GS 1. — 6. rujna 2024.

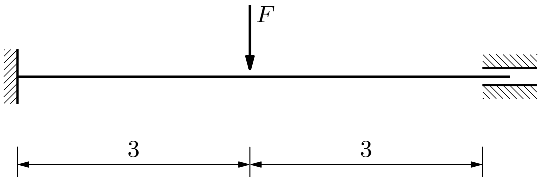
Zadatak 2.

a. Za odabrani osnovni sistem izračunajte komponente matrice popustljivosti (koeficijente popustljivosti) zadanoga sistema!

b. Pomoću matrice popustljivosti izračunajte potrebne vrijednosti i nacrtajte dijagrame unutarnjih sila!

$F = 125$ kN

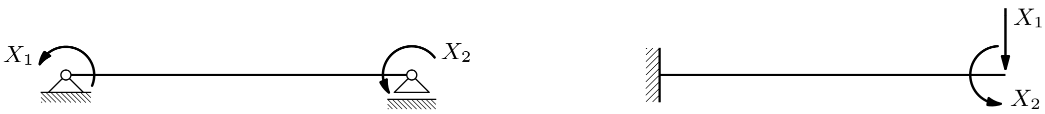
$EI = \text{const.}$



a. U odjeljku *11.7. Matrice popustljivosti ravnoga štapa* poglavlja *11. Metoda sila* u skriptama [http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/gs1.pdf] izvedeni su opći izrazi za komponente matrice popustljivosti (to jest za koeficijente popustljivosti ili fleksibilnosti) obostrano upete grede za jednostavno oslonjenu gredu (na stranicama 257 do 259) i za konzolu (na stranicama 263 do 265) kao osnovne sisteme.

Za sisteme kojima je os na pravcu uzdužni su i poprečni smjer neovisni. Zadana se greda pod opterećenjima okomitima na os ponaša kao obostrano upeta greda, dok je za opterećenja u smjeru osi statički određena, pa je tražena matrica $\mathbf{D}$ zadane grede jednaka podmatrici $\mathbf{D}_\perp$ matrice $\mathbf{D}$ obostrano upete grede.

Za zadani sistem odgovarajući su osnovni sistemi



Lijevi crtež usporedite sa slikom 153.b. na stranici 257, a desni sa slikom 156.b. na stranici 264.

Nema smisla iz skripata precrtavati dijagrame za neodređene sile jediničnih vrijednosti (slike 153.f. *&* h. i 156.g. *&* h.) ni prepisivati izvode izrazā za koeficijente popustljivosti (stranice 258 i 259 te 264 i 265, uz prilagodbu indeksā: 1 ispada iz igre, 2 postaje 1, a 3 se pretvara u 2), čak ni s brojem 6 umjesto ℓ. Upotrijebit ćemo izvedene izraze (a i vi ste to mogli napraviti, da ste pronašli traženo):

Za jednostavno oslonjenu gredu kao osnovni sistem matrica je fleksibinosti zadane grede, prema izrazu (285) na stranici 259 skripata,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\ell}{3\,EI} & -\dfrac{\ell}{6\,EI} \\ -\dfrac{\ell}{6\,EI} & \dfrac{\ell}{3\,EI} \end{bmatrix}.$$

Uvrstimo li $\ell = 6$, dobit ćemo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{6}{3\,EI} & -\dfrac{6}{6\,EI} \\ -\dfrac{6}{6\,EI} & \dfrac{6}{3\,EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{EI} & -\dfrac{1}{EI} \\ -\dfrac{1}{EI} & \dfrac{2}{EI} \end{bmatrix}.$$

Za konzolu pak kao osnovni sistem matrica je fleksibilnosti, prema izrazu (290) na stranici 265,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\ell^3}{3\,EI} & -\dfrac{\ell^2}{2\,EI} \\ -\dfrac{\ell^2}{2\,EI} & \dfrac{\ell}{EI} \end{bmatrix},$$

odnosno, za $\ell = 6$,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{6^3}{3\,EI} & -\dfrac{6^2}{2\,EI} \\ -\dfrac{6^2}{2\,EI} & \dfrac{6}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{72}{EI} & -\dfrac{18}{EI} \\ -\dfrac{18}{EI} & \dfrac{6}{EI} \end{bmatrix}.$$

b. Za opterećenje koncentriranom silom su pomoću koeficijenata popustljivosti za konzolu kao osnovni sistem izvedeni opći izrazi za vrijednosti unutarnjih sila u karakterističnim točkama (na stranicama 265 do 267) i nacrtani dijagrami unutarnjih sila (slika 158.). Ni te izvode naćemo prepisivati.

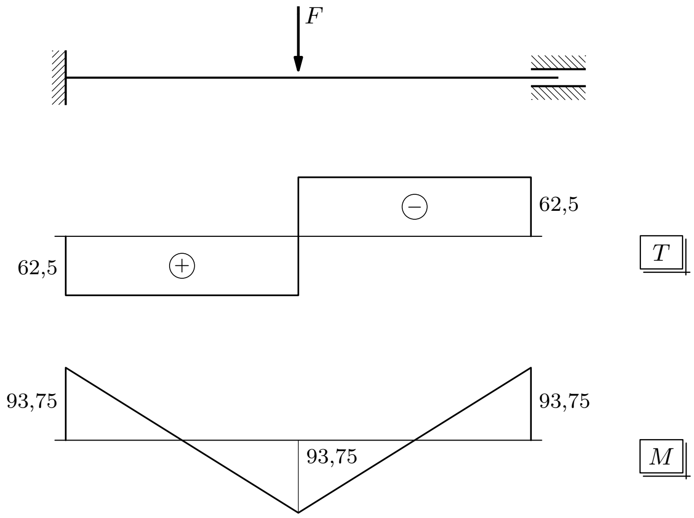
Kako je $a = b = \ell/2$, bit će prema spomenutim izrazima

$$\begin{aligned}
T(0^+) &= \frac{F\,b^2\,(3a+b)}{\ell^2} = \frac{F\,\left(\ell/2\right)^2\left(3\ell/2 + \ell/2\right)}{\ell^2} = \frac{F}{2} = 62{,}5\ \text{kN},\\
T(\ell^-) &= -\frac{F\,a^2\,(a+3b)}{\ell^2} = -\frac{F\,\left(\ell/2\right)^2\left(\ell/2 + 3\ell/2\right)}{\ell^2} = -\frac{F}{2} = -62{,}5\ \text{kN},\\
M(0) &= -\frac{F\,a\,b^2}{\ell^2} = -\frac{F\,\ell/2\,\left(\ell/2\right)^2}{\ell^2} = -\frac{F\ell}{8} = -93{,}75\ \text{kNm},\\
M\big(\ell/2\big) &= \frac{2\,F\,a^2 b^2}{\ell^3} = \frac{2\,F\,\left(\ell/2\right)^2\left(\ell/2\right)^2}{\ell^3} = \frac{F\ell}{8} = 93{,}75\ \text{kNm},\\
M(\ell) &= -\frac{F\,a^2 b}{\ell^2} = -\frac{F\,\left(\ell/2\right)^2\ell/2}{\ell^2} = -\frac{F\ell}{8} = -93{,}75\ \text{kNm};
\end{aligned}$$

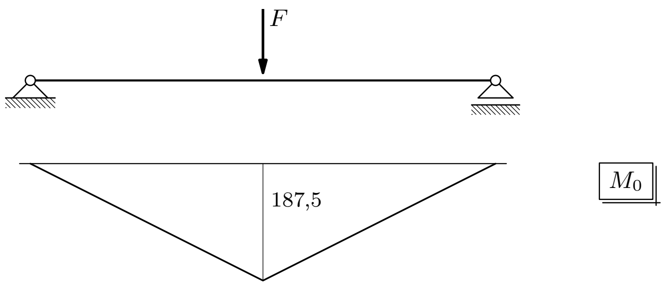
jasno je da uzdužnih sila nema.

Dijagrami poprečnih sila i momenata savijanja prikazani su na slici na vrhu sljedeće stranice.

Vrijednosti momenata savijanja i poprečnih sila u karakterističnim točkama izračunat ćemo i pomoću koeficijenata popustljivosti za jednostavno oslonjenu gredu kao osnovni sistem (ponavljanje s varijacijama je majka razumijevanja i učenja).



Za izračunavanje „slobodnih” članova $\delta_{1,0}$ i δ_2 u jednadžbama kompatibilnosti treba nam osim dijagrama m_1 i m_2 (koji su na slikama 153.f. & h. na stranici 257 skripata označeni s m_2 i m_3 (rekli smo da treba prilagoditi indekse)) i dijagram M_0:



(vrijednost momenta u polovini raspona dobivena je uvrštavanjem u izraz $F\ell/4$).

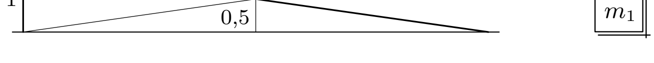
„Slobodni” su članovi jednadžbi

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 187{,}5\cdot 3\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}5\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\cdot 187{,}5\cdot 3\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}5\right)(-1)\right]$$

$$= -\frac{281{,}25}{EI},$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 187{,}5\cdot 3\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}5\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 187{,}5\cdot 3\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}5\right)\right] = \frac{281{,}25}{EI};$$

dijagram M_0 podijelili smo u dva trokuta, dijagram m_1 kao na sljedećoj slici,



a na analogan način i dijagram m_2.

Za primjenu Vereščaginova teorema

$$\mathcal{J}_{1,2} \;=\; \int\limits_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \mathcal{G}_1\, g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)})$$

funkcija g_2, vrijednost koje izračunavamo u težištu lika $\mathcal{G}_1$ „ispod” funkcije g_1, mora biti linearna (ili konstantna), ali za funkciju g_1 ne postoje nikakva ograničenja — ona ne mora biti glatka, pa čak ni neprekidna.

Budući da je dijagram M_0 osnosimetričan u odnosu na ordinalu kroz polovište raspona, očito je da je težište lika $\mathcal{M}_0$ na toj ordinali, pa su „slobodni” članovi

$$\delta_{1,0} \;=\; \frac{1}{EI}\left[2\left(\frac{1}{2}\cdot 187{,}5\cdot 3\right)\right](0{,}5)\,(-1) \;=\; -\frac{281{,}25}{EI},$$

$$\delta_{2,0} \;=\; \frac{1}{EI}\left[2\left(\frac{1}{2}\cdot 187{,}5\cdot 3\right)\right](0{,}5) \;=\; \frac{281{,}25}{EI}.$$

Treba naglasiti/upozoriti: dijagram M_0 je osnosimetričan, pa je težište lika $\mathcal{M}_0$ na simetrali koja se poklapa s ordinalom u polovištu raspona koja se poklapa s ordinalom kroz šiljak dijagrama, ali ovo je poseban slučaj. Ako dijagram nije osnosimetričan, težište nije ni na ordinali u polovištu raspona ni na ordinali kroz šiljak dijagrama, te je jednostavnije podijeliti dijagram negoli tražiti težište cijeloga lika.

Sustav je jednadžbi kontinuiteta u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2}{EI} & -\dfrac{1}{EI} \\[2ex] -\dfrac{1}{EI} & \dfrac{2}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{281{,}25}{EI} \\[2ex] -\dfrac{281{,}25}{EI} \end{bmatrix}.$$

Inverz $\mathbf{D}_\perp^{-1}$ podmatrice $\mathbf{D}_\perp$ (koja je naša matrica $\mathbf{D}$, pa je $\mathbf{D}_\perp^{-1} = \mathbf{D}^{-1}$) dan je u izrazu (289) na stranici 261 skripata:

$$\mathbf{D}^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{4\,EI}{\ell} & \dfrac{2\,EI}{\ell} \\[2ex] \dfrac{2\,EI}{\ell} & \dfrac{4\,EI}{\ell} \end{bmatrix};$$

za $\ell = 6$ je

$$\mathbf{D}^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{4\,EI}{6} & \dfrac{2\,EI}{6} \\[2ex] \dfrac{2\,EI}{6} & \dfrac{4\,EI}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2\,EI}{3} & \dfrac{EI}{3} \\[2ex] \dfrac{EI}{3} & \dfrac{2\,EI}{3} \end{bmatrix},$$

pa je

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2\,EI}{3} & \dfrac{EI}{3} \\[2ex] \dfrac{EI}{3} & \dfrac{2\,EI}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{281{,}25}{EI} \\[2ex] -\dfrac{281{,}25}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93{,}75 \\ -93{,}75 \end{bmatrix},$$

i, na kraju,

$$M(0) \;=\; -X_1 \;=\; -93{,}75\,\text{kNm} \qquad \& \qquad M(\ell) \;=\; X_2 \;=\; -93{,}75\,\text{kNm}.$$

Vrijednost momenta u polovini raspona možemo izračunati tako da na spojnicu vrijednosti momenata na krajevima „objesimo" vrijednost $F\ell/4$

$$M\big(\ell/2\big) \;=\; -93{,}75 \;+\; 187{,}5 \;=\; 93{,}75\,\text{kNm}.$$

Vrijednosti poprečnih sila neposredno uz ležajeve na temelju su diferencijalnoga odnosa $T = M'$ jednake nagibu odsječaka pravaca koji su dijelovi grafa funkcije M:

$$T(0^+) \;=\; \frac{M\big(\ell/2\big) \;-\; M(0)}{\ell/2} \;=\; \frac{93{,}75 - (-93{,}75)}{3} \;=\; 62{,}5\,\text{kN},$$

$$T(\ell^-) \;=\; \frac{M(\ell) \;-\; M\big(\ell/2\big)}{\ell/2} \;=\; \frac{-93{,}75 - 93{,}75}{3} \;=\; -62{,}5\,\text{kN}.$$

Sustav jednadžbi kompatibilnosti može se lako riješiti i „ručno", recimo Gaußovim eliminacijskim postupkom s uvrštavanjem unazad[1]. Proširena je matrica sustava

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{2}{EI} & -\dfrac{1}{EI} & \dfrac{281{,}25}{EI} \\[2ex] -\dfrac{1}{EI} & \dfrac{2}{EI} & -\dfrac{281{,}25}{EI} \end{array}\right],$$

odnosno, nakon množenja s EI,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 281{,}25 \\ -1 & 2 & -281{,}25 \end{array}\right].$$

Prvi ćemo redak podijeliti s 2,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{281{,}25}{2} \\[2ex] -1 & 2 & -281{,}25 \end{array}\right],$$

i pribrojiti drugome retku:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{281{,}25}{2} \\[2ex] 0 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{281{,}25}{2} \end{array}\right].$$

Iz drugoga je retka

$$\frac{3}{2}\,X_2 \;=\; -\frac{281{,}25}{2},$$

pa je

$$X_2 \;=\; -\frac{281{,}25}{3} \;=\; -93{,}75.$$

---

[1] Gaußov eliminacijski postupak s uvrštavanjem unazad obrađen je na *Matematici 1.*, a podrobnije je opisan i u datoteci *Dualitet metode sila i opće metode pomakā — usporedni proračun* [`http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/pdn/dual.pdf`] u odsječcima 29 do 31 na stranicama 27 do 30.

Uvrštavanjem u jednadžbu koja odgovara prvome retku,

$$X_1 - \frac{1}{2} X_2 = \frac{281{,}25}{2} \qquad \Rightarrow \qquad X_1 - \frac{1}{2} \cdot (-93{,}75) = \frac{281{,}25}{2},$$

dobivamo

$$X_1 = \frac{281{,}25 - 93{,}75}{2} = 93{,}75.$$

Drugi je jednostavan način „ručnoga” rješavanja sustava jednadžbi primjena Cramerova pravila:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 281{,}25 & -1 \\ -281{,}25 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 281{,}25 - 281{,}25 = 281{,}25,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 281{,}25 \\ -1 & -281{,}25 \end{vmatrix} = -2 \cdot 281{,}25 + 281{,}25 = -281{,}25,$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{281{,}25}{3} = 93{,}75,$$

$$X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-281{,}25}{3} = -93{,}75.$$