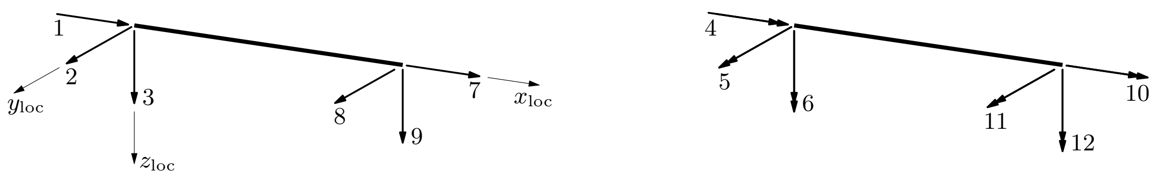
GS 1. — Teorijski kolokvij (2022./2023.)

Pitanje 2.

Objasnite statičko značenje koeficijenata $k_{1,7}$, $k_{3,8}$, $k_{3,5}$, $k_{3,11}$, $k_{11,3}$ i $k_{5,5}$ matrice krutosti prostornoga štapnog elementa!



Nama je – teško, ali kada je nama bilo lako?

Josip Broz Tito u silvestarskoj poruci 1949. godine

Komponente matrice krutosti nazivamo i koeficijentima krutosti. Upotrebljavamo ih u metodi pomakā.

Koeficijenti krutosti su, površno i možda nedovoljno strogo rečeno, *sile* izazvane (jediničnim) *pomacima*, dok su koeficijenti popustljivosti (koje upotrebljavamo u metodi sila) *pomaci* izazvani (jediničnim) *silama*. Uočite da su u oba slučaja u igri *i sile i pomaci* (a ne samo sile i ne samo pomaci), ali su u prvom slučaju pomaci uzroci, a sile učinci, dok je u drugom slučaju obratno. (Kad kažemo „sile", mislimo, dakako, na poopćene sile — sile (u užem smislu) i momente, a riječ „pomaci" označava poopćene pomake, te obuhvaća pomake po pravcu i zaokrete.)

Ako, dakle, znate da su koeficijenti krutosti sile izazvane pomacima, sve je drugo u odgovoru na ovo pitanje samo dosadno knjigovodstvo, povezivanje dvaju indeksa slova k s onim što je tim indeksima označeno na crtežu. Prvi indeks označava silu/učinak, a drugi pomak/uzrok.

Pa, redom,

$k_{1,7}$ je vrijednost uzdužne sile na kraju i (na prvom ili na lijevom kraju) koja je izazvana jediničnim uzdužnim pomakom kraja j (drugoga ili desnoga kraja);

$k_{3,8}$ je vrijednost (komponente) poprečne sile na kraju i usporedne s osi z_{loc} lokalnoga koordinatnog sustava grede koja je izazvana jediničnim poprečnim pomakom kraja j usporednim s osi y_{loc};

$k_{3,5}$ je vrijednost poprečne sile na kraju i usporedne s osi z_{loc} koja je izazvana jediničnim zaokretom kraja i oko osi y_{loc};

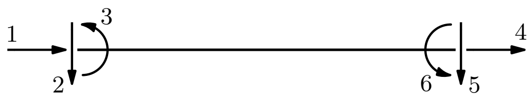
$k_{3,11}$ je vrijednost poprečne sile na kraju i usporedne s osi z_{loc} koja je izazvana jediničnim zaokretom kraja j oko osi y_{loc};

$k_{11,3}$ je vrijednost momenta savijanja oko osi y_{loc} na kraju j koji je izazvan jediničnim poprečnim pomakom kraja i usporednim s osi z_{loc};

$k_{5,5}$ je vrijednost momenta savijanja oko osi y_{loc} na kraju i koji je izazvan jediničnim zaokretom istoga kraja oko iste osi.

Pitanje 1.

Koje su vrijednosti komponenata trećega retka i trećega stupca kondenzirane matrice krutosti jednostrano upete grede u ravnini sa zglobnim ležajem na lijevom kraju? Koje je mehaničko značenje vrijednostī u trećem retku, a koje vrijednostī u trećem stupcu?



> Svi smo svijesni toga, drugovi, da je nama danas teško; ali je isto tako nepobitna historijska istina, da nam je u prošlosti bilo uvijek podjednako teško i da je jedini konkretni smisao politike naše Partije da se planski prevladaju sve te mnogobrojne i raznovrsne teškoće i da se poduzme sve što je ljudski izvedivo kako bismo se probili do toga da nam prestane biti teško.
>
> Miroslav Krleža: *Riječ na Drugom kongresu književnika Jugoslavije*, 1950.

U odgovoru na pitanje 2. naučili ste što su komponente matrice krutosti, pa „definiciju” ne treba ponavljati.

Ako je na lijevome kraju grede zglob, onda je, sa statičke strane, vrijednost momenta savijanja na tom kraju jednaka nuli, dok se, s druge, kinematičke strane, zaokret čvora u koji je njezin lijevi kraj priključen ne prenosi na nju, tako da u njoj ne izaziva sile.

1. Treća je komponenta f_3 vektora sila $\mathbf{f}$ vrijednost $M_{i,j}$ momenta savijanja na lijevom kraju grede. Prema izrazu $\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$ komponenta f_3 umnožak je trećega retka matrice krutosti $\mathbf{k}$ i vektora pomakā $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} f_3 \;=\; M_{i,j} \;&=\; k_{3,1}\,u_1 \;+\; k_{3,2}\,u_2 \;+\; k_{3,3}\,u_3 \;+\; k_{3,4}\,u_4 \;+\; k_{3,5}\,u_5 \;+\; k_{3,6}\,u_6 \\ &=\; k_{3,1}\,u_{i,j} \;+\; k_{3,2}\,w_{i,j} \;+\; k_{3,3}\,\varphi_{i,j} \;+\; k_{3,4}\,u_{j,i} \;+\; k_{3,5}\,w_{j,i} \;+\; k_{3,6}\,\varphi_{j,i}\,. \end{aligned} \tag{$\spadesuit$}$$

Kako je $M_{i,j} = 0$, niti jedan pomak niti zaokret ni lijevoga ni desnoga kraja grede neće i ne može izazvati moment savijanja na lijevome kraju grede. Budući da se bilo koji pomak ili zaokret može pojaviti neovisno o ostalima, svi pribrojnici u izrazu ($\spadesuit$) moraju biti jednaki nuli, a to pak znači da sve komponente trećega retka matrice krutosti moraju biti jednake nuli:

$$k_{3,1} \;=\; k_{3,2} \;=\; k_{3,3} \;=\; k_{3,4} \;=\; k_{3,5} \;=\; k_{3,6} \;=\; 0.$$

2. Komponente trećega stupca matrice krutosti koeficijenti su krutosti kojima se množi treća komponenta u_3 vektora pomakā $\mathbf{u}$; ta je komponenta kut zaokreta lijevoga kraja greda, $u_3 = \varphi_{i,j}$. Rezultat su vrijednosti sila na krajevima izazvanih tim zaokretom.

Ako su sve komponente vektora $\mathbf{u}$, osim treće, jednake nuli, množenje vektora $\mathbf{u}$ matricom krutosti $\mathbf{k}$ daje

$$\begin{bmatrix} N_{i,j} \\ T_{i,j} \\ M_{i,j} \\ N_{j,i} \\ T_{j,i} \\ M_{j,i} \end{bmatrix} = \mathbf{k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{i,j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,3}\,\varphi_{i,j} \\ k_{2,3}\,\varphi_{i,j} \\ k_{3,3}\,\varphi_{i,j} \\ k_{4,3}\,\varphi_{i,j} \\ k_{5,3}\,\varphi_{i,j} \\ k_{6,3}\,\varphi_{i,j} \end{bmatrix}.$$

Budući da je na kraju i grede zglob, čvor u koji je greda priključena može se neovisno o tome kraju zaokretati, pa zaokret čvora i neće i ne može prouzročiti unutarnje sile u gredi:

$$N_{i,j} \;=\; T_{i,j} \;=\; M_{i,j} \;=\; N_{j,i} \;=\; T_{j,i} \;=\; M_{j,i} \;=\; 0.$$

Zbog toga sve komponente trećega stupca matrice krutosti moraju biti jednake nuli:

$$k_{1,3} \;=\; k_{2,3} \;=\; k_{3,3} \;=\; k_{4,3} \;=\; k_{5,3} \;=\; k_{6,3} \;=\; 0.$$

3. Prema tome, vrijednosti su svih komponenata trećega retka i trećega stupca kondenzirane matrice krutosti jednostrano upete grede u ravnini sa zglobnim ležajem na lijevom kraju, kao što prikazuje slika posuđena s predavanja, nula.

$$\begin{bmatrix} N_{i,j} \\ T^{(c)}_{i,j} \\ M^{(c)}_{i,j} \\ N_{j,i} \\ T^{(c)}_{j,i} \\ M^{(c)}_{j,i} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|ccc} X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & X & X \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & X & X \\ 0 & X & 0 & 0 & X & X \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{N}_{i,j} \\ \overline{T}^{(c)}_{i,j} \\ 0 \\ \overline{N}_{j,i} \\ \overline{T}^{(c)}_{j,i} \\ \overline{M}^{(c)}_{j,i} \end{bmatrix}$$

Mehaničko je značenje tih nula u trećem retku sažeto iskazano izrazom

$$M_{i,j} \;=\; 0.$$

Ili, s malo više „riječi”:

$$M_{i,j} \;=\; 0 \cdot u_{i,j} \;+\; 0 \cdot w_{i,j} \;+\; 0 \cdot \varphi_{i,j} \;+\; 0 \cdot u_{j,i} \;+\; 0 \cdot w_{j,i} \;+\; 0 \cdot \varphi_{j,i} \;=\; 0.$$

Mehaničko je pak značenje nula u trećem stupcu iskazano izrazom

$$N_{i,j}(\varphi_{i,j}) \;=\; T_{i,j}(\varphi_{i,j}) \;=\; M_{i,j}(\varphi_{i,j}) \;=\; N_{j,i}(\varphi_{i,j}) \;=\; T_{j,i}(\varphi_{i,j}) \;=\; M_{j,i} \;=\; 0,$$

gdje $\clubsuit(\varphi_{i,j})$ znači „vrijednost (poopćene) sile $\clubsuit$ izazvane zaokretom čvora i za kut $\varphi_{i,j}$”, a možemo ga iskazati i izrazom

$$\begin{bmatrix} N_{i,j} \\ T_{i,j} \\ M_{i,j} \\ N_{j,i} \\ T_{j,i} \\ M_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \varphi_{i,j} \\ 0 \cdot \varphi_{i,j} \\ 0 \cdot \varphi_{i,j} \\ 0 \cdot \varphi_{i,j} \\ 0 \cdot \varphi_{i,j} \\ 0 \cdot \varphi_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$