

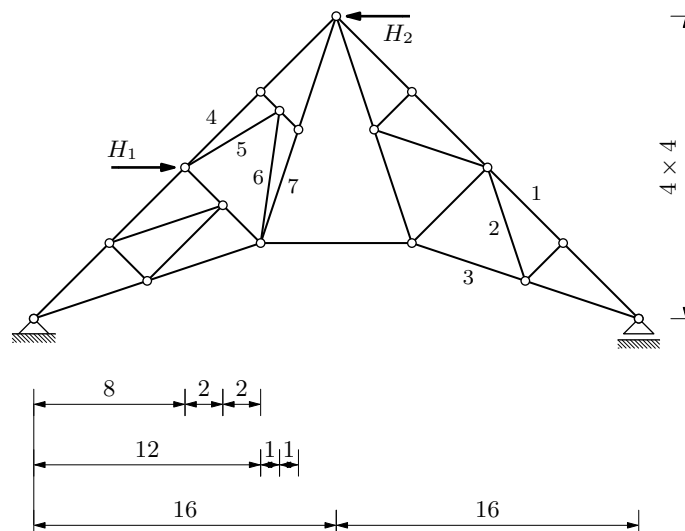
GS 1. — 1. kolokvij (2022./2023.)

Zadatak D2.

Culmannovim postupkom odredite vrijednosti sila u štapovima 1–7!

$$H_1 = 125 \text{ kN}$$

$$H_2 = 75 \text{ kN}$$



Korak prvi. Nalaženje pravaca djelovanja i vrijednosti reakcija.

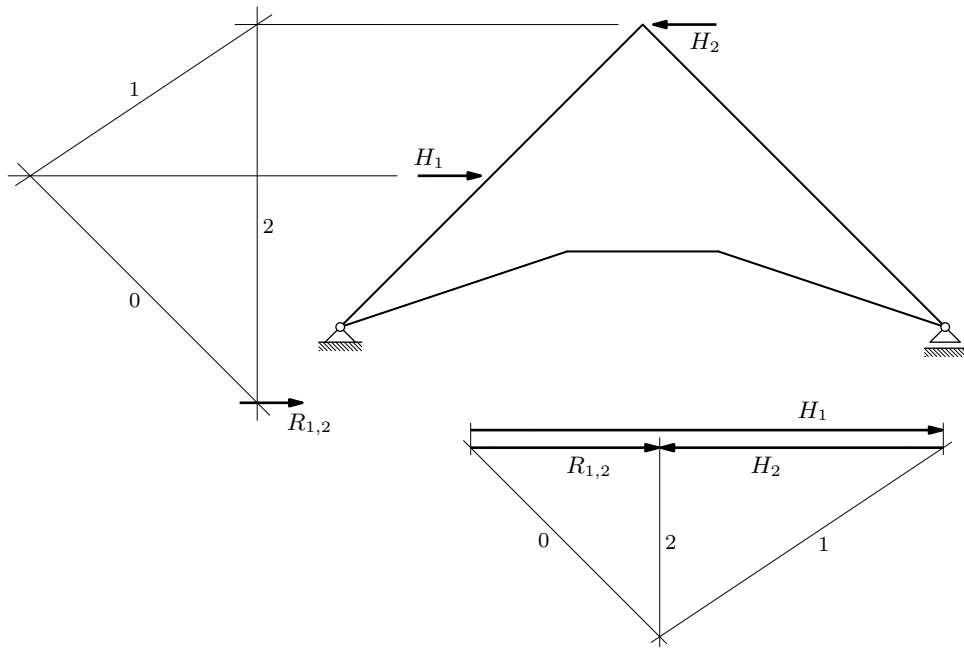
Culmannov je postupak grafički postupak, pa se svi koraci provode grafički.

Reakcija u desnom, pomičnom zglobnom ležaju na vertikalnom je pravcu, dok u lijevom, nepomičnom zglobnom ležaju reakcija može biti na bilo kojem pravcu. Riječ je, prema tome, o elementarnom, iz *Mehanike 1.* poznatom grafičkom zadatku uravnoteženja triju sila u ravni: zadanu silu treba uravnotežiti silom na zadanom/poznatom pravcu i silom na nepoznatom pravcu koji prolazi zadanom točkom.

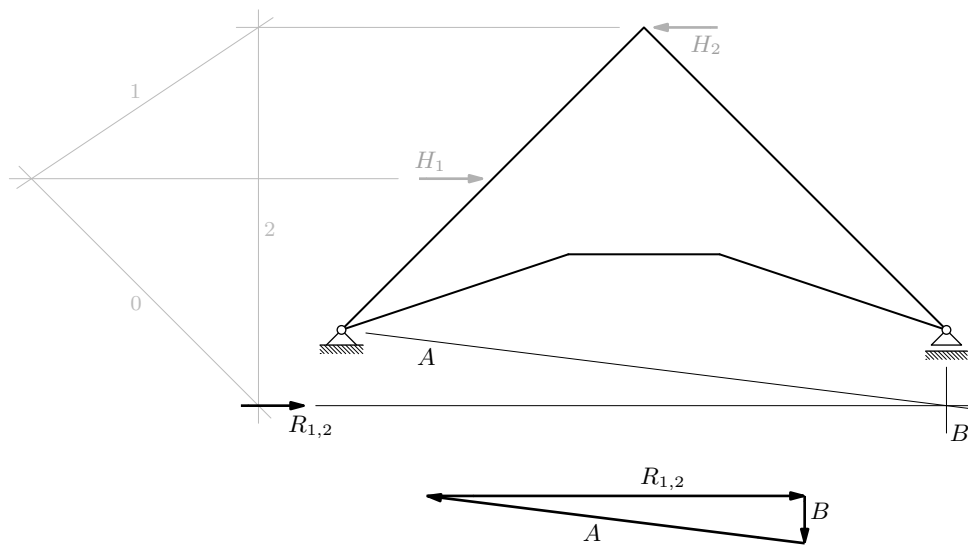
Sila koju treba uravnotežiti rezultanta je $\vec{R}_{1,2}$ sila \vec{H}_1 i \vec{H}_2 . Budući da su pravci djelovanja tih dviju sila usporedni, za nalaženje pravca djelovanja rezultante primijenjen je verižni poligon (slika 1.). Intenzitet je rezultante $R_{1,2} = 50 \text{ kN}$.

Pravac djelovanja reakcije \vec{A} u lijevome ležaju određen je ravnotežnim uvjetom po kojem taj pravac mora, osim ležajnom točkom, proći sjecištem poznatih pravaca djelovanja reakcije \vec{B} u desnome ležaju i rezultante $\vec{R}_{1,2}$ (slika 2.), jer su tri sile u ravni u ravnoteži (ako i) samo ako pravci njihovih djelovanja prolaze jednom točkom.

Na slici 1. poligon je sila nacrtan u mjerilu $1 \text{ cm} :: 20 \text{ kN}$, pa je, primjerice, duljina prikaza sile $\vec{R}_{1,2}$ 2,5 cm. To je mjerilo, međutim, premalo za precizno očitavanje duljine prikaza reakcije \vec{B} , jer bi taj prikaz bio dužina vrlo male duljine. Stoga je na slici 2. u poligonu sila mjerilo $1 \text{ cm} :: 10 \text{ kN}$. U tom je mjerilu prikaz poznate sile $\vec{R}_{1,2}$ duljine $5 \text{ cm} = 50 \text{ mm}$.



Slika 1.



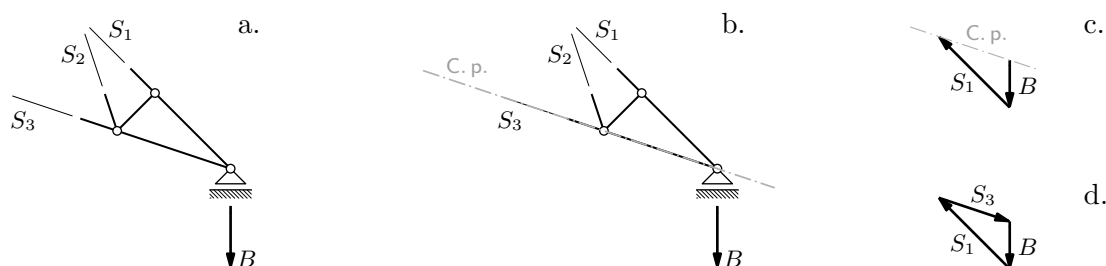
Slika 2.

Očitana je duljina prikaza reakcije \vec{B} približno 6 mm i četvrt, pa ćemo uzeti da je intenzitet te reakcije $B = 6,25$ kN. Poligon sila pokazuje i da je smisao djelovanja te reakcije prema dolje.

Očitana duljina prikaza sile \vec{A} je 50 mm i još nešto manje od pola mm, ukupno, recimo, 50,4 mm, te je njezin intenzitet $A = 50,4$ kN (što, zaokruženo na tri značajne znamenke, jest i što mora biti jednako duljini hipotenuze pravokutnoga trokuta s katetama duljina 50 i 6,25). Prema poligonu je sila smisao djelovanja reakcije \vec{A} zdësna ulijêvo (i prema gore).

Korak drugi. Nalaženje vrijednosti sila u štapovima 1, 2 i 3.

Presijecanjem štapova 1, 2 i 3 odvojiti ćemo dio sistema do desnoga ležaja (slika 3.a.). Na izdvojeni dio djeluju reakcija \vec{B} i sile u presječenim štapovima. Pravac djelovanja i vrijednost sile \vec{B} poznati su, našli smo ih u prethodnom koraku. Pravci djelovanja sila u štapovima osi su tih štapova, pa treba naći samo njihove vrijednosti. Vrijednosti triju sila na poznatim pravcima djelovanja, koje uravnotežuju poznatu silu, određuju se Culmannovim postupkom.



Slika 3.

Za prvu točku Culmannova pravca uzet ćemo sjecište pravaca djelovanja reakcije \vec{B} i sile u štapu 1, a za drugu točku sjecište pravaca djelovanja sila u ostala dva štapa (slika 3.b.). Na Culmannovom pravcu djeluju rezultanta sile \vec{B} i sile u štapu 1 i rezultanta sila u štapovima 2 i 3. Kako su intenzitet i smisao djelovanja sile \vec{B} poznati, možemo zatvoriti trokut sila stranice kojega su sile \vec{B} , sile u štapu 1 i njihova rezultanta (slika c.; rezultantu na pravcu paralelnom s Culmannovim pravcem obično ne crtamo).

Da bi sve četiri sile bile u ravnoteži, rezultanta sila u štapovima 2 i 3 mora biti jednaka intenziteta kao rezultanta sile \vec{B} i sile u štapu 1 i imati suprotan smisao djelovanja. Budući da se u našem primjeru Culmannov pravac poklapa s osi štapa 3 (slika 3.b.), sila u štapu 2 ne postoji, a sila u štapu 3 sama uravnotežuje silu \vec{B} i silu u štapu 1 (slika d.).

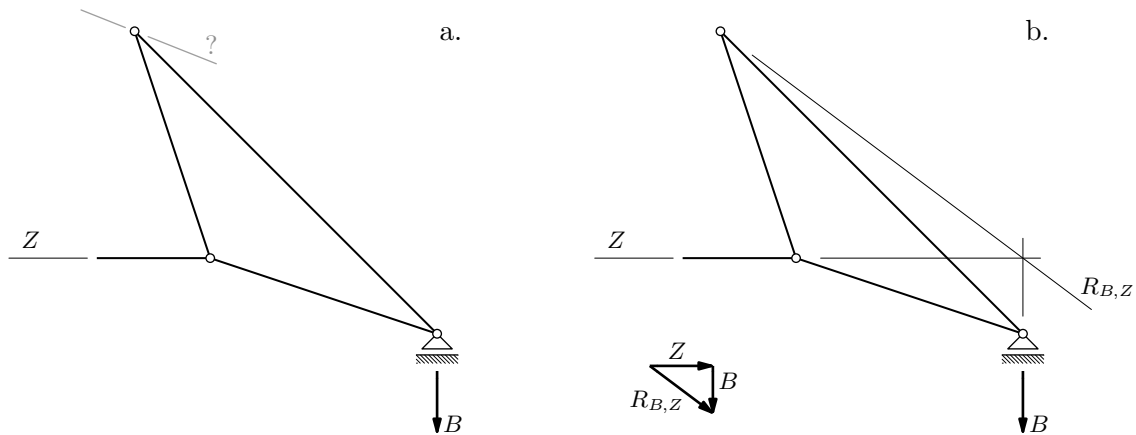
Poligoni sila na slikama 3.c. i d. nacrtani su u mjerilu 1 cm :: 10 kN. Očitane duljine prikazā sila u štapovima 1 i 3 su 13 i 1/4 mm te neznatno manje od 10 mm, pa ćemo uzeti da su njihovi intenziteti $S_1 = 13,25$ kN i $S_3 = 9,9$ kN. Sila u štapu 1 je vlačna, dok je sila u štapu 3 tlačna, pa ćemo pisati $S_1 = 13,25$ kN (+) i $S_3 = 9,9$ kN (-).

Korak treći. Nalaženje vrijednosti sile u zategi.

Želimo li presijecanjem štapova 4, 5, 6 i 7 izdvojiti dio sistema, presjeći moramo i zategu. No, vrijednost je sile u zategi nepoznata, što je za Culmannov postupak jedna nepoznanica previše (četiri nepoznate vrijednosti sila u presjeku kroz polje K-rešetke znamo svesti na tri vrijednosti). Stoga prvo treba naći vrijednost sile u zategi.

Zadani je sistem (rešetkasti) trozglojni sistem sa zategom, pa vrijednost sile u zategi možemo naći izdvajanjem dijela sistema presijecanjem kroz srednji (ili „tjemeni”) zglob (uz presijecanje zatege).

Izdvojit ćemo desni dio sistema. Silu \vec{H}_2 , koja djeluje u srednjem zglobu, odbacit ćemo s lijevom dijelom. Na desni dio djeluju poznata reakcija \vec{B} , nepoznata spojna sila u srednjem zglobu i sila \vec{Z} nepoznate vrijednosti u zategi (slika 4.a.); sila \vec{Z} djeluje na osi zatege, a pravac je djelovanja sile u zglobu nepoznat.



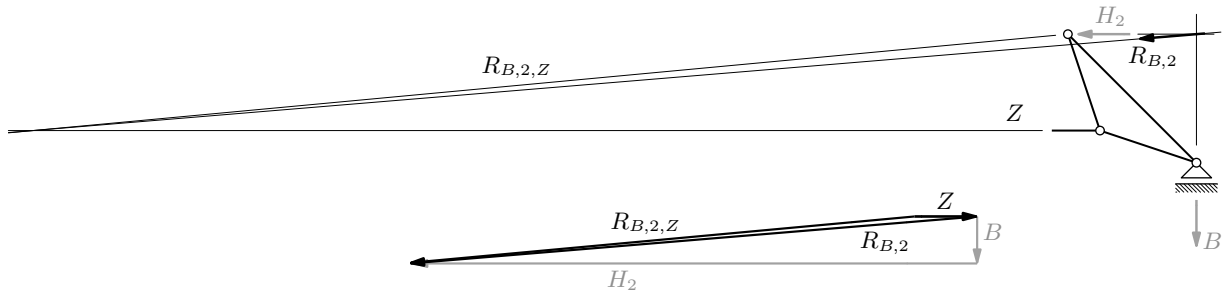
Slika 4.

Sile \vec{B} i \vec{Z} bit će u ravnoteži sa spojnom silom u srednjem zglobu ako pravac djelovanja rezultante $\vec{R}_{B,Z}$ tih dviju sila prolazi srednjim zgloбом i ako se pravac djelovanja spojne sile poklapa s pravcem djelovanja rezultante; pravac djelovanja rezultante $\vec{R}_{B,Z}$ prolazi, dakako, i sjecištem pravaca djelovanja sile \vec{B} i \vec{Z} (slika 4.b.). Uz poznate pravce djelovanja sile \vec{B} , \vec{Z} i $\vec{R}_{B,Z}$ možemo zatvoriti trokut sila (također slika b.) i naći vrijednost sile \vec{Z} . Očitana je duljina njezina prikaza 8 i $\frac{1}{3}$ mm, pa joj je, uz mjerilo sila 1 cm :: 10 kN, intenzitet $Z = 8,3$ kN. Sila je tlačna: $Z = 8,3$ kN (-).

Može se postaviti pitanje jesmo li smjeli silu \vec{H}_2 odbaciti s lijevom dijelom; na kraju krajeva, na slici uz tekst zadatka na stranici 1 izgleda kao da ta sila djeluje na desnom dijelu.

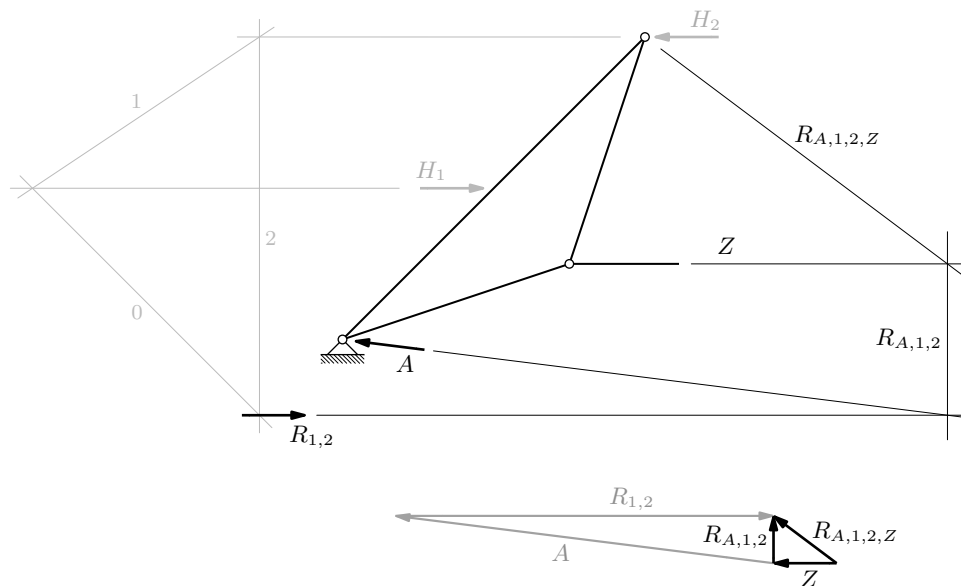
Zadržimo li silu \vec{H}_2 na desnom dijelu u konačnom se rješenju — nađenoj vrijednosti sile u zategi — ništa neće promijeniti, ali će postupak rješavanja biti složeniji, a crtež, zbog nepovoljno zadanih sila, ružnoizgledajući. Na desni dio sada djeluju poznate sile \vec{B} i \vec{H}_2 , sila \vec{Z} nepoznate vrijednosti i nepoznata spojna sila u srednjem zglobu, pa srednjim zgloбом mora proći rezultanta $\vec{R}_{B,2,Z}$ sile \vec{B} , \vec{H}_2 i \vec{Z} (slika 5.). Prvo stoga treba naći rezultantu $\vec{R}_{B,2}$ poznatih sila \vec{B} i \vec{H}_2 (ista slika). Zbog nepovoljno zadanih sila sjecište je pravaca djelovanja te rezultante i sile u zategi daleko slijêva, pa treba znatno smanjiti mjerilo duljina za crtanje plana položajã. Uz to su kutovi između pravaca djelovanja sile $\vec{R}_{B,2,Z}$, $\vec{R}_{B,2}$ i \vec{Z} , odnosno između s njima usporednih pravaca u poligonu sila vrlo mali (a njihovi sukuti vrlo veliki), pa je točnost konstrukcije poligona sila (ista slika) upitna.

Vrijednost sile u zategi možemo naći i izdvajanjem lijevoga dijela sistema. Na njega djeluju (poznate) sile \vec{H}_1 , \vec{H}_2 i \vec{A} , sila u zategi (nepoznate vrijednosti) i (nepoznata)



Slika 5.

spojna sila u srednjem zglobu (gornji dio slike 6.).¹ Srednjim zglobom sada treba proći rezultanta $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2,Z}$ poznatih sila i sile $-\vec{Z}$.²



Slika 6.

Rezultantu $\vec{\mathcal{R}}_{1,2}$ sila $\vec{\mathcal{H}}_1$ i $\vec{\mathcal{H}}_2$ i pravac njezina djelovanja našli smo na slici 1. Pravac djelovanja rezultante $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2}$ sila $\vec{\mathcal{H}}_1$, $\vec{\mathcal{H}}_2$ i $\vec{\mathcal{A}}$ prolazi sjecištem pravaca djelovanja sila $\vec{\mathcal{R}}_{1,2}$ i $\vec{\mathcal{A}}$ usporedno s pravcem na kojem je ta rezultanta u poligonu sila. (To je, naravno, pravac djelovanja reakcije $\vec{\mathcal{B}}$ — usporedite slike 6. i 2. Sile $\vec{\mathcal{H}}_1$, $\vec{\mathcal{H}}_2$, $\vec{\mathcal{A}}$ i $\vec{\mathcal{B}}$ čine uravnoteženi sistem sila, pa su u ravnoteži i sile $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2}$ i $\vec{\mathcal{B}}$, što znači da, osim što djeluje na istom pravcu kao $\vec{\mathcal{B}}$, sila $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2}$ ima jednaki intenzitet, a suprotnu orijentaciju, $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2} = -\vec{\mathcal{B}}$.) I napokon, pravac djelovanja rezultante $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2,Z}$ sila $\vec{\mathcal{H}}_1$, $\vec{\mathcal{H}}_2$, $\vec{\mathcal{A}}$ i $\vec{\mathcal{Z}}$ prolazi sjecištem pravaca djelovanja sila $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2}$ i $-\vec{\mathcal{Z}}$. (To je, naravno, pravac djelovanja rezultante $\vec{\mathcal{R}}_{B,Z}$

¹ Odbacimo li silu $\vec{\mathcal{H}}_2$ s desnim dijelom, crtež će biti jednako ružnoizgledajući kao crtež na slici 5. [Domaća zabava!]

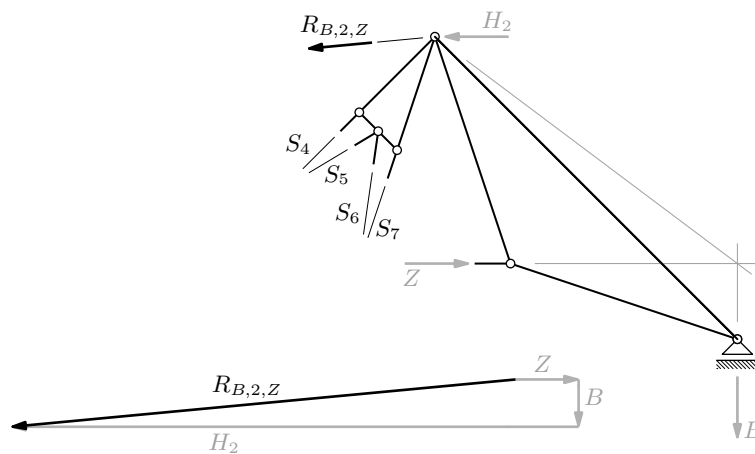
² Sila u zategi koja djeluje na lijevi dio sistema suprotno je orijentirana od sile koja djeluje na desni dio, pa u vektorskom načinu obilježavanja te sile imaju različite predznake. Na crtežima primjenjujemo tehnički način obilježavanja, pa obje sile označavamo sa Z .

sila \vec{B} i \vec{Z} — usporedite slike 6. i 4.b.; štoviše, $\vec{\mathcal{R}}_{A,1,2,Z} = -\vec{\mathcal{R}}_{B,Z}$.) I, kao što smo rekli, sila u zategi u trokutu sila na slici 6., označena sa Z , suprotno je orijentirana od one u trokutu sila na slici 4.b., također označene sa Z ; naravno, $\vec{Z} = -(-\vec{Z})$.

Korak četvrti. Nalaženje vrijednosti sila u štapovima 4, 6, 6 i 7.

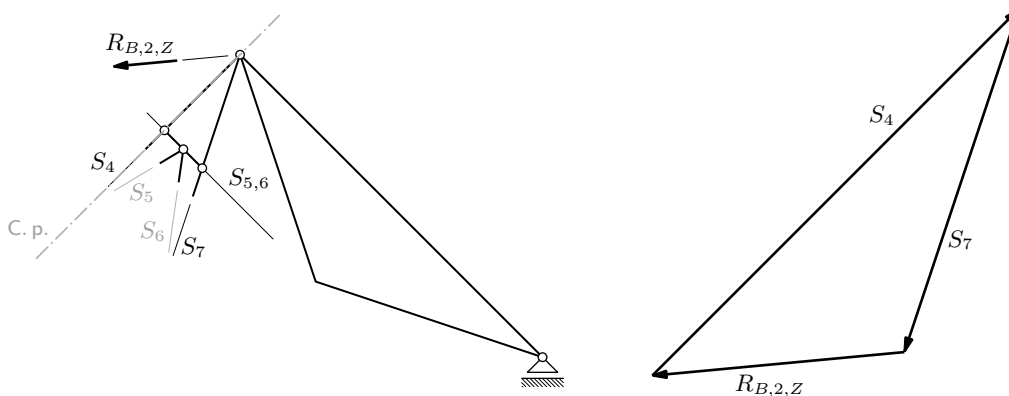
Uz poznatu vrijednost sile u zategi možemo presijecanjem zatege i štapova 4, 5, 6 i 7 izdvojiti dio sistema za nalaženje vrijednosti sila njima.

Izdvojiti ćemo dio sistema desno od presjeka. Na njega osim sila u presječenim štapovima djeluju poznate sile \vec{B} , \vec{H}_2 i \vec{Z} (slika 7.). Pravac djelovanja rezultante $\vec{\mathcal{R}}_{B,2,Z}$ poznatih sila prolazi kroz srednji zglob (ista slika).



Slika 7.

Presjekli smo četiri štapa, pa su nepoznate vrijednosti četiriju sila, no znamo da se pravac djelovanja rezultante sila u štapovima 5 i 6 mora poklapati sa zajedničkom osi ostalih dvaju štapova koji su priključeni u isti čvor (slika 8. lijevo). Zadatak je time sveden na zadatak uravnoteživanja poznate sile trima silama na poznatim pravcima djelovanja.

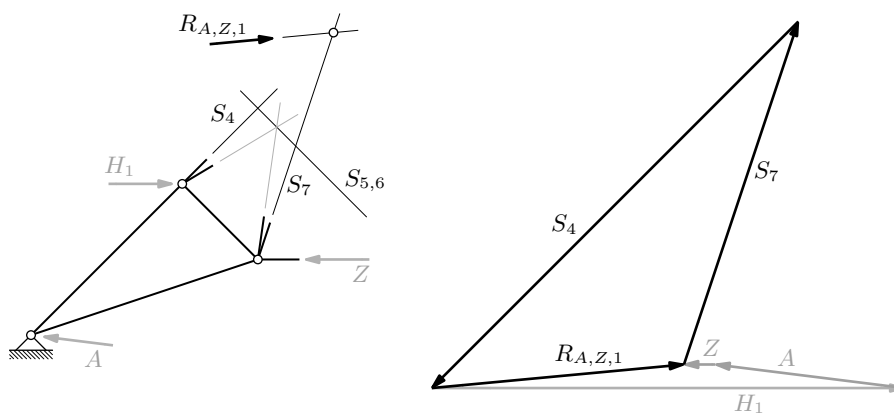


Slika 8.

Uzet ćemo da je prva točka Culmannova pravca sjecište pravca djelovanja poznate sile $\vec{\mathcal{R}}_{B,2,Z}$ i osi štapa 7 i da je njegova druga točka sjecište osi štapa 4 i pravca na kojem djeluje rezultanta sila u štapovima 5 i 6 (još uvijek slika 8. lijevo).

Poligon sila nacrtat ćemo u mjerilu 1 cm :: 20 kN (slika 8. desno). U tome je mjerilu duljina prikaza sile $\vec{\mathcal{R}}_{B,2,Z}$ upola manja od duljine njezina prikaza u poligonu sila na slici 7. u kojem je ta sila određena, nacrtanom u mjerilu 1 cm :: 10 kN. Kako je sila $\vec{\mathcal{R}}_{B,2,Z}$ poznata, možemo zatvoriti trokut sila kojem su stranice ta sila, sila u štapu 7 i njihova rezultanta na pravcu usporednom s Culmannovim pravcem. Tu rezultantu uravnotežuje rezultanta sile u štapu 4 i rezultante sila u štapovima 5 i 6. Culmannov se pravac poklapa s osi štapa 4, pa rezultanta sila u štapovima 5 i 6 ne postoji te rezultantu sile $\vec{\mathcal{R}}_{B,2,Z}$ i sile u štapu 7 uravnotežuje samo sila u štapu 4. Očitane duljine prikaza sila u štapovima 4 i 7 su $68\frac{1}{2}$ mm te $47\frac{3}{4}$ mm. Budući da je mjerilo sila 1 cm :: 20 kN, intenzitet su tih sila $S_4 = 137$ kN i $S_7 = 95,5$ kN. Prva je sila tlačna, druga vlačna: $S_4 = 137$ kN (-) i $S_7 = 95,5$ kN (+).

Vrijednosti sila u štapovima 4, 5, 6 i 7 možemo naći i izdvajanjem dijela nosača lijevo od presjeka kroz te štapove. Na taj dio osim sila u presječenim štapovima djeluju reakcija $\vec{\mathcal{A}}$, sila $-\vec{Z}$ u presječnoj zategi i sila $\vec{\mathcal{H}}_1$ (slika 9. lijevo). Budući da su osim spojne sile u srednjem zglobu te tri poznate sile jedine sile koje djeluju na dio sistema lijevo od srednjega zgloba, njihova rezultante $\vec{\mathcal{R}}_{A,Z,1}$ mora djelovati na pravcu koji prolazi tim zglobovom kako bi uravnotežila spojnu silu (ista slika).³



Slika 9.

Culmannov pravac možemo odrediti na sličan način kao pri izdvajanju dijela desno od presjeka. Poligon sila prikazan je na slici 9. desno. [Hoće li se poligon sila promijeniti ako Culmannov pravac odredimo sjecištem pravca djelovanja sile $\vec{\mathcal{R}}_{A,Z,1}$ i osi štapa 4 te sjecištem osi štapa 7 i pravca djelovanja rezultante sila u štapovima 5 i 6? Hoće li se poligon sila na slici 8. promijeniti ako na sličan način odredimo Culmannov pravac pri izdvajanju dijela desno od presjeka?]

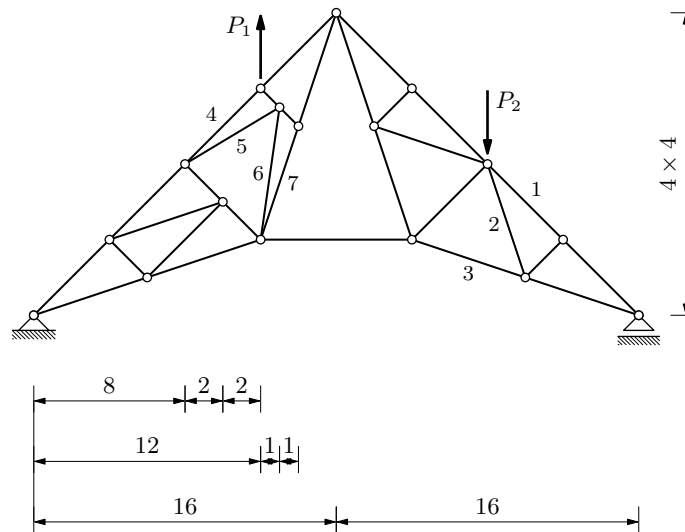
³ Uzeli smo da sila $\vec{\mathcal{H}}_2$ djeluje na dio desno od srednjega zgloba, tako da je „sadržana” u spojnoj sili. Uzmemo li da i sila $\vec{\mathcal{H}}_2$ djeluje na dio lijevo od zgloba, ništa se neće promijeniti jer pravac njezina djelovanja prolazi zglobovom, pa sila $\vec{\mathcal{R}}_{A,Z,1}$ mora uravnotežiti rezultantu te sile i spojne sile (koja je sada ne „sadrži”).

Zadatak C3.

Culmannovim postupkom odredite vrijednosti sila u štapovima 1–7!

$$P_1 = 75 \text{ kN}$$

$$P_2 = 125 \text{ kN}$$



Korak prvi. Pročitajte rješenje zadatka D2!

Korak drugi. Nalaženje pravaca djelovanja i vrijednosti reakcija.

Zadane sile djeluju na vertikalnim pravcima, a vertikalan je i pravac djelovanja reakcije \vec{B} u desnome, pomičnom zglobnom ležaju. Stoga mora vertikalan biti i pravac djelovanja reakcije \vec{A} u lijevome, nepomičnom zglobnom ležaju. Kako su pravci djelovanja svih sila usporedni, intenzitete i orijentacije reakcija našli smo pomoću verižnoga poligona (slika 10.). Poligon sila nacrtan je u mjerilu $1 \text{ cm} :: 20 \text{ kN}$.

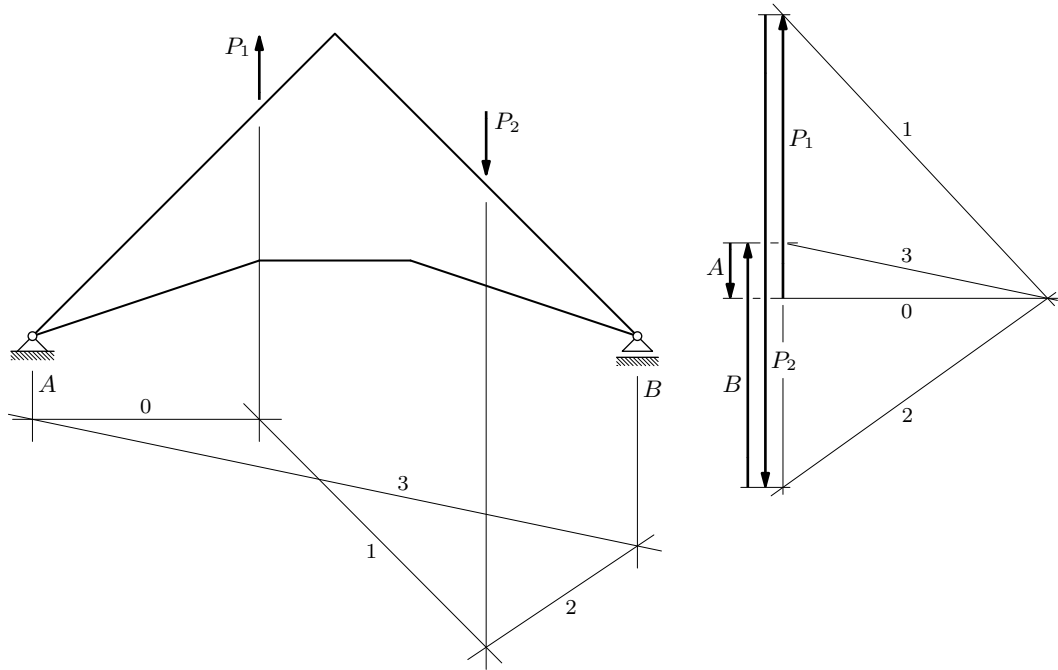
Korak treći. Nalaženje vrijednosti sila u štapovima 1, 2 i 3.

Domaća zabava po uzoru na *Korak drugi* u rješenju zadatka D2.

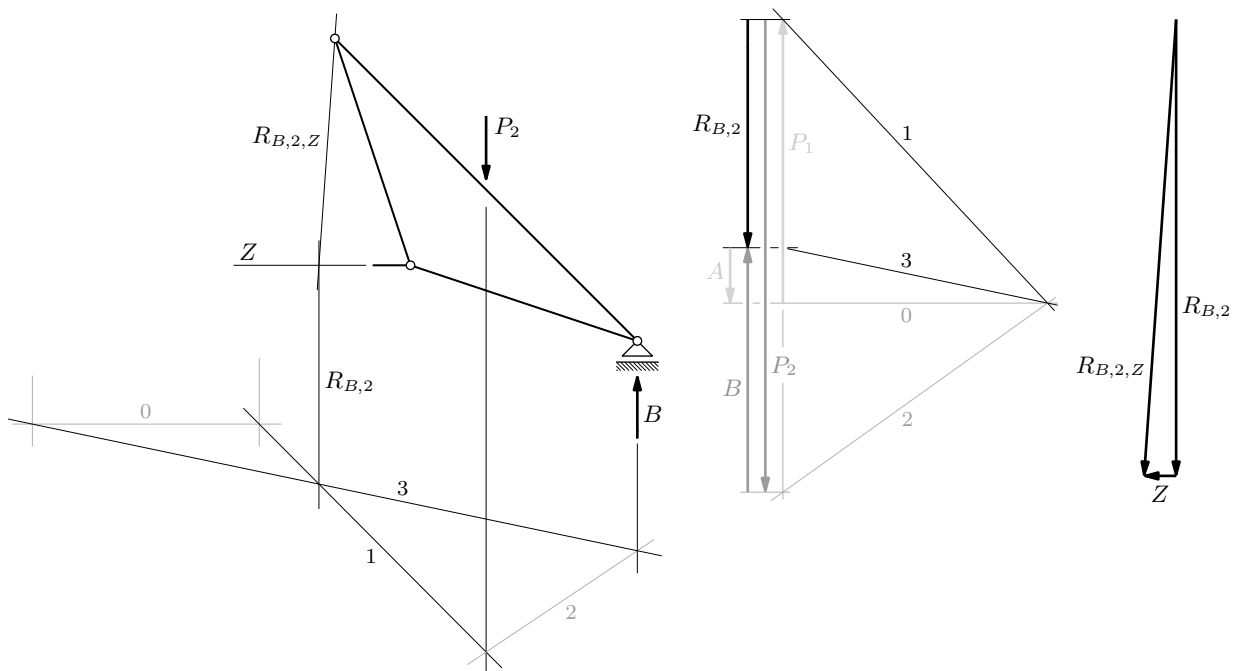
Korak četvrti. Nalaženje vrijednosti sile u zategi.

Presijecanjem kroz srednji zglob uz presijecanje zatege izdvojiti ćemo dio sistema desno od srednjega zgloba (gornji dio lijevoga crteža na slici 11.). Na njega djeluju zadana sila \vec{P}_2 , poznata reakcija \vec{B} te sila \vec{Z} nepoznate vrijednosti u zategi i nepoznata spojna sila u srednjem zglobu.

Pravac djelovanja rezultante $\vec{R}_{B,2}$ poznatih sila \vec{B} i \vec{P}_2 naći ćemo pomoću verižnoga poligona. U poligonu sila na srednjem crtežu na slici 11. rezultanta $\vec{R}_{B,Z}$ rastavljena je u komponente na zrakama 1 i 3, pa u verižnom poligonu pravac njezina djelovanja (dakako, vertikalno) prolazi sjecištem stranica 1 i 3 (donji dio lijevoga crteža na slici 11.).



Slika 10.



Slika 11.

Pravac djelovanja rezultante $\vec{R}_{B,2,Z}$ prolazi sjecištem pravca djelovanja rezultante $\vec{R}_{B,2}$ i osi zatege na kojoj djeluje sila \vec{Z} i srednjim zglobom jer rezultanta $\vec{R}_{B,2,Z}$ mora uravnotežiti spojnu silu u tome zglobu (gornji dio lijevoga crteža na slici 11.).

Uz poznate pravce djelovanja sila $\vec{R}_{B,2}$ i $\vec{R}_{B,2}$ možemo zatvoriti trokut sila (desni crtež na slici 11.; budući da je duljina prikaza sile \vec{Z} mala, mjerilo je sila na tom crtežu 1 cm :: 10 kN).

Korak peti. Nalaženje vrijednosti sila u štapovima 4, 6, 6 i 7.

Domaća zabava po uzoru na *Korak četvrti* u rješenju zadatka D2.