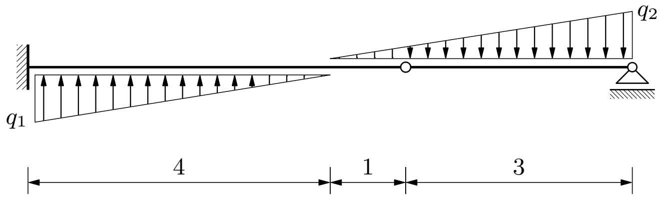
GS 1. — 6. rujna 2022.

Zadatak 1.

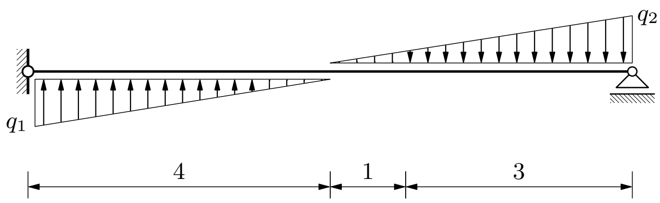
Superpozicijskim postupkom nacrtajte M dijagram, a potom primjenom diferencijalnoga odnosa T dijagram.

$q_1 = q_2 = 75\,\mathrm{kN/m'}$



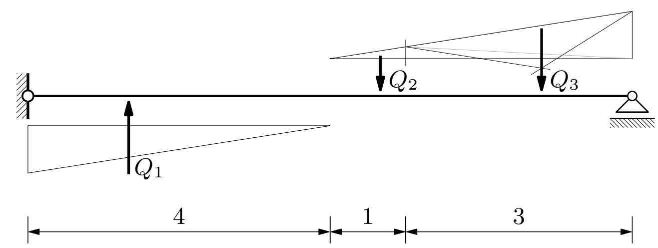
Korak prvi. Rješavanje zamjenjujuće jednostavno oslonjene grede

(1.1.) Zamjenjujuća greda nastaje „premještenjem” zgloba u lijevi (upeti) ležaj:



(1.2.) Crtanje momentnoga dijagrama na jednostavno oslonjenoj gredi (žao mi je, volim grafičke postupke, pa ću dijagram nacrtati kao verižnu krivulju; vi dijagram možete crtati i analitičkim postupkom):

(1.2.1.) Koncentrirane sile kao rezultante dijelova distribuiranih sila:



$Q_1 \;=\; \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 4 \;=\; 150\,\mathrm{kN}$

$Q_2 \;=\; \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 75\right) \cdot 1 \;=\; 9{,}375\,\mathrm{kN}$

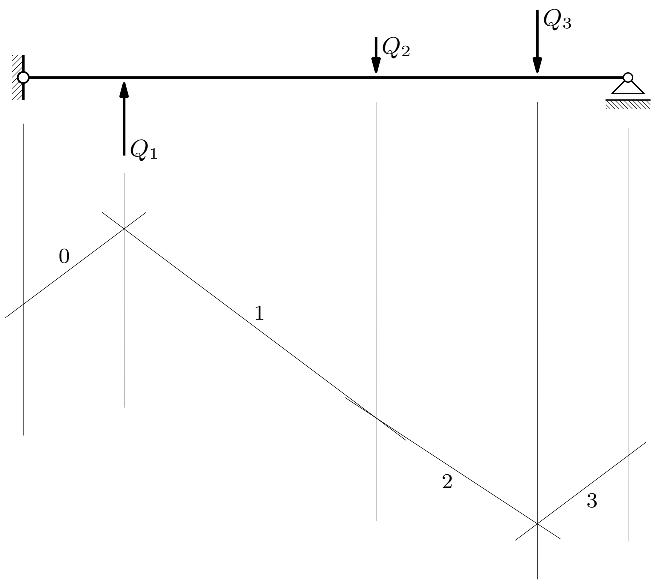
$Q_3 \;=\; \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 75\right) \cdot 3 \;+\; \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 3 \;=\; 140{,}625\,\mathrm{kN}$ (trapez je podijeljen u dva trokuta)

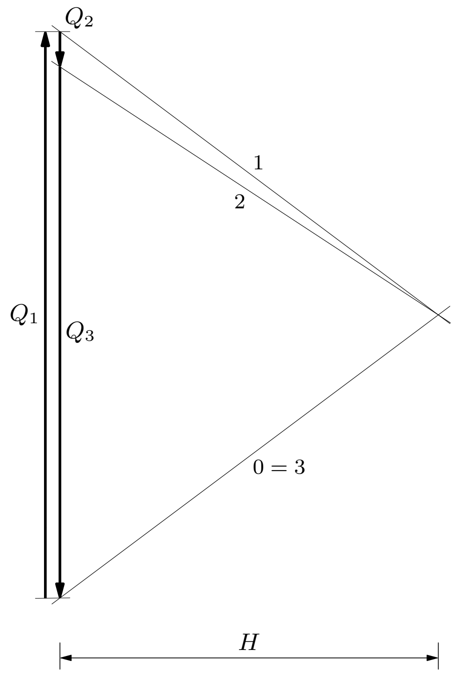
(Uskoro ću [na sljedećoj stranici] objasniti zašto sam desnu distribuiranu sila zamijenio dvjema koncentriranim silama podijelivši je „iznad« točke u kojoj je bio zglob.)

(1.2.2.) Verižni poligon (bez zaključne linije):

Budući da je riječ o grafičkoj konstrukciji, važna su mjerila i polna udaljenost:

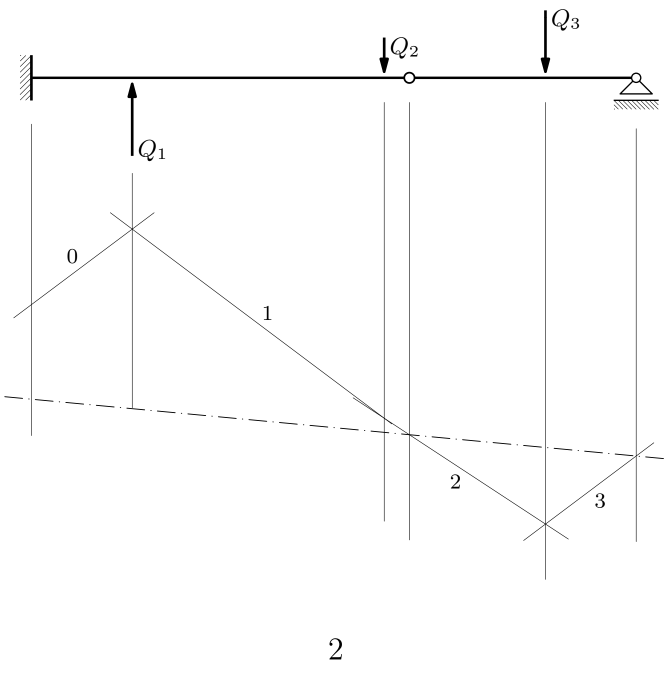
- ♠ mjerilo duljina: 1 cm :: 1 m
- ♠ mjerilo sila: 1 cm :: 20 kN
- ♣ polna udaljenost: $H = 100\,\mathrm{kN}$





Korak drugi. Popravljanje pokvarenoga — „vraćanje" zgloba u početni položaj:

(2.1.) Zaključna linija verižne krivulje za Gerberov nosač:



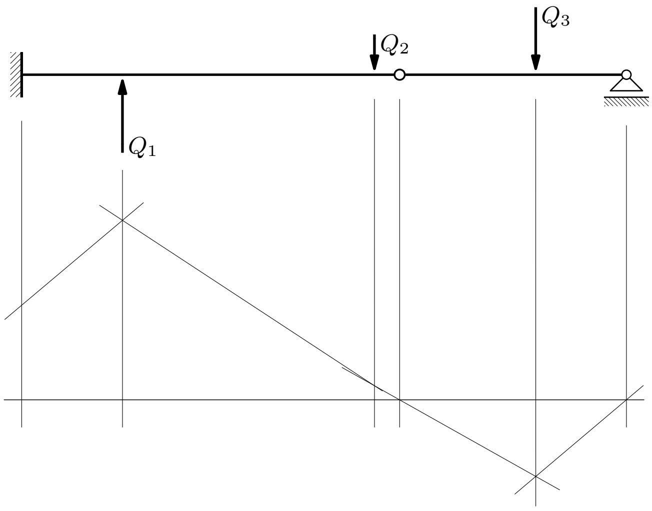
Na zadanu Gerberovu nosaču moment iščezava u desnome ležaju i u zglobu. Momentni je dijagram parabola trećega stupnja,

$$M'' = -q \quad \& \quad q \text{ linearna funkcija (polinom prvoga stupnja)}$$
$$\Rightarrow \quad M \text{ polinom trećega stupnja,}$$

pa se na prvi pogled čini da bismo, da nađemo točku dijagrama „ispod« zgloba, tu krivulju trebali nacrtati. Zásada smo, međutim, nacrtali samo njezin tangentni poligon (trebali biste znati [Mehanika 1.] da je verižni poligon nacrtan za rezultante dijelova distribuiranih sila tangentni poligon verižne krivulje). No, stranica 2 verižnoga poligona tangenta je verižne krivulje u njezinoj točki „ispod" zgloba: distribuiranu smo silu podijelili u dva dijela „nad" zglobom, a (to biste isto trebali znati [ponovno Mehanika 1.]) dio distribuirane sile i zamjenjujuća rezultanta daju momente jednakih vrijednosti na krajevima toga dijela. (Ne, dakako da ne očekujemo da to znate; bit će dovoljno da skicirate krivulju dijagrama i tako, približno, nađete njegovu nultočku.)

Poznate su nam, prema tome, dvije nultočke momentnoga dijagrama na Gerberovome nosaču, odnosno dvije točke kojima prolazi zaključna linija verižne krivulje: točka „ispod" desnoga ležaja na stranici 3 verižnoga poligona i točka „ispod" zgloba na stranici 2 (ili, približno, na koliko–toliko uredno skiciranoj krivulji). Zaključna se linija ne lomi (zaključna linija uvijek bez loma prolazi od ležaja do ležaja Gerberovoga nosača; može se slomiti, i u pravilu će se slomiti, samo „ispod" ležaja).

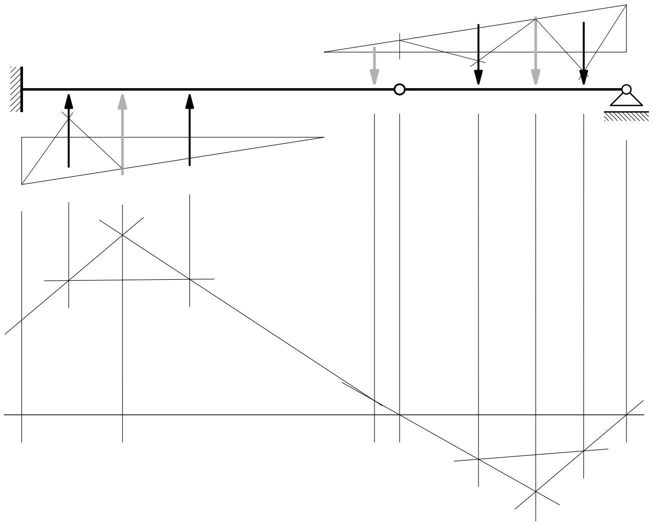
(2.2.) Horizontalna nulta linija (os) momentnoga dijagrama:



Od horizontalne osi na vertikalne pravce nanosimo na prethodnom crtežu izmjerene duljine odsječaka vertikalnih pravaca između vrhova verižnoga poligona i točaka na zaključnoj liniji.

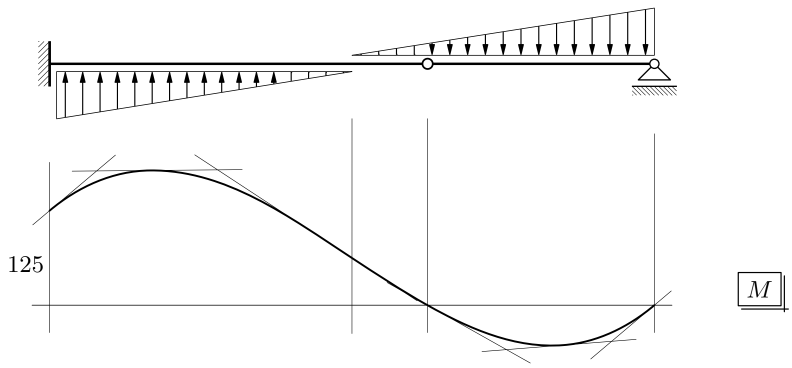
(2.3.) Dijagram momenata na Gerberovome nosaču:

(2.3.1.) Dodatne tangente (i dirališta na njima):



Rekurzivni postupak crtanja tangenata opisan je i objašnjen na stranicama 92 i 93 skripata.

(2.3.2.) Dijagram momenata:



Vrijednosti momenata u pojedinim točkama možemo uz poznato mjerilo duljina i polnu udaljenost upotrijebljenu u crtanju verižnoga poligona „očitati" iz dobivenoga dijagrama. Primjerice, na crtežu se može izmjeriti da je „ispod" lijevoga ležaja duljina odsječka ordinale između osi i dijagrama $\bar{\zeta}(0) = 12{,}5\ \mathrm{mm} = 1{,}25\ \mathrm{cm},$ što u odabranome mjerilu duljina daje $\zeta(0) = 1{,}25\ \mathrm{m}$; polna je udaljenost $H = 100\ \mathrm{kN},$ pa je vrijednost momenta u lijevome ležaju (prema izrazu poznatome iz Mehanike 1.)

$$M(0) \;=\; \zeta(0)\cdot H \;=\; 1{,}25\cdot 100 \;=\; 125\ \mathrm{kNm}$$

(analitički izračunana vrijednost također je $M(0) = 125{,}00\ \mathrm{kNm}$). Opisanom smo „računicom" u stvari definirali mjerilo momenata: $1\ \mathrm{cm} :: 100\ \mathrm{kNm}$.

Spomenut ću još (točnosti i „profinjenosti" crteža radi) da je u polovini raspona točka infleksije krivulje dijagrama:

$$M'' \;=\; -q \quad \& \quad q(4) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad M''(4) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_{M}(4) \;=\; 0.$$

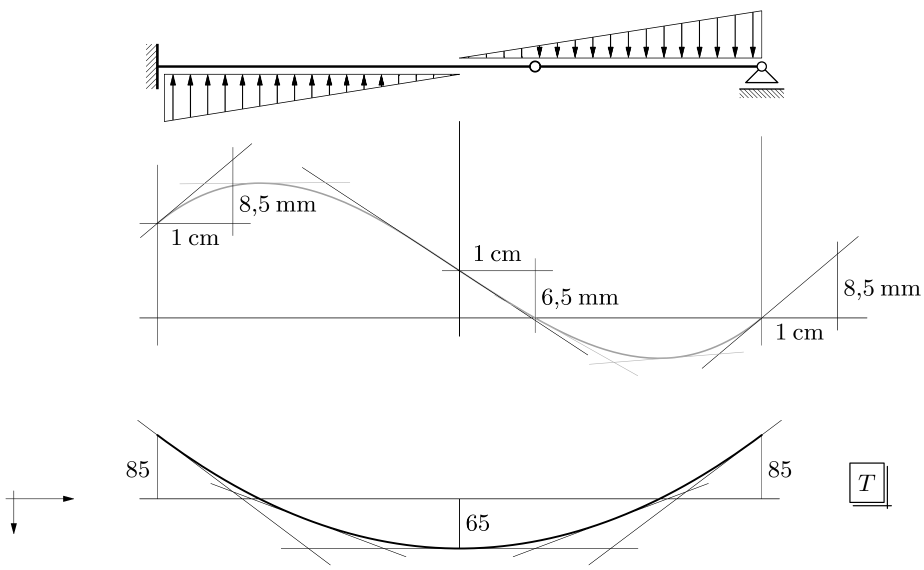
Korak treći. Dijagram poprečnih sila:

$$\begin{aligned} T' &= -q \quad \& \quad q \text{ linearna funkcija (polinom prvoga stupnja)} \\ &\Rightarrow \qquad T \text{ kvadratna parabola (polinom drugoga stupnja)} \end{aligned} \tag{$\clubsuit$}$$

ili

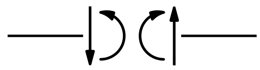
$$\begin{aligned} M' &= T \quad \& \quad M \text{ parabola trećega stupnja} \\ &\Rightarrow \qquad T \text{ kvadratna parabola} \end{aligned} \tag{$\spadesuit$}$$

Za crtanje dijagrama poprečnih sila primijenit ćemo diferencijalni odnos ($\spadesuit$). Geometrijska je interpretacija derivacije funkcije u nekoj točki nagib tangente na graf funkcije u toj točki, a nagib je pravca jednak tangensu kuta koji pravac zatvara s horizontalnom osi. U nekoj ćemo točki krivulje momentnoga dijagrama nagib tangente grafički odrediti pomoću pravokutnoga trokuta kojemu je hipotenuza na toj tangenti, s jednim krajem u diraliću. Taj je kraj vrh trokuta u kojem je i jedan kraj horizontalne katete odabrane duljine 1 cm. Duljinu vertikalne katete mjerimo na crtežu. Primjerice, izmjerena duljina vertikalne katete trokuta za nalaženje nagiba tangente u lijevome ležaju jest 8,5 mm = 0,85 cm, pa je traženi nagib ${}^{0{,}85}/{}_{1}$; to je „stvarni”, „geometrijski” nagib nacrtanoga pravca, izračunan uz (prešutnu) pretpostavku da su mjerila u horizontalnom i vertikalnom smjeru (u stvari, u svim smjerovima) jednaka. No, u crtanju dijagrama momenata na horizontalnu os nanosimo duljine u mjerilu duljina, a na vertikalnu (ili paralelno s njome) momente u mjerilu momenata. Uzmemo li u obzir mjerila, „statički” će nagib tangente biti ${}^{85\,[\mathrm{kNm}]}/{}_{1\,[\mathrm{m}]} = 85\,[\mathrm{kN}]$; dobiveni „statički” nagib ima mjernu jedinicu sile, što diferencijalni odnos $M' = T$ i propisuje. „Statičke” nagibe tangenata na krivulju momentnoga dijagrama, odnosno vrijednosti poprečnih sila, izračunali smo u tri njegove točke: u lijevome i desnom ležaju (točnije, neposredno desno od lijevoga i neposredno lijevoga ležaja; u ležaju je poprečna sila nedefinirana) te u polovini raspona (analitički proračun daje $T(0) = T(8) = -84{,}375$ kN i $T(4) = 65{,}625$kN).



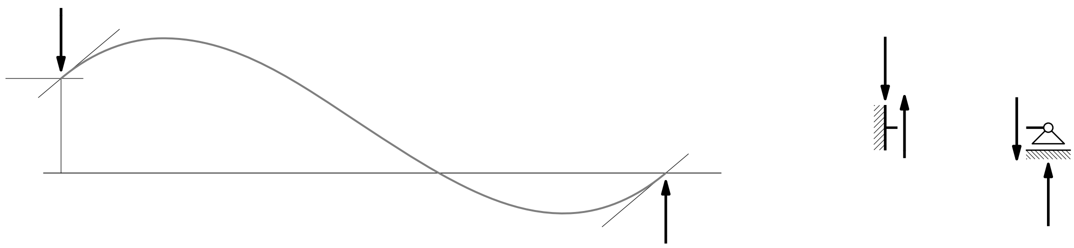
Te su izračunane vrijednosti, uz to što znamo o kojoj je krivulji riječ, dovoljne da nacrtamo krivulju dijagrama poprečnih sila. Odaberemo li za mjerilo sila u tom dijagramu 1 cm :: 100 kN, duljine vertikalnih kateta trokutâ, pomoću kojih smo izračunali nagibe tangenata na krivulju momentnoga dijagrama, možemo izravno prenijeti u odgovarajuće točke osi dijagrama poprečnih sila, uzevši u obzir predznake vrijednosti poprečnih sila (o predznacima u sljedećem odjeljku). Dobili smo tri točke kojima prolazi krivulja dijagrama poprečnih sila — kvadratna parabola. U polovini je raspona $q(4) = 0$, pa iz (♣) slijedi da je tangenta na krivulju u točki u polovini raspona (u srednjoj točki) horizontalna, jer joj je nagib nula. Poznate su nam, prema tome, tri točke kojima prolazi kvadratna parabola i tangenta u jednoj od njih. To je dovoljno da parabolu nacrtamo postupkom poznatim iz nacrtne geometrije.

(3.1.) O predznacima vrijednosti poprečnih sila:

(Pozitivne orijentacije momenata i poprečnih sila: )

(3.1.1.) Statički:

Na momentnom dijagramu možemo vidjeti da je reakcija u lijevome ležaju orijentirana prema dolje, a reakcija u desnome ležaju prema gore. Stoga su vrijednosti poprečnih sila neposredno desno od lijevoga ležaja i neposredno lijevo od desnoga ležaja negativne. Orijentiramo li ordinatnu os dijagrama poprečnih sila prema dolje, negativne vrijednosti nanosimo iznad apscisne osi.



Između lijevoga ležaja i polovine raspona moment poprima najveću (apsolutnu) vrijednost. U toj je točki tangenta na krivulju momentnoga dijagrama horizontalna (nagib joj je nula), pa poprečna sila iščezava, što znači da krivulja dijagrama poprečnih sila siječe apscisnu os. Vrijednost poprečne sile u polovini raspona stoga ima suprotan predznak od vrijednosti neposredno uz ležaj — vrijednost je pozitivna, pa je nanosimo ispod osi.

(3.1.2.) Formalnomatematički:

U momentnom dijagramu vrijednosti uvijek nanosimo „na vlačnu strani”, pa ne obraćamo pozornost na njihove predznake. No, pozitivne su vrijednosti iznad, a negativne ispod apscisne osi, što znači da je ordinatna os momentnoga dijagrama orijentirana prema dolje.

Tangente na krivulju našega momentnog dijagrama u ležajevima „padaju” (iako to na crtežu tako ne izgleda), dok se tangenta na krivulju u točki u polovini raspona „penje”; drugim riječima, nagib je tangenata u ležajevima negativan, a u polovini raspona pozitivan, te su i vrijednosti poprečnih sila uz ležajeve negativne, a u polovini je raspona vrijednost pozitivna.