallel} je, prema tome, orijentirana duljina pomaka hvatišta virtualne jedinične sile $\vec{\delta F}_1 = 1$ po pravcu njezina djelovanja.

Funkcije $m_1 = \delta M$ i $n_1 = \delta N$ izražavaju vrijednosti virtualnih momenata savijanja i virtualnih uzdužnih sila koje uravnotežuju silu $\vec{\delta F}_1 = 1$, dok su vrijednosti sila i momenata u prvih šest pribrojnika s lijeve strane vrijednosti uravnotežujućih virtualnih reakcija, ako postoje.

metoda jedinične sile:

$$\delta M_1 = 1 \quad \left[\delta p = 0, \quad \delta q = 0, \quad \delta F_i = 0 \right]$$

$$\begin{aligned} n_{1,0} \bar{u}_0 + n_{1,\ell} \bar{u}_\ell + t_{1,0} \bar{w}_0 \\ + t_{1,\ell} \bar{w}_\ell + m_{1,0} \bar{\varphi}_0 + m_{1,\ell} \bar{\varphi}_\ell \\ + 1 \cdot \varphi_1 \\ = \int_0^\ell [n_1(x) \varepsilon(x) + m_1(x) \kappa(x)] dx \end{aligned}$$

Djeluje li samo jedan virtualni moment $\delta \vec{M}_1$ jediničnoga intenziteta, $\delta M_1 = 1, \dots$ 

φ_1 je kut zaokreta osi nosača u točki u kojoj djeluje jedinični virtualni moment $\delta \vec{M}_1 = 1$.

Funkcije m_1 i n_1 sada izražavaju vrijednosti virtualnih momenata savijanja i virtualnih uzdužnih sila koje uravnotežuju moment $\delta \vec{M}_1 = 1$, a vrijednosti su sila i momenata u preostalim članovima ponovno vrijednosti uravnotežujućih virtualnih reakcija (ako postoje).

metoda jedinične sile:

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{E A(x)} \quad \kappa(x) = \frac{M(x)}{E I(x)}$$

Uzdužnu deformaciju ε i zakrivljenost κ izražavamo kao funkcije N vrijednosti uzdužnih sila i vrijednosti M momenata savijanja izazvanih stvarnim opterećenjem, ...

metoda jedinične sile:

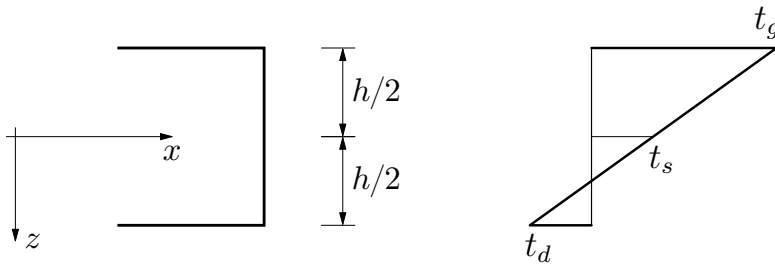
utjecaj temperature:

$$\varepsilon_t(x) = \alpha_t t_s$$

$$\kappa_t(x) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$t_s = \frac{t_d + t_g}{2}$$

$$\Delta t = t_d - t_g$$



... a u obzir treba uzeti i utjecaj temperaturnih promjena.

(Izrazi su, kao što slika pokazuje, izvedeni za linearnu raspodjelu temperature po visini poprečnoga presjeka, a trebali bi biti poznati iz *Otpornosti materijala*.)

metoda jedinične sile:

$$\begin{aligned} 1 \cdot d_1^{\parallel} = & \int_0^{\ell} n_1(x) \left[\frac{N(x)}{E A(x)} + \alpha t_s \right] dx \\ & + \int_0^{\ell} m_1(x) \left[\frac{M(x)}{E I(x)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \right] dx \\ & - n_{1,0} \bar{u}_0 - n_{1,\ell} \bar{u}_\ell - t_{1,0} \bar{w}_0 \\ & - t_{1,\ell} \bar{w}_\ell - m_{1,0} \bar{\varphi}_0 - m_{1,\ell} \bar{\varphi}_\ell \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u izraz za jednakost radova pri djelovanju jedinične virtualne sile dobivamo izraz za orijentiranu duljinu pomaka odabrane točke nosača po odabranom pravcu.

Vrijednosti se svih pribrojnika s desne strane znaka jednakosti mogu izračunati (prisilni su pomaci i zaokreti ležajeva zadani).

metoda jedinične sile:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \varphi_1 = & \int_0^\ell n_1(x) \left[\frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\ & + \int_0^\ell m_1(x) \left[\frac{M(x)}{EI(x)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \right] dx \\ & - n_{1,0} \bar{u}_0 - n_{1,\ell} \bar{u}_\ell - t_{1,0} \bar{w}_0 \\ & - t_{1,\ell} \bar{w}_\ell - m_{1,0} \bar{\varphi}_0 - m_{1,\ell} \bar{\varphi}_\ell \end{aligned}$$

Uvrštavanjem pak u izraz za jednakost radova pri djelovanju jediničnoga virtualnog momenta dobivamo izraz za kut zaokreta osi grede u odabranoj točki.

(Podizraz s desne strane znaka jednakosti jednak je podizrazu s desne strane znaka jednakosti izraza na prethodnoj stranici.)

metoda jedinične sile:

$$d_i^{\parallel} = \int_0^{\ell} \left[\frac{m_i(x) M(x)}{E I(x)} + \frac{n_i(x) N(x)}{E A(x)} \right] dx$$

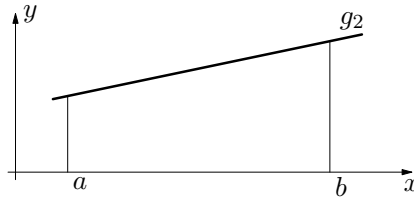
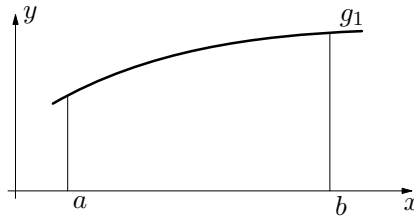
$$\varphi_i = \int_0^{\ell} \left[\frac{m_i(x) M(x)}{E I(x)} + \frac{n_i(x) N(x)}{E A(x)} \right] dx$$

Pomaci ležajeva najčešće su spriječeni, a nema ni promjena temperature,
pa su $d_i^{\parallel} = \dots$ i $\varphi_i = \dots$



Vereščaginov teorem:

$$\mathcal{J}_{1,2} = \int_a^b g_2(x) g_1(x) dx$$



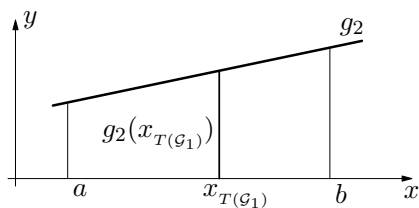
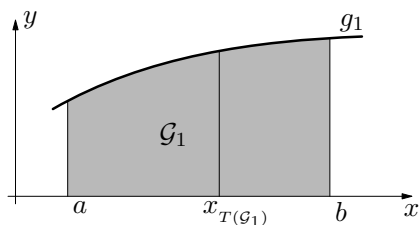
Podintegralne funkcije u $\int_0^\ell m_i(x) \frac{M(x)}{EI(x)} dx$ i $\int_0^\ell n_i(x) \frac{N(x)}{EA(x)} dx$ umnoži su dviju funkcija,

pri čemu su funkcije m i n linearne. U općem je obliku $\int_a^b g_2(x) g_1(x) dx$, pri čemu je g_2 linearna funkcija, dok g_1 ne mora, ali može biti linearna.

Takav se integral može integrirati „geometrijski“, pomoću izrazā za ploštine likova i položaje njihovih težišta. Naime, kao što znate, funkcijske izraze za unutarnje sile izvodimo vrlo rijetko, obično crtamo njihove dijagrame.

Vereščaginov teorem:

$$\mathcal{J}_{1,2} = \int_a^b g_2(x) g_1(x) dx = \mathcal{G}_1 \cdot g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)})$$



Ako su

\mathcal{G}_1 ploština lika „ispod” grafa funkcije g_1 ,

$x_{T(\mathcal{G}_1)}$ apscisa težišta lika \mathcal{G}_1 i

$g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)})$ vrijednost linearne funkcije g_2 u $x_{T(\mathcal{G}_1)}$,

vrijednost je integrala $\mathcal{G}_1 \cdot g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)})$.

dokaz Vereščaginova teorema:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{1,2} &= \int_a^b g_2(x) g_1(x) dx \\ &= \int_a^b (kx + m) g_1(x) dx \\ &= k \int_a^b x g_1(x) dx + m \int_a^b g_1(x) dx \\ &= k x_{T(\mathcal{G}_1)} \mathcal{G}_1 + m \mathcal{G}_1 \\ &= (k x_{T(\mathcal{G}_1)} + m) \cdot \mathcal{G}_1 \\ &= g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)}) \cdot \mathcal{G}_1\end{aligned}$$

redak 1 → 2: funkcija g_2 je linearna, pa je $g_2(x) = kx + m$;

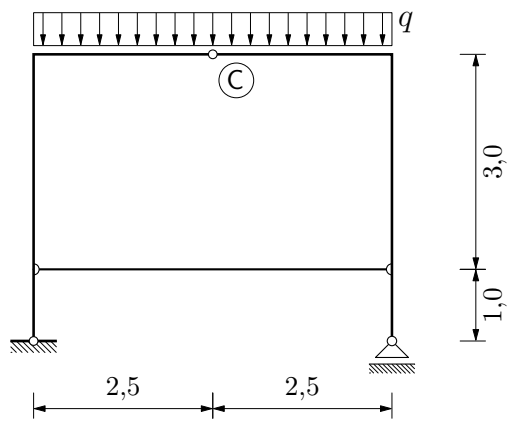
redak 2 → 3: integral zbroja jednak je zbroju integrala, a konstanta se može izvući pred integral;

redak 3 → 4: vrijednost integrala u drugome pribrojniku ploština je lika „ispod” grafa funkcije g_1 , dok je vrijednost integrala u prvome pribrojniku vrijednost statičkoga momenta toga lika u odnosu na ishodište (iz *Mehanike 1.* bi trebalo biti poznato da je statički moment lika u odnosu na ishodište jednak umnošku ploštine lika i apscise njegova težišta);

redak 4 → 5: izlučivanje \mathcal{G}_1 ;

redak 4 → 5: $k x_{T(\mathcal{G}_1)} + m = g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)})$ jer je $g_2(x) = kx + m$.

primjer:



$$q = 40 \text{ kN/m'}$$

stupovi:

$$E_s = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$b_s/h_s = 30/30 \text{ [cm]}$$

grede:

$$E_g = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$b_g/h_g = 30/60 \text{ [cm]}$$

zatega:

$$E_z = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$r_z = 1 \text{ cm}$$

Izračunat ćemo pomak točke C i kut relativnoga zaokreta osi grede u toj točki. Kut relativnoga zaokreta osi grede u nekoj točki kut je između tangenata na os neposredno lijevo i neposredno desno od te točke.

primjer:

$$A_s = b_s h_s = 0,3^2 = 0,09 \text{ m}^2$$

$$I_s = \frac{b_s h_s^3}{12} = \frac{0,3^4}{12} = 0,000675 \text{ m}^4$$

$$A_g = b_g h_g = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \text{ m}^2$$

$$I_g = \frac{b_g h_g^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 0,0054 \text{ m}^4$$

$$A_z = r_z^2 \pi = 0,01^2 \pi = 0,0003 \text{ m}^2$$

Na temelju podataka o poprečnim presjecima dijelova sistema izračunavamo njihove ploštine i momente tromosti.

primjer:

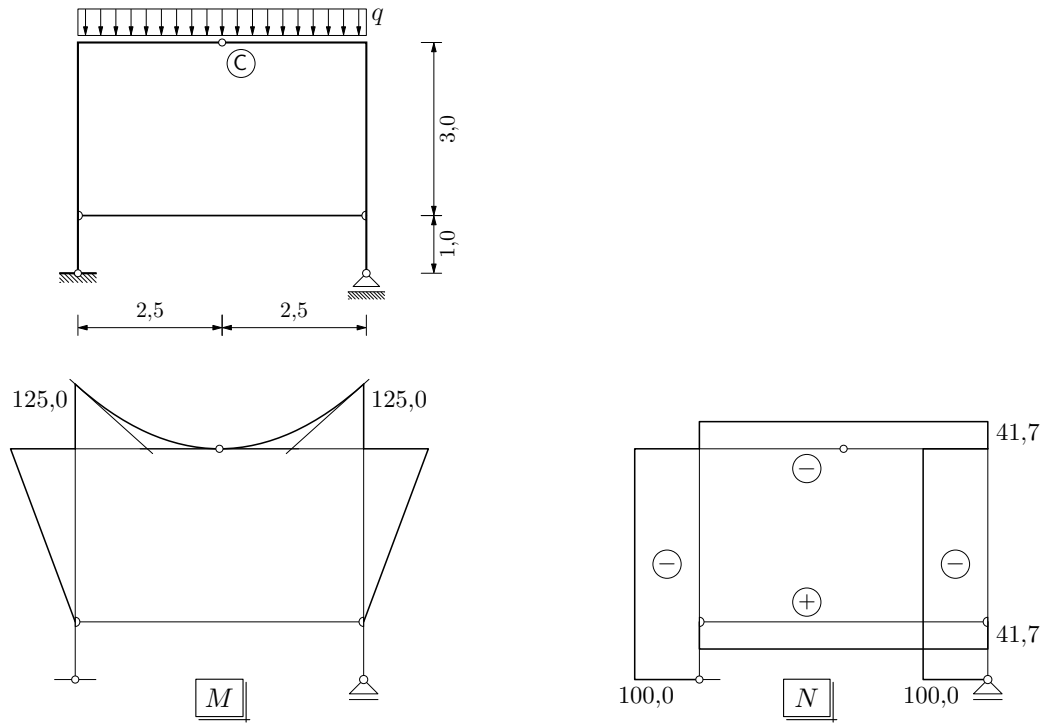
$$\beta = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[m_i(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_i(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e$$

Traženi pomak i kut zaokreta izračunat ćemo, naravno, metodom jedinične sile.

β u navedenom izrazu može označavati i pomak i kut zaokreta.

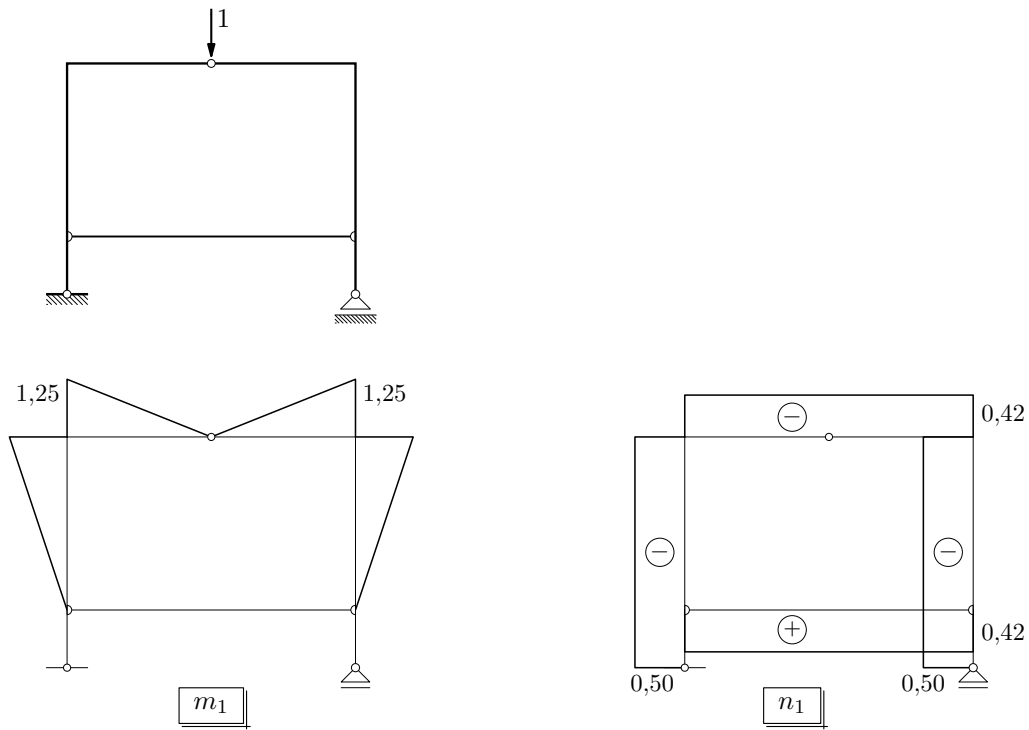
Budući da je konstrukcija sastavljena od nekoliko elemenata, pri izračunavanju pomaku zbrajamo doprinose pojedinih elemenata.

primjer:



Prvo izračunavam i crtam dijagrame momenata i uzdužnih za zadano stvarno opterećenje. Dòsada ste to, nadamo se, svladali.

primjer:



Budući da ne znamo po kojem se pravcu odvija pomak točke C, sastavit ćemo ga od njegove vertikalne i horizontalne komponente.

Za izračunavanje orijentirane duljine vertikalne komponente u točku C stavljamo jediničnu virtualnu silu na vertikalnom pravcu.

primjer:

$$\begin{aligned}w_c &= \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[m_1(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_1(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e \\&= 2 \left[\frac{1}{E_g I_g} \left(\frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left(\frac{3}{4} \cdot 1,25 \right) + \frac{1}{E_s I_s} \left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 1,25 \right) \right] \\&\quad + \left[\frac{1}{E_g A_g} (41,7 \cdot 5,0) (0,42) + 2 \frac{1}{E_s A_s} (100,0 \cdot 4,0) (0,50) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,42)\end{aligned}$$

Drugi redak sadrži doprinose momenata savijanja u gredi i stupovima, treći redak doprinose uzdužnih sila u gredi i stupovima, a četvrti redak doprinos uzdužne sile u zategi.

Pribojnici u drugom, trećem i četvrtom retku izvedeni su primjenom Vereščaginova teorema. Ploštine su računane u dijagramima M i N.

Momentni su dijagrami simetrični, pa su doprinosi momenata računani kao dvostruki doprinosi na polovini nosača (2 ispred uglate zagrada u drugom retku). Prva zagrada u prvome pribrojniku daje ploštinu parabole u dijagramu M na lijevoj (ili desnoj) polovini grede. Druga zagrada daje vrijednost u dijagramu m_1 u točki koja odgovara „apscisi” težišta parabole. Analogno, prva zagrada u drugome pribrojniku daje ploštinu trokuta u dijagramu M na lijevome stupu. Druga zagrada daje vrijednost u dijagramu m_1 u točki koja odgovara „apscisi” težišta toga trokuta.

Prva zagrada u prvome pribrojniku u trećem retku daje ploštinu pravokutnika u dijagramu N na gredi. Druga zagrada daje vrijednost u dijagramu n_1 . Drugi pribrojnik daje doprinos uzdužnih sila u stupovima kao dvostruki doprinos u jednom stupu.

primjer:

$$\begin{aligned}w_c &= \sum_{(e)} \int_0^{l_e} \left[m_1(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_1(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e \\&= 2 \left[\frac{1}{E_g I_g} \left(\frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left(\frac{3}{4} \cdot 1,25 \right) + \frac{1}{E_s I_s} \left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 1,25 \right) \right] \\&\quad + \left[\frac{1}{E_g A_g} (41,7 \cdot 5,0) (0,42) + 2 \frac{1}{E_s A_s} (100,0 \cdot 4,0) (0,50) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,42) \\&= 0,01664 + 0,00016 + 0,00146 = 0,01826 \text{ m} \approx 1,8 \text{ cm}\end{aligned}$$

Rekli smo da drugi redak sadrži doprinose momenata, treći doprinose uzdužnih sila u gredi i stupovima, a četvrti doprinos uzdužne sile u zategi. Tri pribrojnika u zadnjem retku brojčane su vrijednosti ta tri doprinosa.

Uzmemo li u obzir samo doprinose momenata savijanja, bit će

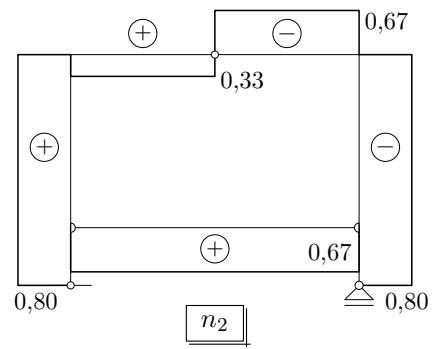
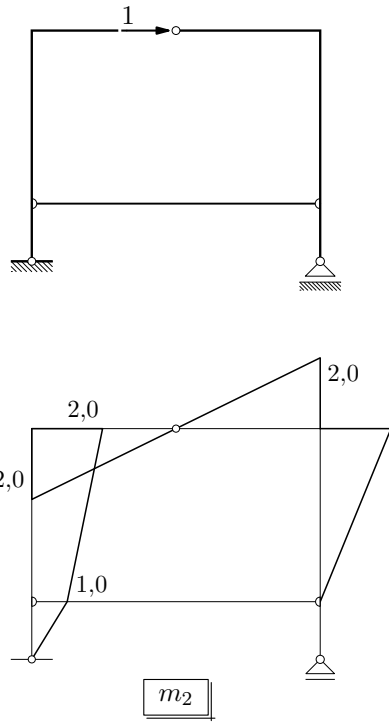
$$w_c = 0,01664 \text{ m} \approx 1,7 \text{ cm},$$

a ako uzmemo u obzir doprinose momenata i uzdužne sile u zategi, tada je

$$w_c = 0,01664 + 0,00146 = 0,01810 \text{ m} \approx 1,8 \text{ cm}.$$

Možemo zaključiti da je doprinos uzdužnih sila u stupovima i gredi zanemariv u odnosu na doprinos momenata savijanja i doprinos uzdužne sile u zategi.

primjer:



Za izračunavanje orijentirane duljine horizontalne komponente u točku C stavljamo jediničnu virtualnu silu na horizontalnom pravcu.

primjer:

$$\begin{aligned}u_c &= \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[m_2(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_2(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e \\&= \frac{1}{E_g I_g} \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left(\frac{3}{4} \cdot 2,0 \right) (-1) + \left(\frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left(\frac{3}{4} \cdot 2,0 \right) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_s I_s} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 1,0 + \frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) (-1) + \left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_g A_g} \left[(41,7 \cdot 2,5) (0,33) (-1) + (41,7 \cdot 2,5) (0,67) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_s A_s} \left[(100,0 \cdot 4,0) (0,80) (-1) + (100,0 \cdot 4,0) (0,80) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,67)\end{aligned}$$

Budući da dijagram m_2 nije simetričan, izraze treba napisati za cijeli nosač. Drugi redak sadrži doprinose momenata savijanja u gredi, treći doprinose momenata savijanja u stupovima, četvrti doprinose uzdužnih sila u gredi, peti doprinose uzdužnih sila u stupovima, a šesti uzdužne sile u zategi.

primjer:

$$\begin{aligned} u_c &= \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[m_2(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_2(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e \\ &= 0 \quad (\text{simetrija} \times \text{antimetrija}) \\ &+ \frac{1}{E_s I_s} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 1,0 + \frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) (-1) + \left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{E_g A_g} \left[(41,7 \cdot 2,5) (0,33) (-1) + (41,7 \cdot 2,5) (0,67) \right] \\ &+ 0 \quad (\text{simetrija} \times \text{antimetrija}) \\ &+ \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,67) \end{aligned}$$

Doprinosi momenata u gredi (drugi redak) jednaki su nuli: na gredi je dijagram M simetričan, a dijagram m_2 antimetričan (ili: antisimetričan). Na lijevoj polovini grede dijelovi dijagrama M i m_2 s različitih su strana osi, dok su na desnoj polovini na istoj strani. Ako su dijelovi dijagrama s različitih strana osi, njihov je „umnožak“ negativan (-1) u prvom pribrojniku).

Slično tome, nuli su jednaki i doprinosi uzdužnih sila u stupovima (peti redak): uzdužne su sile u oba stupa u dijagramu N tlačne, jednakih intenziteta, dok je u dijagramu n_2 sila u lijevom stupu vlačna, u desnom tlačna, a intenziteti su im jednaki. „Umnožak“ je dijelova dijagrama na lijevom stupu stoga negativan, a na desnom pozitivan, pa će se poništiti.

primjer:

$$\begin{aligned}u_c &= \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[m_2(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_2(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e \\&= 0 \\&+ \frac{1}{E_s I_s} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 1,0 + \frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) (-1) + \left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) \right] \\&+ \frac{1}{E_g A_g} \left[(41,7 \cdot 2,5) (0,33) (-1) + (41,7 \cdot 2,5) (0,67) \right] \\&+ 0 \\&+ \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,67)\end{aligned}$$

U gredi je u dijagramu N sila tlačna, dok je u dijagramu n_2 u lijevoj polovini vlačna, a u desnoj tlačna. Intenziteti im, međutim, nisu jednaki, pa doprinos uzdužne sile u gredi postoji (četvrti redak).

Dio je dijagrama m_2 na dijelu lijevoga stupa iznad zatege trapez. Podijelili smo ga u dva trokuta da „očitamo” vrijednost na mjestu težišta trokuta u dijagramu M (druga zagrada u prvom pribrojniku u trećem retku). Dijelovi dijagrama M i m_2 na tom su dijelu stupa s različitih strana njegove osi, pa se prvi pribrojnik množi s -1 . Drugi je pribrojnik u trećem retku doprinos momenata u desnom stupu.

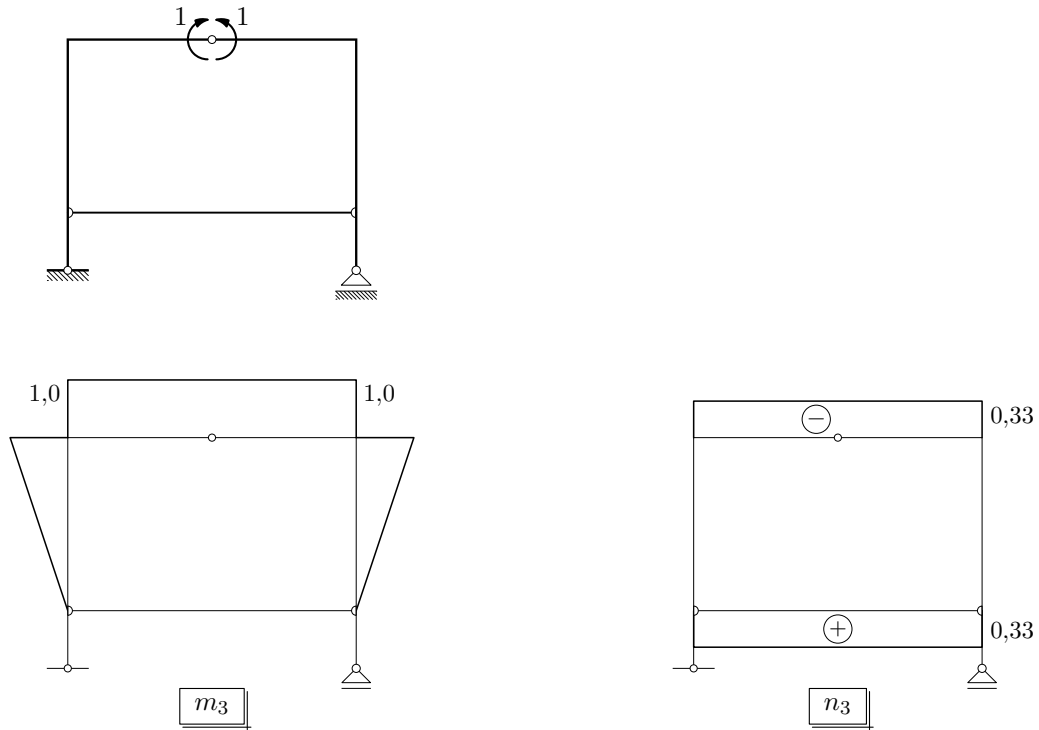
primjer:

$$\begin{aligned}u_c &= \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[m_2(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_2(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e \\&= \frac{1}{E_g I_g} \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left(\frac{3}{4} \cdot 2,0 \right) (-1) + \left(\frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left(\frac{3}{4} \cdot 2,0 \right) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_s I_s} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 1,0 + \frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) (-1) + \left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_g A_g} \left[(41,7 \cdot 2,5) (0,33) (-1) + (41,7 \cdot 2,5) (0,67) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_s A_s} \left[(100,0 \cdot 4,0) (0,80) (-1) + (100,0 \cdot 4,0) (0,80) \right] \\&\quad + \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,67) \\&= -0,00309 + 0,00001 + 0,00233 = -0,00075 \text{ m} = -0,75 \text{ mm}\end{aligned}$$

Tri pribrojnika u zadnjem retku brojčane su vrijednosti doprinosa momenata savijanja, uzdužnih sila u gredi i stupovima te uzdužne sile u zategi. Usporedba veličina doprinosa pokazuje da se doprinos uzdužne sile u gredi i stupovima može i sada zanemariti.

Konačna negativna vrijednost znači da je pomak suprotnoga smisla od smisla djelovanja virtualne sile.

primjer:



Za izračunavanje kuta između tangenata na deformiranu os grede neposredno lijevo i neposredno desno od točke C sistem opterećujemo parom suprotno orijentiranih jediničnih virtualnih momenata tako da jedan od njih djeluje neposredno lijevo, a drugi neposredno desno od te točke.

primjer:

$$\begin{aligned}\varphi_c^r &= \sum_{(e)} \int_0^{l_e} \left[m_3(x_e) \frac{M(x_e)}{E_e I_e} + n_3(x_e) \frac{N(x_e)}{E_e A_e} \right] dx_e \\ &= 2 \left[\frac{1}{E_g I_g} \left(\frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) (1,0) + \frac{1}{E_s I_s} \left(\frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 1,0 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{E_g A_g} (41,7 \cdot 5,0) (0,33) + \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,33) \\ &= 0,01363 + 0,00001 + 0,00115 = 0,01479 \approx 0,847^\circ\end{aligned}$$

$$0,01363 + 0,00001 + 0,00115 = \varphi_c^r(M_{g\&s}) + \varphi_c^r(N_g) + \varphi_c^r(N_z) = 0,01479 \approx 0,847^\circ$$

$$0,01363 + \cancel{0,00001} + 0,00115 = \varphi_c^r(M_{g\&s}) + \cancel{\varphi_c^r(N_g)} + \varphi_c^r(N_z) = 0,01478 \approx 0,847^\circ$$