

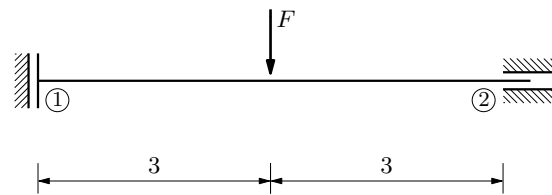
# GS 1. — 6. rujna 2024.

## Zadatak 3.

- Općom metodom pomakā izračunajte vrijednosti sila na krajevima štapa i nacrtajte dijagrame unutanjih sila!
- Nacrtajte progibnu liniju i očitajte duljinu pomaka lijevoga ležaja!
- Izračunajte orijentiranu duljinu pomaka lijevoga ležaja!

$$F = 125 \text{ kN}$$

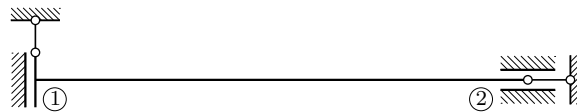
$$EI = 162\,000 \text{ kNm}^2$$



- vrijednosti sila na krajevima i dijagrami unutanjih sila

nepoznanice:  $w_1$  i  $u_2$

osnovni sistem (za opću metodu pomakā):



veze pomakā krajeva štapa i pomakā čvorova:  $w_{1,2} = w_1$  i  $u_{2,1} = u_2$

aksijalna i fleksijska krutost štapa:

$$k_{\{1,2\}}^a = k^a = \frac{EA}{\ell} \quad \text{i} \quad k_{\{1,2\}}^f = k = \frac{EI}{\ell} = 27\,000 \text{ kNm}$$

opći izrazi za vrijednosti sila na krajevima štapa:

$$N_{i,j} = \bar{N}_{i,j} + n_{i,j}, \quad T_{i,j} = \bar{T}_{i,j} + t_{i,j} \quad \text{i} \quad M_{i,j} = \bar{M}_{i,j} + m_{i,j}$$

izrazi za vrijednosti sila u stanju spriječenih pomaka (vrijednosti sila upetosti):

$$\bar{N}_{1,2} = 0, \quad \bar{T}_{1,2} = -\frac{F}{2}, \quad \bar{M}_{1,2} = \frac{F\ell}{8},$$

$$\bar{N}_{2,1} = 0, \quad \bar{T}_{2,1} = -\frac{F}{2}, \quad \bar{M}_{2,1} = -\frac{F\ell}{8}$$

(ti se izrazi mogu naći u odjeljku 12.3.2. *Sile upetosti* poglavlja 12. *Opća metoda pomakā* na stranici 282 skriptata [<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/gs1.pdf>] ili u odsječku 15. na stranici 17 datoteke *Dualitet metode sila i opće metode pomakā — usporedni proračun* [<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/pdn/dual.pdf>] ili u prethodnom zadatku, na stranici 3 (uz prilagodbu predznaka))

izrazi za vrijednosti sila u stanju prisilnih pomaka:

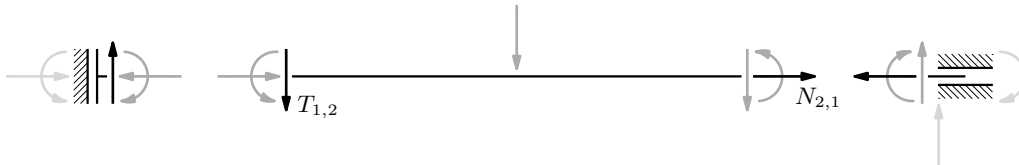
$$\begin{aligned} n_{1,2} &= -k^a u_2, & t_{1,2} &= \frac{12k}{\ell^2} w_1, & m_{1,2} &= -\frac{6k}{\ell} w_1, \\ n_{2,1} &= k^a u_2, & t_{2,1} &= -\frac{12k}{\ell^2} w_1, & m_{2,1} &= -\frac{6k}{\ell} w_1 \end{aligned}$$

(izrazi se izvode pomoću matrice krutosti navedene u odjeljku 12.3.3. Odnos između sila na krajevima i pomakā krajeva na stranici 285 skripata ili na stranici 18 datoteke *Dualitet...*; u spomenutom su odjeljku skripata izvedeni opći izrazi za sve koeficijente matrice krutosti)

izrazi za vrijednosti (ukupnih) sila na krajevima štapa:

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= -k^a u_2, & T_{1,2} &= -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} w_1, & M_{1,2} &= \frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1, \\ N_{2,1} &= k^a u_2, & T_{2,1} &= -\frac{F}{2} - \frac{12k}{\ell^2} w_1, & M_{2,1} &= -\frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1 \end{aligned}$$

jednadžbe ravnoteže čvorova:



♣ čvor 1:

- ♠ ravnoteža horizontalnih sila: nepoznanica je  $u_2$  (u  $N_{1,2} = -k^a u_2$ ), ali je nepoznata i vrijednost horizontalne reakcije (slobodni član jednadžbe)
- ♠ ravnoteža momenata: nepoznanica je  $w_1$  (u izrazu za  $M_{1,2}$ ), ali je nepoznata i vrijednost reaktivnoga momenta
- ♠ ravnoteža vertikalnih sila:

$$-T_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} w_1 = 0$$

♣ čvor 2:

- ♠ ravnoteža vertikalnih sila: nepoznanica je  $w_1$  (u izrazu za  $T_{2,1}$ ), ali je nepoznata i vrijednost vertikalne reakcije
- ♠ ravnoteža momenata: nepoznanica je  $w_1$  (u izrazu za  $M_{2,1}$ ), ali je nepoznata i vrijednost reaktivnoga momenta
- ♠ ravnoteža horizontalnih sila:

$$-N_{2,1} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{2,1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -k^a u_2 = 0$$

rješenja jednadžbi ravnoteže:

$$w_1 = \frac{F\ell^2}{24k} = 0,00694 \text{ m} \quad \& \quad u_2 = 0$$

vrijednosti sila na krajevima štapa:

$$N_{1,2} = N_{2,1} = 0$$

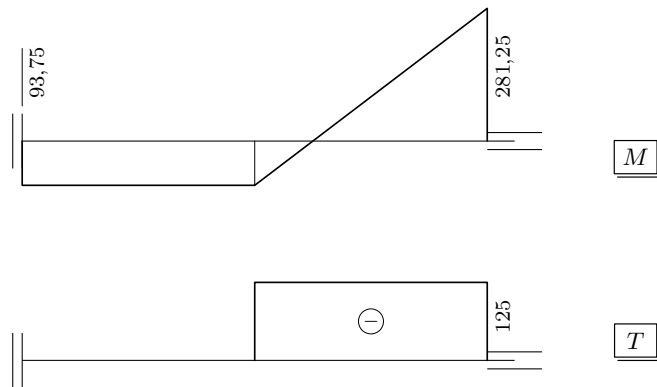
$$T_{1,2} = -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} w_1 = -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} \frac{F \ell^2}{24k} = -\frac{F}{2} + \frac{F}{2} = 0$$

$$T_{2,1} = -\frac{F}{2} - \frac{12k}{\ell^2} w_1 = -\frac{F}{2} - \frac{12k}{\ell^2} \frac{F \ell^2}{24k} = -\frac{F}{2} - \frac{F}{2} = -F = -125 \text{ kN}$$

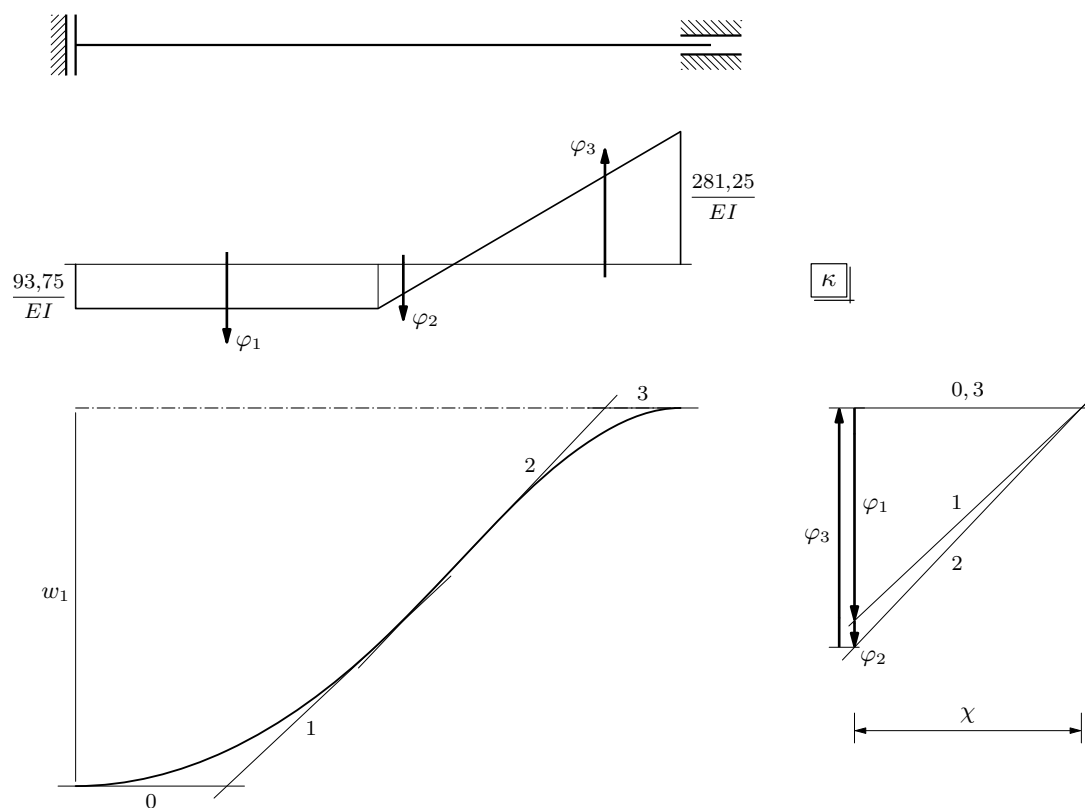
$$M_{1,2} = \frac{F \ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1 = \frac{F \ell}{8} - \frac{6k}{\ell} \frac{F \ell^2}{24k} = -\frac{F \ell}{8} = -93,75 \text{ kNm},$$

$$M_{2,1} = -\frac{F \ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1 = -\frac{F \ell}{8} - \frac{6k}{\ell} \frac{F \ell^2}{24k} = -\frac{3F \ell}{8} = -281,25 \text{ kNm}$$

dijagrami unutarnjih sila:



b. progibna linija



mjerilo duljina: 1 cm :: 75 cm

(potrebna izračunavanja na sljedećoj stranici)

$$\varphi_1 = \frac{93,75}{EI} \cdot 3 = \frac{281,25}{EI}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{93,75}{EI} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 3\right) = \frac{35,16}{EI}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{281,25}{EI} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 3\right) = \frac{316,41}{EI}$$

mjerilo kutova: 1 cm ::  $\frac{100}{EI}$

$$\chi = \frac{300}{EI} \Rightarrow n = \frac{1}{\chi} = \frac{EI}{300} = \frac{162000}{300} = 540$$

duljina pomaka lijevoga ležaja:

očitano:  $\tilde{w}_1 = 5$  cm

$$w_1 = \frac{m}{n} \tilde{w}_1 = \frac{75}{540} \cdot 5 \simeq 0,7 \text{ cm} = 7 \text{ mm}$$

c. orijentirana duljina pomaka lijevoga ležaja

Lijevi je ležaj čvor 1. Orijetirana duljina vertikalnoga pomaka čvora 1,  $w_1$ , nepoznata je u metodi pomakā. Rješavanjem jednadžbe vertikalnih sila u čvoru 1 izračunali smo

$$w_1 = 0,00694 \text{ m} \simeq 7 \text{ mm}.$$

Horizontalnoga pomaka ležaja nema (spriječen je ležajnim spojem), pa je duljina pomaka lijevoga ležaja

$$|d| = \sqrt{u_1^2 + w_1^2} = \sqrt{0 + w_1^2} = |w_1|.$$

Orijentaciju određuje predznak brojevnosti  $w_1$ . Vrijednost je pozitivna, pa je pomak u smislu pozitivne orijentacije osi  $z$ , dakle prema dolje.