

# Dualitet metode sila i opće metode pomakā

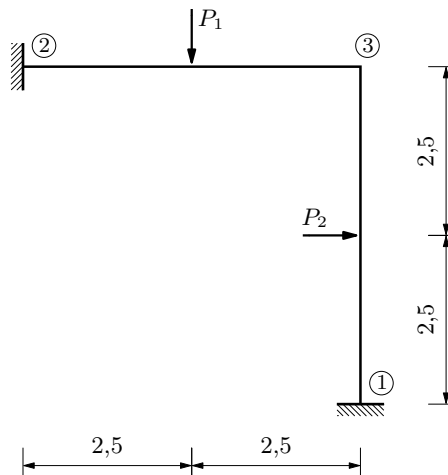
## Uspredni proračun

Poprečni su presjeci grede i stupa sistema prikazanoga na slici 1.

$$b_g/h_g = 30/45 \text{ [cm]} \quad \& \quad b_s/h_s = 30/30 \text{ [cm]},$$

modul je elastičnosti materijala  $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ , a vrijednosti su zadanih sila

$$P_1 = 100 \text{ kN} \quad \& \quad P_2 = 50 \text{ kN}.$$



Slika 1.

Ploštine su poprečnih presjeka

$$A_g = 0,3 \cdot 0,45 = 0,135 \text{ m}^2 \quad \& \quad A_s = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ m}^2,$$

dok su im momenti tromosti

$$I_g = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 0,00227813 \text{ m}^4 \quad \& \quad I_s = \frac{0,3^4}{12} = 0,000675 \text{ m}^4,$$

pa su

$$EA_g = 4050000 \text{ kN} \quad \& \quad EA_s = 2700000 \text{ kN}$$

i

$$EI_g = 68343,75 \text{ kNm}^2 \quad \& \quad EI_s = 20250 \text{ kNm}^2.$$

**1.** Sistem je tri puta statički neodređen: greda i stup su dva tijela ( $n_t = 2$ ) međusobno spojena krutim spojem ( $n_k = 3$ ), a spoj je svakoga tijela s podlogom upeti ležaj ( $n_\ell = 2 \cdot 3$ ), pa je

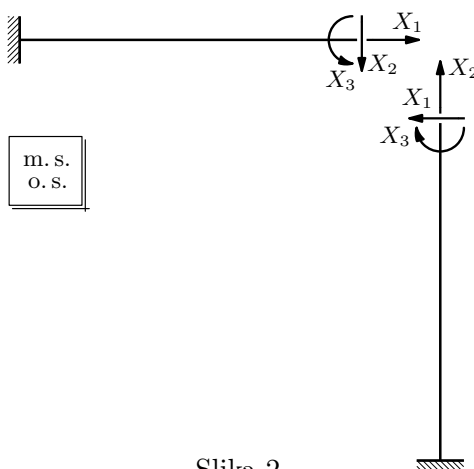
$$s_{\min} = n_t \cdot 3 - n_k \cdot 3 - n_\ell = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = -3;$$

ili: greda i stup su jedno tijelo („slomljeni” štap) spojeno s podlogom dvama upetim ležajevima, te je

$$s_{\min} = n_t \cdot 3 - n_\ell = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = -3.$$

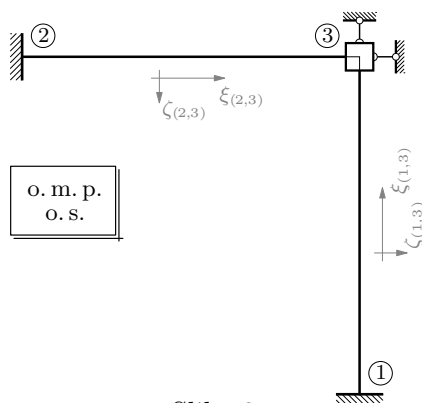
Očito je da je sistem geometrijski nepromjenjiv, tako da je  $s = s_{\min}$ .

2. Za tvorbu statički određenoga osnovnog sistema za proračun metodom sila raskinuti treba spojeve koji (zajedno) oduzimaju tri stupnja slobode. Raskidanjem krutoga spoja između stupa i grede dobivamo osnovni sistem prikazan na slici 2.



Slika 2.

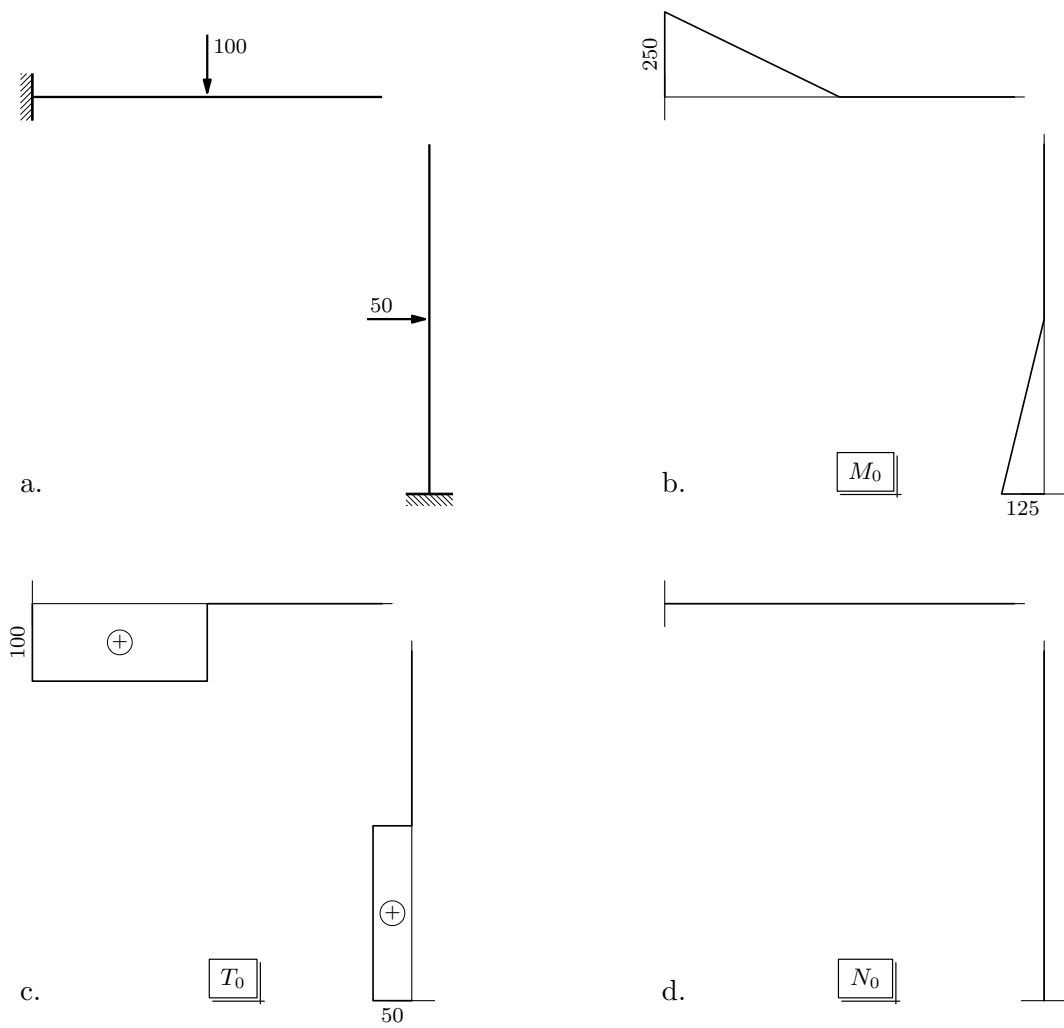
3. Dualno, spoj grede i stupa „slobodni” je čvor, pa će osnovni sistem za proračun općom metodom pomakā nastati dodavanjem spojeva s podlogom koji sprečavanju njegov pomak po bilo kojem pravcu (u ravni rastavljen u komponente po dva odabrana neparalelna pravca) i zaokret (slika 3.).



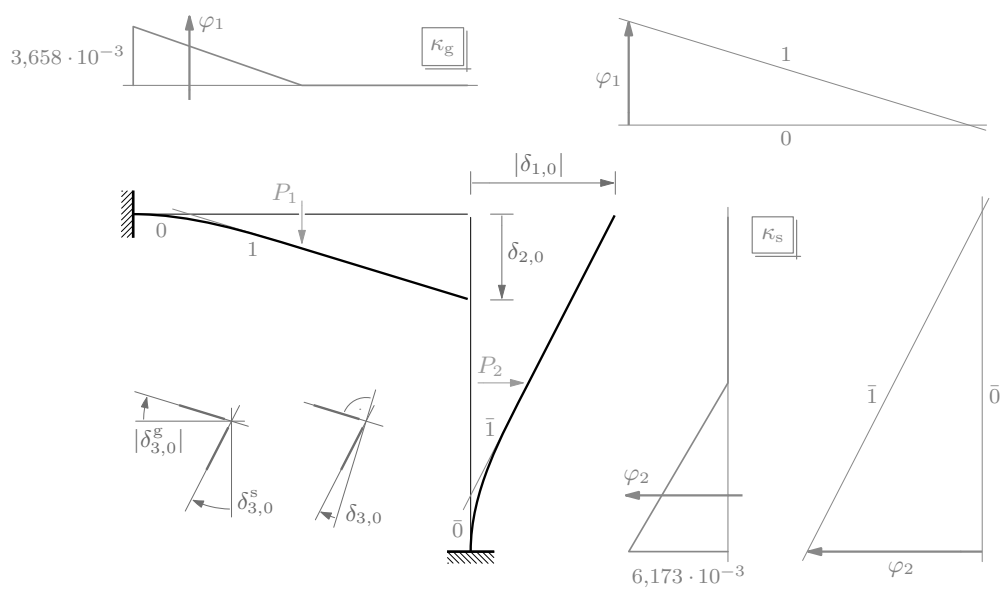
Slika 3.

4. Pod zadanim se djelovanjima osnovni sistem metode sila nalazi u jednome od *moćih stanja ravnoteže* izvornoga sistema (slika 4.). Moguće stanje ravnoteže sistema skup je reakcija i unutarnjih sila koje su u ravnoteži sa zadanim vanjskim aktivnim silama. No, kako je osnovni sistem nastao raskidanjem nekih spojeva izvornoga sistema, zadana djelovanja u osnovnom sistemu uzrokuju pomake i zaokrete kojih u izvornom sistemu nema (i ne može biti), tako da stanje pomakā osnovnoga nije jedno od *moćih stanja pomakā* izvornoga sistema — u osnovnom sistemu ne postoje sile i momenti koje u izvornom sistemu prenose raskinuti spojevi, pa unutarne sile u osnovnom sistemu ne daju polje pomakā koje zadovoljava uvjete neprekinutosti koje propisuju izvorni neraskinuti spojevi: desni se kraj grede i vrh stupa razdvajaju te „putuju” neovisno jedan o drugome (slika 5.\*):

\* Progibne su linije crtane primjenom Mohrove analogije.



Slika 4.

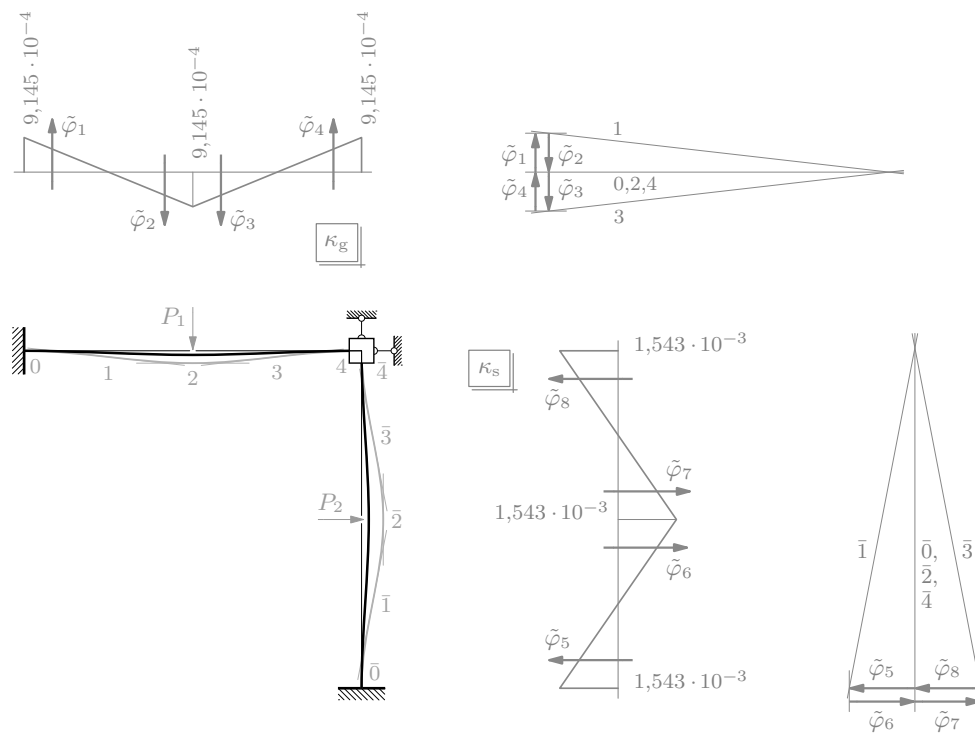


Slika 5.

- ♣ sila  $\vec{P}_2$  savija stup i uzrokuje pomak njegova vrha udesno; duljina je pomaka  $|\delta_{1,0}|$  (pomak je suprotan od smisla djelovanja sile para  $\mp \vec{X}_1$  koja djeluje na vrhu stupa, pa je njegova orijentirana duljina  $\delta_{1,0}$  negativna);
- ♣ sila  $\vec{P}_1$  savija gredu i uzrokuje pomak njezina desnog kraja prema dolje za  $\delta_{2,0}$ ;
- ◇ zbog tih se savijanja os stupa na njegovu vrhu zaokreće u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $\delta_{3,0}^s$ , dok se os grede na njezinu desnom kraju zaokreće za kut  $|\delta_{3,0}^g|$ , također u smislu vrtnje kazaljke na satu (smisao vrtnje momenta para  $\mp \vec{X}_3$  koji djeluje na kraju grede suprotan je od smisla vrtnje kazaljke na satu, pa je  $\delta_{3,0}^g$  negativan broj); u odnosu na os grede na njezinu desnom kraju os se stupa na njegovu vrhu zaokrenula u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $\delta_{3,0}^s - |\delta_{3,0}^g| = \delta_{3,0}$ , te se kut između osi grede i osi stupa smanjio od pravoga na  $\pi/2 - \delta_{3,0}$ .

Iako moguće, ravnotežno stanje osnovnoga sistema stoga nije *stvarno stanje ravnoteže* izvornoga sistema.

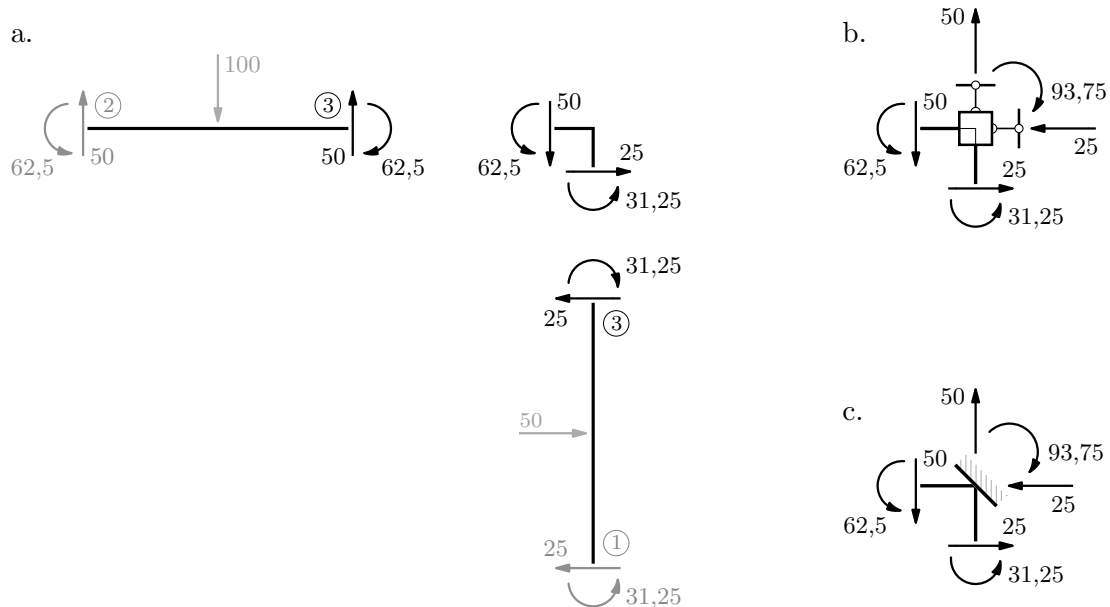
5. Dualno, polje pomakā osnovnoga sistema opće metode pomakā jedno je od *moćnih stanja pomakā* izvornoga sistema — neprekinuto je i zadovoljava ležajne uvjete (slika 6.<sup>†</sup>). Pripadno ravnotežno stanje osnovnoga sistema, međutim, nije *moćno stanje ravnoteže* izvornoga sistema: pri zadanim se djelovanjima u dodanim spojevima pojavljuju reaktivne sile i reaktivni moment kojima se sile i momenti koji djeluju na spojeni čvor prenose na



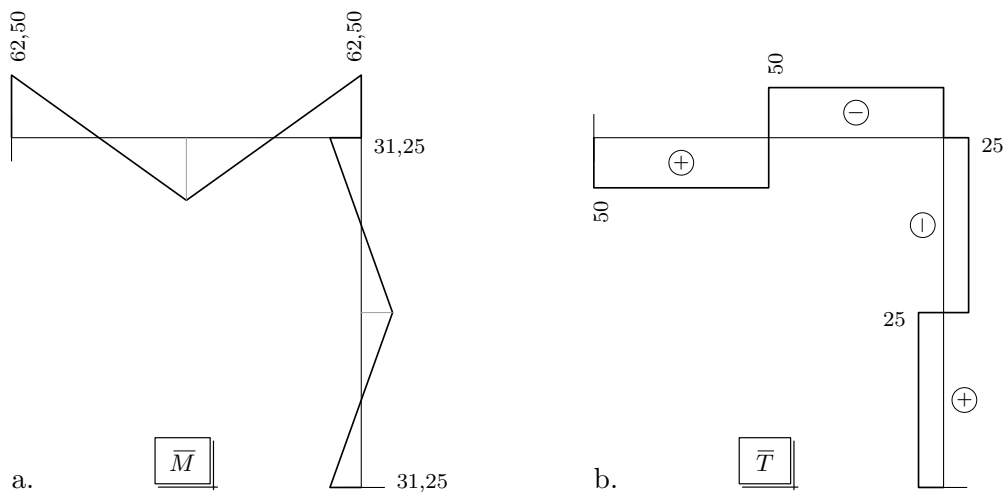
Slika 6.

<sup>†</sup> Prohibna je linija nacrtana za vrijednosti momenata koje ćemo, uz vrijednosti ostalih sila upetosti, izračunati u odsječku 15. Kako su sada pomaci razmjerno mali, mjerilo je kutova točnosti radi utrostručeno u odnosu na mjerilo na slici 5., dok je polna udaljenost podijeljena s tri (te se kao duljina na crtežu nije promijenila). Na taj je način nacrtana siva progibna linija. Za crnu su progibnu liniju duljine pomaka (na crtežu) podijeljene s tri, tako da je ta linija u istom mjerilu kao linija na slici 5.

podlogu (slika 7.b.<sup>‡</sup>), a kako u izvornom sistemu spojeva čvora s podlogom nema, nema ni reaktivnih sila i momenta, pa u čvoru unutarnje sile toga mogućeg stanja pomakā nisu (i ne mogu biti) u ravnoteži (slike 7.a. i 8. ( $\mathcal{E} \bar{N} \equiv 0$ )). Moguće stanje pomakā prikazano na slici 6. stoga nije *stvarno stanje pomakā* izvornoga sistema.



Slika 7.



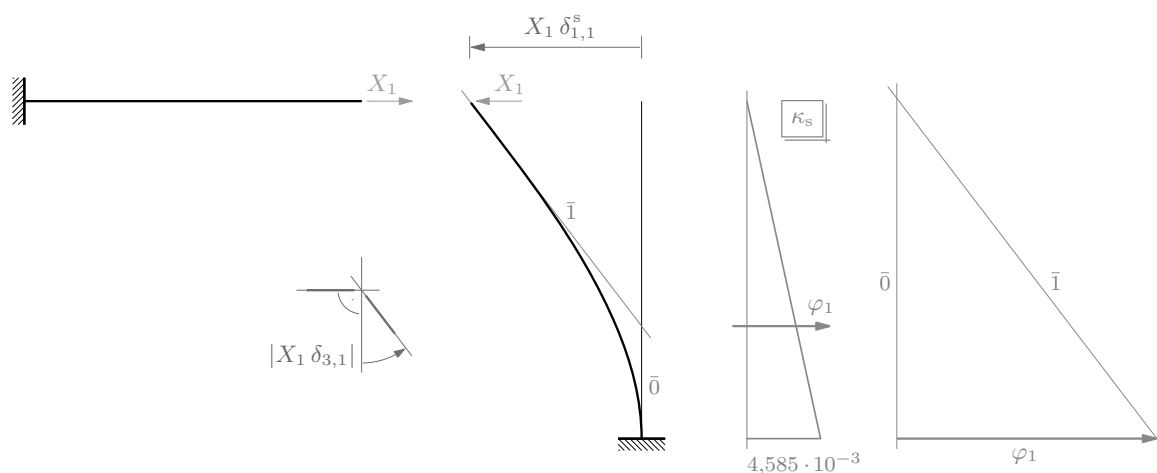
Slika 8.

**6.** Osnovni sistem metode sila dovodimo u *stvarno stanje ravnoteže* izvornoga sistema (i u moguće (ali i stvarno) stanje pomakā izvornoga sistema) tako da raskinuti spoj

<sup>‡</sup> Kao što, nadam se, znate, momentni spoj i dva zglobova štapa osi kojih nisu na jednom pravcu oduzimaju sva tri stupnja slobode čvora, te se u njima mogu razviti moment i sile na dva (različita) pravca (dakle, sila na bilo kojem pravcu), tako da su zajedno ekvivalentni upetom ležaju (slika 7.c.). Može se stoga reći da su elementi osnovnoga sistema (opće) metode pomakā obostrano upete grede.

nadomjestimo parovima statički neodređenih sila i momenata koje je taj spoj prenosio (slika 2.). Te sile i momenti, naravno, uzrokuju pomake i zaokrete:

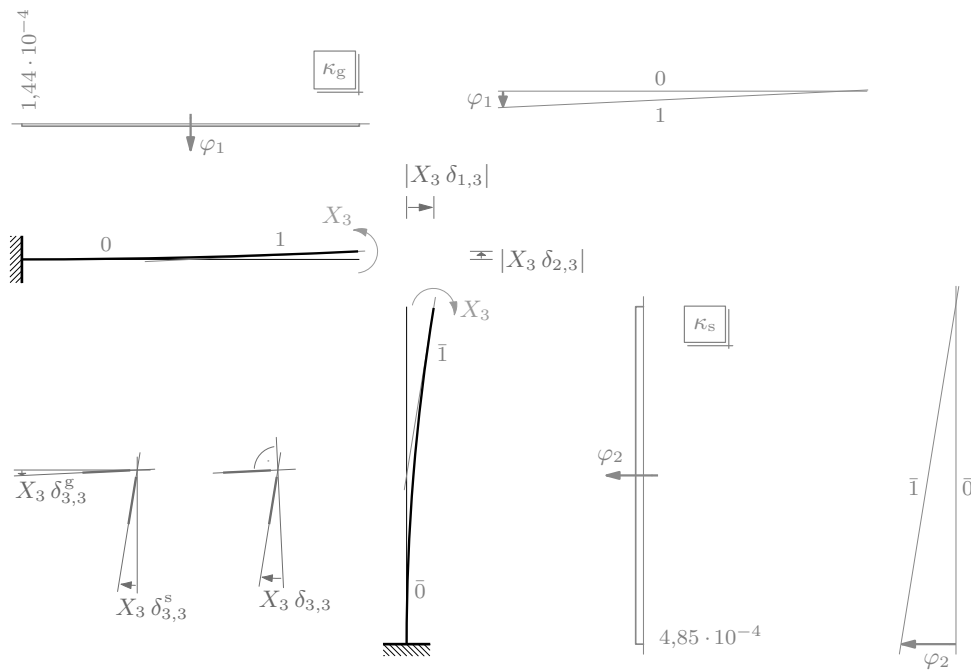
- ♣ sila para  $\mp \vec{X}_1$  koja djeluje na vrhu stupa uzrokuje njegovo savijanje i pomak vrha ulijevo za  $X_1 \delta_{1,1}^s$ , a sila toga para koja djeluje na desnom kraju grede uzrokuje njezino produljenje i pomak kraja udesno za  $X_1 \delta_{1,1}^g$ ; razlika je duljina tih pomaka  $X_1 \delta_{1,1}$  (slika 9.<sup>§</sup>; prikazan je samo pomak zbog savijanja stupa, jer je duljina pomaka zbog produljenja grede gotovo tisuću i sedamsto puta manja od njegove duljine, tako da se na crtežima oba pomaka ne mogu istodobno prikazati);



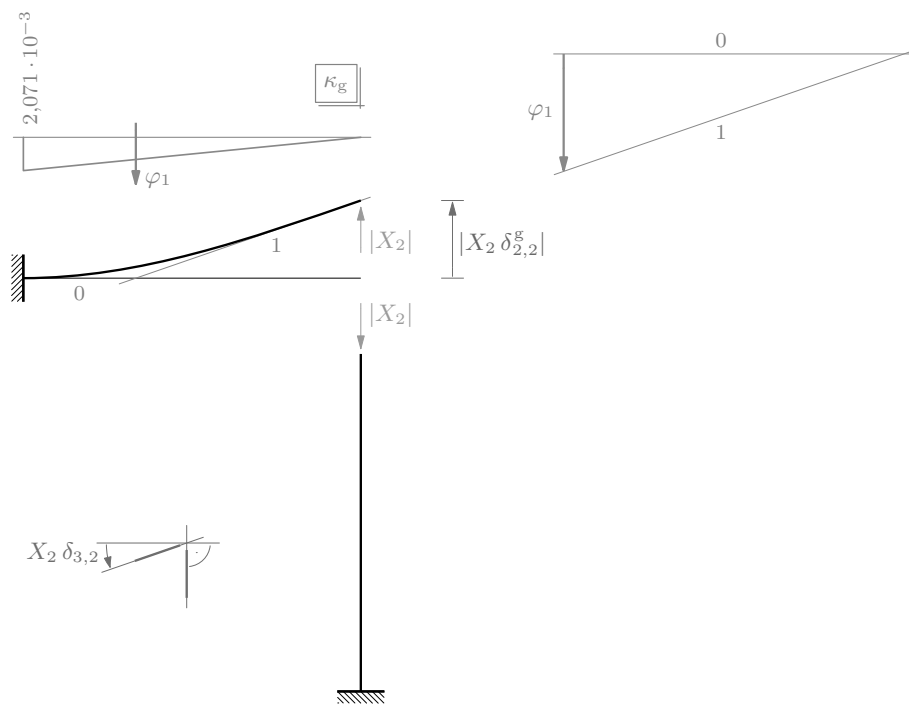
Slika 9.

- ◇ pri savijanju stupa zbog sile para  $\mp \vec{X}_1$  njegova se os na njegovu vrhu zaokreće u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu za kut  $|X_1 \delta_{3,1}|$  (smisao vrtnje momenta para  $\mp \vec{X}_3$  koji djeluje na vrhu stupa smisao je vrtnje kazaljke na satu) (ista slika);
- ♣ pri savijanju stupa uzrokovanom momentom para  $\mp \vec{X}_3$  koji djeluje na njegovu vrhu vrh se pomiče udesno za  $|X_3 \delta_{1,3}|$  (slika 10.);
- ◇ os stupa na njegovu vrhu se pritom zaokreće u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $X_3 \delta_{3,3}^s$  (ista slika);
- ♣ sile para  $\mp \vec{X}_2$  uzrokuju savijanje grede uz pomak njezina desnog kraja prema gore za  $|X_2 \delta_{2,2}^g|$ , i skraćenje stupa uz pomak njegova vrha prema dolje za  $|X_2 \delta_{2,2}^s|$ , (proračuni u odsječcima 11. i 25. će pokazati da je smisao djelovanja tih sila, a stoga i pomaka koje uzrokuju, suprotan od smisla pretpostavljenoga na slici 2.); razlika je duljina pomaka kraja grede i vrha stupa  $|X_2 \delta_{2,2}|$  (slika 11.; pomak zbog skraćanja stupa na crtežima je neprikaziv istodobno s pomakom zbog savijanja grede — duljina mu je više nego tristo puta manja);
- ◇ uz to se os grede na njezinu desnom kraju zaokreće u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu za kut  $X_3 \delta_{3,2}$  (ponovno slika 11.);
- ♣ pri savijanju grede uzrokovanom momentom para  $\mp \vec{X}_3$  koji djeluje na njezinu desnom kraju taj se kraj pomiče prema gore za  $|X_3 \delta_{2,3}|$  (slika 10.), ...

<sup>§</sup> Progibne linije na slikama 9., 10., 11. i 12. nacrtane su za vrijednosti statički neodređenih veličina koje ćemo izračunati u odsječku 25.



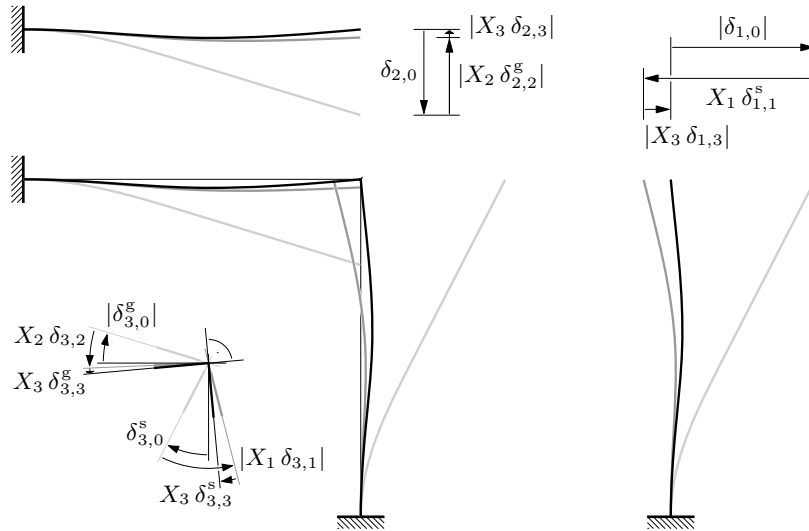
Slika 10.



Slika 11.

- ◇ ... a njezina se os zaokreće u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu za kut  $X_3 \delta_{3,3}^g$ ; zbog zajedničkoga se djelovanja oba momenta para  $\mp \vec{X}_3$  os stupa na njegovu vrhu u odnosu na os grede na njezinu desnom kraju zaokreće u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $X_3(\delta_{3,3}^s + \delta_{3,3}^g) = X_3 \delta_{3,3}$  (slika 10. još jednom).

Uz „prave” će se vrijednosti statični neodređenih parova sila i momenata raskinuti spoj „zatvoriti” (slika 12.):



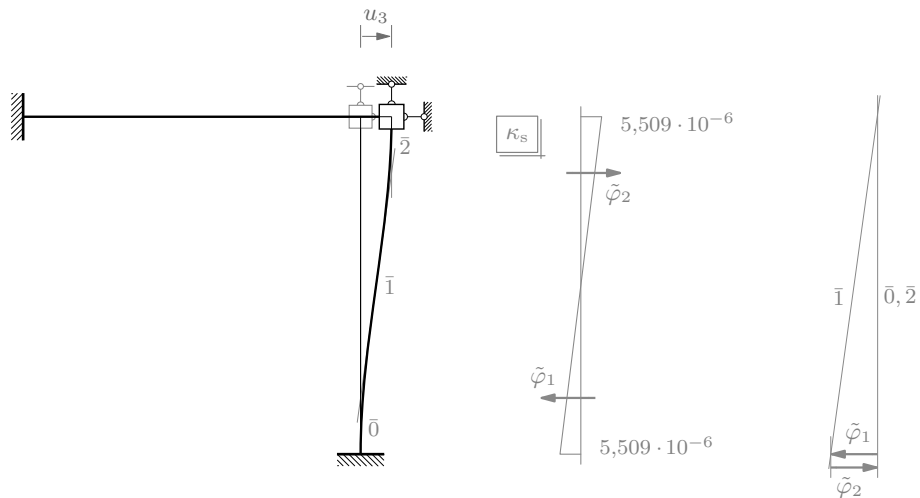
Slika 12.

- ♣ pribrojimo li pomaku udesno vrha stupa zbog sile  $\vec{P}_2$ , duljine  $|\delta_{1,0}|$ , pomak vrha ulijevo i pomak desnoga kraja grede udesno zbog sila para  $\mp \vec{X}_1$ , duljinā  $X_1 \delta_{1,1}^s$  i  $X_1 \delta_{1,1}^g$ , te pomak vrha udesno zbog momenta para  $\mp \vec{X}_3$ , duljine  $|X_3 \delta_{1,3}|$ , projekcija će razmaka između desnoga kraja grede i vrha stupa na horizontalni pravac iščeznuti;
- ♣ pribrojimo li pomaku prema dolje desnoga kraja grede zbog sile  $\vec{P}_1$ , duljine  $\delta_{2,0}$ , pomak toga kraja prema gore i pomak vrha stupa prema dolje zbog sila para  $\mp \vec{X}_2$ , duljinā  $|X_2 \delta_{2,2}^g|$  i  $|X_2 \delta_{2,2}^s|$ , te pomak toga kraja prema gore zbog momenta para  $\mp \vec{X}_3$ , duljine  $|X_3 \delta_{2,3}|$ , projekcija će razmaka između desnoga kraja grede i vrha stupa na vertikalni pravac iščeznuti;
- ♣♣ iščezavaju li projekcije neke duljine na horizontalni i na vertikalni pravac (općenitije, na dva neparalelna pravca), onda ta duljina iščezava — prema tome, zbrojimo li sve pomake, između desnoga kraja grede i vrha stupa neće biti razmaka;
- ◇ ako os stupa na njegovu vrhu, nakon što smo je zaokrenuli u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $\delta_{3,0}^s$ , zaokrenemo u smislu suprotnom od vrtnje kazaljke na satu za kut  $|X_1 \delta_{3,1}|$  i u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $X_3 \delta_{3,3}^s$  i ako os grede na njezinu desnom kraju, nakon što smo je zaokrenuli u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $|\delta_{3,0}^g|$ , zaokrenemo u smislu suprotnom od vrtnje kazaljke na satu za kut  $X_2 \delta_{3,2}$  i u smislu vrtnje kazaljke na satu za kut  $X_3 \delta_{3,3}^g$ , kut će između osi stupa na njegovu vrhu i osi grede na njezinu desnom kraju biti pravi kut.

7. Dualno, osnovni sistem opće metode pomakā dovodimo u *stvarno stanje pomakā* izvornoga sistema (i u moguće (ali i stvarno) stanje ravnoteže izvornoga sistema) tako da zamišljene spojeve čvora 3 s podlogom (slika 3.) pomaknemo i zaokrenemo i time taj čvor dovedemo u položaj u koji bi pri djelovanju opterećenja došao da tih spojeva nema. U statički neodređenim sistemima (a osnovni je sistem metode pomakā, kao sklop obostrano upetih greda, višestruko statički neodređen) prisilni pomaci i zaokreti ležajeva uzrokuju pojavu reakcija i unutarnjih sila:

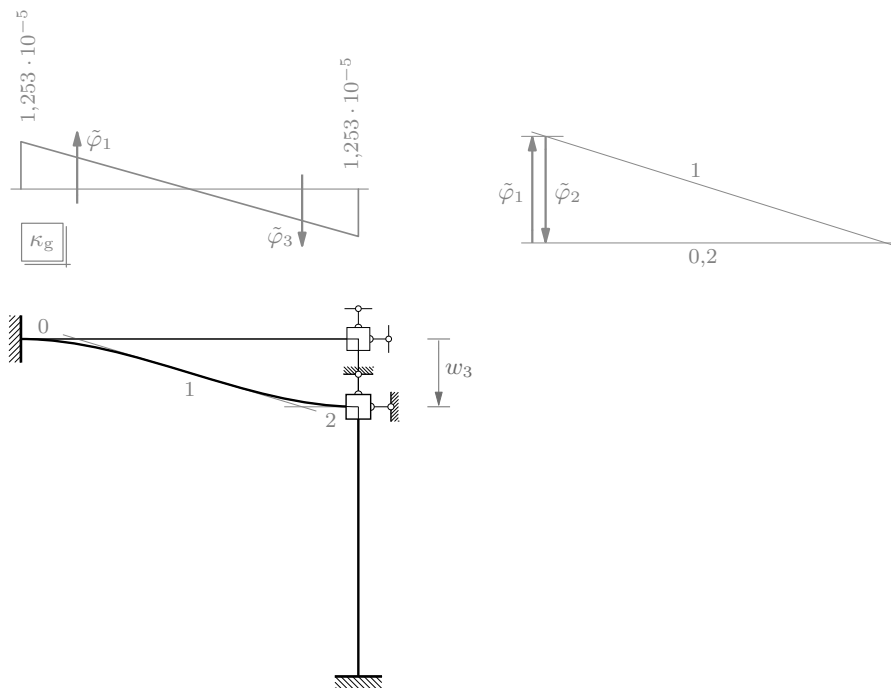


☛ pomak po horizontalnom pravcu za duljinu  $u_3$  (slika 13.<sup>¶</sup>) izazvat će unutarnje sile dijagrami kojih su prikazani na slici 16.a.\*;



Slika 13.

☛ pomak po vertikalnom pravcu za duljinu  $w_3$  (slika 14.) izazvat će unutarnje sile dijagrami kojih su prikazani na slici 16.b.;



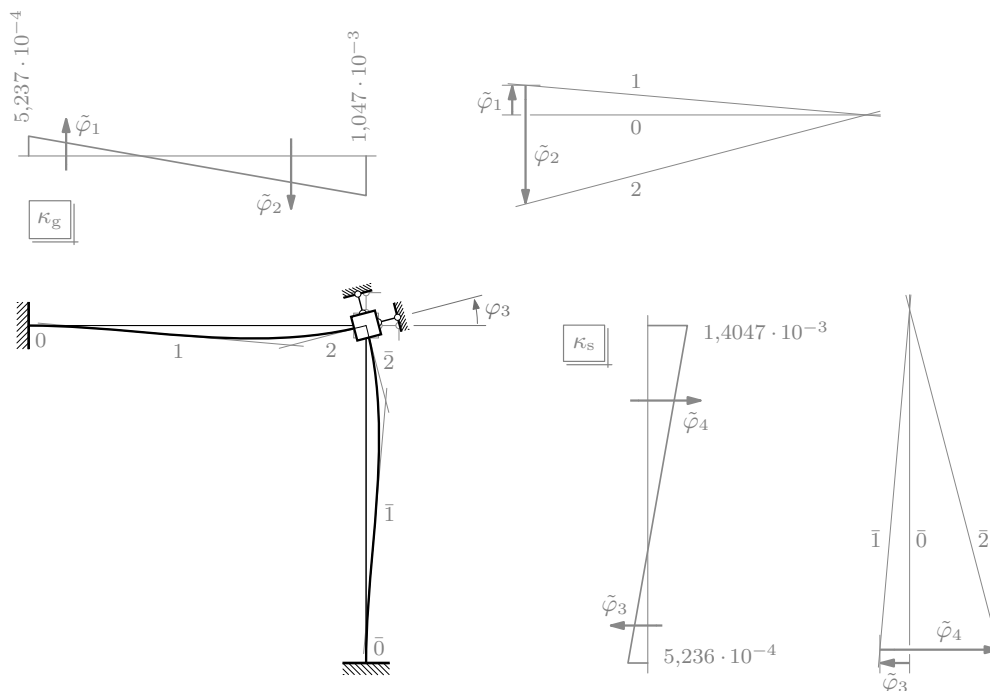
Slika 14.

<sup>¶</sup> Duljine  $u_3$  i  $w_3$  horizontalnoga i vertikalnoga pomaka i kut  $\varphi_3$  zaokreta čvora 3 izračunat ćemo u odsječku 19.

<sup>‡</sup> Prikazi pomaka na slikama 13. i 14. uvećani su tristo puta u odnosu na prikaze na ostalim slikama.

\* Izračunavanje vrijednosti sila i momenata potrebnih za crtanje dijagrama i progibnih linija opisat ćemo u odsječku 21.

✎ dijagrami unutarnjih sila izazvanih zaokretom za kut  $\varphi_3$  (slika 15.) prikazani su na slici 16.c.



Slika 15.

Pribrojimo li (slika 16.d.) unutanje sile izazvane prisilnim pomacima i zaokretom (slike 16.a., b. i c.) unutarnjim silama izazvanima zadanim opterećenjem (slika 8.<sup>†</sup>), unutarnje će se sile koje djeluju na čvor 3 uravnotežiti (slike 17.a. i b. [sliku c. nacrtajte sami!]), što pak znači da će reakcije u zamišljenim spojevima s podlogom iščeznuti.

**8.** Opis „otvaranja” i „zatvaranja” raskinutoga spoja u odsječcima 4. i 6. ili, drugim riječima, uvjete koji izriču da se spoj nije raskinuo (*uvjete neprekinutosti* ili kontinuiteta ili kompatibilnosti<sup>‡</sup>), formalno zapisujemo sustavom *jednadžbi kompatibilnosti* (ili kontinuiteta ili neprekinutosti):

$$\delta_{1,0} + \delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,3} X_3 = 0, \quad (\spadesuit)$$

$$\delta_{2,0} + \delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,3} X_3 = 0, \quad (\clubsuit)$$

$$\delta_{3,0} + \delta_{3,1} X_1 + \delta_{3,2} X_2 + \delta_{3,3} X_3 = 0. \quad (\diamond)$$

**9.** Dualno, uravnoteženje čvora 3 (slika 18.) formalno zapisujemo jednadžbama ravnoteže sila koje djeluju na čvor:

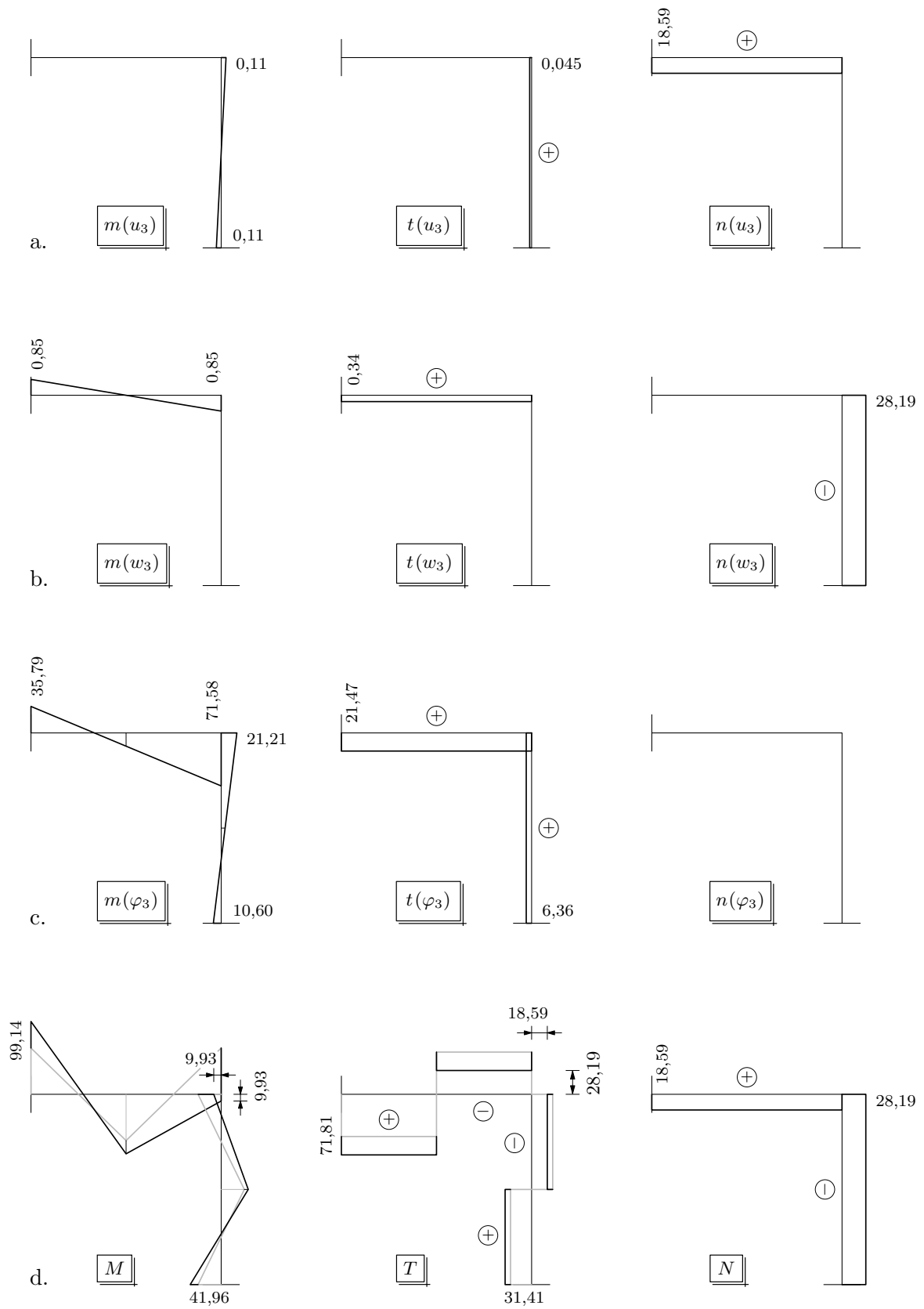
$$-N_{3,2} - T_{3,1} = 0, \quad (\heartsuit)$$

$$-T_{3,2} + N_{3,1} = 0, \quad (\triangleleft)$$

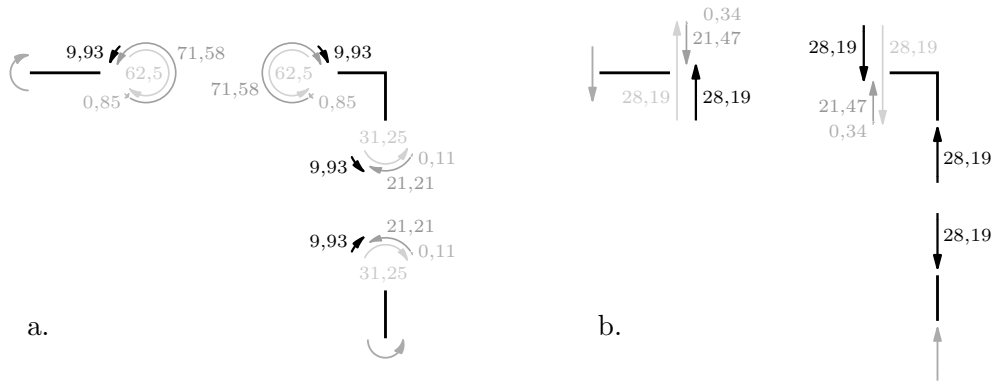
$$-M_{3,2} - M_{3,1} = 0. \quad (\text{✂})$$

<sup>†</sup> Već je rečeno da je u osnovnom sistemu pri zadanom opterećenju  $\bar{N} \equiv 0$ , pa dijagram  $\bar{N}$  nije nacrtan (znate, naravno, da bi izgledao kao dijagram  $n(\varphi_3)$  na slici 16.c.).

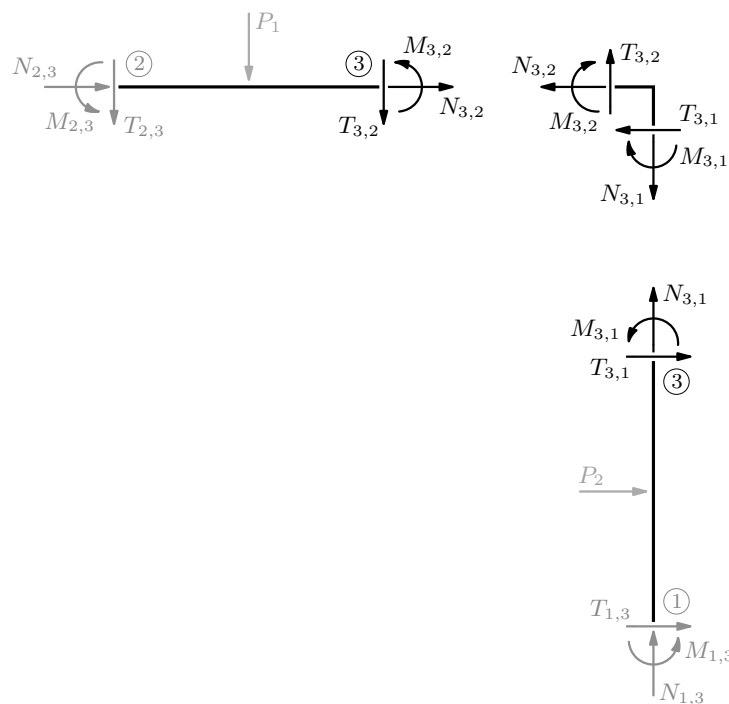
<sup>‡</sup> „Kompatibilnost — sposobnost da se tko ili što slaže s kim ili s čim drugim, mogućnost sklada; spojivost, uskladivost” [Hrvatski jezični portal, <https://hjp.znanje.hr>].



Slika 16.



Slika 17.



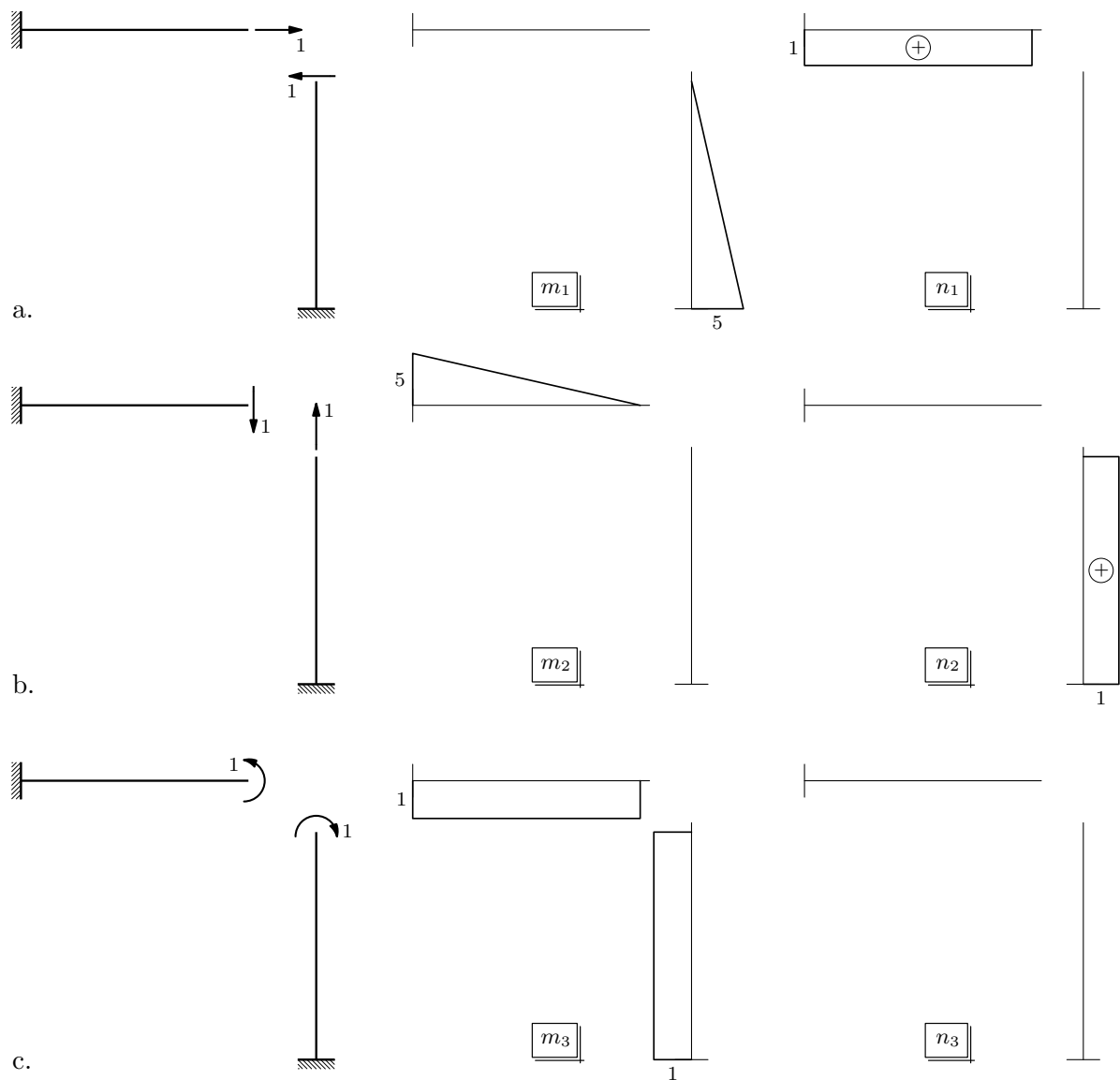
Slika 18.

**10.** Dijagrami  $m_i$  i  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) te  $M_0$  i  $N_0$ , potrebni za izračunavanje koeficijenata popustljivosti  $\delta_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) i slobodnih članova  $\delta_{i,0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jednažbi kompatibilnosti ( $\spadesuit$ ), ( $\clubsuit$ ) i ( $\diamond$ ), prikazani su na slikama 19. i 4.

*Koeficijenti popustljivosti su*

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \sum \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \sum \int \frac{n_1^2}{EA} ds = \frac{1}{EI_s} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{EA_g} (1 \cdot 5) \cdot 1 \\ &= \delta_{1,1}^s + \delta_{1,1}^g = 0,00205761 + 1,23457 \cdot 10^{-6} = 0,00205884, \end{aligned}$$

$$\delta_{2,2} = \sum \int \frac{m_2^2}{EI} ds + \sum \int \frac{n_2^2}{EA} ds = \frac{1}{EI_g} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{EA_s} (1 \cdot 5) \cdot 1$$



Slika 19.

$$= \delta_{2,2}^g + \delta_{2,2}^s = 0,000\,609\,663 + 1,851\,85 \cdot 10^{-6} = 0,000\,611\,515,$$

$$\delta_{3,3} = \sum \int \frac{m_3^2}{EI} ds + \sum \int \frac{n_3^2}{EA} ds = \frac{1}{EI_g} (1 \cdot 5) \cdot 1 + \frac{1}{EI_s} (1 \cdot 5) \cdot 1 = 0,000\,320\,073,$$

$$\delta_{1,2} = \sum \int \frac{m_2 m_1}{EI} ds + \sum \int \frac{n_2 n_1}{EA} ds = 0 + 0 = 0,$$

$$\delta_{1,3} = \sum \int \frac{m_3 m_1}{EI} ds + \sum \int \frac{n_3 n_1}{EA} ds = \frac{1}{EI_s} (1 \cdot 5) \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \right) (-1) = -0,000\,617\,284$$

i

$$\delta_{2,3} = \sum \int \frac{m_3 m_2}{EI} ds + \sum \int \frac{n_3 n_2}{EA} ds = \frac{1}{EI_g} (1 \cdot 5) \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \right) (-1) = -0,000\,182\,899,$$

dok su *slobodni članovi jednadžbi kompatibilnosti*

$$\begin{aligned}\delta_{1,0} &= \sum \int \frac{M_0 m_1}{EI} ds + \sum \int \frac{N_0 n_1}{EA} ds = \frac{1}{EI_s} \left( \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 2,5 \right) \left( \frac{5}{6} \cdot 5 \right) (-1) \\ &= -0,0321502,\end{aligned}$$

$$\delta_{2,0} = \sum \int \frac{M_0 m_2}{EI} ds + \sum \int \frac{N_0 n_2}{EA} ds = \frac{1}{EI_g} \left( \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 2,5 \right) \left( \frac{5}{6} \cdot 5 \right) = 0,0190520$$

i

$$\begin{aligned}\delta_{3,0} &= \sum \int \frac{M_0 m_3}{EI} ds + \sum \int \frac{N_0 n_3}{EA} ds \\ &= \frac{1}{EI_g} \left( \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 2,5 \right) \cdot 1 \cdot (-1) + \frac{1}{EI_s} \left( \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 2,5 \right) \cdot 1 = 0,00314358\end{aligned}$$

(pribrojnici sive boje u drugim podizrazima nekih izraza pribrojnici su koji su očito jednaki nuli —  $n_3$  i  $N_0$  identički su jednake nuli,  $n_3 \equiv 0$  i  $N_0 \equiv 0$ ).

**11.** Uvrštavanjem u jednadžbe kompatibilnosti, uz prebacivanje slobodnih članova (vrijednosti kojih su poznate) na desne strane znakova jednakosti,

$$\delta_{1,1} X_1 + \quad + \delta_{1,3} X_3 = -\delta_{1,0}, \quad (\spadesuit_1)$$

$$\delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,3} X_3 = -\delta_{2,0}, \quad (\clubsuit_1)$$

$$\delta_{3,1} X_1 + \delta_{3,2} X_2 + \delta_{3,3} X_3 = -\delta_{3,0}, \quad (\diamondsuit_1)$$

dobivamo sustav

$$0,00205884 X_1 \quad \quad \quad - 0,000617284 X_3 = 0,0321502, \quad (\spadesuit_2)$$

$$0,000611515 X_2 - 0,000182899 X_3 = -0,0190520, \quad (\clubsuit_2)$$

$$-0,000617284 X_1 - 0,000182899 X_2 + 0,000320073 X_3 = -0,00314358. \quad (\diamondsuit_2)$$

Njegovo je rješenje

$$X_1 = 18,5934, \quad X_2 = -28,1850 \quad \mathcal{E} \quad X_3 = 9,93143.$$

**12.** Vrijednosti momenata savijanja u karakterističnim točkama izračunavamo prema izrazu

$$M(x) = M_0(x) + X_1 m_1(x) + X_2 m_2(x) + X_3 m_3(x),$$

pa su

- ♦ na početku grede<sup>§</sup>:

$$M_2 = -250 + 18,5933 \cdot 0 + (-28,1850) \cdot (-5) + 9,93143 \cdot 1 = -99,1436,$$

<sup>§</sup> Pri određivanju predznaka vrijednosti unutarnjih sila uzet ćemo da su osi koordinatnih sustava njihovih dijagrama orijentirane kao osi lokalnih koordinatnih sustava grede i stupa na slici 3.

- ♦ u polovištu grede:

$$M_{\ell/2} = 0 + 18,5933 \cdot 0 + (-28,1850) \cdot (-2,5) + 9,93143 \cdot 1 = 80,3939,$$

- ♦ na kraju grede:

$$M_{3,g} = 0 + 18,5933 \cdot 0 + (-28,1850) \cdot 0 + 9,93143 \cdot 1 = 9,93143,$$

- ♦ na vrhu stupa:

$$M_{3,s} = 0 + 18,5933 \cdot 0 + (-28,1850) \cdot 0 + 9,93143 \cdot (-1) = -9,93143,$$

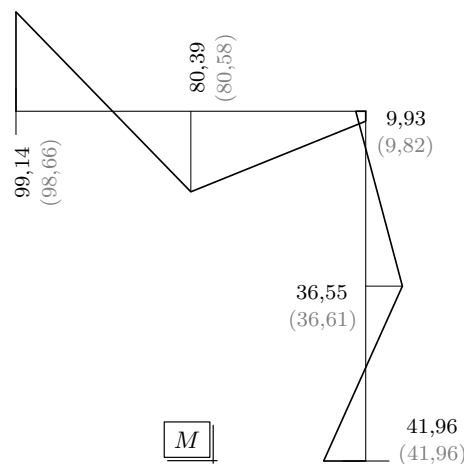
- ♦ u polovini visine stupa:

$$M_{h/2} = 0 + 18,5933 \cdot 2,5 + (-28,1850) \cdot 0 + 9,93143 \cdot (-1) = 36,5518,$$

- ♦ na dnu stupa:

$$M_1 = -125 + 18,5933 \cdot 5 + (-28,1850) \cdot 0 + 9,93143 \cdot (-1) = -41,9649.$$

Momentni dijagram na izvornom sistemu prikazan je na slici 20. (intenziteti momenata upisani su crnim brojkama; sive će brojke biti objašnjene u odsječku 26.), a progibna je linija izvornoga sistema prikazana na slici 21. (usporedite je s progibnom linijom osnovnoga sistema na slici 12.).



Slika 20.

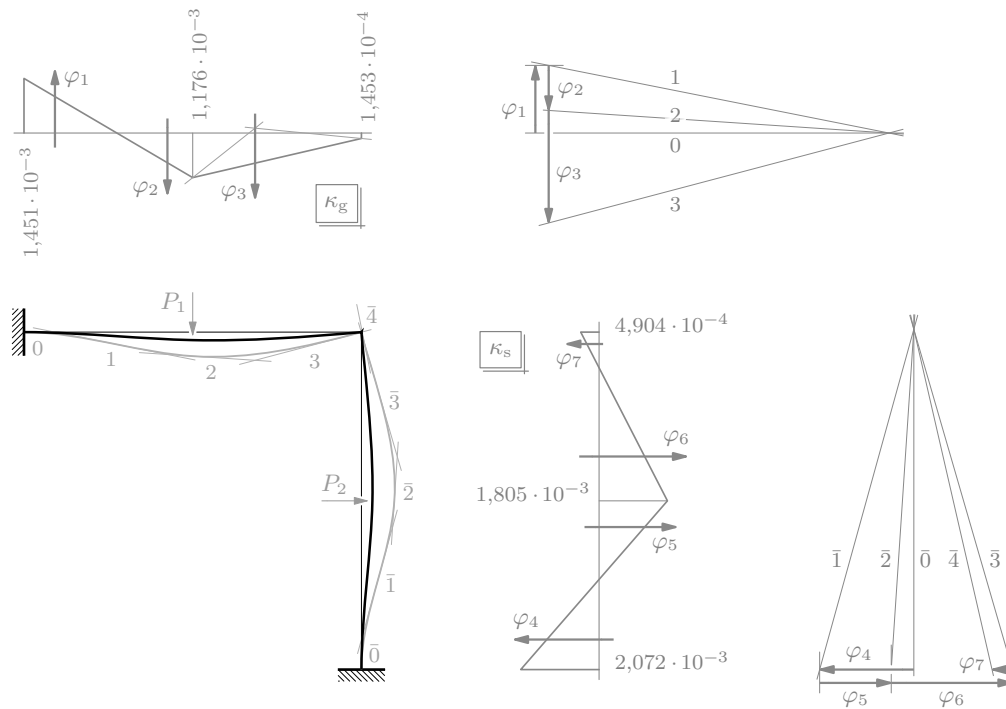
**13.** Vrijednosti poprečnih sila u karakterističnim točkama izračunat ćemo (na temelju diferencijalnoga odnosa funkcija poprečnih sila i momenata savijanja,  $T(x) = M'(x)$ ) kao nagibe odsječaka pravaca od kojih je sastavljen momentni dijagram:

$$T_2 = T_{\ell/2}^{\text{lijevo}} = \frac{99,1436 + 80,3939}{2,5} = 71,8150,$$

$$T_{\ell/2}^{\text{desno}} = T_{3,g} = -\frac{80,3939 - 9,93143}{2,5} = -28,1850,$$

$$T_{3,s} = T_{h/2}^{\text{gore}} = -\frac{36,5518 + 9,9343}{2,5} = -18,5944,$$

$$T_{h/2}^{\text{dolje}} = T_1 = \frac{41,9649 + 36,5518}{2,5} = 31,4067.$$



Slika 21.

Budući da smo nacrtali dijagrame uzdužnih sila na osnovnom sistemu, vrijednosti uzdužnih sila možemo izračunati prema izrazu

$$N(x) = N_0(x) + \sum_{i=1}^3 X_i n_i(x),$$

pa su

$$N_g = X_1 n_{1,g} = 18,5933 \cdot 1 = 18,5933,$$

$$N_s = X_2 n_{2,s} = (-28,1850) \cdot 1 = -28,1850.$$

(Uz poznate vrijednosti poprečnih sila na kraju grede i na vrhu stupa možemo vrijednosti  $N_g$  i  $N_s$  izračunati i iz uvjeta ravnoteže sila koje djeluju na čvor 3, spoj stupa i grede. [Napišite odgovorajuće jednadžbe!])

Dijagrami poprečnih i uzdužnih sila prikazani su na slici 22. (s vrijednostima upisanim crnim brojkama).

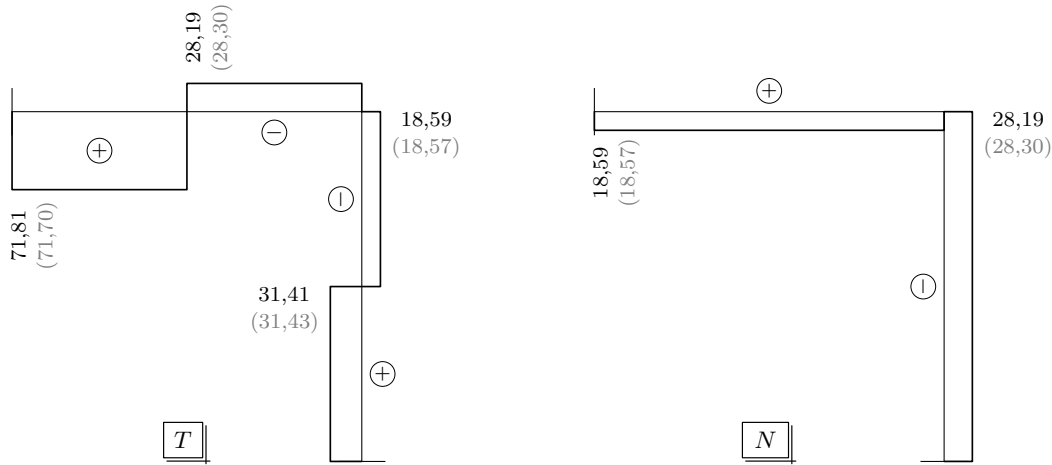
**14.** U proračunima metodama pomaka vrijednosti su sila i momenata zbrojevi vrijednosti sila i momenata prouzročenih djelovanjem zadanoga opterećenja na osnovni sistem metode pomaka (ili vrijednosti sila u stanju *spriječenih pomaka čvorova* ili vrijednosti *sila upetosti*) i vrijednosti sila i momenata prouzročenih prisilnim pomacima zamišljenih spojeva s podlogom (ili vrijednosti sila u stanju *prisilnih pomaka čvorova*), te su

$$N_{i,j} = \bar{N}_{i,j} + n_{i,j},$$

$$T_{i,j} = \bar{T}_{i,j} + t_{i,j},$$

$$M_{i,j} = \bar{M}_{i,j} + m_{i,j},$$





Slika 22.

pa jednadžbe ravnoteže ( $\leftarrow$ ), ( $\triangleleft$ ), ( $\leftarrow$ ) prelaze u

$$-(\bar{N}_{3,2} + n_{3,2}) - (\bar{T}_{3,1} + t_{3,1}) = 0, \quad (\leftarrow_1)$$

$$-(\bar{T}_{3,2} + t_{3,2}) + (\bar{N}_{3,1} + n_{3,1}) = 0, \quad (\triangleleft_1)$$

$$-(\bar{M}_{3,2} + m_{3,2}) - (\bar{M}_{3,1} + m_{3,1}) = 0. \quad (\leftarrow_1)$$

**15.** U odjeljku 11.7.5. bilježaka s predavanja (<http://master.grad.hr/nastava/gS/gS1/gS1.pdf>) izvedeni su izrazi za vrijednosti unutarnjih sila na krajevima obostrano upete grede duljine  $\ell$  za opterećenje koncentriranom silom kojoj su vrijednosti komponenta  $P_\xi$  u smjeru osi grede i  $P_\zeta$  okomito na os i kojoj je hvatište za  $a$  udaljeno od lijevoga kraja (i za  $b$  od desnoga,  $\ell = a + b$ ):

$$N(0) = \frac{P_\xi b}{\ell}, \quad T(0) = \frac{P_\zeta b^2 (3a + b)}{\ell^3}, \quad M(0) = -\frac{P_\zeta ab^2}{\ell^2},$$

$$N(\ell) = -\frac{P_\xi a}{\ell}, \quad T(\ell) = -\frac{P_\zeta a^2 (3\ell - 2a)}{\ell^3}, \quad M(\ell) = -\frac{P_\zeta a^2 b}{\ell^2}.$$

Ako su  $a = b = \ell/2$ , izrazi se pojednostavnjuju u

$$N(0) = \frac{P_\xi}{2}, \quad T(0) = \frac{P_\zeta}{2}, \quad M(0) = -\frac{P\ell}{8},$$

$$N(\ell) = -\frac{P_\xi}{2}, \quad T(\ell) = -\frac{P_\zeta}{2}, \quad M(\ell) = -\frac{P\ell}{8},$$

pa su vrijednosti sila upetosti (uz usklađivanje predznaka s dogovorom o pozitivnim orijentacijama sila na krajevima u metodama pomaka)

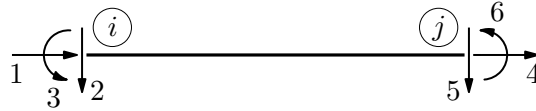
$$\bar{T}_{2,3} = -\frac{P_1}{2} = -50, \quad \bar{T}_{3,2} = -\frac{P_1}{2} = -50, \quad \bar{N}_{2,3} = \bar{N}_{3,2} = 0,$$

$$\bar{M}_{2,3} = \frac{P_1 \ell}{8} = 62,5, \quad \bar{M}_{3,2} = -\frac{P_1 \ell}{8} = -62,5,$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{1,3} &= -\frac{P_2}{2} = -25, & \bar{T}_{3,1} &= -\frac{P_2}{2} = -25, & \bar{N}_{1,3} &= \bar{N}_{3,1} = 0, \\ \bar{M}_{1,3} &= \frac{P_2 \ell}{8} = 31,25, & \bar{M}_{3,1} &= -\frac{P_2 \ell}{8} = -31,25.\end{aligned}$$

Dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila u stanju spriječenih pomaka prikazani su na slici 8. (predznaci u dijagramu poprečnih sila su, dakako, dogovorni predznaci vrijednosti unutarnjih sila.)

**16.** Svrstamo li vrijednosti sila i momenata na krajevima štapa u stanju prisilnih pomaka i (orijentirane) duljine pomaka i kutove zaokretā krajeva u jednostupčane matrice



Slika 23.

redosljedom prema slici 23., njihova je algebarska veza dana matričnim izrazom (307) na stranici 285 bilježaka s predavanja,

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 & -k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 0 & -\frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} \\ 0 & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 4 k_{\{i,j\}}^f & 0 & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 2 k_{\{i,j\}}^f \\ -k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 & k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 0 & \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} \\ 0 & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & -2 k_{\{i,j\}}^f & 0 & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 4 k_{\{i,j\}}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix}.$$

Koeficijenti su aksijalnih i fleksijskih krutosti štapova

$$\begin{aligned}k_{\{2,3\}}^a &= \frac{EA_g}{\ell_{\{2,3\}}} = 810\,000 \text{ kN/m}, & k_{\{2,3\}}^f &= \frac{EI_g}{\ell_{\{2,3\}}} = 13\,668,75 \text{ kNm}, \\ k_{\{1,3\}}^a &= \frac{EA_s}{\ell_{\{1,3\}}} = 540\,000 \text{ kN/m}, & k_{\{1,3\}}^f &= \frac{EI_s}{\ell_{\{1,3\}}} = 4\,050 \text{ kNm},\end{aligned}$$

pa uvrštavanjem dobivamo matrične veze (☺) i (☹) na sljedećoj stranici.

U jednadžbe ravnoteže sila i momenata u čvoru 3 ulaze (izrazi za) vrijednosti sila i momenata na krajevima 3 štapova  $\{2,3\}$  i  $\{1,3\}$ . Pomaci i zaokreti krajeva štapova

$$\begin{bmatrix} n_{2,3} \\ t_{2,3} \\ m_{2,3} \\ \hline n_{3,2} \\ t_{3,2} \\ m_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 810\,000 & 0 & 0 & -810\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 6\,561 & -16\,402,5 & 0 & -6\,561 & -16\,402,5 \\ 0 & -16\,402,5 & 54\,675 & 0 & 16\,402,5 & 27\,337,5 \\ -810\,000 & 0 & 0 & 810\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -6\,561 & 16\,402,5 & 0 & 6\,561 & 16\,402,5 \\ 0 & -16\,402,5 & 27\,337,5 & 0 & 16\,402,5 & 54\,675 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,3} \\ w_{2,3} \\ \varphi_{2,3} \\ \hline u_{3,2} \\ w_{3,2} \\ \varphi_{3,2} \end{bmatrix} \quad (\text{⊕})$$

$$\begin{bmatrix} n_{1,3} \\ t_{1,3} \\ m_{1,3} \\ \hline n_{3,1} \\ t_{3,1} \\ m_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 540\,000 & 0 & 0 & -540\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 1\,944 & -4\,860 & 0 & -1\,944 & -4\,860 \\ 0 & -4\,860 & 16\,200 & 0 & 4\,860 & 8\,100 \\ -540\,000 & 0 & 0 & 540\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -1\,944 & 4\,860 & 0 & 1\,944 & 4\,860 \\ 0 & -4\,860 & 8\,100 & 0 & 4\,860 & 16\,200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,3} \\ w_{1,3} \\ \varphi_{1,3} \\ \hline u_{3,1} \\ w_{3,1} \\ \varphi_{3,1} \end{bmatrix} \quad (\text{⊗})$$

jednaki su pomacima i zaokretima čvorova u koje su priključeni. Kako su čvorovi 1 i 2 ležajni, njihovih pomaka i zaokreta nema, pa su za oblikovanje jednadžbi ravnoteže potrebne samo veze vrijednosti sila i momenata na krajevima 3 štapova i duljina pomakā i kutova zaokretā tih krajeva. Množenja odgovarajućih dijelova jednostupčanih matrica duljina pomakā i kutova zaokretā podmatricama matrica krutosti koji su u izrazima (☺) i (☹) odvojeni crtama daju

$$\begin{aligned}
n_{3,2} &= 810\,000 \cdot u_{3,2} + 0 \cdot w_{3,2} + 0 \cdot \varphi_{3,2}, \\
t_{3,2} &= 0 \cdot u_{3,2} + 6\,561 \cdot w_{3,2} + 16\,402,5 \cdot \varphi_{3,2}, \\
m_{3,2} &= 0 \cdot u_{3,2} + 16\,402,5 \cdot w_{3,2} + 54\,675 \cdot \varphi_{3,2}, \\
n_{3,1} &= 540\,000 \cdot u_{3,1} + 0 \cdot w_{3,1} + 0 \cdot \varphi_{3,1}, \\
t_{3,1} &= 0 \cdot u_{3,1} + 1\,944 \cdot w_{3,1} + 4\,860 \cdot \varphi_{3,1}, \\
m_{3,1} &= 0 \cdot u_{3,1} + 4\,860 \cdot w_{3,1} + 16\,200 \cdot \varphi_{3,1}.
\end{aligned}$$

**17.** Uvrštavanjem vrijednosti sila upetosti i odgovarajućih umnožaka (dijelova) redaka matrica upetosti i (dijelova) jednostupčanih matrica duljina pomakā i kutova zaokretā u jednadžbe (☛<sub>1</sub>), (ℒ<sub>1</sub>), (℔<sub>1</sub>) dobivamo

$$\begin{aligned}
-[810\,000 \cdot u_{3,2}] - [-25 + 1\,944 \cdot w_{3,1} + 4\,860 \cdot \varphi_{3,1}] &= 0, & (\text{☛}_2) \\
-[-50 + 6\,561 \cdot w_{3,2} + 16\,402,5 \cdot \varphi_{3,2}] + [540\,000 \cdot u_{3,1}] &= 0, & (\mathcal{L}_2) \\
-[-62,5 + 16\,402,5 \cdot w_{3,2} + 54\,675 \cdot \varphi_{3,2}] & & \\
-[-31,25 + 4\,860 \cdot w_{3,1} + 16\,200 \cdot \varphi_{3,1}] &= 0. & (\text{℔}_2)
\end{aligned}$$

**18.** Ovisnosti vrijednosti sila i momenata o duljinama pomakā i kutovima zaokretā krajeva štapova izražene su u (☺) i (☹) u lokalnim koordinatnim sustavima u kojima se lokalne osi  $\xi_{(i,j)}$  poklapaju s osima štapova (slika 3.). Duljine pomakā i kutovi zaokretā čvorova, kao nepoznanice u metodama pomakā, izražavaju se u globalnom koordinatnom sustavu. Os  $\xi_{(2,3)}$  štapa  $\{2,3\}$  usporedna je s osi  $x$  globalnoga koordinatnog sustava i ima isti smisao, a usporedne su i imaju isti smisao i osi  $\zeta_{(2,3)}$  i  $z$ , pa su

$$u_{3,2} = u_3 \quad \mathcal{E} \quad w_{3,2} = w_3.$$

Os  $\xi_{(1,3)}$  štapa  $\{1,3\}$  usporedna je s osi  $z$ , ali joj je smisao suprotan, dok je os  $\zeta_{(1,3)}$  usporedna s osi  $x$ , i istoga je smisla; stoga su

$$u_{3,1} = -w_3 \quad \mathcal{E} \quad w_{3,1} = u_3.$$

Osi  $\eta_{(2,3)}$  i  $\eta_{(1,3)}$  su, naravno, okomite na ravninu sistema i stoga usporedne s osi  $y$ , a i smisao im je isti (svi su koordinatni sustavi desni), pa su

$$\varphi_{3,2} = \varphi_{3,1} = \varphi_3.$$

19. S „pravim” su nepoznanicama jednadžbe ravnoteže sila u čvoru 3

$$-[810\,000 \cdot u_3] - [-25 + 1\,944 \cdot u_3 + 4\,860 \cdot \varphi_3] = 0, \quad (\text{---}_3)$$

$$-[-50 + 6\,561 \cdot w_3 + 16\,402,5 \cdot \varphi_3] + [540\,000 \cdot (-w_3)] = 0, \quad (\mathcal{L}_3)$$

$$\begin{aligned} & -[-62,5 + 16\,402,5 \cdot w_3 + 54\,675 \cdot \varphi_3] \\ & -[-31,25 + 4\,860 \cdot u_3 + 16\,200 \cdot \varphi_3] = 0. \end{aligned} \quad (\text{---}_3)$$

ili, nakon sređivanja, prebacivanja poznatih vrijednosti na desne strane znakova jednakosti i množenja jednadžbi s  $-1$ ,

$$811\,944 \cdot u_3 + 4\,860 \cdot \varphi_3 = 25, \quad (\text{---}_4)$$

$$546\,561 \cdot w_3 + 16\,402,5 \cdot \varphi_3 = 50, \quad (\mathcal{L}_4)$$

$$4\,860 \cdot u_3 + 16\,402,5 \cdot w_3 + 70\,875 \cdot \varphi_3 = 93,75. \quad (\text{---}_4)$$

Rješenje je toga sustava jednadžbi ravnoteže

$$u_3 = 2,295\,45 \cdot 10^{-5}, \quad w_3 = 5,219\,46 \cdot 10^{-5} \quad \& \quad \varphi_3 = 0,001\,309\,10.$$

20. Za izračunavanje vrijednosti sila i momenata na krajevima štapova duljine pomakā i kut zaokreta čvora 3 treba „pretvoriti” u duljine pomakā i kutove zaokretā u čvor 3 priključenih krajeva štapova:

$$u_{3,2} = u_3 = 2,295\,45 \cdot 10^{-5}, \quad u_{3,1} = -w_3 = -5,219\,46 \cdot 10^{-5},$$

$$w_{3,2} = w_3 = 5,219\,46 \cdot 10^{-5}, \quad w_{3,1} = u_3 = 2,295\,45 \cdot 10^{-5},$$

$$\varphi_{3,2} = \varphi_3 = 0,001\,309\,10, \quad \varphi_{3,1} = \varphi_3 = 0,001\,309\,10.$$

Vrijednosti su sila i momenata na krajevima štapa  $\{2, 3\}$

$$\begin{bmatrix} N_{2,3} \\ T_{2,3} \\ M_{2,3} \\ N_{3,2} \\ T_{3,2} \\ M_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(2,3)}_{2,2} & \mathbf{k}^{(2,3)}_{2,3} \\ \mathbf{k}^{(2,3)}_{3,2} & \mathbf{k}^{(2,3)}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3,2} \\ w_{3,2} \\ \varphi_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{N}_{2,3} \\ \bar{T}_{2,3} \\ \bar{M}_{2,3} \\ \bar{N}_{3,2} \\ \bar{T}_{3,2} \\ \bar{M}_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(2,3)}_{2,3} \\ \mathbf{k}^{(2,3)}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3,2} \\ w_{3,2} \\ \varphi_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{N}_{2,3} \\ \bar{T}_{2,3} \\ \bar{M}_{2,3} \\ \bar{N}_{3,2} \\ \bar{T}_{3,2} \\ \bar{M}_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -810\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -6\,561 & -16\,402,5 \\ 0 & 16\,402,5 & 27\,337,5 \\ 810\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 6\,561 & 16\,402,5 \\ 0 & 16\,402,5 & 54\,675 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,295\,45 \cdot 10^{-5} \\ 5,219\,46 \cdot 10^{-5} \\ 0,001\,309\,10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 62,5 \\ 0 \\ -50 \\ -62,5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -18,5931 \\ -21,8150 \\ 36,6436 \\ 18,5931 \\ 21,8150 \\ 72,4312 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 62,5 \\ 0 \\ -50 \\ -62,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,5931 \\ -71,8150 \\ 99,1436 \\ 18,5931 \\ -28,1850 \\ 9,93120 \end{bmatrix},$$

dok su vrijednosti sila i momenata na krajevima štapa  $\{1, 3\}$

$$\begin{bmatrix} N_{1,3} \\ T_{1,3} \\ M_{1,3} \\ N_{3,1} \\ T_{3,1} \\ M_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(1,3)1,1} & \mathbf{k}_{(1,3)1,3} \\ \mathbf{k}_{(1,3)3,1} & \mathbf{k}_{(1,3)3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3,1} \\ w_{3,1} \\ \varphi_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,3} \\ \bar{T}_{1,3} \\ \bar{M}_{1,3} \\ \bar{N}_{3,1} \\ \bar{T}_{3,1} \\ \bar{M}_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(1,3)1,3} \\ \mathbf{k}_{(1,3)3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3,1} \\ w_{3,1} \\ \varphi_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,3} \\ \bar{T}_{1,3} \\ \bar{M}_{1,3} \\ \bar{N}_{3,1} \\ \bar{T}_{3,1} \\ \bar{M}_{3,1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -540000 & 0 & 0 \\ 0 & -1944 & -4860 \\ 0 & 4860 & 8100 \\ 540000 & 0 & 0 \\ 0 & 1944 & 4860 \\ 0 & 4860 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5,21946 \cdot 10^{-5} \\ 2,29545 \cdot 10^{-5} \\ 0,00130910 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 31,25 \\ 0 \\ -25 \\ -31,25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28,1851 \\ -6,40800 \\ 10,7153 \\ -28,1851 \\ 6,40800 \\ 21,3190 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 31,25 \\ 0 \\ -25 \\ -31,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,1851 \\ -31,4080 \\ 41,9653 \\ -28,1851 \\ -18,5920 \\ -9,93100 \end{bmatrix}.$$

„Neravnoteža” u čvoru 3 ( $N_{3,2} \neq |T_{3,1}|$ ,  $T_{3,2} \neq N_{3,1}$  i  $M_{3,2} \neq |M_{3,1}|$ , odnosno razlike u zadnje dvije ili u zadnjoj znamenici između vrijednosti sila i momenata:  $18,5931 \neq |-18,5920|$ ,  $-28,1850 \neq -28,1851$  i  $9,93120 \neq |-9,93100|$ ) posljedica je pogrešaka zaokruživanja (na šest značajnih znamenaka) i njihova gomilanja.

Nacrtamo li pomoću izračunanih vrijednosti dijagrame unutarnjih sila, oni se (gotovo<sup>¶</sup>) neće razlikovati od dijagrama prikazanih na slikama 20. i 22., nacrtanih pomoću vrijednosti izračunanih metodom sila (upisanih crnim brojkama).

<sup>¶</sup> Dvije su nebitne razlike: zaokruživanjem 41,9653 na dvije decimale dobivamo 41,97 (a ne 41,96 kao u dijagramu  $M$ ), a zaokruživanjem 71,8150 dobivamo 71,82 (a ne 71,81 kao u dijagramu  $T$ ).

**21.** „Komponenta  $k_{(i,j)_{a,b}}$ ,  $a, b = 1, \dots, 6$ , matrice  $\mathbf{k}_{(i,j)}$  vrijednost je sile s indeksom  $a$ ,  $f_{(i,j)_a}$ , izazvane jediničnom komponentom pomaka s indeksom  $b$ ,  $u_{(i,j)_b} = 1$  (pri čemu brojke na slici 23. daju vrijednosti indeksa  $a$  u  $f_{(i,j)_a}$  i  $b$  u  $u_{(i,j)_b}$ )” [citirano sa stranice 286 bilježaka s predavanja]. Ako je  $k_{(i,j)_{a,b}}$  vrijednost sile ili momenta izazvanoga pomakom jedinične duljine ili zaokretom za jedinični kut, onda će pomak duljine  $u$  ili zaokret za kut  $\varphi$  izazvati silu ili moment vrijednost kojega je  $u \cdot k_{(i,j)_{a,b}}$  ili  $\varphi \cdot k_{(i,j)_{a,b}}$ . Prema tome, vrijednosti sila i momenata na krajevima štapova  $\{2, 3\}$  i  $\{1, 3\}$ , izazvanih pomakom ili zaokretom čvora 3 (kao, primjerice, u odsječku 7.) možemo izračunati tako da odgovarajuće stupce matrica krutosti u izrazima  $(\odot)$  i  $(\ominus)$  pomnožimo duljinama pomaka i kutom zaokreta čvora 3.

**22.** U odsječku 9. smo pomoću slike 18. neposredno oblikovali jednadžbe ravnoteže sila i momenata u čvoru 3. Potom smo u odsječcima 18. i 19. pomoću slike 3. u te jednadžbe kao nepoznanice uveli duljine pomaka i kut zaokreta čvora. Računalo, međutim, slike ne vidi; u računalnom se programu jednadžbe ravnoteže sastavljaju matričnim operacijama.

Sile kojima štapovi  $\{2, 3\}$  i  $\{1, 3\}$  djeluju na čvor 3 definirane su kao sile usporedne s osima lokalnih koordinatnih sustava tih štapova — to su uzdužne i poprečne sile na krajevima 3 tih štapova. Skalarni jednadžbe ravnoteže jednadžbe su ravnoteže (skalarnih) projekcija sila na osi globalnoga koordinatnog sustava — govorimo o ravnoteži horizontalnih i ravnoteži vertikalnih sila. Vrijednosti tih projekcija treba stoga izraziti kao funkcije vrijednosti sila usporednih s lokalnim osima. (Momentne su osi u oba koordinatna sustava iste, okomite na ravninu sistema.)

Sile na krajevima štapova izazvane pomacima krajeva definirane su kao funkcije duljina uzdužnih i poprečnih pomaka, dakle pomaka usporednih s osima lokalnih koordinatnih sustava. Nepoznanice opće metode pomaka su, međutim, duljine horizontalnih i vertikalnih pomaka čvorova, dakle pomaka usporednih s osima globalnoga sustava, tako da duljine pomaka usporednih s lokalnim osima treba izraziti kao funkcije duljina pomaka usporednih s globalnim osima. (Osi zaokreta u oba su sustava iste.) U našem primjeru priču ponešto pojednostavljuje činjenica da pomaka i zaokreta čvorova 1 i 2 nema, tako da sile i momenti na krajevima 3 štapova ovise samo o pomacima i zaokretima krajeva 3, što znači samo o pomacima i zaokretu čvora 3.

U odjeljku 12.3.6. bilježaka s predavanja izvedeni su izrazi za potrebne pretvorbe:

$$\mathbf{f}_{(i,3)_3}^g = \mathbf{k}_{(i,3)_{3,3}}^g \mathbf{u}_3 = \left[ \left[ \mathbf{r}_{(i,3)}^{(g \rightarrow \ell)} \right]^T \mathbf{k}_{(i,3)_{3,3}} \mathbf{r}_{(i,3)}^{(g \rightarrow \ell)} \right] \mathbf{u}_3 \quad \mathcal{E}' \quad \bar{\mathbf{f}}_{(i,3)_3}^g = \left[ \mathbf{r}_{(i,3)}^{(g \rightarrow \ell)} \right]^T \bar{\mathbf{f}}_{(i,3)_3},$$

gdje je

$$\mathbf{r}_{(i,3)}^{(g \rightarrow \ell)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,3)} & -\sin \alpha_{(i,3)} & 0 \\ \sin \alpha_{(i,3)} & \cos \alpha_{(i,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrica rotacije za kut  $\alpha_{(i,3)}$ , pri čemu je  $\alpha_{(i,3)}$  kut između globalne osi  $x$  i lokalne osi  $\xi_{(i,3)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Osi lokalnoga koordinatnog sustava štapa  $\{2,3\}$  usporedne su s osima globalnoga sustava, te je matrica transformacije jedinična matrica, tako da su

$$\mathbf{k}_{(2,3)_{3,3}}^g = \mathbf{k}_{(2,3)_{3,3}} = \begin{bmatrix} 810\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 6\,561 & 16\,402,5 \\ 0 & 16\,402,5 & 54\,675 \end{bmatrix}$$

i

$$\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_3}^g = \bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_3} = [0 \quad -50 \quad -62,5]^T.$$

Kut između osi  $x$  i osi  $\xi_{(1,3)}$  je  $\pi/2$ , pa su

$$\mathbf{r}_{(1,3)}^{(g \rightarrow \ell)} = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 & 0 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{k}_{(1,3)_{3,3}}^g = \left[ \mathbf{r}_{(1,3)}^{(g \rightarrow \ell)} \right]^T \mathbf{k}_{(1,3)_{3,3}} \mathbf{r}_{(1,3)}^{(g \rightarrow \ell)} = \begin{bmatrix} 1\,944 & 0 & 4\,860 \\ 0 & 540\,000 & 0 \\ 4\,860 & 0 & 16\,200 \end{bmatrix}$$

te

$$\bar{\mathbf{f}}_{(1,3)_3}^g = \left[ \mathbf{r}_{(1,3)}^{(g \rightarrow \ell)} \right]^T \bar{\mathbf{f}}_{(1,3)_3} = [-25 \quad 0 \quad -31,25]^T.$$

**23.** Matrica sustava jednadžbi ravnoteže je prema odjeljku 12.3.7. bilježaka s predavanja  $\mathbf{k}_{(2,3)_{3,3}}^g + \mathbf{k}_{(1,3)_{3,3}}^g$ , dok je jednostupčana matrica slobodnih članova  $\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_3}^g + \bar{\mathbf{f}}_{(1,3)_3}^g$  (s lijeve strane znaka jednakosti; prenošenjem na desnu stranu mijenjaju se predznaci komponenta), pa je matični zapis sustava jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 811\,944 & 0 & 4\,860 \\ 0 & 546\,561 & 16\,402,5 \\ 4\,860 & 16\,402,5 & 70\,875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 93,75 \end{bmatrix}. \quad \left( \leftarrow \mathcal{D} \rightarrow \right)$$

**24.** Koeficijent popustljivosti  $\delta_{1,1}$ , duljina projekcije razmaka kraja grede i vrha stupa osnovnoga sistema na pravac djelovanja jediničnih sila para  $\mp \vec{\mathbf{I}}_1$  pri njihovu djelovanju, zbroj je duljine pomaka vrha stupa zbog njegova savijanja,  $\delta_{1,1}^s = 2,05761 \cdot 10^{-3}$ , i duljine pomaka kraja grede zbog njezina rastezanja,  $\delta_{1,1}^g = 1,23457 \cdot 10^{-6}$ . Kako je  $\delta_{1,1}^s / \delta_{1,1}^g = 2,058 \cdot 10^{-3} / 1,235 \cdot 10^{-6} \simeq 1,7 \cdot 10^3$ , produljenje se grede može zanemariti.

Slično tome, koeficijent  $\delta_{2,2}$ , duljina projekcije razmaka kraja grede i vrha stupa osnovnoga sistema na pravac djelovanja jediničnih sila para  $\mp \vec{\mathbf{I}}_2$  pri njihovu djelovanju, zbroj je duljine pomaka vrha stupa zbog njegovoga skraćanja,  $\delta_{2,2}^s = 1,85185 \cdot 10^{-6}$ , i duljine pomaka kraja grede zbog njezina savijanja,  $\delta_{2,2}^g = 0,000609663$ . Iako je omjer tih duljina,



$\delta_{2,2}^g/\delta_{2,2}^s = 6,097 \cdot 10^{-4}/1,852 \cdot 10^{-6} \simeq 330$ , (znatno) manji nego onih prije, dovoljan je da se i skraćenje stupa može zanemariti.

**25.** Zanemarimo li pomake zbog promjena duljina grede i stupa (drugim riječima, utjecaj uzdužnih sila<sup>l</sup>), sustav je jednadžbi kompatibilnosti

$$\begin{aligned} 0,002\,057\,61 X_1 & & - 0,000\,617\,284 X_3 & = & 0,032\,150\,2, & (\spadesuit_3) \\ & & 0,000\,609\,663 X_2 - 0,000\,182\,899 X_3 & = & -0,019\,052\,0, & (\clubsuit_3) \\ -0,000\,617\,284 X_1 - 0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,320\,073 X_3 & = & -0,003\,143\,58, & (\diamondsuit_3) \end{aligned}$$

a njegovo je rješenje

$$X_1 = 18,5715, \quad X_2 = -28,3036 \quad \& \quad X_3 = 9,82147.$$

Razlike su vrijednosti neodređenih veličina izračunanih s utjecajem uzdužnih sila na duljine pomaka i bez njega

$$\begin{aligned} X_1 : & \quad 18,5934 - 18,5715 = 0,0219, \\ X_2 : & \quad -28,1850 - (-28,3036) = 0,1186, \\ X_3 : & \quad 9,93143 - 9,82147 = 0,10996, \end{aligned}$$

dok su im relativne razlike

$$\begin{aligned} X_1 : & \quad 0,0219/18,5934 = 0,001178 = 0,12\%, \\ X_2 : & \quad 0,1186/|-28,1850| = 0,42\%, \\ X_3 : & \quad 0,10996/9,93143 = 1,11\%. \end{aligned}$$

**26.** Vrijednosti su momenata savijanja u karakterističnim točkama uz zanemarivanje utjecaja uzdužnih sila na duljine pomaka

$$\begin{aligned} M_2 = -98,6605, & \quad M_{\ell/2} = 80,5805, & \quad M_{3,g} = 9,82147, \\ M_{3,s} = -9,82147, & \quad M_{h/2} = 36,6073, & \quad M_1 = -41,9640. \end{aligned}$$

Apsolutne su i relativne razlike vrijednosti momenata izračunanih s utjecajem uzdužnih sila i bez njega

$$\begin{aligned} M_2 : & \quad -99,1436 - (-98,6605) = -0,4831, & \quad |-0,4831|/|-99,1436| = 0,49\%, \\ M_{\ell/2} : & \quad 80,3939 - 80,5805 = -0,1866, & \quad |-0,1866|/80,3939 = 0,23\%, \\ M_3 : & \quad 9,93143 - 9,82147 = 0,10996, & \quad 0,10996/9,93143 = 1,11\%, \\ M_{h/2} : & \quad 36,5518 - 36,6073 = -0,0555, & \quad |-0,0555|/36,5518 = 0,15\%, \\ M_1 : & \quad -41,9649 - (-41,9640) = -0,0009, & \quad |-0,0009|/|-41,9649| = 0,002\%. \end{aligned}$$

<sup>l</sup> ... numerički, uzmemo li iz predzadnjih podizraza izrazā za  $\delta_{1,1}$  i  $\delta_{2,2}$  u odsječku 10. samo prve pribrojnice...

Razlike potvrđuju da utjecaj uzdužnih sila na duljine pomakā možemo zanemariti bez prevelike grižnje savjesti.

Vrijednosti unutarnjih sila izračunane bez utjecaja uzdužnih sila su na slikama 20. i 22. upisane sivim brojkama.

**27.** Pri izračunavanju vrijednosti momenata savijanja na krajevima štapova zbog pomakā i zaokreta čvora 3 (prvi pribrojnici u predzadnjim podizrazima izrazā u odječku 20.) nismo obraćali pozornost na „veličine” pojedinih pribrojnika. No,

$$\begin{aligned} m_{2,3} &= k_{(2,3)_{3,5}} w_{3,2} + k_{(2,3)_{3,6}} \varphi_{3,2} \\ &= 16\,402,5 \cdot 5,219\,46 \cdot 10^{-5} + 27\,337,5 \cdot 0,001\,309\,10 \\ &= 0,856\,122 + 35,787\,5 = 36,643\,6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{3,2} &= k_{(2,3)_{6,5}} w_{3,2} + k_{(2,3)_{6,6}} \varphi_{3,2} \\ &= 16\,402,5 \cdot 5,219\,46 \cdot 10^{-5} + 54\,675 \cdot 0,001\,309\,10 \\ &= 0,856\,122 + 71,575\,0 = 72,431\,1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{3,1} &= k_{(1,3)_{6,5}} w_{3,1} + k_{(1,3)_{6,6}} \varphi_{3,1} \\ &= 4\,860 \cdot 2,295\,45 \cdot 10^{-5} + 16\,200 \cdot 0,001\,309\,10 \\ &= 0,111\,559 + 21,207\,4 = 21,319\,0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{1,3} &= k_{(1,3)_{3,5}} w_{3,1} + k_{(1,3)_{3,6}} \varphi_{3,1} \\ &= 4\,860 \cdot 2,295\,45 \cdot 10^{-5} + 8\,100 \cdot 0,001\,309\,10 \\ &= 0,111\,559 + 10,603\,7 = 10,715\,3. \end{aligned}$$

Omjeri su vrijednosti momenata zbog zaokreta čvora (za kut  $\varphi_3 = \varphi_{3,2} = \varphi_{3,1}$ ) i zbog poprečnih pomaka kraja grede (duljine  $w_{3,2} = w_3$ ) i vrha stupa (duljine  $w_{3,1} = u_3$ )

$$35,787\,5/0,856\,122 \simeq 42,$$

$$71,575\,0/0,856\,122 \simeq 84,$$

$$21,207\,4/0,111\,559 \simeq 109,$$

$$10,603\,7/0,111\,559 \simeq 95;$$

vrijednosti su momenata zbog poprečnih pomaka zanemarive u odnosu na vrijednosti zbog zaokreta čvora. Poprečni su pomaci kraja grede i vrha stupa vertikalna i horizontalna komponenta pomaka čvora 3. Ne smijemo, međutim, zaključiti da pomake čvorova možemo zanemariti, barem ne uvijek. U našem su primjeru komponente pomaka čvora skraćenje stupa i produljenje grede, a to su pomaci nastali djelovanjem uzdužnih sila u stupu i gredi. Samo se tako nastali pomaci mogu zanemariti. Inačica metode pomakā u kojoj se zanemaruju pomaci nastali djelovanjem uzdužnih sila naziva se *inženjerskom metodom pomakā*. (Naravno, ovo nije cijela priča o inženjerskoj metodi. Da jest, metoda ne bi zaslužila tako časno ime.)

**28.** Zanimarimo li pomake uzrokovane djelovanjem uzdužnih sila, izrazi su za vrijednosti momenata na krajevima

$$\begin{aligned} M_{2,3} &= k_{(2,3)_{3,6}} \varphi_3 + \bar{M}_{2,3} = 2 k_{\{2,3\}}^f \varphi_3 + \bar{M}_{2,3} \\ &= 2 \cdot 13\,668,75 \cdot \varphi_3 + 62,5 = 27\,337,5 \cdot \varphi_3 + 62,5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{3,2} &= k_{(2,3)_{6,6}} \varphi_3 + \bar{M}_{3,2} = 4 k_{\{2,3\}}^f \varphi_3 + \bar{M}_{3,2} \\ &= 4 \cdot 13\,668,75 \cdot \varphi_3 - 62,5 = 54\,675 \cdot \varphi_3 - 62,5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{3,1} &= k_{(1,3)_{6,6}} \varphi_3 + \bar{M}_{3,1} = 4 k_{\{1,3\}}^f \varphi_3 + \bar{M}_{3,1} \\ &= 4 \cdot 4\,050 \cdot \varphi_3 - 31,25 = 16\,200 \cdot \varphi_3 - 31,25, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1,3} &= k_{(1,3)_{3,6}} \varphi_3 + \bar{M}_{1,3} = 2 k_{\{1,3\}}^f \varphi_3 + \bar{M}_{1,3} \\ &= 2 \cdot 4\,050 \cdot \varphi_3 + 31,25 = 8\,100 \cdot \varphi_3 + 31,25. \end{aligned}$$

Jedina je nepoznanica sada kut  $\varphi_3$ . Iz jednadžbe ravnoteže momenata u čvoru 2,

$$-[-62,5 + 54\,675 \cdot \varphi_3] - [-31,25 + 16\,200 \cdot \varphi_3] = 0, \quad (\mathfrak{E}_6)$$

ili, nakon sređivanja,

$$70\,875 \cdot \varphi_3 = 93,75, \quad (\mathfrak{E}_7)$$

neposredno slijedi

$$\varphi_3 = 0,001\,322\,75,$$

pa su vrijednosti momenata na krajevima

$$M_{2,3} = 98,660\,7, \quad M_{3,2} = 9,821\,36,$$

$$M_{3,1} = -9,821\,45, \quad M_{1,3} = 41,964\,3;$$

te se vrijednosti samo u zadnjoj ili u zadnje dvije znamenke razlikuju od vrijednosti momenata izračunanih metodom sila uz zanemarivanje utjecaja uzdužnih sila (odsječak 26. i slika 20. (s vrijednostima upisanima sivim brojkama)).

**29.** Sustave jednadžbi kompatibilnosti ( $\spadesuit_2$ ), ( $\clubsuit_2$ ), ( $\diamond_2$ ) i jednadžbi ravnoteže ( $\heartsuit_5$ ) (ili ( $\heartsuit_4$ ), ( $\mathcal{L}_4$ ), ( $\mathfrak{E}_4$ )) možemo riješiti *Gaušovim eliminacijskim postupkom s vrštavanjem unazad*.

U prvom ćemo (velikom) koraku (koji će biti sastavljen od tri mala koraka) prvu jednadžbu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima oduzeti od druge i treće jednadžbe tako da iz njih „eliminiramo” prvu nepoznanicu. U novodobivenom (drugom) sustavu jednadžbi prva će nepoznanica postojati samo u prvoj jednadžbi, dok će druga i treća jednadžba tvoriti podsustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, drugom i trećom.

U drugom ćemo (velikom) koraku (sastavljenom od dva mala koraka) drugu jednadžbu drugoga sustava pomnoženu odgovarajućim koeficijentom oduzeti od treće jednadžbe tako da iz nje „eliminiramo” drugu nepoznanicu. U novom (trećem) sustavu prva će jednadžba sadržavati sve tri nepoznanice, druga drugu i treću, a treća samo treću nepoznanicu.

Kako će treća jednadžba biti jednadžba samo s jednom nepoznanicom, moći ćemo je neposredno riješiti i odrediti treću nepoznanicu. Uz poznatu treću nepoznanicu (znam da zvuči glupo) i druga će jednadžba biti jednadžba s jednom (drugom) nepoznanicom, pa ćemo, rješavajući je, odrediti i drugu nepoznanicu. Nakon toga će i prva jednadžba biti jednadžba samo s jednom (prvom) nepoznanicom, pa ... *Étd.*

**30.** U prvom ćemo malom koraku prvoga velikog koraka Gaußova eliminacijskog postupka prvu jednadžbu sustava jednadžbi kompatibilnosti

$$0,002\,058\,84 X_1 - 0,000\,617\,284 X_3 = 0,032\,150\,2, \quad (\spadesuit_2)$$

$$0,000\,611\,515 X_2 - 0,000\,182\,899 X_3 = -0,019\,052\,0, \quad (\clubsuit_2)$$

$$-0,000\,617\,284 X_1 - 0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,320\,073 X_3 = -0,003\,143\,58, \quad (\diamond_2)$$

podijeliti koeficijentom uz nepoznanicu  $X_1$ :

$$X_1 - 0,299\,821 X_3 = 15,615\,7,$$

$$0,000\,611\,515 X_2 - 0,000\,182\,899 X_3 = -0,019\,052\,0,$$

$$-0,000\,617\,284 X_1 - 0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,320\,073 X_3 = -0,003\,143\,58.$$

U drugom bismo malom koraku novodobivenu prvu jednadžbu pomnoženu koeficijentom uz  $X_1$  u drugoj jednadžbi oduzeli od te jednadžbe, no kako u drugoj jednadžbi nepoznanice  $X_1$  nema, taj ćemo korak preskočiti.

U trećem ćemo malom koraku (novodobivenu) prvu jednadžbu pomnoženu koeficijentom uz  $X_1$  u trećoj jednadžbi,

$$-0,000\,617\,284 X_1 + 0,000\,185\,075 X_3 = -0,009\,639\,31,$$

$$0,000\,611\,515 X_2 - 0,000\,182\,899 X_3 = -0,019\,052\,0,$$

$$-0,000\,617\,284 X_1 - 0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,320\,073 X_3 = -0,003\,143\,58,$$

oduzeti od treće jednadžbe:

$$X_1 - 0,299\,821 X_3 = 15,615\,7,$$

$$0,000\,611\,515 X_2 - 0,000\,182\,899 X_3 = -0,019\,052\,0,$$

$$-0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,134\,998 X_3 = 0,006\,495\,73.$$

U prvom ćemo malom koraku drugoga velikog koraka drugu jednadžbu podijeliti koeficijentom uz nepoznanicu  $X_2$ ,

$$X_1 - 0,299\,821 X_3 = 15,615\,7,$$

$$X_2 - 0,299\,092 X_3 = -31,155\,4,$$

$$-0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,134\,998 X_3 = 0,006\,495\,73,$$

a potom je, u drugom malom koraku, pomnoženu koeficijentom uz  $X_2$  u trećoj jednadžbi,

$$X_1 \quad X_2 - 0,299\,821 \quad = 15,615\,7,$$

$$-0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,054\,703\,6 X_3 = 0,005\,698\,29,$$

$$-0,000\,182\,899 X_2 + 0,000\,134\,998 X_3 = 0,006\,495\,73,$$

oduzeti od te jednadžbe:

$$X_1 - 0,299\,821 X_3 = 15,615\,7,$$

$$X_2 - 0,299\,092 X_3 = -31,155\,4,$$

$$0,000\,080\,295\,6 X_3 = 0,000\,797\,440.$$

U posljednjem ćemo (velikom) koraku treću jednadžbu podijeliti koeficijentom uz nepoznanicu  $X_3$ :

$$X_1 - 0,299\,821 X_3 = 15,615\,7,$$

$$X_2 - 0,299\,092 X_3 = -31,155\,4,$$

$$X_3 = 9,931\,43.$$

Iz druge je jednadžbe potom

$$X_2 = -31,1554 + 0,299092 X_3 = -31,1554 + 0,299092 \cdot 9,93143 = -28,1850.$$

I na kraju, iz prve je jednadžbe

$$X_1 = 15,6157 + 0,299821 X_3 = 15,6157 + 0,299821 \cdot 9,93143 = 18,5934.$$

(U našem primjeru u prvoj jednadžbi nema nepoznanice  $X_2$ , pa smo uz poznatu  $X_3$  mogli „potom” iz prve jednadžbe izračunati vrijednost nepoznanice  $X_1$  te, „na kraju”, iz druge jednadžbe vrijednost nepoznanice  $X_2$ . U općem slučaju, međutim, u kojem sve jednadžbe sadrže sve nepoznanice, naziv postupka „uvrštavanje unazad” jasno određuje redoslijed — od zadnje nepoznanice do prve.)

**31.** Sustav jednadžbi ravnoteže ( $\mathbb{R}^3$ ) riješit ćemo provodeći postupak Gaußove eliminacije na proširenoj matrici sustava

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 811944 & 0 & 4860 & 25 \\ 0 & 546561 & 16402,5 & 50 \\ 4860 & 16402,5 & 70875 & 93,75 \end{array} \right].$$

Korak 1.1. Dijeljenje prvoga retka njegovom prvom komponentom:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,00598563 & 0,0000307903 \\ 0 & 546561 & 16402,5 & 50 \\ 4860 & 16402,5 & 70875 & 93,75 \end{array} \right].$$

Korak 1.2. [preskačemo: prva komponenta drugoga retka već jest nula.]

Korak 1.3.a. Privremeno množenje prvoga retka prvom komponentom trećega retka:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4860 & 0 & 29,0902 & 0,149641 \\ 0 & 546561 & 16402,5 & 50 \\ 4860 & 16402,5 & 70875 & 93,75 \end{array} \right].$$

b. Oduzimanje privremenoga prvog retka od trećega retka:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,00598563 & 0,0000307903 \\ 0 & 546561 & 16402,5 & 50 \\ 0 & 16402,5 & 70845,9 & 93,6004 \end{array} \right].$$

Korak 2.1. Dijeljenje drugoga retka njegovom drugom komponentom:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,00598563 & 0,0000307903 \\ 0 & 1 & 0,0300104 & 0,0000914811 \\ 0 & 16402,5 & 70845,9 & 93,6004 \end{array} \right].$$

Korak 2.2.a. Privremeno množenje drugoga retka drugom komponentom trećega retka:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,00598563 & 0,0000307903 \\ 0 & 16402,5 & 492,246 & 1,50052 \\ 0 & 16402,5 & 70845,9 & 93,6004 \end{array} \right].$$

b. Oduzimanje privremenoga drugog retka od trećega retka:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,00598563 & 0,0000307903 \\ 0 & 1 & 0,0300104 & 0,0000914811 \\ 0 & 0 & 70353,7 & 92,0998 \end{array} \right].$$

Korak 3. Dijeljenje trećega retka njegovom trećom komponentom:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,005\,985\,63 & 0,000\,030\,790\,3 \\ 0 & 1 & 0,030\,010\,4 & 0,000\,091\,481\,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0,001\,309\,10 \end{array} \right].$$

Uvrštavanje unazad:

Iz trećega je retka neposredno  $\varphi_3 = 0,001\,309\,10$ .

Iz drugoga je retka

$$\begin{aligned} w_3 &= 0,000\,091\,481\,1 - 0,030\,010\,4 \varphi_3 \\ &= 0,000\,091\,481\,1 - 0,030\,010\,4 \cdot 0,001\,309\,10 = 0,000\,052\,194\,6 = 5,219\,46 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Iz prvoga je retka

$$\begin{aligned} u_3 &= 0,000\,030\,790\,3 - 0,005\,985\,63 \varphi_3 \\ &= 0,000\,030\,790\,3 - 0,005\,985\,63 \cdot 0,001\,309\,10 = 0,000\,022\,954\,5 = 2,295\,45 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

---

Metoda sila: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 11, (30,) 12, 13

Metoda sila bez utjecaja uzdužnih sila: 24, 25, 26

Opća metoda pomaka: 3, 5, 7, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, (31,) 20, 21, 22, 23,

Uvod u inženjersku metodu pomaka: 27, 28

Gaußov eliminacijski postupak s uvrštavanjem unazad: 29, 30, 31