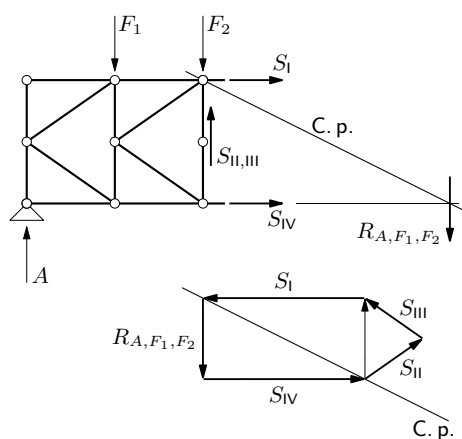
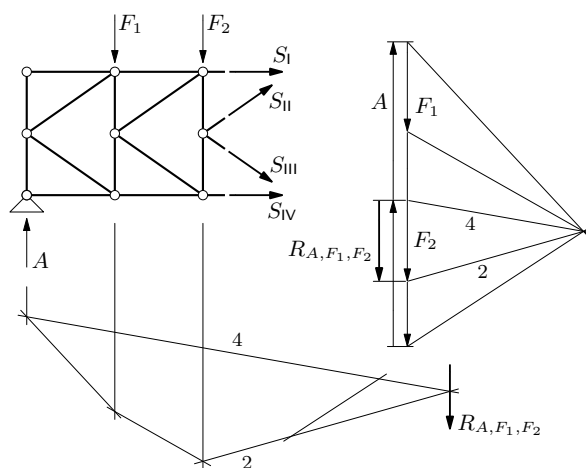


# Krešimir Fresl

## Građevna statika 1.

### Predavanja



# Sadržaj

Umjesto uvoda: građevna statika i mehanika	5
<b>1. Konstrukcije i njihove proračunske sheme</b>	<b>11</b>
1.1. Pokušaj definicije . . . . .	11
1.2. Proračunske sheme . . . . .	11
1.3. Dvije klasifikacije . . . . .	13
1.3.1. Geometrijsko stajalište . . . . .	13
1.3.2. Kinematičko stajalište . . . . .	16
1.4. Pojednostavnjenja . . . . .	17
1.4.1. Pojam matematičkoga modela . . . . .	17
1.4.2. Kontinuum . . . . .	17
1.4.3. Linearizacije . . . . .	18
<b>2. Počela statike</b>	<b>20</b>
2.1. O pojmu sile i ponešto o pojmu ravnoteže . . . . .	20
2.2. O pojmu momenta sile . . . . .	27
2.3. O pojmu ravnoteže, nanovo, potpunije . . . . .	31
<b>3. Jednadžbe ravnoteže štapa</b>	<b>33</b>
3.1. Uvod u geometriju gibanja . . . . .	33
3.2. Diferencijalni oblik jednadžbi ravnoteže . . . . .	36
3.3. Integralni oblik jednadžbi ravnoteže . . . . .	46
3.4. Linearizacija jednadžbi ravnoteže za ravan štap . . . . .	48
3.4.1. Ravan štap u ravnini . . . . .	53
3.5. Utjecaj koncentriranih djelovanja . . . . .	55
<b>4. Statički određeni nosači s jednim punostjenim diskom</b>	<b>57</b>
4.1. Sile u vanjskim vezama . . . . .	57
4.1.1. Kanonske jednadžbe ravnoteže diska . . . . .	58
4.1.2. Ritterov postupak . . . . .	60
4.1.3. Culmannov postupak . . . . .	62
4.1.4. Sile na usporednim pravcima . . . . .	65
4.1.5. Zglobni ležajevi . . . . .	68
4.1.6. Verižni poligon . . . . .	70
4.2. Sile u poprečnim presjecima . . . . .	74
4.2.1. Analitički postupak . . . . .	74
4.2.2. Grafički postupak . . . . .	76

4.2.3.	Primjene verižnoga poligona . . . . .	78
4.3.	Jednostavno oslonjena greda . . . . .	80
4.3.1.	Sile u vanjskim vezama . . . . .	81
4.3.2.	Sile u presjecima . . . . .	85
4.3.3.	Dijagrami unutarnjih sila . . . . .	89
4.3.4.	Verižni poligon i momentni dijagram . . . . .	93
<b>5.</b>	<b>Gerberovi nosači</b>	<b>98</b>
5.1.	Značajke . . . . .	98
5.2.	Raspored zglobova . . . . .	100
5.3.	Analitički postupci . . . . .	102
5.3.1.	Neraščlanjeni postupak . . . . .	102
5.3.2.	Raščlanjeni postupak . . . . .	104
5.3.3.	Unutarnje sile . . . . .	109
5.3.4.	Dijagrami unutarnjih sila . . . . .	114
5.4.	Superpozicijski postupak . . . . .	118
<b>6.</b>	<b>Statički određeni ravninski rešetkasti nosači</b>	<b>127</b>
6.1.	Metode čvorova . . . . .	128
6.2.	Metode presjeka . . . . .	132
6.2.1.	Culmannov postupak . . . . .	132
6.2.2.	Nosač s K ispunom . . . . .	133
6.2.3.	Ritterov postupak . . . . .	133
6.3.	Proširenje pojma rešetkastoga nosača . . . . .	135
6.4.	Složeni rešetkasti nosači . . . . .	136
6.5.	Rešetkasti nosači sa sekundarnom ispunom . . . . .	137
<b>7.</b>	<b>Trozglobni lukovi i okviri</b>	<b>139</b>
7.1.	Opis. Geometrijska nepromjenjivost i statička određenost . . . . .	139
7.2.	Grafički postupak . . . . .	140
7.2.1.	Jedna zadana sila . . . . .	140
7.2.2.	Više sila zadanih na jednome disku . . . . .	142
7.2.3.	Sile zadane na oba diska . . . . .	143
7.3.	Analitički postupak . . . . .	145
7.3.1.	Sile u vanjskim vezama i u srednjem zglobu . . . . .	145
7.3.2.	Sile u poprečnim presjecima . . . . .	151
7.3.3.	Primjer (s nekoliko dõsad nespomenutih pojedinosti) . . . . .	152
7.4.	Superpozicijski postupak . . . . .	159
7.4.1.	Zamisao . . . . .	159
7.4.2.	Podsjetnik: perspektivna afinost . . . . .	161
7.4.3.	Primjena afinoga pridruživanja . . . . .	164
7.4.4.	Primjer . . . . .	166
7.5.	Jedno poopćenje . . . . .	169
<b>8.</b>	<b>Geometrija pomakâ i deformacija</b>	<b>173</b>
8.1.	Štap u prostoru . . . . .	173

8.2.	Ravni štap u ravnini . . . . .	178
8.3.	Kinematičke jednadžbe ravninskih rešetkastih sistema . . . . .	183
<b>9.</b>	<b>Virtualan rad</b>	<b>185</b>
9.1.	O pojmu mehaničkoga rada . . . . .	185
9.1.1.	Konzervativne sile . . . . .	187
9.1.2.	Rad vanjskih i unutarnjih sila . . . . .	188
9.2.	O pojmu virtualnoga rada . . . . .	188
9.2.1.	Iz povijesti . . . . .	189
9.3.	Teorem o virtualnim pomacima za deformabilno tijelo . . . . .	193
9.4.	Teorem o virtualnim silama . . . . .	207
9.5.	Metoda jedinične sile . . . . .	208
9.5.1.	Vereščaginov teorem . . . . .	209
9.5.2.	Primjer . . . . .	210
<b>10.</b>	<b>O statički neodređenim nosačima</b>	<b>215</b>
<b>11.</b>	<b>Metoda sila</b>	<b>227</b>
11.1.	Temeljna zamisao . . . . .	227
11.2.	Osnovni sistem i statički neodređene veličine . . . . .	235
11.3.	Jednadžbe metode sila . . . . .	241
11.4.	Rješavanje sustava jednadžbi kompatibilnosti . . . . .	245
11.4.1.	Gaussov postupak . . . . .	246
11.4.2.	Mehanička interpretacija . . . . .	247
11.4.3.	Iteracijski postupak . . . . .	248
11.5.	Sile u statički neodređenim nosačima . . . . .	250
11.6.	Prisilni pomaci ležajeva . . . . .	252
11.7.	Matrice popustljivosti ravnoga štapa . . . . .	257
11.7.1.	Utjecaj djelovanjâ . . . . .	260
11.7.2.	Distribuirana sila . . . . .	261
11.7.3.	Prisilni pomaci . . . . .	263
11.7.4.	Varijacija na temu . . . . .	263
11.7.5.	Koncentrirana sila . . . . .	265
11.8.	O rešetkastim nosačima — formaln(ij)i pogled na metodu sila . . . . .	267
<b>12.</b>	<b>Opća metoda pomaka</b>	<b>270</b>
12.1.	O metodama pomakâ . . . . .	270
12.2.	Zamisao . . . . .	273
12.2.1.	Dualitet metoda sila i pomakâ . . . . .	277
12.2.2.	Druga metafora . . . . .	278
12.3.	Matrična formulacija opće metode pomakâ . . . . .	279
12.3.1.	Sile na krajevima štapnoga elementa . . . . .	280
12.3.2.	Sile upetosti . . . . .	281
12.3.3.	Odnos između sila na krajevima i pomakâ krajeva . . . . .	282
12.3.4.	Ukupne sile na krajevima štapnoga elementa . . . . .	287

12.3.5.	Napomena o diferencijalnim jednadžbama polja pomaka . . . . .	288
12.3.6.	Prijelaz u globalni koordinatni sustav . . . . .	288
12.3.7.	Jednadžbe ravnoteže čvorova . . . . .	295
12.3.8.	Konačne vrijednosti sila na krajevima štavnoga elementa . . . . .	299
12.3.9.	Reakcije . . . . .	299
12.3.10.	Utjecaj numeracije čvorova . . . . .	299
12.3.11.	Prisilni pomaci ležajeva . . . . .	301
12.4.	O rešetkastim nosačima . . . . .	302
<b>13.</b>	<b>O metodi konačnih elemenata</b>	<b>303</b>
13.1.	Umjesto uvoda . . . . .	303
13.2.	O općoj metodi pomaka, ponovo . . . . .	304
13.3.	Pretpostavljeno polje pomaka . . . . .	306
13.3.1.	Pomaci krutoga tijela . . . . .	307
13.3.2.	Stanje konstantne deformacije . . . . .	308
13.3.3.	Neprekinutost u spoju elemenata . . . . .	308
13.3.4.	Vektorski prostor polinomâ . . . . .	308
13.4.	Primjena teorema o virtualnom radu . . . . .	311
13.5.	Primjena teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije . . . . .	313
<b>14.</b>	<b>Utjecajne funkcije i utjecajne linije — definicije i primjena</b>	<b>316</b>
14.1.	Pojam utjecajne funkcije . . . . .	316
14.2.	Primjena . . . . .	318
14.2.1.	Utjecaj jedne koncentrirane sile . . . . .	318
14.2.2.	Utjecaj niza koncentriranih sila . . . . .	318
14.2.3.	Utjecaj distribuirane sile . . . . .	319
14.2.4.	Utjecaj koncentriranoga momenta . . . . .	321
	<b>Literatura</b>	<b>323</b>

## Umjesto uvoda: građevna statika i mehanika

Zove se gibučé ča se giblje ili ča se more lasno gibati, a zove se stabulo ali negibučé ono ča se s mista ne giblje, a toj rekuć zemlja ali kuća, polača u japno, ali na selu polipa ali crkva ali kašteo ali peč ka je stanovita.

*Poljički statut, 1440.*

*Statika štapnih konstrukcija* dio je tehničke mehanike u kojemu se proučava i opisuje ponašanje štapnih konstrukcija izloženih mirnim djelovanjima. U građevinarstvu primijenjena statika štapnih konstrukcija tradicionalno se naziva *građevnom statikom*. „Primjena” ne znači da ćemo uvoditi neke posebne, „sužene i ograničene” zakone ili postupke, nego tek da ćemo se ponajviše baviti tipovima konstrukcija koje se primjenjuju u građevinarstvu i da ćemo općeprimjenjive postupke prilagođavati njihovu proračunu.

*Štapne konstrukcije* su konstrukcije sastavljene od štapnih elemenata — sastavnih dijelova čija je duljina znatno veća od širine i debljine (ili visine). Pod pojmom *konstrukcije* podrazumijevamo nosivi sklop promatranoga građevinskog objekta, a ne objekt u cjelini. Pritom riječ može biti o cijeloj građevini ili o nekom njezinu dijelu.

Šire znanstveno područje, tehnička mehanika, sadrži dijelove klasične mehanike čvrstih tijela koji imaju primjenu u tehnici.

*Mehanika* je znanost o općim zakonima ravnoteže i gibanja tijelâ izloženih djelovanju sila. „Studij fizike počinje mehanikom ne samo zato što je mehanika najstarija grana znanosti nego zbog duboka uzroka što je ona prvi i nuždan stupanj u shvaćanju prirode. [...] mehanika se temelji na najstarijim i najopćenitijim iskustvima što su ih ljudi stekli u svakidašnjem radu. Povijest mehanike ogledalo je razvitka ljudskoga mišljenja, studij mehanike škola je kako treba da se tumače prirodne pojave” [37].

Po strogosti deduktivnoga izvođenja novih spoznaja iz razmjerno malog broja prihvaćenih zakona, koji imaju ulogu aksioma, mehanika je bliska matematici. „Mehanika je raj matematičkih znanosti, jer tek s pomoću nje ubiremo plodove matematike” [Leonardo]. Ali: „Zakoni mehanike ne mogu se ni na koji način držati matematički dokazanim istinama; radije, treba ih smatrati tvrdnjama koje ne samo da pretpostavljaju, nego i *traže* neprekidnu provjeru pokusima” [25].

Prema sažetoj i stoga ponešto pojednostavljenoj povijesti znanosti temeljne je zakone, na kojima je izgrađena klasična mehanika, postavio Isaac Newton (1642.–1727.) u djelu *Matematička načela prirodne filozofije* (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, 1687.), te se klasična mehanika naziva i Newtonovom mehanikom. Na početku treće knjige *Načela* Newton iznosi temeljna načela metode „prirodne filozofije”: ne treba uvoditi

druge uzroke osim onih koji su neophodni za objašnjenje pojava (taj je zahtjev u logici i u filozofiji poznat kao Occamova britva); istovrsne učinke treba što potpunije izvesti iz istih uzroka; svojstva koja su pridružena tijelima s kojima i na kojima se mogu vršiti pokusi treba poopćiti na sva tijela; svaku tvrdnju koja je induktivno izvedena iz promatranih pojava treba smatrati ispravnom sve dok je nova opažanja ne pobiju ili ne ograniče njezinu valjanost.

Klasična se mehanika prema obilježjima zadaća koje se proučavaju i rješavaju dijeli na kinematiku i dinamiku. *Kinematikom* se naziva geometrija gibanja: gibanja se analiziraju neovisno o njihovom uzrocima. *Dinamika* se bavi utjecajem sila — u korijenu je riječi „dinamika” grčka riječ „dýnamis” (δύναμις), sa značenjem „sila”, „snaga”. Dinamika se pak dijeli na statiku i kinetiku. Središnji je pojam *statike* pojam ravnoteže koju ćemo zasad, nepotpuno, definirati kao stanje mirovanja tijelâ na koja djeluju sile. Dok se u kinematici ne uzimaju u obzir mase tijelâ niti sile koje na njih djeluju, počela su *kinetike* sile, možda ovisne o vremenu, kao uzroci promjena gibanja tijelâ i tromosti masa koje teže održanju nepromijenjenoga i nepromjenjivog stanja. Česta je, pa čak i uobičajena, podjela klasične mehanike na statiku, kinematiku i dinamiku. Sadržajno to nije neka nova, drukčija podjela; različiti su samo nazivi: sadržaj dinamike odgovara sadržaju kinetike u prethodnoj podjeli (kao da u statici, koja je sada izbačena iz dinamike, nema sila).

Prema materijalnim i geometrijskim svojstvima proučavanih predmeta klasična se mehanika dijeli na mehaniku materijalnih točaka, mehaniku krutih tijela, mehaniku deformabilnih tijela te mehaniku fluida — tekućina i plinova. Realno *čvrsto tijelo* ili *tijelo u čvrstomu agregatnom stanju* skup je čestica međusobne udaljenosti kojih se bitno ne mijenjaju pri djelovanju sila i nekih drugih utjecaja, poput topline. Čvrsta se tijela u klasičnoj mehanici modeliraju kao materijalne točke, kao kruta tijela ili kao deformabilna tijela. *Materijalna je točka* neprotežna (ili: geometrijska) točka u koju je „sabijena” sva masa tijela i koja može biti izvorom ili hvatištem sila. Pojam *krutoga tijela* označava idealizirano tijelo koje ne mijenja oblik pod djelovanjem sila, što znači da se udaljenosti između pojedinih njegovih točaka zaista ne mijenjaju. (Katkada se, kako bi se naglasila potpuna nepromjenjivost oblika, upotrebljava i pleonazam *apsolutno kruto tijelo*.) *Deformabilna pak tijela* u stanovitoj mjeri mijenjaju oblik, ostajući ipak u granicama prepoznatljivosti.

Korijeni su mehanike antički, u djelima Aristotela (384. pr. Kr.–322. pr. Kr.) i Arhimeda (287. pr. Kr.–212. pr. Kr.). U srednjemu vijeku razvijala se na Arhimedovu tragu ponajprije statika, no bilo je i doprinosa kinematici, pa i kinetici. Simon Stevin (1548.–1620.), suvremenik Shakespeareov, bavio se ponajviše statikom krutoga tijela i hidrostatikom, a „otkrio” je paralelogram sila i verižni poligon [36]. U istraživanjima zakonâ gibanja Newtonovi su prethodnici Galileo Galilei (1564.–1642.), Johannes Kepler (1571.–1630.) i, dijelom, Christiaan Huygens (1629.–1695.). Rekli smo već da je temeljne zakone klasične mehanike jasno izrazio Isaac Newton, (1642.–1727.), pa se klasična mehanika naziva i Newtonovom mehanikom. U razvedenoj povijesti razvoja mehanike nakon Newtona spomenuti treba Leonharda Eulera (1707.–1783.) među čijim je brojnim doprinosima i izvod općih jednadžbi gibanja krutoga tijela; Jeana d’Alemberta (1717.–1783.) čiji princip omogućava rješavanje problema dinamike postupcima statike; Josepha–Louisa de Lagrangea (1736.–1813.) koji u djelu *Analitička mehanika*

(*Mécanique analytique*, 1788.) uvodi varijacijski pristup mehanici; Julesa Henrija Poincaréa (1854.–1912.), začetnika teorije kaosa...

„Na početku 20.-og stoljeća razumjeli smo kako priroda djeluje u okviru klasične fizike, što je sasvim zadovoljavajuće u rasponu od međuzvezdanih udaljenosti pa sve do približno jedne stotinke milimetra” [16]. U prvoj četvrtini dvadesetoga stoljeća počele su se razvijati dvije „nove” mehanike: *relativistička mehanika* (Albert Einstein, 1879.–1955.), koja nas uči da mase tijelâ zakrivljuju prostor i da promatrači koji putuju različitim brzinama neku pojavu mogu različito „vidjeti”, i *kvantna mehanika* (Max Planck,<sup>1</sup> 1858.–1947.; Niels Bohr, 1855.–1962.; Werner Heisenberg, 1901.–1976.; Erwin Schrödinger, 1887.–1961.; ...), koja je potvrdila davnu Boškovićevu slutnju [*Teorija prirodne filozofije svedena na jedan jedini zakon sila koje postoje u prirodi*, 1758.], korijeni koje su u antičkome atomizmu: „Po mom mišljenju osnovni su elementi tvari posve nedjeljive i neprotežne točke koje su u beskrajnoj praznini tako razasute da su po dvije bilo koje od njih međusobno udaljene nekim razmakom koji se može beskrajno povećavati ili smanjivati, ali nikako ne može posve nestati [...] Stoga ne mogu prihvatiti da bi praznina bila rasuta u tvari, već smatram da je tvar rasuta u praznini i u njoj ploviti”. A da ta „nova stvarnost” bude još začudnija, „elementi tvari” nisu uvijek čestice — ovisno o pokusu u kojem ih promatramo, mogu nam se prikazati i kao valovi. „Dok je relativistička mehanika, poremetivši doduše naše uobičajeno shvaćanje vremena i prostora, dovršila i okrunila klasičnu mehaniku, kvantna i valna mehanika donijele su nam korjenito nove zamisli i prisilile nas da se odrekne neprekinutosti i potpunoga determinizma elementarnih pojava” (L. de Broglie u predgovoru knjizi [12]). No, „u rasponu od međuzvezdanih udaljenosti pa sve do približno jedne stotinke milimetra” rješenja su klasične mehanike vrlo velikih točnosti; tako su, primjerice, proračuni potrebni za spuštanje ljudi na Mjesec u cjelosti provedeni prema zakonima Newtonove mehanike.

*Tehnička mehanika*, koja obuhvaća u tehnici primjenjiva poglavlja mehanike apsolutno krutih i deformabilnih tijela, dijeli se na osnovnu tehničku mehaniku (gradivo predmeta *Mehanika 1.* i *Mehanika 2.*: statika, kinematika i dinamika materijalnih točaka i apsolutno krutih tijela), znanost o otpornosti materijala, teorije štapnih konstrukcija (linearna i nelinearna statika konstrukcija, stabilnost konstrukcija kao posebno poglavlje nelinearne statike te dinamika konstrukcija), teoriju plošnih nosača koja opet može

---

<sup>1</sup> Njemački fizičar Max Planck, dobitnik Nobelove nagrade 1918. godine, održao je godine 1942. u velikoj predavaonici našega fakulteta — u to vrijeme Tehničkog fakulteta — predavanje. To je gostovanje zabilježio i Miroslav Krleža u dnevničkom zapisu *Kalendar jedne bitke godine 1942* [*Dnevnik 1933–42*, Oslobođenje, Sarajevo, 1977.]; navodimo samo posljednji odlomak zapisa s datumom 20. rujna 1942.:

„Čuo sam od nekoga, koji je bio s Planckom, da je starac potpuno demoraliziran. Stigao je na temelju jednog nesporazuma. Ambasada tražila je za predavanje na Tehničkom fakultetu nekog profesora Plankera ili Pauckera sa Tehničkog fakulteta šarlotenburškog, stručnjaka za betonske konstrukcije velikih raspona. Kako taj neki drugi ‚Planck’ djeluje momentano na Atlantiku, u okviru organizacije Todt, poslali su ovamo ovoga Maxa Plancka iz zabune, ne imajući o Maxu Plancku ni pojma. M. Planck je pričao u intimnom krugu da je mislio na katedri, kada ga je auditorij pozdravio dugotrajnim demonstrativnim pljeskom, da sanja. Njemu se pričinilo da se pojavio na jednom plavom ostrvu čiste iluzije. Nije govorio ex cathedra već više od deset godina. On je potpuno zaboravljen i još ga administrativno toleriraju kao naučnu ustanovu koja postoji po zakonu inercije. Još nije likvidiran. Sjedi i promatra u svome kabinetu sliku svoga jedinca koji je poginuo godine 1914 u Francuskoj. U maloj baršunastoj kutijici čuva njegov ‚Eisenes Kreuz II Klasse’. To je sve što mu je ostalo. M. Planck misli da je ovaj rat potpuni besmisao, da je njemački narod sposoban i pošten svijet koji je tragično stradao 1914–18, koji stradava i koji će ponovno tragično stradati. Čisto ludilo. Kad su mu na oproštaju predali mali paketić s groždem i suhomesnatom robom (same malenkosti), on je tu kotaricu smjestio u mreži svojih spavaćih kola kao malu relikviju. Planck gladuje. Labud čitave jedne male kozmogonije otputovao je. ‚Nie sollst du mich befragen...’”



biti linearna i nelinearna (teorija stijena, ploča, ljuski), niz teorija deformabilnoga kontinuuma (linearna teorija elastičnosti, teorija materijalno nelinearnog kontinuuma, teorija plastičnosti i viskoelastičnosti, mehanika loma itd.), teoriju mehanizama, . . . Ta je podjela tek uvjetna, jer se sadržaji nekih područja dijelom preklapaju, a postoje i dalje potpodjele. Razvojem računala i numeričkih metoda, posebice metode konačnih elemenata, u okvirima svih područja mehanike kontinuuma znatno je povećan opseg mogućih proračuna, uz uvažavanje sve složenijih relacija koja izražavaju odnos kinematičkih (pomaci, deformacije) i statičkih (sile, naprezanja) veličina. Istodobno je otvoren i niz novih polja istraživanja, ponajprije u nelinearnoj mehanici diskontinuiranih sredina: mehanika zrnatoga materijala, mehanika kaosa, . . .

U tehničkoj se mehanici primjenjuju i razvijaju i različiti *eksperimentalni postupci* koji imaju veliku ulogu u provjeri teorijskih postavki, u ocjeni vjerodostojnosti i točnosti analitičkih i numeričkih proračuna te u određivanju mehaničkih i kemijskih karakteristika materijala.

U građevnoj statici proučavaju se, razrađuju i primjenjuju metode određivanja vanjskih i unutarnjih sila te pomaka i deformacija u štapnim konstrukcijama koje su izložene statičkim djelovanjima, ponajviše statičkim opterećenjima, dok se utjecajem dinamičkih djelovanja bavi dinamika konstrukcija. *Statička* ili *mirna* djelovanja neovisna su o vremenu, a na konstrukciju se nanose sporo, bez udara, te stoga ne izazivaju zamjetna ubrzanja njezinih dijelova; *dinamička* pak djelovanja mijenjaju tijekom vremena ili veličinu ili pravac djelovanja ili oboje, te se kao posljedica ubrzanja konstrukcije ili njezinih dijelova pojavljuju inercijalne sile.

Građevna statika bavi se ponajprije *analizom* konstrukcija — određivanjem stanja ravnoteže i deformacija u prethodno oblikovanim konstrukcijama, to jest konstrukcijama zadana oblika. Ponajčešće su to novoprojektirane konstrukcije koje „postoje samo na papiru”; za njih se na temelju izračunanih unutarnjih sila određuju dimenzije sastavnih elemenata tako da uz dovoljnu sigurnost budu i razmjerno ekonomične. Katkad je, zbog prenamjene ili sanacije, potrebno ispitati i već izvedene građevine, pa i one izgrađene mnogo prije razvitka suvremenih proračunskih metoda.

Potpuno razumijevanje ponašanja raznih konstrukcijskih oblika i sistema, koje se velikim dijelom stječe studijem građevne statike, temeljni je preduvjet uspješne *sinteze* konstrukcija — oblikovanja racionalnih nosivih sklopova koji istodobno zadovoljavaju i niz drugih, funkcionalnih, estetskih i ekonomskih zahtjeva: „Za određivanje povoljnog oblika konstrukcije ne postoje jednoznačne metode, kao što postoje za ispitivanje [analizu] zadanih konstrukcija. Određivanje oblika možemo provesti na temelju iskustva na već izvedenim konstrukcijama i na temelju dobrog poznavanja statičkog djelovanja pojedinih oblika i konstrukcija” [45].

Primjenjivat ćemo analitičke, numeričke i grafičke postupke. Katkad će neki koraci biti analitički, a neki grafički, pa ćemo takav mješoviti postupak nazivati grafoanalitičkim.

*Analitičkim se postupcima* rješenja dobivaju u općem obliku primjenjivom u čitavom nizu srodnih pojedinačnih zadataka. Ta su rješenja točna u okviru uvedenih pretpostavki.

Analitički postupci osnova su i numeričkih postupaka. Za primjenu *numeričkih postupaka*, koji se najčešće provode na računalima, neprekinuta se sredina, pojmovna osnova

klasičnih modela analitičkih postupaka, diskretizira — zamjenjuje sredinom čije je stanje određeno konačnim brojem parametara.

*Grafičke postupke* danas, kada računala i numerički postupci prevladavaju, mnogi smatraju zastarjelima, upravo *démodé* — crteže u starim (nećemo reći zastarjelim) udžbenicima poneki s podsmijehom nazivaju „umjetničkim djelima”. Nedostaci su tih postupaka, neprijeporno, to što ne daju opća rješenja i to što su primjenjivi gotovo isključivo u rješavanju statički određenih zadataka. No, njihove su prednosti preglednost, što znači da se greške mogu lako uočiti, te jednostavnost i brzina rješavanja uz točnost dovoljnu za praktične primjene. Štoviše, primjenom grafičkih postupaka može se najlakše shvatiti „igra” sila u konstrukciji, što svakako ima edukacijsku i spoznajnu vrijednost za (buduće) inženjere koji moraju dobro poznavati i razumjeti ponašanje konstrukcija.

## O sustavima i o sistemima

Kažu da riječ „sistem” nije hrvatska i da je uvijek i svuda treba zamijeniti riječju „sustav”. Međutim, ni „sustav” nije hrvatska riječ. U starijim je rječnicima, poput Mikaljina (1649.–1651.), Habelićeva (1670.), Della Bellina (1728.) ili Belostenčeva (1740.), nema. Primjerice, u Belostenčevu *Gazofilaciju ili riznici latinsko-ilirskih riječi*, u latinsko-ilirskom (hrvatskom) dijelu, čitamo

*Systema, tis. n. Skup filozofno delo.*

U ilirsko-latinskomu pak dijelu nema ni „sistema” ni „sustava”.

Riječ „sustav” potječe iz češkoga jezika, a u hrvatski ju je jezik uveo ilirac Bogoslav Šulek. Navodim iz njegova *Hrvatsko-njemačko-talijanskoga rječnika znanstvenoga nazivlja* (1874.–75.):

**Sistema**, *fil.* sustav;

**Sustav**, *phil. etc.* sistem, *lat.* systema, σύστημα, **System**, *tal.* sistema;

**Systema**, **System**, *phil. etc.* σύστημα, sustav, sistem.

U predgovoru rječniku Šulek piše: „Sastavljajuć ovaj rječnik nastojao sam što se više može upotrebljavati prave narodne rieči, a gdje sam mislio, da hrvatski narod neima svoje rieči, ili gdje je nisam mogao doznati, pozajmio sam ju od srodnih slavenskih plemenah, kad mi se je učinila, da je prema našem govoru; al sam uvijek zabilježio jezik, od kojega je posudjena, da se znade, kojega je porekla.” Riječ „sustav”, doduše, nije označena skraćenicom č., jer se pojavila već u njegovu *Němačko-hrvatskom rěčniku* (1860.), te je u vrijeme pojave *Rječnika znanstvenoga nazivlja* držana poznatom i prihvaćenom.<sup>2</sup>

Razlog je izbacivanja „sistema” iz hrvatskoga jezika razlikovan. Naime, riječ „sistem” postoji u jednom bliskom i sličnom, a različitom i nepoćudnom jeziku. Budući da riječi „sustav” u tom jeziku nema, njezinom bismo isključivom uporabom trebali pokazati i

<sup>2</sup> Još neki bohemizmi (ne samo oni koje je uveo Šulek), uvriježeni u hrvatskomu jeziku, jesu: časopis, dojam, dosljedan, dostatan, krajolik, naklada, naslov, nježan, obrazac, obrazovati, obred, obzor, odraz, ogavan, opetovati, opseg, ploha, podlost, pojam, pokus, povod, predjel, predmet, prirodopis, prvobitan, podneblje, smjer, stroj, stupanj, tlak, učinak, uloga, ustroj, ustav, zamak, zavod, zbirka.

dokazati da je hrvatski jezik „izvorni i osebujni jezik” te da „nije istovjetan ni s jednim drugim jezikom, niti je narječje bilo kojega drugog jezika”, kako stoji u članku 1. Poglavnike *Zakonske odredbe (od 14. kolovoza 1941) o hrvatskom jeziku, o njegovoj čistoći i pravopisu*. Da bude jasno: ni nakraj mi pameti nije poricati različitost dvaju jezika; riječ je o jezicima zajedničke novoštokavske osnovice koji su se tijekom povijesti razvili u dva različita književna jezika. No, različitost tih jezika nije nastala niti nastaje osiromašivanjem hrvatskoga jezika izbacivanjem nekih riječi samo zato što postoje u onomu drugom jeziku. (Na kraju krajeva, riječ „sistem” ne potječe iz toga drugog jezika, nego iz grčkoga, i postoji u latinskomu i u mnogim drugim europskim jezicima.)

Sloboda izbora jedne od dviju riječi omogućava nijansiranje izraza uvođenjem razlika u značenju: riječ „sustav” upotrebljavat ću za apstraktno „skup složeno delo”, poput „sustava jednadžbi”, dok ću riječju „sistem” označavati konkretn(ij)a „skup složena dela”, kao što su „konstrukcijski sistemi”. Tako mogu, pored ostaloga, izbjeći jezičnim pseudočistunstvom zahtijevane nezgrapne sklopove poput „sustava jednadžbi ravnoteže konstrukcijskoga sustava”.

# 1. Konstrukcije i njihove proračunske sheme

## 1.1. Pokušaj definicije

“It’s like a joke somebody’s telling, only it ain’t a joke, just works like one. You can’t git none of it unless you git it all.”

T. H. Cook: *Into the Web*

U uvodnom smo odjeljku neformalno i ne baš precizno konstrukcijom nazvali „nosivi sklop promatranoga objekta”. Pokušat ćemo sada biti određeniji. *Spojeni sistem* ćemo definirati kao svrhovito i sustavno oblikovani sklop međusobno povezanih elemenata. *Konstrukciju* pak definiramo kao spojeni sistem koji može, održavajući oblik, preuzeti i na podlogu prenijeti vlastitu težinu, predviđena opterećenja i druga predviđena djelovanja. Kad kažemo da „konstrukcija održava oblik”, ne mislimo da se ponaša kao apsolutno kruto tijelo, nego samo da sprečava znatnije ili neželjene pomake.

Navedene su definicije — u težnji za potpunosti i sveobuhvatnosti — možda preapstraktne. Nadamo se da će nakon razrade i primjerâ na predavanjima i vježbama postati jasnijima. Ukratko, spojeni sistem može, ali ne mora biti konstrukcija; pokazat ćemo da će biti konstrukcija ako ima dovoljan broj ispravno raspoređenih unutrašnjih i vanjskih veza.

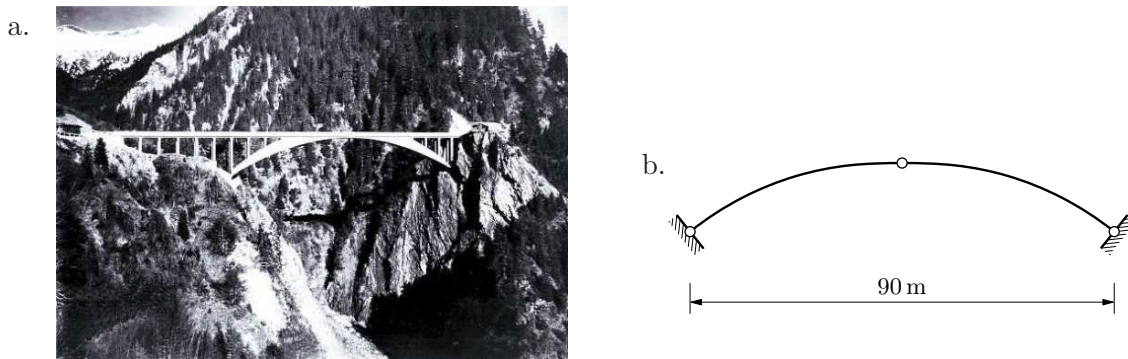
*Konstrukcijski sistem* sinonim je za pojam konstrukcije, posebice želimo li naglasiti da je riječ o sklopu elemenata, a s istim ćemo značenjem upotrebljavati riječ *nosač*.

## 1.2. Proračunske sheme

Konstrukciju u proračunu ne možemo prikazati i obrađivati u obliku u kojem će se izvesti (ili je već izvedena). Kad bismo u proračun uveli sve geometrijske pojedinosti te sve međusobne odnose i utjecaje, proračun bi bio vrlo složen i dugotrajan, a katkad se, zbog teorijski nerješivih ili teško rješivih problema, ne bi ni mogao provesti. Zanimajući stoga neka njezina obilježja, konstrukciju u proračunu zamjenjujemo proračunskom shemom. *Proračunskom shemom konstrukcije* ili, sinonimno, *konstrukcijskom shemom* nazivamo pojednostavljeni prikaz stvarne konstrukcije koji dovoljno vjerno oslikava ponašanje konstrukcije pod opterećenjem i ostalim djelovanjima omogućujući istodobno što jednostavniji proračun. Na izbor proračunske sheme utječe željena ili zahtijevana točnost proračuna: za prethodne, „grube” proračune na temelju kojih odabiremo osnovne dimenzije elemenata konstrukcije, upotrebljavaju se često razmjerno jednostavne sheme, dok za „konačne” proračune — u glavnim i izvedbenim projektima — sheme moraju biti detaljnije i potpunije.

U sljedećim ćemo poglavljima, uvriježenih običaja radi, ali i radi sažetijega izražavanja i izbjegavanja nezgrapnosti, rabiti nazive konstrukcija ili nosač, ali ćemo pod tim nazivima gotovo uvijek podrazumijevati proračunsku shemu konstrukcije.

Proračunske sheme oblikujemo ponajviše postupcima apstrakcije i idealizacije. *Apstrakcija* je „jedan od temeljnih misaonih postupaka kojim se odbacuje ono što je posebno, sporedno i slučajno radi onoga što je opće, zajedničko i bitno”, dok je *idealizacija* „predstavljanje čega u boljem svjetlu nego što u stvarnosti jest; predstavljanje čega savršenim”.<sup>3</sup> Primjerice, zanemarivanjem debljine konstrukcijskoga elementa možemo ga svesti na ravninu ili plohu, dok ga zanemarivanjem debljine i širine svodimo na pravac ili krivulju; često također zanemarujemo ekscentricitete u spojevima i uzimamo da su elementi spojeni u sjecištu njihovih osi. Ili, kao još jedan primjer: kako su u stvarnosti sva tijela deformabilna, „potpuna upetost” ne postoji; no, ako je susjedno tijelo znatno kruće od promatranoga, upetost možemo smatrati potpunom, savršenom i uzeti da ne postoje ni najmanji translacijski pomaci niti rotacije. Zglobovi, naprotiv, omogućuju slobodnu rotaciju: idealna zglobna veza ne pruža nikakav otpor—koji, u stvarnosti, trenje neizbježno izaziva—međusobnom zaokretanju spojenih elemenata. Slika 1.a. fotografija je poznata Maillartova mosta preko kanjona Salgina u Švicarskoj, dok je na slici 1.b. skicirana proračunska shema glavnoga nosivog sklopa—riječ je o trozglobnom luku.



Slika 1. Most preko kanjona Salgina; projektant: Robert Maillart

Nekad, pa i ne tako davno, prije široke primjene računala, česti je postupak bilo i „hijerarhijsko” razlaganje konstrukcije: stropne ploče ili (roštiljni) sistem greda oslanjaju se na grede koje se opet oslanjaju na stupove koji se oslanjaju . . . Razine se proračunavaju zasebice, uzastopno, „odozgo prema dolje”: pretpostavlja se da ploče ili roštilji imaju idealne, nepopustljive ležajeve; dobivenim se reakcijama potom opterećuju oslonачke grede, i tako dalje. Štoviše, ploče i zidovi zamjenjivani su sistemima kruto spojenih greda. Osim toga, konstrukcije, koje očito stoje i postoje u prostoru, prikazivale su se, kad god je to, s obzirom na geometrijske značajke i način prenošenja opterećenja, bilo moguće, nizom manje ili više neovisnih ravninskih konstrukcija. Tako se konstrukcije poput luka sa slike 1. mogu, za vlastitu težinu i za korisno (prometno) opterećenje, proračunavati kao ravninske.

<sup>3</sup> Obje su definicije preuzete iz *Velikog rječnika hrvatskoga jezika V.* ANIĆA, Novi Liber, Zagreb, 2003.

Proračunski se postupak može pojednostaviti i zamišljenim presijecanjem veza, čime se višestruko statički neodređeni sistemi pretvaraju u statički određene: „Tako se kod proračunavanja rešetkastih nosača željeznih mostova obično pretpostavlja, da su štapovi spojeni u čvorovima idealnim zglobovima. U zbilji su oni čvrsto zakovani” [10]. Naime, uz dostatnu vitkost štapova „dopunitbeni” momenti savijanja, izazvani sprečavanjem zaokreta njihovih krajeva, zanemarivo su mali. Ali opet: „U ovo vrijeme, vrijeme obnavljanja ekonomskog života nakon svjetske katastrofe, imadu pitanja ekonomičnosti gradnje sve veće značenje. Da se najbolje iskoriste visoke kakvoće materijala, koji se sada upotrebljava za gradnju, treba da se umanji broj računskih pretpostavaka, koje ne odgovaraju zbilji i time da se omogući povećanje dozvoljenih naprezanja” [10].

Računala danas omogućuju mnogo složenije i opsežnije proračunske sheme u kojima se prostorne konstrukcije, plošne i štapne, statički određene i statički neodređene, mogu obuhvatiti i opisati u cjelini. Poteškoće u numeričkoj provedbi proračuna, ponajprije pri rješavanju većih sustava algebarskih jednadžbi, koje su prije bile velika, često i nepromotiva prepreka, uporabom računala uglavnom su uklonjene. Opisani postupci pojednostavljenja nisu, međutim, *passé*; primjenjuju se i danas, u preliminarnim proračunima i u „ručnim” proračunima „manjih” konstrukcija te, posebice, u brzim, okvirnim provjerama rezultata složenih računalnih proračuna. Moramo biti svjesni i toga da će granice veličine proračunskog modela i prikazivih podrobnosti, a time i neophodnost pojednostavljujućih pretpostavki uvijek postojati.

### 1.3. Dvije klasifikacije

Konstrukcije i, općenitije, spojeni sistemi razvrstavaju se u skupine prema različitim svojstvima. Primjerice, konstrukcije prema gradivu mogu biti betonske, kamene, metalne, drvene, s dijelovima od različitih gradiva, . . . Prema načinu gradnje pak mogu biti monolitne, montažne, polumontažne, zidane, mješovite izvedbe, . . . Prema sposobnosti nošenja dijelimo ih na nosive i nenosive: *nosive konstrukcije* mogu nositi sebe i prenositi sva druga predviđena opterećenja, dok *nenosive konstrukcije* nose samo sebe; primjer su nenosivih konstrukcija pregradni zidovi u zgradama.

U nastavku će nam posebno korisne i važne biti dvije klasifikacije: klasifikacija konstrukcijskih elemenata s geometrijskoga i klasifikacija spojenih sistema s kinematičkog stajališta. Prva je, u biti, osnova za uvođenje proračunskih shema, dok će druga pripomoći u razjašnjenju pojma konstrukcije.

#### 1.3.1. Geometrijsko stajalište

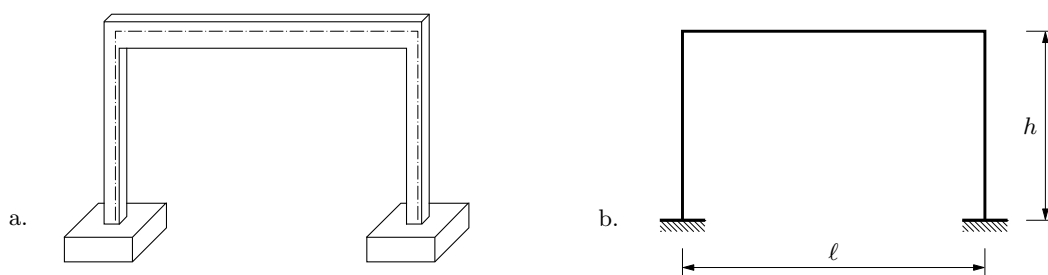
*Konstrukcijski element* je razmjerno jednostavan sastavni dio konstrukcije koji se može analizirati kao samostalna cjelina.

S *geometrijskoga se stajališta* konstrukcijski elementi razvrstavaju u:

- štapne elemente,
- plošne elemente i
- masivne elemente.



*Štapni element* ili *štap* konstrukcijski je element kojem je jedna karakteristična dimenzija, duljina, istaknuta u odnosu na druge dvije, debljinu (ili visinu) i širinu. Primjeri su greda, luk, zglobovi štap, uža, . . . Konstrukcije sastavljene samo od štapnih elemenata nazivaju se *štapnim konstrukcijama*. U trivijalnom slučaju konstrukcija može sadržavati samo jedan element. Prosta greda, konzola, obostrano upeta greda, dvozglobovi i upeti luk takve su jednostavne konstrukcije. Podloga nije dio konstrukcije, ali veze s njom jesu, pa su prosta greda, konzola i obostrano upeta greda, iako sadrže samo jedan gredni element, tri različite konstrukcije. Trozglobovi luk sa slike 1. nešto je složenija konstrukcija — sastavljen je od dva lučna elementa i tri zglobne veze. Za okvir sa slike 2. možemo reći da je sastavljen od tri gredna elementa — dva stupa i grede, s podlogom i međusobno kruto spojena — ili pak da sadrži samo jedan, poligonalni element.



Slika 2.

U proračunskim shemama štapni se element zamjenjuje njegovom osi. Intuitivno, os štapa je dio pravca ili krivulje koji se proteže njegovom duljinom tako da je štap, u stanovitom smislu, „podebljana” os. Strože se *os štapa* definira kao prostorna krivulja koja spaja težišta poprečnih presjeka, dok se *poprečni presjek* definira kao geometrijski lik koji nastaje presijecanjem štapa ravninom okomitom na njegovu os. Te dvije definicije zatvaraju začarani krug (lat. *circulus vitiosus* ili *circulus diaboli*): da nađemo os, moramo poznavati poprečne presjeke, a oni pak leže u ravninama okomitima na os, pa za postavljanje tih ravnina treba poznavati os. Os štapa zadana oblika možemo stoga samo u rijetkim slučajevima neposredno odrediti — primjerice, za ravni štap konstantnoga poprečnog presjeka. U većini je slučajeva moramo određivati iteracijski tako da njezin približno pretpostavljeni položaj postupno popravljamo. Možemo, naravno, poći i obratnim putem: prvo zadati os te oblikovati štap postavljanjem niza ravnina okomito na os i ucrtavanjem poprečnih presjeka tako da njihova težišta leže na osi. Poprečni presjeci pritom mogu mijenjati oblik i veličinu, ali njihova težišta uvijek moraju ostati na osi.

Uvođenjem pretpostavaka o ponašanju poprečnih presjeka tijekom deformiranja štapa i o raspodjeli napreznja po plohama tih presjeka može se polje pomaka štapa opisati funkcijom jedne varijable, položaja duž osi, dok se napreznja na plohama poprečnih presjeka mogu svesti na rezultirajuća djelovanja u težištima — nazvana *silama u poprečnim presjecima* — čije se raspodjele uzduž osi mogu također opisati funkcijama jedne varijable. Uzima se nadalje da sve te funkcije ne ovise o raspodjeli opterećenjâ po poprečnim presjecima, već samo o rezultirajućim djelovanjima u tim presjecima, pa se i opterećenja uvođenjem statički ekvivalentnih djelovanja — koncentriranih i distribuiranih

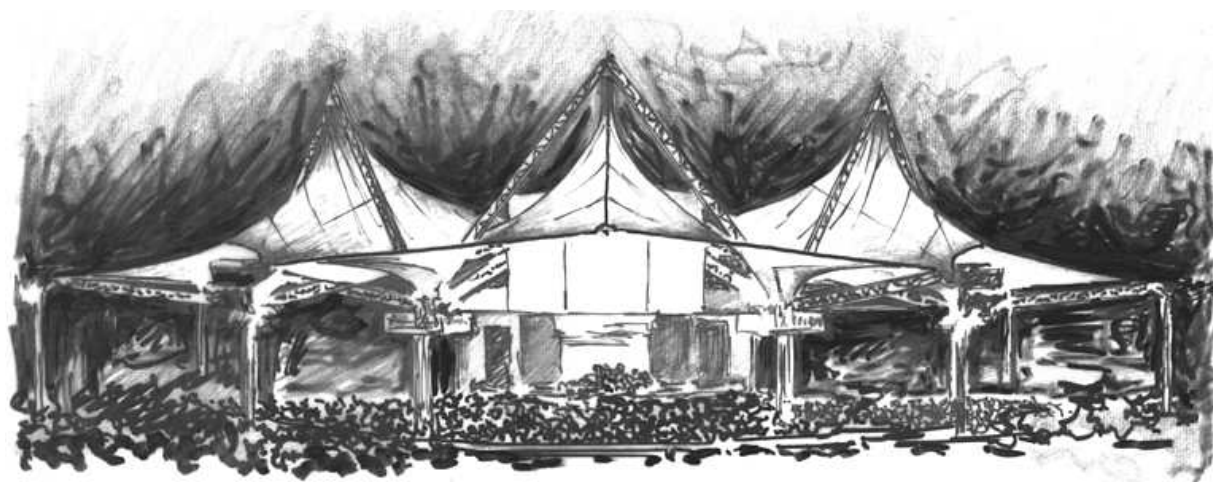
linijskih sila i momenata — svode na os [44]. Parcijalne diferencijalne jednađbe opće teorije elastičnosti time prelaze u obične diferencijalne jednađbe koje je, naravno, mnogo lakše riješiti.

Prema obliku osi štapove dijelimo na *ravne* i *zakrivljene*. Os zakrivljenoga štapa može biti dio ravninske ili dio prostorne krivulje. Ako se poprečni presjeci ravnoga štapa ne mijenjaju duž osi, nazivamo ga *prizmatičnim*; matematičari ga katkad nazivaju i cilindričnim.

Štapne se konstrukcije mogu podijeliti u ravninske i prostorne. Pri toj podjeli osim geometrijskih karakteristika u obzir treba uzeti i djelovanja na konstrukciju. Konstrukcija je *ravninska* ako osi svih elemenata leže u istoj ravnini, u odnosu na koju su uz to svi poprečni presjeci simetrični, ako su statičke i kinematičke karakteristike svih spojeva simetrične u odnosu na tu ravninu te ako su pravci djelovanja svih vanjskih sila i svi prisilni pomaci u toj ravnini, a vektori svih vanjskih momenata i svih prisilnih zaokreta okomiti na nju. U tom će slučaju i osi deformiranih elemenata ostati u istoj ravnini (pomaci svih točaka su u ravnini, a vektori zaokretâ su okomiti na nju); isto tako, uzdužne i poprečne sile u toj su ravnini, a vektori momenata savijanja okomiti su na nju. Zahtjev za simetrijom poprečnih presjeka nužan je da se izbjegnu pojava kosoga savijanja i pojava torzije zbog nepodudaranja geometrijske osi i osi posmika [39].

Sve su ostale štapne konstrukcije *prostorne* — konstrukcije u kojima su osi nekih elemenata prostorne krivulje, konstrukcije u kojima osi, iako su ravninske krivulje, ne leže u jednoj ravnini te konstrukcije čije su osi u jednoj ravnini, ali pravci djelovanja sila ne.

*Plošni* su *elementi* konstrukcijski elementi čija je jedna dimenzija, debljina, zanemarlivo mala u odnosu na druge dvije, te se njihova proračunska shema može svesti na srednju ravninu ili srednju plohu. Konstrukcije s plošnim elementima nazivaju se *plošnim* iako je često riječ o *kombiniranim konstrukcijama* koje uz plošne sadrže i štapne elemente (slika 3.). Premda njihova uloga nipošto nije drugorazredna, štapni se sklopovi, kao dijelovi plošnih konstrukcija, obično nazivaju sekundarnim konstrukcijama.



Slika 3. Cynthia Woods Mitchell Center of Performing Arts; projektant: Horst Berger



U plošne elemente i konstrukcije ubrajaju se zidovi, ploče, naborane konstrukcije, ljuške, konstrukcije od platna, . . . Samo se zidovi opterećeni u svojim ravninama mogu smatrati ravninskim konstrukcijama, dok su sve ostale plošne konstrukcije prostorne.

*Masivni elementi* konstrukcijski su elementi kod kojih su sve tri dimenzije istoga reda veličine. U skupinu masivnih konstrukcija, koje sadrže (samo) masivne elemente, ubrajaju se potporni zidovi i brane. Te se konstrukcije često izvode od gradivâ koja preuzimaju ponajprije tlačne sile i tlačna naprezanja, poput betona, kamena ili zemljanoga nasipa.

Građevnom statikom nazvali smo primijenjenu statiku štapnih konstrukcija — proučavat ćemo, dakle, samo postupke proračuna štapnih konstrukcija.

### 1.3.2. Kinematičko stajalište

Podjela spojenih sistema s *kinematičkoga stajališta* temelji se na pojmovima geometrijske promjenjivosti i geometrijske nepromjenjivosti. Spojeni je sistem *geometrijski nepromjenjiv* ako se ponaša kao jedno čvrsto tijelo — *oblik može promijeniti samo uz deformacije dijelova*. To svojstvo kinematičko je obilježje geometrijski nepromjenjivoga sistema, dok je njegovo statičko obilježje: *ravnoteža geometrijski nepromjenjivog sistema moguća je pod bilo kakvim opterećenjem*.

U *geometrijski promjenjivim* sistemima relativni pomaci dijelova ili apsolutni pomaci cjeline ili dijelova (odnosno, relativni pomaci u odnosu na podlogu) mogući su i ako se ti dijelovi smatraju apsolutno krutim tijelima; statički gledano, ravnoteža geometrijski promjenjivih sistema moguća je za neka, ali ne za sva opterećenja.

S kinematičkoga stajališta proračunske sheme dijelimo na:

- geometrijski nepromjenjive sisteme s najmanjim mogućim brojem ispravno raspoređenih veza,
- geometrijski nepromjenjive sisteme s brojem veza većim od najmanje potrebnoga te
- geometrijski promjenjive sisteme.

Sisteme prve skupine nazivamo *kinematički određena*. Oni su ujedno i *statički određeni*. *Sistem je statički određen ako može ostati u stanju ravnoteže za opterećenje po volji i ako postoji jedinstveni skup reakcija i unutarnjih sila koje zadovoljavaju uvjete ravnoteže sistema i njegovih pogodno odabranih dijelova*. Statički određene sisteme često ćemo nazivati jednostavno *određenim sistemima*.

Sisteme s „prekobrojnim” vezama nazivamo *kinematički preodređenima*, ali *statički neodređenima* ili, kraće, samo *neodređenima*. I *statički neodređeni sistem može ostati u stanju ravnoteže za bilo kakvo opterećenje, ali uvjeti ravnoteže ne daju jedinstveni skup reakcija ili jedinstveni skup unutarnjih sila ili jedinstvene skupove jednih i drugih*, nego za jednoznačnost treba uvesti dodatne uvjete.

Geometrijski promjenjivi sistemi nazivaju se i *mehanizmima*. Razlogom geometrijske promjenjivosti može biti nedovoljan broj veza, ali i, ako veza ima „dovoljno”, pa i „previše”, način na koji su raspoređene.

Iako se kao konstrukcije ili kao njihovi dijelovi ponekad upotrebljavaju i promjenjivi sistemi poput gipke užadi i sistema od platna i užadi, u građevnoj statici obrađivat ćemo ponajviše geometrijski nepromjenjive sisteme. Postupci proračuna statički određenih i statički neodređenih konstrukcija bitno se razlikuju; ne treba posebno naglašavati da je proračun neodređenih sistema složeniji, dulji i teži.

## 1.4. Pojednostavnjenja

### 1.4.1. Pojam matematičkoga modela

S pomoću proračunske sheme opisujemo, pojednostavljujemo i idealiziramo ponajprije geometrijske značajke konstrukcije te njezine unutrašnje i vanjske veze. Uvođenje proračunske sheme tek je jedan korak u oblikovanju matematičkoga modela konstrukcije.

*Matematički model* je umjetna tvorevina čije rješenje aproksimira<sup>4</sup> stanje ili ponašanje stvarnoga sistema; obično je to algebarska, diferencijalna ili integralna jednadžba (ili, rjeđe, nejednadžba) ili sustav takvih jednadžbi (ili nejednadžbi). Osim „geometrije” i veza, za matematički opis konstrukcije pojednostaviti treba i strukturu, svojstva i ponašanje gradiva, a uvodi se i niz drugih pojednostavljujućih pretpostavki — uvijek, naime, želimo naći kompromis između vjerodostojnosti i jednostavnosti opisa i potrebnih proračunskih postupaka. Izbor matematičkoga modela jedna je od najvažnijih, najtežih i najodgovornijih zadaća konstruktora–projektanta: o izboru modela neposredno ovisi vjerodostojnost proračuna — proračun uz pogrešno odabrani model ne može biti ispravan bez obzira na to koliko su „dobre” metode proračuna i upotrijebljeni kompjutorski programi, s kakvom se točnošću proračun provodi, s koliko se decimala rezultati ispisuju i kako su šareni grafički prikazi rezultata. „Uvedete li model u kojemu je zanemareno obilježje koje najviše utječe na ponašanje, nema svrhe dotjerivati opis obilježja koja su uključena” [26]. Konstruktor mora u svakom koraku proračuna biti svjestan uvedenih pojednostavljenja i mogućih ograničenja koja iz njih proizlaze.

### 1.4.2. Kontinuum

Kvantna nas mehanika uči da je struktura materije diskontinuirana, diskretna: atomi koji tvore materiju i elementarne čestice koje tvore atome raspršeni su u praznini na međusobnim udaljenostima gotovo neizmjernima usporede li se s njihovim veličinama. Nepravilnosti i prekida u tvari ima i na makroskopskoj razini: vlakanca i kvрге u drvu, pukotine u kamenu, betonu i opeci, zrna agregata i šipke armature u betonu, . . .

Sve ćemo te diskontinuitete zanemariti, „izgladiti” i „razmazati”. Teoriju ćemo izgraditi na predodžbi *neprekidne sredine*. Njezino je osnovno svojstvo beskrajna djeljivost: svaki se djelić, ma kako malen, može razdijeliti;<sup>5</sup> nikad nećemo doći do nedjeljivih, ele-

<sup>4</sup> *Aproksimacija* je „ono što se približava istini, stvarnosti i sl., a da se posve precizno ne ustanovi stanje; približnost”, te, u užem značenju, kao matematički pojam, „zamjena nekog matematičkog objekta drugim koji mu je u određenom smislu blizak, ali jednostavniji” [V. ANIĆ: *Hrvatski enciklopedijski rječnik*, Novi Liber, Zagreb, 2002.].

<sup>5</sup> Neprekidno je „nešto, svaki dio čega ima dijelove” [C. S. Peirce].

mentarnih čestica. Između bilo koje dvije točke, ma kako bliske, barem je jedna točka, dakle, bezbrojno mnogo točaka; u neprekinutoj sredini nema praznina.

Pretpostavka neprekidne sredine (ili: kontinuuma) omogućava nam uporabu pojmova i postupaka matematičke analize: funkcija, njihovih derivacija, integralâ, diferencijalnih jednadžbi, ...

### 1.4.3. Linearizacije

Pod opterećenjima i drugim djelovanjima konstrukcije se deformiraju, pa se njihove točke pomiču. No, u većini su građevinskih konstrukcija pomaci pri prijelazu iz početnoga u konačni, ravnotežni oblik tako mali da se promjene njihova oblika, a time i promjene položaja hvatištâ i pravaca djelovanja sila mogu zanemariti. Obrađivat ćemo stoga ponajprije postupke određivanja sila u kojima se *uvjeti ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila postavljaju na nedeformiranoj konstrukciji*. Tu pretpostavku nazivamo *statičkom linearnošću*, a njezina je posljedica *linearnost uvjeta ravnoteže*.

Odustanemo li od te pretpostavke, proračun postaje znatno zapletenijim i, naravno, dugotrajnijim: deformacije nosača ovise o unutarnjim silama, a za postavljanje uvjeta ravnoteže za izračunavanje tih sila treba poznavati deformirani oblik nosača, te je proračun neizbježno iteracijski. U nalaženju promijenjenoga oblika nosača neće uvijek biti dovoljno zadržati se na *geometrijskoj linearnosti*, to jest, uzeti da su *odnosi pomakâ i deformacija linearni*, kao u izrazu  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ , nego će trebati pretpostaviti složenije odnose poput

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2.$$

Pri izračunavanju pomakâ i deformacija konstrukcija ograničit ćemo se na *elastične deformacije* i to u području u kojemu vrijedi *Hookeov zakon* koji propisuje linearni odnos naprezanja i deformacija, u najjednostavnijem obliku  $\sigma = E\varepsilon$ , ili, kao poopćenje, *linearni odnos unutarnjih sila i odgovarajućih deformacijskih veličina*, primjerice  $M = EI\kappa$  ili  $P = EA\varepsilon$ , pa i linearni odnos sila i pomaka. To se ograničenje naziva *materijalnom linearnošću*.

Postupci linearizacija važni su, prema tome, sa stajališta jednostavnosti proračuna, ali i sa spoznajnoga i s edukacijskog stajališta. Shvatiti i objasniti (drugima, ali i sebi) neku složenu pojavu gotovo uvijek znači pojednostaviti je ili razložiti na niz jednostavni(ji)h pojava. Tako nelinearnost — koja je gotovo sveprisutno, neizbježno metafizičko „tkivo” stvarnosti — najčešće svladavamo ili ograničavanjem na dovoljno mali isječak „svijeta” u kojem je sve barem približno linearno ili pak razbijanjem promatrane pojave na niz uzastopnih linear(izira)nih koraka. Razumijevanje linearnosti stoga je neophodan, ali, naravno, ne i jedini korak potreban za razumijevanje nelinearnosti.

Različitim stupnjevima obrazovanja, kao i različitim primjenama, primjerene su različite razine pojednostavljenja: početna su objašnjenja jednostavna i površna, ali takve jednostavne (možda i nedorečene ili nepotpune) teorije polazišta su prihvaćanja i razumijevanja složenijih i profinjenijih tumačenja. Takav obrazovni slijed dijelom odražava povijesni razvitak znanstvenoga shvaćanja. Ipak, tek dijelom: primjerice, Leonhard Euler, Jacob Bernoulli i drugi matematičari osamnaestoga stoljeća, uvodeći i rješavajući probleme

lančanice, oblikâ ovjesne užadi visećih mostova i užadi pod drugim vrstama opterećenja te progibnih linija elastičnih greda, uključujući i pitanje stabilnosti, nisu razlikovali linearne i nelinearne jednadžbe, pa ih ni nelinearnost nije posebno uznemiravala ni plašila.

Ako neka jednostavn(ij)a teorija pruža objašnjenja dovoljno dobra za praktične primjene i omogućava dovoljno točna predviđanja, možemo se „zaustaviti” na njoj. Ali, ne smijemo zaboraviti: „Rezultati idealiziranih modela vrijede samo ograničeno — dok odabrane pretpostavke dobro aproksimiraju pojave ili stanja u stvarnosti. Kad aproksimacija više ne zadovoljava moraju se neke pretpostavke zamijeniti složenijima. Kad primjerice više ne vrijedi linearna elastičnost, odabire se nova složenija pretpostavka npr. nelinearna elastičnost. Ta je pretpostavka također idealizirana — odabire se najjednostavniji prihvatljivi nelinearni zakon. Dobiva se novi, složeniji matematički model. Novim se modelom mogu analizirati neke pojave, koje se nisu mogle u lineariziranom modelu. Ipak ni taj model nije konačan jer se ne dobivaju dobre aproksimacije za neke još složenije pojave koje se opažaju u stvarnosti. Tada treba odabrati nove pretpostavke (teorije plastičnosti ili mehanike loma ili nešto treće). A nove su pretpostavke također idealizirane. Poboljšavanje aproksimacije pojave ili stanja niz je sve složenijih matematičkih modela, koji nikad neće moći obuhvatiti svu složenost realnih pojava” [13].

## 2. Počela statike

### 2.1. O pojmu sile i ponešto o pojmu ravnoteže

„Jesi li o njemu doznao nešto više?”

„Samo da je bio osamljen,” odgovorih. „Bez žene i bez djece. Čak i bez prijatelja.”

„Nikad nije našao ravnotežu.”

„Ravnotežu?”

„Tako je tata govorio,” reče moj otac. „To je točka gdje stvari izgledaju onoliko dobro koliko to ikad mogu postati. Gdje ništa ne preteže na krivu stranu. To je ono što moramo tražiti, govorio je, tu ravnotežu.”

T. H. Cook: *Into the Web*

*Sila* je fizikalna veličina kojom se opisuje uzajamno djelovanje tijelâ. Iako pojam sile podrazumijeva barem dva tijela koja djeluju jedno na drugo, često će nas zanimati samo jedno od njih, dok će tijela koja djeluju na njega ostati nespomenutima, pa i neodređenima; govorit ćemo tada o *djelovanjima sila* na promatrano tijelo.

Pod silom se prema Lagrangeu [*Analitička mehanika*, 1788.] „razumije općenito uzrok, bez obzira na njegovu vrstu, koji priopćava ili teži priopćiti gibanje tijelima na koja djeluje; štoviše, priopćena količina gibanja, ili količina gibanja koja se može priopćiti, ono je čime silu treba prikazati. U stanju ravnoteže sila nema stvaran učinak; ona samo namiče težnju gibanju; ipak, uvijek se može mjeriti učinkom koji bi stvorila kad ne bi bila zapriječena.”

Zametci pojma sile potječu iz predznanstvenoga iskustva — proizlaze iz osjeta napora mišića, primjerice pri dizanju ili guranju tereta. Tek se kasnije predodžba mogućnosti međudjelovanja tijelâ prenijela i na nežive stvari. Drugo je, važnije i plodonosnije, ali donekle prijeporno, poopćenje bila zamisao da neko tijelo može na drugo tijelo djelovati i bez neposrednoga dodira, na daljinu. Fizička stvarnost i priroda sile — pitanja što je zapravo sila i postoji li uopće ili je tek pogodni matematički simbol za „vrstu činiteljâ okultne ili metafizičke naravi” [Saint-Venant] — izazivali su tijekom povijesti fizike brojne nesporazume i dugotrajne raspre.

U *Matematičkim načelima prirodne filozofije* Newton je „definirao” nekoliko vrsta sila, ali te definicije sâmo opisuju načine na koje sile opažamo, ne objašnjavajući bit i zbiljnost njihova postojanja. Mnogi su, među njima Saint-Venant, Mach, Hertz i Poincaré, postavljali pitanje: ako postoji gravitacijsko privlačenje između Sunca i planetâ, kako se i čime to privlačenje ostvaruje bez „opipljive” fizičke veze? Što su ili tko su „ta dvojbenâ bića [...] što nisu ni tvar ni duh nego slijepi i nemisleći stvorovi koji ipak moraju biti obdareni čudesnom sposobnošću procjenjivanja udaljenosti i izračunavanja razmjernih im snaga” [Saint-Venant]? I Newton je (kasnije, u pismu teologu Bentleyu) pisao: „Nepojmljivo je da bi beživotna gruba tvar bez posredovanja nečega drugog, što nije materijalno, mogla djelovati na drugu tvar i utjecati na

nju bez međusobna dodira. Da bi gravitacija mogla biti urođena i bitna značajka tvari, tako da jedno tijelo može djelovati na drugo na razmaku kroz prazninu, bez posredovanja ičega drugog čime ili kroz što se njihova djelovanja i sile mogu prenijeti s jednoga na drugo, to je za mene tako velik nesmisao da vjerujem da mu ni jedan čovjek, koji o filozofskim pitanjima može mjerodavno razmišljati, neće nikad povjerovati. Gravitacija mora imati uzročnika koji neprekidno djeluje prema stanovitim zakonima; no je li taj uzročnik tvaran ili ne, ostavljam čitateljima do razmotre.” U *Načelima* je, međutim, naglasio: „dòsada nisam uspio iz pojava razotkriti uzrok tih svojstava gravitacije, a ja ne stvaram pretpostavke. Jer sve što nije izvedeno iz pojava treba nazvati hipotezom; a hipotezi, metafizičkoj ili fizičkoj, s okultnim ili mehaničkim vrijednostima, nije mjesto u eksperimentalnoj filozofiji. U toj se filozofiji određene tvrdnje izvode iz pojava, a potom poopćuju indukcijom. [...] I dovoljno nam je da gravitacija stvarno postoji i da djeluje prema zakonima koje smo objasnili i da bude dostatnim uzrokom gibanja svih nebeskih tijela i našega Sunca.” Za Newtona je, dakle, važno i dovoljno to da pojam sile omogućava izgradnju suvisloga teorijskog opisa svijeta u kojem živimo te da omogućava proračune i predviđanja koja u velikoj mjeri potvrđuju opažanja i pokusi.

Opća teorija relativnosti odgovor na pitanje o prirodi sile traži u područjima geometrije i kinematike: masa zakrivljuje četverodimenzionalni prostorno–vremenski kontinuum tako da tijela „padaju” jedna prema drugima *kao da* između njih postoje gravitacijske sile. Einstein je pisao A. Sommerfeldu: „Sad radim isključivo na problemu gravitacije... Jedna je stvar sigurna — nikad u životu nisam sebe sama tako mučio... u usporedbi s ovim problem, izvorna [tj. specijalna] teorija relativnosti bila je dječja igra.” Prema „standardnom modelu” kvantne mehanike ostale tri temeljne sile prenose elementarne čestice nazvane glasnicima: elektromagnetsku fotoni, slabu nuklearnu obitelj slabih bozona, a jaku nuklearnu obitelj gluona; postojanje tih čestica i eksperimentalno je potvrđeno. Razni pokušaji ujedinjenja opće teorije relativnosti i kvantne mehanike u konačnu, sveouhvatnu teoriju, Teoriju o Svemu, pretpostavljaju da postoje i gravitoni, glasnici gravitacijske sile.

Sile koje, poput gravitacijske, električne ili magnetske sile, djeluju na daljinu, kroz „prazan” prostor, zvane *silama dalekoga dosega*, utječu na sve čestice tijela. Takva su djelovanja, dakle, raspodijeljena po cijelom obujmu tijela, pa se nazivaju i *zapreminskim silama*.

*Sile kratkoga dosega*, poput kontaktnih sila između dvaju tijela, koje sprečavaju prodor jednoga tijela u drugo ili klizanje jednog tijela po drugom, i unutarnjih sila, koje čestice tijela „drže na okupu”, djeluju na površinama kojima se dva tijela dotiču ili kroz površinu u kojoj dva dijela tijela, presječenoga zamišljenom plohom, prijanjaju jedan uz drugi. Te su sile *plošne*, jer postoje samo na dodirnim površinama, stvarnima ili zamišljenim. Svako je djelovanje dodirnom raspodijeljeno po većoj ili manjoj površini — i vrh igle i oštrica nabrušenoga noža dijelovi su ploha. Često je, međutim, pogodnije zamisliti da je oštrica noža tek linija, a da je vrh igle točka.

Idealiziranu silu, područje djelovanja koje je stegnuto u točku, nazivamo *koncentriranom silom*; ona može biti model sile kratkoga i sile dalekog dometa. Zajednički je naziv za zapreminske, plošne i linijske sile *raspodijeljene* ili *distribuirane* sile.

Točka, u kojoj koncentrirana sila djeluje, naziva se njezinim *hvatištem*. Koncentrirana sila ima *pravac* i *smisao djelovanja* (ili *orijentaciju*) te intenzitet. Na crtežima u starim knjigama pravci djelovanja sila zorno su prikazivani napetom užadi, a smisao je njihova djelovanja naznačen rukama koje tu užad zatežu (slika 4., iz [36]). Danas uvriježeni



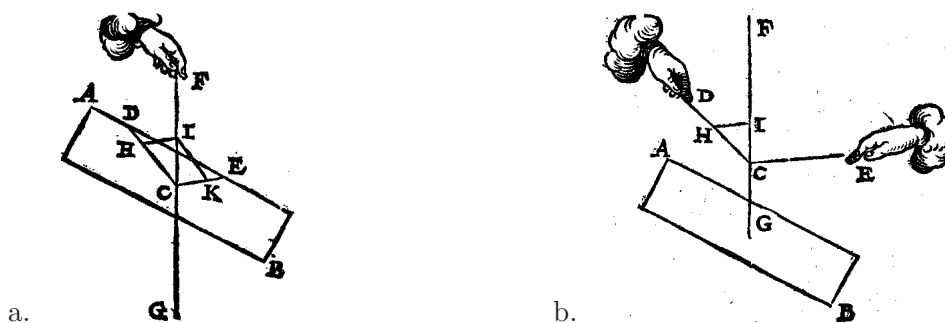
prikaz koncentriranih sila strelicama razmjerno je kasan, dvadesetostoljetni izum. U tekstu i na crtežima sile ćemo (zasad) označavati velikim slovima sa strelicama iznad njih:  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_i$ ,  $\vec{F}_x$ , ...

*Intenzitet koncentrirane sile* po definiciji je, kao i, primjerice, duljina dužine, pozitivna veličina (strože, da obuhvatimo i poseban slučaj sile koje nema: nenegativna veličina). Ako je na pravcu njezina djelovanja dogovorno utvrđena pozitivna orijentacija, smisao djelovanja sile možemo s pomoću predznaka priključiti intenzitetu pa ćemo govoriti o *vrijednosti sile*: sila, kojoj je smisao djelovanja suprotan od pozitivnoga, imat će negativnu vrijednost. Vrijednost sile  $\vec{F}$  označavamo sa  $F$ , a intenzitet sa  $\|\vec{F}\|$  ili sa  $|F|$ .

Statika je, rekosmo, grana mehanike u kojoj se proučava ravnoteža tijelâ, što znači da se istražuju djelovanja sila na tijela koja miraju i koja pod djelovanjima tih sila ostaju u stanju mirovanja. Treba Spomenuti da je mirovanje uvjetan pojam: kad ravnotežu definiramo kao stanje mirovanja tijelâ na koja djeluje sile, prešutno uzimamo da je riječ o mirovanju u odnosu na neki referentni inercijalni sustav. Djeluje li na mirujuće tijelo jedna sila, ono će se, u skladu s drugim Newtonovim zakonom, početi gibati po pravcu i u smislu njezina djelovanja; primjerice, ispustite li knjigu koju držite, ona će pod djelovanjem gravitacijske sile početi padati. Djeluje li, međutim, na tijelo više sila, ta se djelovanja mogu međusobno poništiti: držeći knjigu, suprotstavljate se gravitaciji, pa knjiga neće pasti. Za sustav sila, koje djeluju na tijelo tako da ono ostaje u stanju mirovanja, kažemo da je *uravnotežen*; mirovati pritom mora ne samo tijelo kao cjelina, već i svaki njegov dio — knjigu ne smijete listati. Tijekom nanošenja tih sila tijelo ponešto mijenja oblik. U statici promatramo konačnu konfiguraciju ili te promjene zanemarujemo smatrajući tijelo krutim.

Za potpuniji i stroži iskaz uvjeta ravnoteže moramo objasniti značenje izraza „poništanje djelovanja sila”, za što pak treba uvesti postupak sastavljanja sila i pojam momenta.

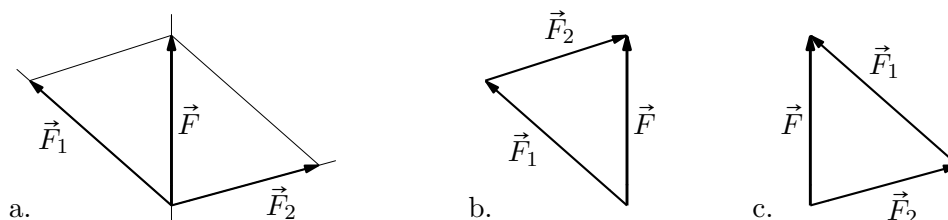
Godine 1608. flamanski matematičar i inženjer Simon Stevin, u dodatku drugom izdanju knjige *Počela umijeća vaganja* [36], naslovljenom *O užadi koja nosi terete*, uveo je *pravilo paralelograma sila* i, potom, *pravilo trokuta sila* kao osnovu postupka *rastavljanja koncentrirane sile* u dvije komponente na zadanim pravcima koji prolaze njezinim hvatištem (slika 4.).



Slika 4. Crteži iz *Počela umijeća vaganja* Simona Stevina

Iako uže ima stanovitu debljinu, unutarnju ćemo silu u napetu užetu smatrati koncentriranom silom koja djeluje na pravcu njezove osi. Sila u užetu GF, čiji je intenzitet

jednak težini prizme i proporcionalan duljini dijagonale **CI** paralelograma konstruiranoga na crtežu na slici 4.a., može se zamijeniti silama u užadi **CD** i **CE** intenziteti kojih su proporcionalni duljinama stranica **CH** i **CK**. Dakle, silu  $\vec{F}$  grafički rastavljamo (slika 5.a.) u sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  na pravcima kroz njezino hvatište — rep strelice — tako da njezinim šiljkom — ili vrškom — povučemo pravce usporedne zadanim pravcima; sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  onda su dvije susjedne stranice paralelograma čija je dijagonala  $\vec{F}$ . Sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  nazivamo *komponentama* sile  $\vec{F}$ .



Slika 5.

Zadaća je rješiva samo ako pravac djelovanja sile koju rastavljamo i pravci njezinih komponentata leže u istoj ravnini.

Možemo reći i da je, obratno, sila  $\vec{F}$  nastala *sastavljanjem* ili *zbrajanjem* sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  koje djeluju u istoj točki: *rezultanta*  $\vec{F}$  sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  dijagonala je paralelograma koji razapinju sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  (ista slika, naravno). Zadaća zbrajanja dviju sila s istim hvatištem uvijek je rješiva: pravci djelovanja sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  određuju ravninu u kojoj će biti i pravac rezultante  $\vec{F}$ .

Budući da su duljine usporednih stranica paralelograma (primjerice, stranicâ **CK** i **HI** na slici 4.a.) jednake, umjesto paralelograma možemo, kao na slikama 4.b. i 5.b., konstruirati trokut. Pritom se, međutim, jedna sila „pomiče” s pravca svoga djelovanja na usporedan mu pravac, pa se položajni odnosi sila više ne mogu očitati iz crteža, ali zasad to i nije važno, jer znamo da sve sile djeluju u istoj točki.

Lako je, usporedbom paralelograma i trokutâ sila prikazanih na slici 5., vidjeti da je zbrajanje sila komutativno:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1. \quad (1)$$

Djeluju li u istom hvatištu sile  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$ , njihovu rezultantu  $\vec{F}$  možemo naći tako da prema pravilu paralelograma zbrojimo sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , a zatim dobivenoj sili  $\vec{F}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  pribrojimo silu  $\vec{F}_3$ :

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}. \quad (2_1)$$

Istu ćemo rezultantu dobiti zbrojimo li prvo sile  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$ , a potom njihov zbroj  $\vec{F}_{2,3}$  pribrojimo sili  $\vec{F}_1$ :

$$\vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2,3} = \vec{F}. \quad (2_2)$$

Zbrajanje je sila, prema tome, asocijativno,

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3), \quad (2_3)$$



pa u izrazu za zbroj sila zgrade ne moramo pisati:

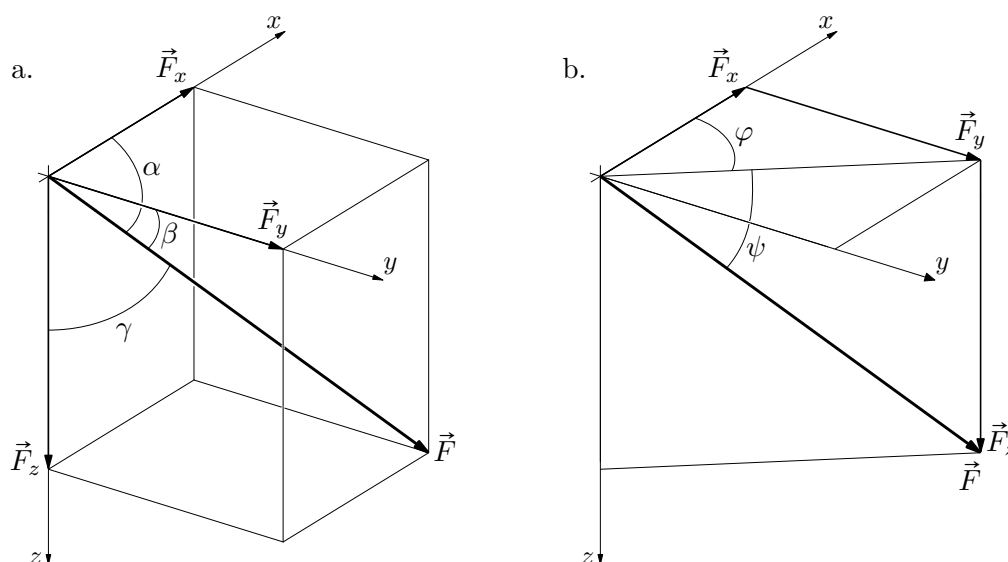
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \quad (2)$$

Štoviše, budući da vrijedi i zakon komutativnosti, možemo prvo zbrojiti sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_3$ , pa dobivenoj sili  $\vec{F}_{1,3}$  pribrojiti silu  $\vec{F}_2$ :

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) + \vec{F}_2 = \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_2 = \vec{F}.$$

Dok je poligonom sila zbroj niza sila jednoznačno određen neovisno o broju sila, sila se u ravnini može jednoznačno rastaviti na dvije komponente, a u prostoru na tri.

Pravilo paralelograma vrijedi i za sastavljanje ili za rastavljanje drugih fizikalnih veličina određenih intenzitetom te pravcem i smislom, poput pomaka, brzine i ubrzanja. Prepoznavanje zajedničkih svojstava tih veličina pridonijelo je razvoju apstraktnoga matematičkoga pojma *vektora* u drugoj polovini devetnaestog stoljeća.<sup>6</sup> Matematička teorija vektora usavršila se, neovisno o mogućim fizikalnim interpretacijama, do visoke razine istančanosti i formalizacije. Uvođenje vektorâ u mehaniku i prikazivanje sila, pomakâ itd. vektorima pruža nam, osim zorne geometrijske predodžbe, mogućnost primjene svih postupaka linearne algebre i vektorske analize.



Slika 6.

Za algebarsko baratanje silama pogodno je rastaviti ih u međusobno okomite komponente, usporedne s osima Kartezijeva koordinatnog sustava (slika 6.a.); u vektorskom zapisu:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}. \quad (3)$$

<sup>6</sup> Teoriju vektora neovisno su sredinom 19.-oga stoljeća začeli W. R. Hamilton (u Irskoj) i H. Grassmann (u Njemačkoj). Nazive „skalar” i „vektor” uveo je Hamilton; korijen je riječi „vektor” u latinskom *vehere* — prenositi, dok naziv „skalar” slijedi iz latinskoga *scalaris* — ljestvični: izražavanja neke (mjerne) veličine ljestvicom brojčanih vrijednosti. Današnji pojam vektora uveli su i razvili krajem 19.-oga stoljeća I. W. Gibbs (u Americi) i O. Heaveside (u Britaniji) te sustavnim prikazom i izlaganjem teorije, uz uvođenje pogodnih oznaka, potaknuli šire primjene u matematici i fizici.

Brojeve  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , kojima su određene vrijednosti — dakle, intenziteti i smisao — komponenta  $\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_y$  i  $\vec{F}_z$ , nazivamo *skalarnim komponentama*. (Ako će trebati posebno istaknuti njihov karakter, vektore  $\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_y$  i  $\vec{F}_z$  zvat ćemo *vektorskim komponentama*.)

S pomoću skalarnih komponenta možemo izračunati intenzitet sile,

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

i kutove koje (orijentirani) pravac, na kojem sila djeluje, zatvara s koordinatnim osima,

$$\alpha = \arccos \frac{F_x}{\|\vec{F}\|}, \quad \beta = \arccos \frac{F_y}{\|\vec{F}\|}, \quad \gamma = \arccos \frac{F_z}{\|\vec{F}\|}.$$

Kutove  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  povezuje relacija

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

tako da su neovisna samo dva od ta tri kuta. Stoga je pravac djelovanja sile često pogodnije zadati kutovima  $\varphi$  i  $\psi$  prikazanima na slici 6.b.

Ako se ne ograničimo na sile koje djeluju u ishodištu (ili prolaze kroz ishodište), kutovi  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , odnosno  $\varphi$  i  $\psi$ , zajednički su svim pravcima pramena međusobno paralelnih pravaca; hvatište ili, u mnogim slučajevima, barem pravac djelovanja (konkretni pravac iz pramena) treba posebno zadati.

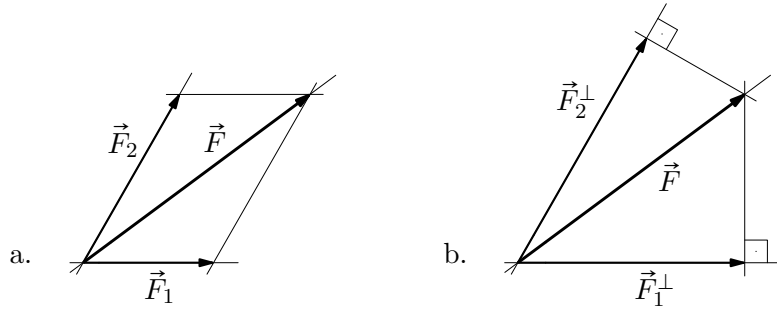
Razlikujemo, naime, tri vrste vektora: 1. vektore u točkama ili vektore s hvatištima ili vezane vektore, 2. vektore na pravcima ili klizne vektore i 3. slobodne ili nevezane vektore. Koncentrirana sila se u nekim slučajevima, primjerice pri uravnoteženju tijela kao cjeline, može smatrati kliznim vektorom — njezin se utjecaj, u našem primjeru doprinos uvjetima ravnoteže, ne mijenja pomaknemo li je po pravcu djelovanja do nekog drugog hvatišta, pa i izvan tijela na koje djeluje; no, taj je utjecaj, kao što ćemo uskoro vidjeti, bitno drugačiji djeluje li na nekom drugom, makar i usporednom pravcu. Određujemo li pak unutarne sile u tijelu, treba uvažiti i hvatišta sile.

Međusobno okomite komponente vektora, pa i kad nisu usporedne s koordinatnim osima, zvat ćemo *pravokutnim komponentama*. One su uvijek jednake ortogonalnim projekcijama vektora na pravce na kojima te komponente leže. (Komponente  $\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_y$ ,  $\vec{F}_z$  jednake su, dakle, ortogonalnim projekcijama sile  $\vec{F}$  na koordinatne osi.) Rastavimo li pak silu na komponente koje nisu međusobno okomite, te će se komponente, nazvane *kosokutnima* (slika 7.a.), razlikovati od ortogonalnih projekcija na pripadne pravce (slika 7.b.).

Ortogonalnu projekciju sile ili, općenitije, bilo kojega vektora na neki pravac  $p$  možemo odrediti s pomoću skalarnoga produkta. Ako su A i B dvije točke tog pravca, a  $\vec{r}_A$  i  $\vec{r}_B$  njihovi radijus-vektori, tada je  $\vec{e} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) / \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|$  jedinični vektor na njemu, orijentiran od A prema B. *Ortogonalna projekcija* sile  $\vec{F}$  na pravac  $p$  dana je izrazom

$$\vec{F}_p = (\vec{F} \cdot \vec{e}) \vec{e}.$$

Ta je projekcija jedina vrsta projekcije koju ćemo upotrebljavati, pa ćemo je najčešće nazivati jednostavno *projekcijom*.



Slika 7.

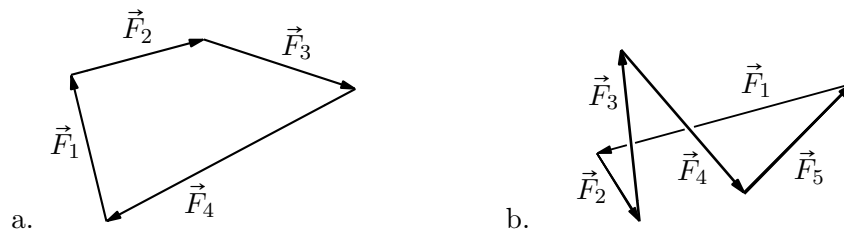
Budući da smo uvođenjem vektora  $\vec{e}$  zadali orijentaciju na pravcu  $p$ , skalarnim produktom  $F_p = \vec{F} \cdot \vec{e}$  utvrđeni su i intenzitet i smisao projekcije. Drugim riječima, tim je brojem projekcija na zadani orijentirani pravac potpuno određena, pa ćemo ga nazvati *skalarnom projekcijom*.

Primjenom svojstava komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja može se pokazati da niz sila  $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$  zbrajamo zbrajajući njihove komponente; posebno:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,x} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,y} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,z} \\ &= \vec{i} \sum_{i=1}^n F_{i,x} + \vec{j} \sum_{i=1}^n F_{i,y} + \vec{k} \sum_{i=1}^n F_{i,z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ako je, u grafičkom prikazu, poligon sila zatvoren, njihov zbroj iščezava. I obratno: ako zbroj sila iščezava, tada je poligon zatvoren—šiljak posljednje sile pada u početak prve (slika 8.). To znači da, algebarski, zbroj sila iščezava ako i samo ako je jednak nul-vektoru:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (5)$$



Slika 8.

Kako su  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  linearno nezavisni vektori, to je moguće ako i samo ako su istodobno

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0. \quad (6)$$

## 2.2. O pojmu momenta sile

Iščekavanje zbroja sila nuždan je, ali ne i dovoljan uvjet za ravnotežu tijela na koje djeluju. Primjerice, djeluju li na tijelo dvije sile na usporednim pravcima, jednakih intenziteta, ali suprotnih orijentacija, tijelo će se (za)vrtnuti, iako njihov zbroj iščezava. U obzir stoga treba uzeti i međusobni prostorni odnos sila. Fizikalne veličine kojima se izražava utjecaj položaja sila na uvjete ravnoteže (i, u dinamici, na zakone gibanja) nazivaju se *momentima sile*. Momentni je uvjet ravnoteže izveden iz brojnih — često tek misaonih — pokusa s polugama, započelih u Arhimedovoj raspravi *O ravnoteži likova ili o težištima likova*, a nastavljenih i razvijanih kroz cijelo skolastičko razdoblje pa sve do Stevinovih djela; sarkastična ilustracija zakona poluge — španjolski plaćenik u Nizozemskoj — na slici 9. iz Stevinova je djela *Provedba umijeća vaganja* [36].



Slika 9.

Moment  $\vec{M}_{F/A}$  sile  $\vec{F}$  u odnosu na točku A definiramo kao vektorski produkt geometrijskoga vektora  $\vec{r}_{F/A}$  koji počinje u točki A, a završava u nekoj točki pravca djelovanja sile, i vektora sile  $\vec{F}$ :

$$\vec{M}_{F/A} = \vec{r}_{F/A} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (7)$$

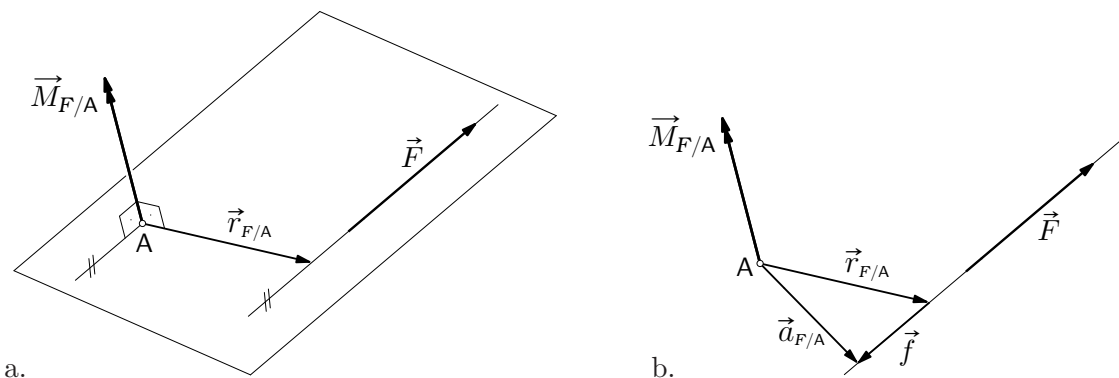
Za  $\vec{F} \neq \vec{0}$  će vektor  $\vec{M}_{F/A}$  biti jednak nul-vektoru ako  $\vec{F}$  i  $\vec{r}_{F/A}$  leže na istom pravcu ili ako je  $\vec{r}_{F/A}$  nul-vektor. Dakle, moment sile  $\vec{F} \neq \vec{0}$  u odnosu na neku točku iščezava ako i samo ako pravac njezina djelovanja prolazi tom točkom.

Ako je pak različit od nul-vektora,  $\vec{M}_{F/A}$  je, kao vektorski produkt, okomit na ravninu razapetu vektorima  $\vec{r}_{F/A}$  i  $\vec{F}$ , a njegova je orijentacija određena pravilom desne ruke ili pravilom desnoga vijka (slika 10.a.).

Uzmemo li umjesto  $\vec{r}_{F/A}$  vektor  $\vec{a}_{F/A}$  koji završava u nekoj drugoj točki pravca djelovanja sile tako da je  $\vec{a}_{F/A} = \vec{r}_{F/A} + \vec{f}$  (slika 10.b.), bit će

$$\vec{M}_{F/A} = \vec{a}_{F/A} \times \vec{F} = (\vec{r}_{F/A} + \vec{f}) \times \vec{F} = \vec{r}_{F/A} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{f} \times \vec{F}}_{\vec{0}} = \vec{r}_{F/A} \times \vec{F}.$$

(Vektori  $\vec{a}_{F/A}$  i  $\vec{F}$  razapinju istu ravninu kao i  $\vec{r}_{F/A}$  i  $\vec{F}$ , jer je to ravnina određena točkom A i pravcem djelovanja sile  $\vec{F}$ .) Geometrijske vektore kojima je početak u točki A, a vrh u nekoj — bilo kojoj — točki pravca djelovanja sile, poput vektora  $\vec{r}_{F/A}$  i  $\vec{a}_{F/A}$ , nazivat ćemo *položajnim vektorima* pravca djelovanja sile u odnosu na točku A. Vektor momenta, dakle, ne ovisi o izboru položajnoga vektora, a to znači da se moment sile u odnosu na točku ne mijenja pomaknemo li je po pravcu njezina djelovanja u neko drugo hvatište.



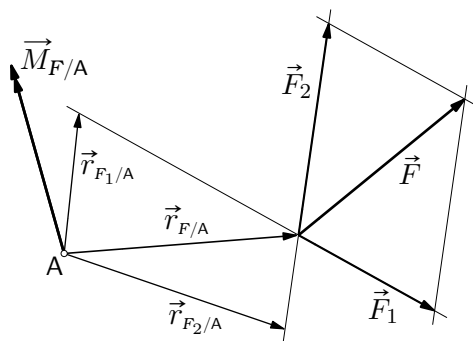
Slika 10.

Moment sile  $\vec{F}$  u odnosu na točku A jednak je zbroju momenata njezinih komponenta  $\vec{F}_i$  ( $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ ) u odnosu na tu točku (slika 11.). Ta se tvrdnja naziva *Varignonovim teoremom*. Suvremeni je dokaz jednostavna primjena svojstva distributivnosti vektorskoga produkta:

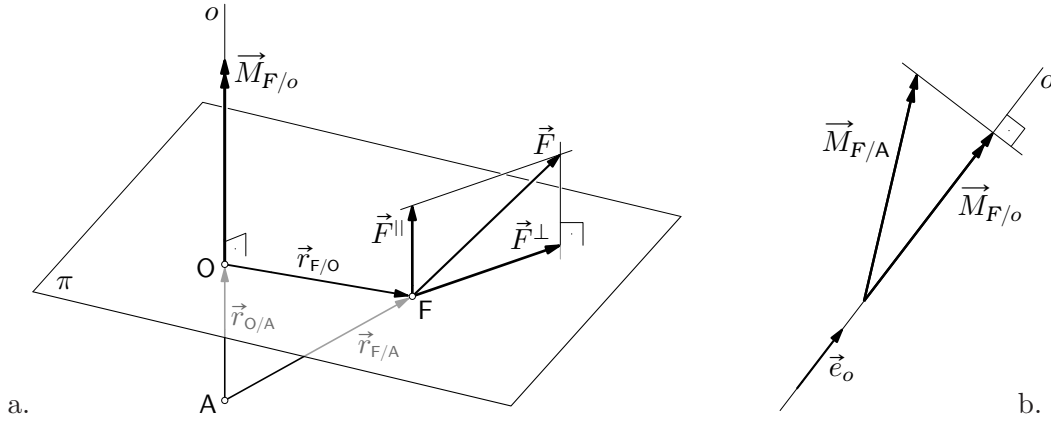
$$\vec{M}_{F/A} = \vec{r}_{F/A} \times \vec{F} = \vec{r}_{F/A} \times \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \vec{r}_{F/A} \times \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{F_i/A}.$$

Naravno, umjesto vektora  $\vec{r}_{F/A}$  mogu se uzeti i neki drugi položajni vektori pravca djelovanja komponenta u odnosu na točku A:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{F_i/A} = \sum_{i=1}^n \left( \vec{r}_{F/A} \times \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \vec{r}_{F_i/A} \times \vec{F}_i \right).$$



Slika 11.



Slika 12.

Neka je  $o$  pravac u prostoru koji ne siječe pravac djelovanja sile  $\vec{F}$  i neka je  $A$  jedna njegova točka. Silu  $\vec{F}$  rastavit ćemo u odabranoj točki  $F$  pravca njezina djelovanja u silu  $\vec{F}^{\parallel}$  usporednu s pravcem  $o$  i u silu  $\vec{F}^{\perp}$  u ravnini  $\pi$  okomitoj na njega:  $\vec{F} = \vec{F}^{\parallel} + \vec{F}^{\perp}$  (slika 12.a.). Nadalje, vektor  $\vec{r}_{F/A}$  od točke  $A$  do točke  $F$  prikazat ćemo kao zbroj vektora  $\vec{r}_{O/A}$  od točke  $A$  do probodišta  $O$  pravca  $o$  s ravninom  $\pi$  i vektora  $\vec{r}_{F/O}$  u ravnini  $\pi$ :  $\vec{r}_{F/A} = \vec{r}_{O/A} + \vec{r}_{F/O}$ . Za moment sile  $\vec{F}$  u odnosu na točku  $A$  možemo sada pisati

$$\begin{aligned}\vec{M}_{F/A} &= \vec{r}_{F/A} \times \vec{F} = (\vec{r}_{O/A} + \vec{r}_{F/O}) \times (\vec{F}^{\parallel} + \vec{F}^{\perp}) \\ &= \vec{r}_{O/A} \times \vec{F}^{\parallel} + \vec{r}_{O/A} \times \vec{F}^{\perp} + \vec{r}_{F/O} \times \vec{F}^{\parallel} + \vec{r}_{F/O} \times \vec{F}^{\perp}.\end{aligned}$$

Vektor  $\vec{r}_{O/A}$ , koji leži na pravcu  $o$ , usporedan je s  $\vec{F}^{\parallel}$ , pa je prvi pribrojnik u drugom retku jednak nul-vektoru. Drugi pak i treći pribrojnik okomiti su na pravac  $o$  (drugi je, naime, okomit na  $\vec{r}_{O/A}$ , a treći na  $\vec{F}^{\parallel}$ ). I, na kraju, budući da su i  $\vec{r}_{F/O}$  i  $\vec{F}^{\perp}$  okomiti na pravac  $o$ , četvrti pribrojnik leži na njemu. Vektor

$$\vec{M}_{F/o} = \vec{M}_{F^{\perp}/O} = \vec{r}_{F/O} \times \vec{F}^{\perp} \quad (8)$$

nazivamo *vektorom momenta sile  $\vec{F}$  oko osi  $o$* . Drugim riječima, moment sile  $\vec{F}$  oko osi  $o$  moment je projekcije  $\vec{F}^{\perp}$  sile  $\vec{F}$  na neku ravninu okomitu na pravac  $o$ , u odnosu na probodište  $O$  pravca s tom ravninom.

Za silu  $\vec{F} \neq \vec{0}$  moment oko osi  $o$  iščezava ako i samo ako pravac njezina djelovanja siječe tu os. Ako je to sjecište točka u konačnosti,  $\vec{r}_{F/O}$  i  $\vec{F}^{\perp}$  leže na istom pravcu ili je, u posebnom slučaju,  $\vec{r}_{F/O} = \vec{0}$ . Ako je pak sjecište beskrajno daleko — ako su os i pravac djelovanja sile usporedni — onda je  $\vec{F} = \vec{F}^{\parallel}$  i  $\vec{F}^{\perp} = \vec{0}$ . (U oba slučaja sila i os leže u istoj ravnini.)

Skalarna će projekcija vektora  $\vec{M}_{F/A}$  na pravac  $o$ , čija je orijentacija određena jediničnim vektorom  $\vec{e}$ , biti

$$\vec{M}_{F/A} \cdot \vec{e} = \underbrace{(\vec{r}_{O/A} \times \vec{F}^{\perp}) \cdot \vec{e}}_0 + \underbrace{(\vec{r}_{F/O} \times \vec{F}^{\parallel}) \cdot \vec{e}}_0 + \vec{M}_{F/o} \cdot \vec{e}$$

[zašto su prva dva pribrojnika jednaka nuli?]. No, kako  $\vec{M}_{F/o}$  leži na pravcu  $o$ , skalarni je produkt  $\vec{M}_{F/o} \cdot \vec{e}$  jednak njezgovoj vrijednosti; prema tome,

$$\vec{M}_{F/o} = (\vec{M}_{F/o} \cdot \vec{e}) \vec{e} = (\vec{M}_{F/A} \cdot \vec{e}) \vec{e},$$

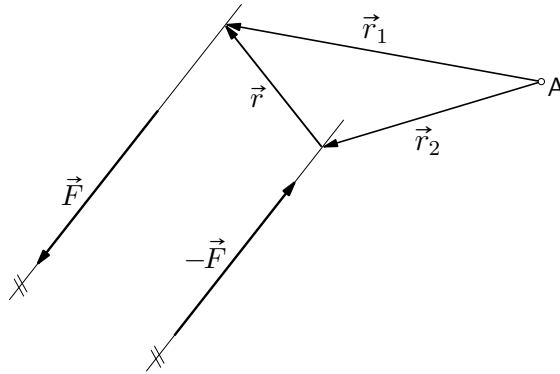
ili, riječima, moment  $\vec{M}_{F/o}$  sile  $\vec{F}$  oko osi  $o$  jednak je ortogonalnoj projekciji momenta  $\vec{M}_{F/A}$  na tu os (slika 12.b.), pri čemu je A bilo koja točka na  $o$ , a njegovu vrijednost  $M_{F/o}$  možemo izračunati kao mješoviti produkt jediničnoga vektora osi, položajnog vektora i vektora sile:

$$M_{F/o} = \vec{M}_{F/A} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{M}_{F/A} = \vec{e} \cdot (\vec{r}_{F/A} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Očito je da se momenti sile, a time i momenti niza sila, u odnosu na različite točke razlikuju. Međutim, u posebnom slučaju sprega sila (dviju suprotno orijentiranih sila jednakih intenziteta koje djeluju na usporednim pravcima) čiji su vektori  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$  lako je pokazati da njegov moment ne ovisi o točki u odnosu na koju ga izračunavamo:

$$\vec{M}_S = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F},$$

gdje su  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  vektori od neke po volji odabrane točke A do po volji odabranih točaka na pravcima sila sprega  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$ , a  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  (slika 13.). Dakle, moment  $\vec{M}_{\pm F}$  sprega sila  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$  jednak je vektorskom produktu vektora  $\vec{r}$  od bilo koje točke na pravcu sile  $-\vec{F}$  do bilo koje točke na pravcu sile  $\vec{F}$  i vektora sile  $\vec{F}$ ; taj je vektor okomit na ravninu sprega koju određuju pravci vektora  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$ .



Slika 13.

Pretpostavimo li da je razmak između pravaca djelovanja sila sprega neizmjerljivo malen i da je intenzitet tih sila neizmjerljivo velik, ali da je intenzitet momenta sprega konačan broj, dolazimo do pojma *koncentriranoga momenta* koji je određen samo, ali i jednoznačno, vektorom  $\vec{M}$ . Vektori momenta sprega i koncentriranoga momenta mogu se u nekim slučajevima, kao što je uravnoteženje tijela, smatrati slobodnim vektorima.

Ortogonalne projekcije momenta sprega i koncentriranoga momenta na zadane osi također ćemo zvati momentima oko osi.

### 2.3. O pojmu ravnoteže, nanovo, potpunije

Sada napokon možemo izreći *uvjete ravnoteže tijela* na koje djeluju koncentrirane sile  $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$  i koncentrirani momenti  $\{\vec{M}_j\}_{j=1}^m$ . Prvi uvjet ravnoteže — *iščezavanje zbroja sila* — izražen je jednačbom (5) na stranici 26.; ponovit ćemo je:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (5)$$

Drugi je uvjet *iščezavanje zbroja svih momenata*: momenata sila *oko bilo koje točke* — odabrat ćemo ishodište — i koncentriranih momenata:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = \vec{0}; \quad (10)$$

sa  $\vec{r}_i$  označili smo radijus–vektore po volji odabranih točaka na pravcima sila  $\vec{F}_i$ .

I kad nema koncentriranih momenata, pri provjeri ravnoteže ili pri uravnoteženju tijela uvažiti treba i prostorne odnose sila s pomoću momentne jednačbe

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (11)$$

Prolaze li pravci djelovanja svih sila istom točkom, lako je vidjeti [kako?] da će ta jednačba biti zadovoljena ako zbroj sila iščezava, pa je u tom slučaju dovoljan prvi uvjet. Izdvojit ćemo dva jednostavna, ali važna slučaja. Dvije su sile u ravnoteži ako i samo ako su jednakih intenziteta, a suprotnih orijentacija (čime je zadovoljen uvjet (5)) i leže na istom pravcu. Tri su pak sile u ravnoteži ako i samo ako prolaze istom točkom, a zadovoljen je uvjet (5). [Pokažite da taj uvjet može biti zadovoljen samo ako sve tri sile leže u istoj ravnini!]

Vektorske jednačbe (5) i (10) daju šest *skalarnih* ili *algebarskih uvjeta ravnoteže*. Znamo da je jednačba (5) ekvivalentna jednačbama (6):

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{i,y} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^n F_{i,z} = 0; \quad (6)$$

zbroj sila iščezava ako i samo ako iščezavaju sva tri zbroja njihovih skalarnih komponenta. Slično tome, zbroj koncentriranih momenata i momenata sila u odnosu na ishodište iščezava ako i samo ako iščezavaju zbrojevi vrijednosti momenata oko tri koordinatne osi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i F_{i,z} - z_i F_{i,y}) + \sum_{j=1}^m M_{j,x} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (-x_i F_{i,z} + z_i F_{i,x}) + \sum_{j=1}^m M_{j,y} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i F_{i,y} - y_i F_{i,x}) + \sum_{j=1}^m M_{j,z} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$



Jednadžbe (6) i (12) nazivamo osnovnim ili kanonskim uvjetima ravnoteže. No, ishodište i koordinatne osi nisu ni po čemu povlašteni. Sile možemo projicirati na tri gotovo po volji odabrana pravca — jedini je uvjet da ti pravci nisu usporedni s jednom ravninom. Za osi momenata možemo odabrati bilo koja tri pravca koja zadovoljavaju isti uvjet. Možemo, osim toga, postaviti četiri, pet ili šest momentnih uvjeta uz dva, jedan ili nijedan uvjet sila; međusobni prostorni odnosi osi momenata i pravaca na koje se projiciraju sile moraju pritom zadovoljiti stanovite uvjete. Uvjeti ravnoteže neće biti korektno postavljeni ako mogu postojati sila ili koncentrirani moment (ili moment sprega) čiji se učinci ne pojavljuju ni u jednom uvjetu [44]. Primjerice, ako u formulaciji sa šest momentnih osi sve osi sijeku jedan pravac (pa i neizmjereno daleko), sila na tom pravcu ne uzrokuje moment ni oko jedne osi.

Za probleme u ravnini skalarni sustav sadrži tri jednadžbe: iščezavanje dva zbroja skalarnih komponenata sila i iščezavanje zbroja vrijednosti koncentriranih momenata i momenata oko neke točke (recimo, ishodišta ravninskog koordinatnog sustava). (U ravninskim je problemima moment u odnosu na neku točku u stvari moment oko osi okomite na tu ravninu. I zadani koncentrirani momenti moraju biti okomiti na ravninu. Momenti su stoga jednoznačno određeni samo svojim brojčanim vrijednostima.) Skalarne jednadžbe ravnoteže u ravnini  $xz$  su

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{i,x} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{i,z} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (-x_i F_{i,z} + z_i F_{i,x}) + \sum_{j=1}^m M_{j,y} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

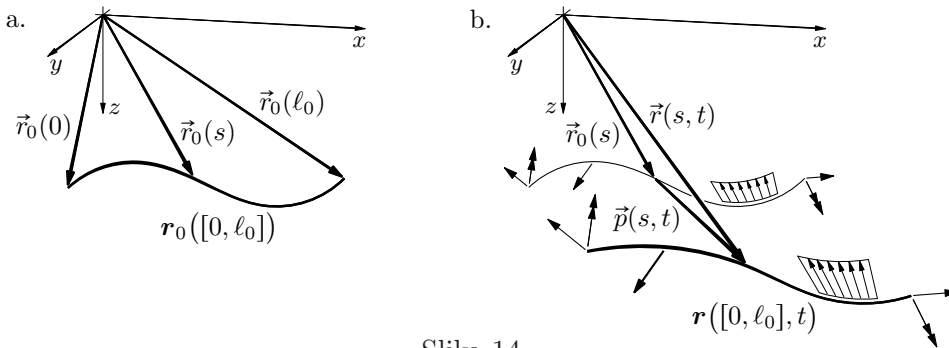
[Napišite jednadžbe ravnoteže za ravninu  $xy$ !]

Često je u ravnini pogodnije postaviti dva momentna uvjeta uz jedan uvjet sila, pri čemu spojnica točaka u odnosu na koje se računaju momenti sila ne smije biti okomita na pravac na koji se projiciraju sile, ili tri uvjeta momenata, pri čemu točke oko kojih se momenti računaju ne smiju ležati na jednom pravcu.

### 3. Jednadžbe ravnoteže štapa

#### 3.1. Uvod u geometriju gibanja

*Štapni element* ili, jednostavno, *štap* definirali smo kao konstrukcijski element kojemu je jedna karakteristična dimenzija, duljina, istaknuta u odnosu na druge dvije, visinu (ili debljinu) i širinu, pa se za njegovu proračunsku shemu uzima dio krivulje ili dio pravca.



Slika 14.

*Položaj u prostoru i oblik osi* neopterećenoga otvorenog štapa, „izrezanog” iz geometrijski nepromjenjive konstrukcije, prikazat ćemo (slika 14.a.) *ograničenom pravilnom prostornom krivuljom*  $\mathbf{r}_0$  koja je *trag* (ili *slika*) parametarski zadane *vektorske funkcije*<sup>7</sup>

$$\vec{r}_0 : [0, \ell_0] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{r}_0 : s \mapsto \vec{r}_0(s) = x_0(s) \vec{i} + y_0(s) \vec{j} + z_0(s) \vec{k}, \quad (14)$$

čije su *skalarne komponente* skalarne funkcije

$$x_0(s), y_0(s), z_0(s) : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{R},$$

<sup>7</sup> (Ograničena) krivulja  $\mathbf{r} \subset \mathbb{R}^3$ , u potpunijem zapisu  $\mathbf{r}([a, b])$ , skup je točaka  $\mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^3$  koje opisuje vrh vektora  $\vec{r}(s) = x(s) \vec{i} + y(s) \vec{j} + z(s) \vec{k}$  kada parametar  $s$  prolazi segmentom  $[a, b]$ . Promjena vrijednosti parametra od  $a$  do  $b$  određuje (pozitivnu) *orijentaciju* krivulje — krivulja je orijentirana od  $\mathbf{r}(a)$  prema  $\mathbf{r}(b)$ . Za štap otvorene osi funkcija  $\vec{r}$  mora različite vrijednosti parametra preslikavati u različite točke:  $\mathbf{r}(\bar{s}) \neq \mathbf{r}(\bar{\bar{s}})$  čim je  $\bar{s} \neq \bar{\bar{s}}$ .

Formalno, krivulja  $\mathbf{r}$  je *glatka* ako je derivacija  $\vec{r}' = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$  funkcije  $\vec{r}$  neprekidna funkcija na  $[a, b]$  (uz jednostrane derivacije u  $a$  i  $b$ ), što znači, geometrijski, da pri pomicanju po krivulji vektori  $\vec{r}'(s)$ , koji određuju smjerove tangenata na krivulju u točkama  $\mathbf{r}(s)$  i orijentacije na tim tangentama, postupno „prelaze” jedni u druge, to jest, da se njihovi nagibi u odnosu na koordinatne osi postupno mijenjaju i da njihovi vrhovi leže na neprekinutoj krivulji. Navedena matematička definicija glatkoće, međutim, nije dovoljna za našu intuitivnu predodžbu „glatke krivulje” kao krivulje koja nema „šiljaka” — šiljak se može, ali ne mora, pojaviti u točki  $\mathbf{r}(\bar{s})$  u kojoj zbog  $\vec{r}'(\bar{s}) = \vec{0}$  tangencijalni vektor iščezava; naime, pri prijelazu preko te točke tangencijalni vektor može promijeniti orijentaciju i „krenuti unazad”. Ako je  $\vec{r}'(s) \neq \vec{0}$  za sve  $s \in [a, b]$ , krivulja je *pravilna* ili *regularna*, a time onda i intuitivno „glatka”.

pri čemu za parametar uzimamo *duljinu luka krivulje* (zamišljamo, drugim riječima, da smo segment realne osi, omeđen točkama 0 i  $\ell_0$ , bez stezanja ili rastezanja savili u krivulju). U diferencijalnoj se geometriji takav parametar naziva i *prirodnim parametrom* krivulje, a njegove vrijednosti *krivuljnim apscisama* njezinih točaka.

Točku  $\mathbf{r}_0(s)$  kao *mjesto* ili *položaj u prostoru* — koji je u odabranom koordinatnom sustavu zadan koordinatama  $x_0(s), y_0(s), z_0(s)$  — treba razlikovati od *materijalne točke* osi koja trenutno, samo u neopterećenom stanju štapa, leži u toj točki prostora. Zamislimo li da je os štapa kontinuirani niz materijalnih točaka, krivuljne apscise možemo smatrati „oznakama” tih točaka, pa ćemo stoga govoriti jednostavno o (materijalnoj) točki  $s$  osi štapa. (Približnu predodžbu može pružiti krojački metar, iako na njemu, naravno, nisu označene sve, nego tek neke točke.)

Nanesu li se opterećenja na štap, on se pomiče i mijenja oblik. Iz svakodnevnoga iskustva znamo da su pomaci elemenata građevinskih konstrukcija najčešće vrlo mali, gotovo, pa i potpuno nezamjetni: hodamo li po betonskom podu, progibe uopće nećemo primijetiti; kod drvenoga se pak poda progibanje katkad može osjetiti (pa i čuti). Iako obično neznatni, pomaci uvijek postoje.

Uzet ćemo da se opterećenje nanosi u trenutku  $t=0$ . U nekom trenutku  $t, t \geq 0$ , materijalna točka  $s$  prolazi prostornom točkom  $\mathbf{r}(s, t)$  čiji je radijus-vektor, prema slici 14.b.,

$$\vec{r}(s, t) = \vec{r}_0(s) + \vec{p}(s, t), \quad (15)$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} \vec{r} &: [0, \ell_0] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{V}^3, \\ \vec{r} &: (s, t) \mapsto \vec{r}(s, t) = x(s, t) \vec{i} + y(s, t) \vec{j} + z(s, t) \vec{k} \end{aligned} \quad (16)$$

i

$$\begin{aligned} \vec{p} &: [0, \ell_0] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{V}^3, \\ \vec{p} &: (s, t) \mapsto \vec{p}(s, t) = u(s, t) \vec{i} + v(s, t) \vec{j} + w(s, t) \vec{k}. \end{aligned} \quad (17)$$

Vektor  $\vec{p}(s, t)$  nazivamo *pomakom* materijalne točke  $s$  u trenutku  $t$  u odnosu na njezin početni položaj. Točka  $s$  je iz položaja  $\mathbf{r}_0(s)$  do položaja  $\mathbf{r}(s, t)$  mogla, ali i nije morala „doputovati po” vektoru  $\vec{p}(s, t)$ . Naime, kako je  $\vec{r}$  funkcija dviju varijabli, skup točaka u kojima leže vrhovi vektorâ  $\vec{r}(s, t)$  je, kao geometrijska tvorevina, ploha, dok su za svaki odabrani  $s$  i za svaki odabrani  $t$  tragovi funkcija

$$\vec{r}(s, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{r}(s, \cdot) : t \mapsto \vec{r}(s, t)$$

i

$$\vec{r}(\cdot, t) : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{r}(\cdot, t) : s \mapsto \vec{r}(s, t)$$

krivulje. Krivulja  $\mathbf{r}(s, [0, \infty))$  za neki odabrani  $s$  opisuje *putanju* (ili *trajektoriju*) materijalne točke  $s$ , a krivulja  $\mathbf{r}([0, \ell_0], t)$  za neki odabrani trenutak  $t$  *položaj i oblik osi* u tom trenutku; očito je  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}([0, \ell_0], 0)$ . Budući da se deformiranjem os najčešće produkuje ili skraćuje, vrijednosti parametra  $s$  neće u općem slučaju, za neki  $t > 0$ , biti duljine lukova krivulje  $\mathbf{r}([0, \ell_0], t)$ .

Kako je naš štap dio geometrijski nepromjenjive konstrukcije, njegovo će se pomicanje i deformiranje nakon nekog vremena zaustaviti. Gibanje štapa ne proturječi pojmu geometrijske nepromjenjivosti: nju utvrđujemo pretpostavljajući da je konstrukcijski sistem sastavljen od krutih elemenata povezanih idealnim vezama<sup>8</sup>, ali to je samo jedan od mogućih modela, primjeren nekim dijelovima analize i proračuna — u našem slučaju zadaći razvrstavanja sistema s kinematičkoga stajališta. U stvarnosti veze ne sprečavaju pomake, nego ih tek ograničuju, a elementi nisu kruti, tako da pomaci konstrukcije i u konstrukciji uvijek postoje, ali su „dovoljno mali”, takvi da ne narušavaju uporabne zahtjeve. Štoviše, deformacije vanjskih veza po pravcima „spriječenih” pomaka neophodne su za pojavu i razvoj reaktivnih sila; isto se tako za nastanak unutarnjih sila dijelovi sistema moraju deformirati — pojava sila u vezama i sila u presjecima posljedica je promjena međumolekularnih i međuatomskih razmaka. A razvoj je reaktivnih i unutarnjih sila neophodan za uravnoteženje geometrijski nepromjenjive konstrukcije — za prestanak njezina gibanja.

Neke od vanjskih sila koje djeluju na štap bit će, prema tome, sile u vezama s podlogom ili s drugim dijelovima konstrukcije. Budući da te sile ovise o deformacijama veza, ovisit će, posredno, o ostalim, zadanim silama.

Pretpostavit ćemo da intenziteti zadanih sila polako — u teoriji neizmjenjivo polako — rastu od nule do konačnih vrijednosti i da se nagibi pravaca njihova djelovanja mijenjaju postupno (ako se uopće mijenjaju). Smisao i svrhu te pretpostavke objasniti ćemo jednostavnim „pokusom” koji možete i sami provesti. Stanete li na osobnu vagu naglo, tako da cijelu svoju težinu prenesete na nju gotovo u trenutku, brojčanik će se zavrtjeti i doći do neke najveće vrijednosti, potom promijeniti smisao vrtnje, doći do neke najmanje vrijednosti te se tako nastaviti okretati naizmjenice u smislu vrtnje kazaljke na satu i u suprotnu smislu između nekih najvećih — ali svaki put sve manjih — i nekih najmanjih — ali svaki put sve većih — vrijednosti, dok se napokon ne zaustavi na broju koji odgovara vašoj težini. Brzine vrtnje, brzine promjena brzine vrtnje i brzine promjena smisla vrtnje bit će u početku tako velike da nećete moći očitati vrijednosti, a i kad se sve dovoljno uspori, uočiti ćete da su najveće dosegnute vrijednosti znatno veće od vaše težine, kao i da su najmanje vrijednosti manje od nje. I konstrukcija se pri naglom opterećivanju slično ponaša: silovito zatitra oko ravnotežne konfiguracije, pri čemu reaktivne i unutarnje sile dostižu vrijednosti mnogo veće od vrijednosti potrebnih za održavanje (statičke) ravnoteže sa zadanim opterećenjem.

Stanete li pak na vagu nanoseći svoju težinu postupno, brojčanik će se lagano i mirno zakretati i stati na oznaci vaše težine. Slično tome, pri polaganu se povećavanju opterećenja ravnoteža sila koje djeluju na konstrukciju održava, naizgled, u svakom trenutku gibanja između njezine početne i konačne konfiguracije — neuravnotežene su sile gotovo zanemarive, dovoljne tek da izazovu neznatne pomake i, time, neznatan prirast veličina reakcija i unutarnjih sila.

Budući da će nas u nastavku zanimati samo konačni, ravnotežni položaj i oblik osi štapa, za oznake funkcija  $\vec{r}(\cdot, \infty)$  i  $\vec{p}(\cdot, \infty)$  upotrijebit ćemo, pojednostavljajući i

<sup>8</sup> Idealne veze bez ikakva otpora dopuštaju pomake koje prema svojim kinematičkim karakteristikama omogućuju, dok su po svim ostalim pravcima nepopustljive.

sažimajući način obilježavanja, ta ista slova,  $\vec{r}$  i  $\vec{p}$ . Drugim riječima, funkcije  $\vec{r}$  i  $\vec{p}$ , kao i njihove skalarne komponente  $x, y, z, u, v$  i  $w$ , „pretvorit“ ćemo u funkcije jedne varijable:

$$\vec{r} : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{r} : s \mapsto \vec{r}(s) = x(s) \vec{i} + y(s) \vec{j} + z(s) \vec{k}, \quad (18)$$

$$\vec{p} : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{p} : s \mapsto \vec{p}(s) = u(s) \vec{i} + v(s) \vec{j} + w(s) \vec{k}. \quad (19)$$

Prema tome,  $\vec{p}(s)$  je ukupni pomak materijalne točke  $s$ , od početnoga položaja  $\mathbf{r}_0(s)$  do krajnjega položaja  $\mathbf{r}(s)$ ,

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0(s) + \vec{p}(s) \quad \text{ili} \quad \vec{p}(s) = \vec{r}(s) - \vec{r}_0(s).$$

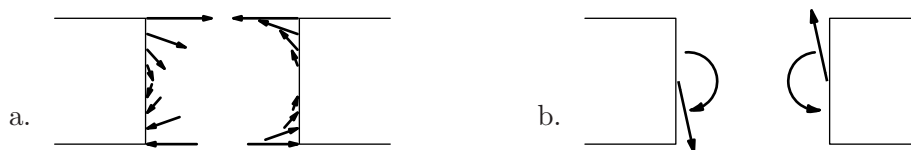
(Na sličan ćemo način obilježavati i druge funkcije: slovo bez indeksa označavat će funkciju u ravnotežnom položaju, dok će slovo s indeksom 0 označavati odgovarajuću funkciju u početnom položaju.)

Pretpostavit ćemo još i da zadano opterećenje nije „preveliko“ tako da se štap neće slomiti, što znači da će i krivulja  $\mathbf{r}([0, \ell_0], \infty)$  (ili, kraće,  $\mathbf{r}$ ) biti pravilna — intuitivno, glatka.

### 3.2. Diferencijalni oblik jednadžbi ravnoteže

Načelo ravnoteže, znamo, izriče: tijelo je u ravnoteži samo ako je svaki njegov izdvojeni dio u ravnoteži. „Odbačeni“ dio ili „odbačene“ dijelove pritom zamjenjujemo silama u presjeku ili u presjecima.

Ravnina nekog poprečnoga presjeka razdvaja, zamišljamo, štap na dva dijela. Između dijelova, „kroz“ ravninu presjeka, djeluju unutarnje plošne sile — sile kratkoga dometa — koje sprečavaju prodiranje jednoga dijela u drugi ili njihovo razdvajanje/razmicanje. Sile kojima jedan dio djeluje na drugi jednake su, po intenzitetima i pravcima djelovanja, silama kojima drugi dio djeluje na prvi, ali su suprotno orijentirane (slika 15.a.).



Slika 15.

Uvođenjem pretpostavaka o raspodjeli unutarnjih sila po površinama poprečnih presjeka mogu se te sile svesti na rezultirajuća djelovanja u težištima presjeka (slika 15.b.), a raspodjele se tih rezultirajućih djelovanja uzduž osi štapa potom opisuju funkcijama jedne varijable. Uzima se nadalje da te funkcije ne ovise o raspodjeli zadanih opterećenja po poprečnim presjecima ili po njihovim rubovima, već samo o rezultirajućim djelovanjima u tim presjecima, što znači da se i opterećenja uvođenjem statički ekvivalentnih djelovanja — koncentriranih i distribuiranih linijskih sila i momenata — svode na os. Parcijalne diferencijalne jednadžbe opće teorije elastičnosti time prelaze u obične diferencijalne jednadžbe koje je, naravno, mnogo lakše riješiti, čak i analitički.

Rezultirajuća se djelovanja unutarnjih plošnih sila nazivaju *unutarnjim silama*<sup>9</sup>, iako su sastavljena, znamo, od rezultirajuće sile i rezultirajućega momenta.

Jednadžbe ravnoteže štapa, u diferencijalnom ili u integralnom obliku, izražavaju analitičke odnose funkcija kojima su zadana opterećenja uzduž osi štapa i funkcija kojima su opisane (poopćene) sile u poprečnim presjecima. Zadana se koncentrirana djelovanja ne mogu opisati „klasičnim” funkcijama, tako da se ni njihov utjecaj na promjenu tōka sila u presjecima ne može obrađivati klasičnim postupcima matematičke analize. Stoga ćemo se zasad ograničiti na štapove koji su između krajnjih točaka opterećeni samo distribuiranim silama i distribuiranim momentima, dok se koncentrirane sile i koncentrirani momenti smiju pojaviti jedino na krajevima tih štapova, te će u matematički model ući naknadno, kao rubni uvjeti.

Distribuirane sile i momente koji u ravnotežnom stanju djeluju na pomaknuti i deformirani štap prikazat ćemo vektorskim funkcijama

$$\vec{q} : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{q} : s \mapsto \vec{q}(s) \quad \text{i} \quad \vec{m} : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{m} : s \mapsto \vec{m}(s).$$

Njihove su vrijednosti po jedinici duljine osi  $\mathbf{r}$  deformiranoga štapa izražene skalarnim funkcijama

$$q : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad q : s \mapsto q(s) \quad \text{i} \quad m : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad m : s \mapsto m(s),$$

pa možemo pisati

$$\vec{q}(s) = q(s) \vec{e}_q(s) \quad \text{i} \quad \vec{m}(s) = m(s) \vec{e}_m(s),$$

gdje su  $\vec{e}_q(s)$  i  $\vec{e}_m(s)$  jedinični vektori koji određuju pravce djelovanjâ sile i momenta u točki  $\mathbf{r}(s)$ :

$$\vec{e}_q : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \|\vec{e}_q(s)\| = 1 \quad \text{i} \quad \vec{e}_m : [0, \ell_0] \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \|\vec{e}_m(s)\| = 1.$$

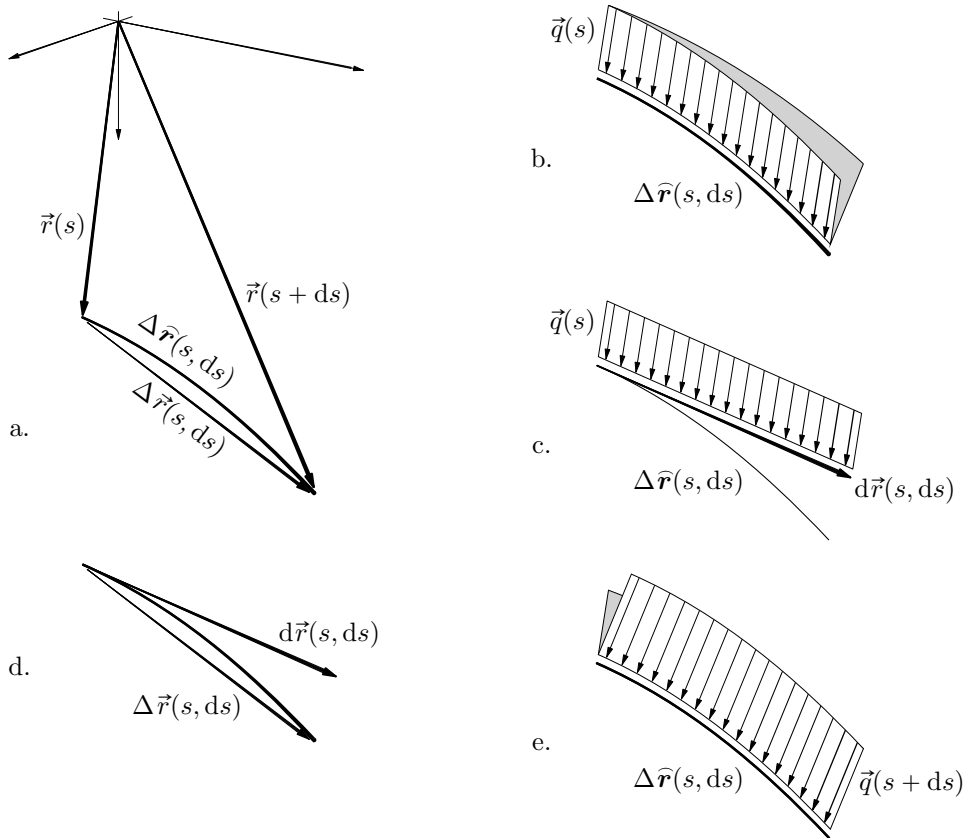
Zamislit ćemo da smo iz deformiranoga štapa izrezali neizmjereno mali (ili, uvriježenim rječnikom matematičke analize: infinitezimalni) lučni odsječak  $\Delta\hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  između presjekâ kroz točke  $\mathbf{r}(s)$  i  $\mathbf{r}(s+ds)$ , gdje je  $ds$  bilo koji neizmjereno mali prirast parametra  $s$ . U taj odsječak pomicanjem i deformiranjem štapa prelazi neizmjereno mali odsječak  $\Delta\hat{\mathbf{r}}_0(s, ds)$  koji na nedeformiranu štapu leži između presjeka kroz  $\mathbf{r}_0(s)$  i  $\mathbf{r}_0(s+ds)$  (slika 16.; preglednosti radi opterećenje nije nacrtano). Djelovanje „odbačenih” dijelova zamjenjujemo (poopćenim) silama u presjecima, pa na odsječak  $\Delta\hat{\mathbf{r}}(s, ds)$ , osim distribuirane sile  $\vec{q}$  i distribuiranoga momenta  $\vec{m}$ , djeluju i koncentrirana sila  $-\vec{Q}(s)$  i koncentrirani moment  $-\vec{M}(s)$  u presjeku kroz točku  $\mathbf{r}(s)$  te koncentrirana sila  $\vec{Q}(s+ds)$  i koncentrirani moment  $\vec{M}(s+ds)$  u presjeku kroz točku  $\mathbf{r}(s+ds)$ ; sva su djelovanja na promatrani odsječak prikazana na slici 17.

*Prvi uvjet ravnoteže infinitezimalnoga odsječka  $\Delta\hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  iščezavanje je zbroja svih sila koje na nj djeluju:* koncentriranih sila  $-\vec{Q}(s)$  i  $\vec{Q}(s+ds)$  te dijela distribuirane sile  $\vec{q}$  na odsječku. Za iskazivanje toga uvjeta u obliku jednadžbe ravnoteže trebat će nam izraz za izračunavanje rezultante<sup>10</sup> pripadnog dijela sile  $\vec{q}$ .

<sup>9</sup> Sile raspodijeljene po površini poprečnoga presjeka nazivat ćemo *unutarnjim plošnim silama*, dok ćemo naziv *unutarnje sile* zadržati za rezultirajuće djelovanje tih plošnih sila.

<sup>10</sup> Govorimo odmah o rezultanti iako taj pojam osim samoga vektora obuhvaća i njegovo hvatište ili, barem, pravac njegova djelovanja, koji će nas zanimati tek pri iskazivanju drugoga uvjeta ravnoteže.





Slika 18.

Diferencijal  $d\vec{r}(s, ds)$  definiran je izrazom

$$d\vec{r}(s, ds) = \vec{r}'(s) ds, \quad (20)$$

gdje je  $\vec{r}'$  derivacija vektorske funkcije  $\vec{r}$ . (Kako je krivulja  $\mathbf{r}$  pravilna, derivacija  $\vec{r}'(s) \neq \vec{0}$  postoji u svakoj njezinoj točki.) Derivacija  $\vec{r}'(s)$  i diferencijal  $d\vec{r}(s, ds)$  vektori su koji leže na tangenti na krivulju  $\mathbf{r}$  u točki  $\mathbf{r}(s)$ ; na slici 18.d. prikazan je samo diferencijal, jer je, za razliku od njega, derivacija vektor konačne duljine. U infinitezimalnome okolišu točke  $\mathbf{r}(s)$  tangenta potpuno prijanja uz krivulju, pa je diferencijal  $d\vec{r}(s, ds)$  nerazlučiv i od luka  $\Delta\vec{r}(s, ds)$  i od njegove tetive; reći ćemo da su vektori  $d\vec{r}(s, ds)$  i  $\Delta\vec{r}(s, ds)$  „gotovo paralelni”. K tomu je još i udaljenost vrhova tih vektora neizmjereno mala u odnosu na njihove duljine,

$$\frac{\|d\vec{r}(s, ds) - \Delta\vec{r}(s, ds)\|}{\|d\vec{r}(s, ds)\|} \approx 0,$$

i, time, zanemariva, a to pak znači da je zanemariva i razlika tih duljina,

$$\frac{\|d\vec{r}(s, ds)\| - \|\Delta\vec{r}(s, ds)\|}{\|d\vec{r}(s, ds)\|} \approx 0,$$

pa je zanemariva i razlika duljinâ diferencijala i luka,

$$\frac{\|d\vec{r}(s, ds)\| - \|\Delta\vec{r}(s, ds)\|}{\|d\vec{r}(s, ds)\|} \approx 0,$$



tako da umjesto s duljinom luka dalje možemo raditi s duljinom diferencijala

$$\|d\vec{r}(s, ds)\| = \|\vec{r}'(s)\| ds. \quad (21)$$

Uzet ćemo (zasad) da je funkcija  $\vec{q}$  neprekinuta u  $s$ ; njezin je prirast

$$\Delta\vec{q}(s, ds) = \vec{q}(s + ds) - \vec{q}(s)$$

između točaka  $\mathbf{r}(s)$  i  $\mathbf{r}(s + ds)$  tada infinitezimalan. Pretpostavimo li da je uzduž luka  $\Delta\vec{r}(s, ds)$  distribuirana sila  $\vec{q}$  konstantna po vrijednosti i po smjeru (to jest, da su pravci djelovanja međusobno usporedni), pri čemu je, kao na slici 18.b., ta vrijednost  $q(s)$ , dok je smjer određen jediničnim vektorom  $\vec{e}_q(s)$ , i uvrstimo li još, prema slici c., umjesto duljine infinitezimalnoga luka duljinu diferencijala, infinitezimalna bi rezultanta dijela sile  $\vec{q}$  na luku  $\Delta\vec{r}(s, ds)$  bila

$$\vec{q}(s) \|d\vec{r}(s, ds)\| = \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds. \quad (22)$$

Pretpostavimo li pak da je, kao na slici e., uzduž luka vrijednost sile  $q(s + ds)$  i da je pravac njezina djelovanja određen vektorom  $\vec{e}_q(s + ds)$ , infinitezimalna bi rezultanta bila

$$\begin{aligned} \vec{q}(s + ds) \|\vec{r}'(s)\| ds &= [\vec{q}(s) + \Delta\vec{q}(s, ds)] \|\vec{r}'(s)\| ds \\ &= \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds + \Delta\vec{q}(s, ds) \|\vec{r}'(s)\| ds. \end{aligned}$$

Ta se rezultanta od prethodne razlikuje za silu  $\Delta\vec{q}(s, ds) \|\vec{r}'(s)\| ds$ . Intenzitet je te razlike neizmjerljivo mali broj drugoga reda, jer su i  $ds$  i  $\|\Delta\vec{q}(s, ds)\|$  neizmjerljivo mali brojevi, a to pak znači da je razlika vrijednosti tih dviju rezultanata neizmjerljivo mala u odnosu na intenzitet jedne ili druge i da su pravci njihova djelovanja gotovo paralelni. Stvarna je infinitezimalna rezultanta po vrijednosti i po pravcu djelovanja „negdje između” naših dviju približnih rezultanata, pa je razlika između nje i približne rezultante dane izrazom (22) zanemariva. Drugim riječima, ako je funkcija  $\vec{q}$  neprekinuta u  $s$ , možemo uzeti da je infinitezimalna rezultanta dijela tom funkcijom zadane sile, koji djeluje na odsječku  $\Delta\vec{r}(s, ds)$ , definirana izrazom (22).

Budući da na odsječak  $\Delta\vec{r}(s, ds)$  osim netom izračunane rezultante pripadnoga dijela distribuirane sile djeluju i sile  $-\vec{Q}(s)$  i  $\vec{Q}(s + ds)$  u presjecima  $\mathbf{r}(s)$  i  $\mathbf{r}(s + ds)$  (slika 17.), prvi je uvjet ravnoteže tog odsjeka, iščezavanje zbroja svih sila koje na nj djeluju, izražen jednadžbom

$$-\vec{Q}(s) + \vec{Q}(s + ds) + \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0}. \quad (23)$$

Sila  $\vec{Q}(s + ds)$  jednaka je, prema slici 19., zbroju sile  $\vec{Q}(s)$  i prirasta  $\Delta\vec{Q}(s, ds)$  funkcije  $\vec{Q}$ ,

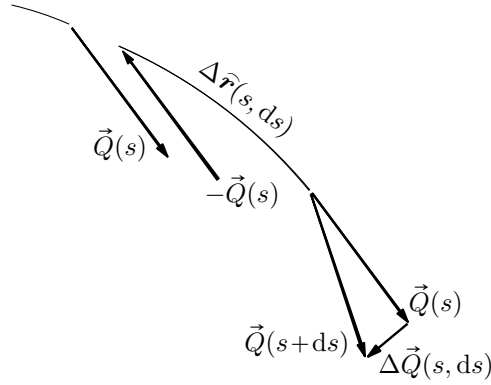
$$\vec{Q}(s + ds) = \vec{Q}(s) + \Delta\vec{Q}(s, ds),$$

pa prethodna jednadžba prelazi u

$$\Delta\vec{Q}(s, ds) + \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0}.$$

Zapišemo li tu jednadžbu u obliku

$$\Delta\vec{Q}(s, ds) = -\vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds,$$



Slika 19.

možemo zaključiti da prirast unutarnje sile mora po intenzitetu biti jednak rezultanti dijela vanjske sile na luku  $\Delta \vec{r}(s, ds)$  i imati suprotan smisao. Budući da je ta rezultanta infinitezimalna, i prirast će biti infinitezimalan, što znači da je funkcija  $\vec{Q}$  neprekidna u  $s$ , a kako  $s$  može biti bilo koja točka intervala  $[0, \ell_0]$ , funkcija je neprekidna na tom intervalu. Štoviše, može se pokazati da je funkcija  $\vec{Q}$  na  $[0, \ell_0]$  apsolutno neprekidna. Apsolutna neprekidnost „stroži” je oblik neprekidnosti: apsolutno neprekidna funkcija derivabilna je u gotovo svim točkama intervala na kojem je definirana; u našem je slučaju, zbog neprekidnosti funkcija  $\vec{q}$  i  $\|\vec{r}'\|$ , funkcija  $\vec{Q}$  derivabilna u svim točkama intervala  $[0, \ell_0]$ , a to pak znači da je na tom intervalu glatka. Njezin prirast  $\Delta \vec{Q}(s, ds)$  možemo, stoga, zamijeniti diferencijalom  $d\vec{Q}(s, ds)$ ,

$$\Delta \vec{Q}(s, ds) \cong d\vec{Q}(s, ds),$$

te je

$$d\vec{Q}(s, ds) + \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0}. \quad (24)$$

Uvrštavanje definicije diferencijala

$$d\vec{Q}(s, ds) = \vec{Q}'(s) ds \quad (25)$$

daje

$$\vec{Q}'(s) ds + \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0},$$

pa je, nakon dijeljenja sa  $ds$ ,

$$\vec{Q}'(s) + \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| = \vec{0}. \quad (26)$$

Funkcijom  $\vec{q}$  izražena je, rekosmo, distribuirana sila po jedinici duljine deformirane osi  $\mathbf{r}$  u konačnom, ravnotežnom stanju štapa. Funkcija  $\vec{q}$ , međutim, na početku proračuna ne mora biti poznata, nego može ovisiti o tada još nepoznatoj krivulji  $\mathbf{r}$ . Opterećenje je stoga često pogodnije zadati po jedinici duljine osi  $\mathbf{r}_0$  nedeformiranoga štapa (kakav je prikazan u projektu). To ne znači da se uzima da ono, suprotno pretpostavci, u trenutku počinje djelovati u punoj vrijednosti; riječ je tek o formalnu postupku — o preslikavanjima funkcije s deformirane na nedeformiranu os i obratno.

Jedan ćemo način preslikavanja uvesti primjerom. Vlastita je težina štapa po jedinici duljine nedeformirane osi zadana izrazom

$$\vec{q}_{g,0}(s) = \varrho_0(s)A_0(s)g\vec{k}$$

u kojemu  $g$  označava gravitacijsko ubrzanje, a funkcije  $A_0$  i  $\varrho_0$  opisuju površine poprečnih presjeka i gustoću gradiva uzduž osi nedeformiranoga štapa. (U tijeku građenja ta težina obično počiva na skeli. Nakon dovršenja skela se ne izmiče naglo, nego se polagano otpušta, tako da štap postupno, deformirajući se, preuzima vlastitu težinu.) Pri deformiranju se, naravno, težina štapa, kao ni pojedinih njegovih dijelova, pa ni infinitezimalnih, ne mijenja. Stoga, mijenja li se duljina osi, promijeniti se mora i funkcija koja opisuje vlastitu težinu.

Lučni odsječak  $\Delta\hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  odsječak je u koji pri pomicanju i deformiranju štapa prelazi infinitezimalni lučni odsječak  $\Delta\hat{\mathbf{r}}_0(s, ds)$  nedeformirane osi (slika 16. na stranici 38.). Jasno je da sve što smo rekli o odnosu odsječka  $\Delta\hat{\mathbf{r}}(s, ds)$ , tetive  $\Delta\vec{r}(s, ds)$  i diferencijala  $d\vec{r}(s, ds)$  vrijedi i za odnos odsječka  $\Delta\hat{\mathbf{r}}_0(s, ds)$ , tetive

$$\Delta\vec{r}_0(s, ds) = \vec{r}_0(s + ds) - \vec{r}_0(s)$$

i diferencijala

$$d\vec{r}_0(s, ds) = \vec{r}'_0(s) ds. \quad (27)$$

Kako je  $s$  prirodni parametar krivulje  $\mathbf{r}_0$ , odsječak  $\Delta\hat{\mathbf{r}}_0(s, ds)$  je duljine  $ds$ . Iz činjenice da je razlika  $\|d\vec{r}_0(s, ds)\| - \|\Delta\hat{\mathbf{r}}_0(s, ds)\|$  neizmjereno mala u odnosu na  $ds$  neposredno slijedi da možemo uzeti da je i diferencijal  $d\vec{r}_0(s, ds)$  duljine  $ds$ ,

$$\|d\vec{r}_0(s, ds)\| = ds, \quad (28)$$

odnosno, da je  $\|\vec{r}'_0(s)\| = 1$  za svaki  $s$ .

Tražena veza funkcija  $\vec{q}_{g,0}$  i  $\vec{q}_g$  kojima su opisane vlastite težine nedeformiranoga i deformiranog štapa slijedi iz zahtjeva da nedeformirani i deformirani infinitezimalni lučni odsječak imaju jednake težine:

$$\vec{q}_{g,0}(s) ds = \vec{q}_g(s) \|\vec{r}'(s)\| ds \quad \text{uz} \quad \vec{q}_g(s) = \varrho(s)A(s)g\vec{k}.$$

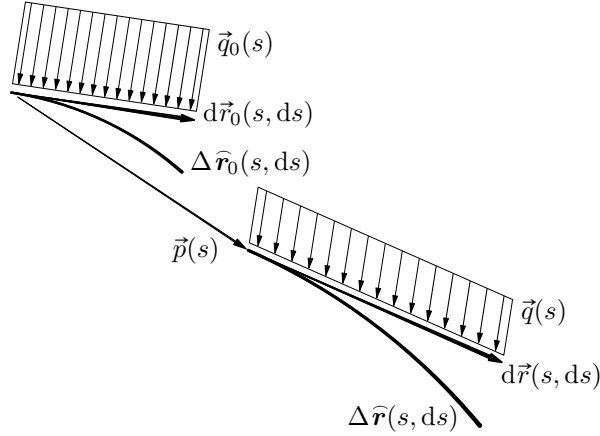
I za opću ćemo distribuiranu silu zahtijevati da bude tako definirana da na deformiranoj i na nedeformiranoj osi daje jednake infinitezimalne rezultante (slika 20.):

$$\vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{q}_0(s) ds; \quad (29)$$

slijedi da je

$$\vec{q}_0(s) = q_0(s)\vec{e}_q(s),$$

pri čemu je skalarnom funkcijom  $q_0$  dana vrijednost distribuirane sile po jedinici duljine osi  $\mathbf{r}_0$  nedeformiranoga štapa, a jedinični vektor  $\vec{e}_q(s)$  određuje pravce djelovanja sile  $\vec{q}_0(s)$  u točki  $\mathbf{r}_0(s)$  i sile  $\vec{q}(s)$  u točki  $\mathbf{r}(s)$ . (Očito je da se pretpostavljena neprekinutost u  $s$  prenosi i na funkciju  $\vec{q}_0$ .)



Slika 20.

Uvjet iščezavanja zbroja svih sila koje djeluju na odsječak  $\Delta \hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  možemo sada izraziti jednadžbom

$$-\vec{Q}(s) + \vec{Q}(s + ds) + \vec{q}_0(s) ds = \vec{0} \quad (30)$$

iz koje gotovo odmah slijedi

$$d\vec{Q}(s, ds) + \vec{q}_0(s) ds = \vec{0}, \quad (31)$$

ili, u drugom obliku,

$$\vec{Q}'(s) ds + \vec{q}_0(s) ds = \vec{0}$$

te je, na kraju,

$$\vec{Q}'(s) + \vec{q}_0(s) = \vec{0}. \quad (32)$$

Drugi je uvjet ravnoteže odsječka  $\Delta \hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  iščezavanje zbroja svih momenata, koncentriranih i distribuiranih, koji na nj djeluju i momenata svih sila, koncentriranih i distribuiranih, koje djeluju na nj, pri čemu se momenti tih sila mogu uzeti u odnosu na bilo koju točku; odabrat ćemo ishodište.

Izrazi za infinitezimalni rezultantni moment dijela distribuiranoga momenta  $\vec{m}$  koji djeluje na odsječku  $\Delta \hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  izvode se na način analogan izvodu izrazâ za rezultantu dijela distribuirane sile  $\vec{q}$ . I struktura je dobivenih izraza ista:

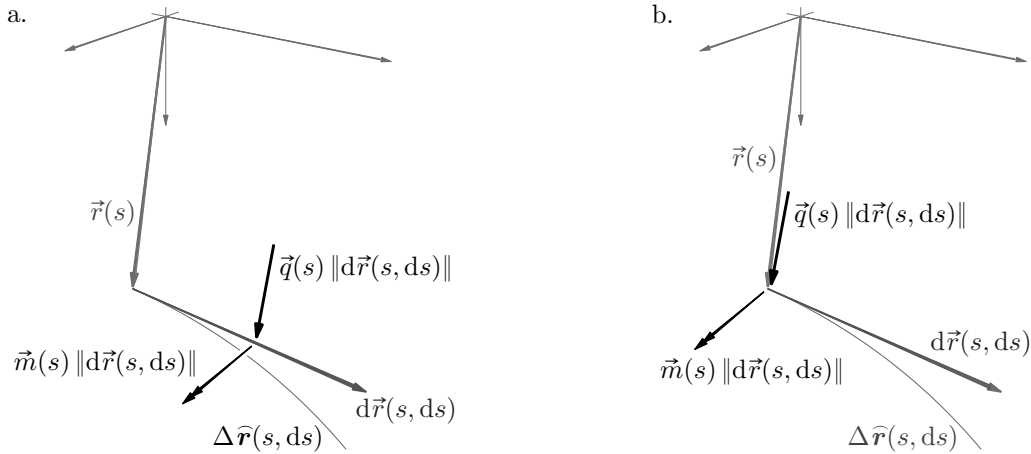
$$\vec{m}(s) \|d\vec{r}(s, ds)\| = \vec{m}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds \quad \text{i} \quad \vec{m}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{m}_0(s) ds,$$

pri čemu su

$$\vec{m}(s) = m(s) \vec{e}_m(s) \quad \text{i} \quad \vec{m}_0(s) = m_0(s) \vec{e}_m(s),$$

a skalarne funkcije  $m$  i  $m_0$  izražavaju vrijednosti distribuiranih momenata po jedinici duljine deformirane i nedeformirane osi, dok su njihovi pravci u pojedinim točkama tih osi u oba slučaja određeni vektorskom funkcijom  $\vec{e}_m$ ,  $\|\vec{e}_m(s)\| = 1$  za  $s \in [0, \ell_0]$ .

Infinitezimalnu rezultantu dijela distribuirane sile  $\vec{q}$  na odsječku  $\Delta \hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  izračunali smo pretpostavivši da je ta sila na odsječku konstanta po smjeru i po vrijednosti, zamijenivši uz to lučni odsječak diferencijalom  $d\vec{r}(s, ds)$ . Hvatište je te rezultante stoga



Slika 21.

u polovištu diferencijala (slika 21.a.). (Naravno, i hvatište je rezultantnoga momenta, izračunanog uz iste pretpostavke, u istoj točki. No, kako je moment „slobodni vektor”, možemo ga smjestiti u bilo koju točku.)

Infinitezimalni moment distribuirane sile koja djeluje na luku  $\Delta \hat{\mathbf{r}}(s, ds)$  u odnosu na ishodište izračunavamo kao moment njezine rezultante:

$$\begin{aligned} & [\vec{r}(s) + \frac{1}{2} d\vec{r}(s, ds)] \times [\vec{q}(s) \|d\vec{r}(s, ds)\|] \\ &= \vec{r}(s) \times [\vec{q}(s) \|d\vec{r}(s, ds)\|] + \frac{1}{2} d\vec{r}(s, ds) \times [\vec{q}(s) \|d\vec{r}(s, ds)\|]. \end{aligned}$$

Drugi član s desne strane, kao umnožak dvaju neizmjereno malih vektora, neizmjereno je mala veličina drugoga reda, tako da se u odnosu na prvi član može zanemariti. To u stvari znači da se hvatište rezultante može premjestiti u točku  $\mathbf{r}(s)$  (slika 21.b.), pa je u odnosu na ishodište njezin moment

$$\vec{r}(s) \times \vec{q}(s) \|d\vec{r}(s, ds)\| = \vec{r}(s) \times \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds, \quad (33)$$

odnosno, uz prikaz distribuirane sile po jedinici duljine nedeformirane osi,

$$\vec{r}(s) \times \vec{q}_0(s) ds. \quad (34)$$

Napokon, kako na promatrani odsječak (slika 17. na stranici 38.) u presjecima  $\mathbf{r}(s)$  i  $\mathbf{r}(s + ds)$  djeluju i sile  $-\vec{Q}(s)$  i  $\vec{Q}(s + ds)$ , u obzir treba uzeti i njihove momente (u odnosu na ishodište)

$$\vec{r}(s) \times [-\vec{Q}(s)] \quad \text{i} \quad \vec{r}(s + ds) \times \vec{Q}(s + ds),$$

a tu su još, u tim presjecima, i momenti  $-\vec{M}(s)$  i  $\vec{M}(s + ds)$ .

Drugi uvjet ravnoteže odsječka  $\Delta \hat{\mathbf{r}}(s, ds)$ , iščezavanje zbroja svih momenata, možemo sada izraziti jednadžbom

$$\begin{aligned} -\vec{M}(s) + \vec{M}(s + ds) - \vec{r}(s) \times \vec{Q}(s) + \vec{r}(s + ds) \times \vec{Q}(s + ds) \\ + \vec{m}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds + \vec{r}(s) \times \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0} \end{aligned} \quad (35)$$

ili jednadžbom

$$\begin{aligned} -\vec{M}(s) + \vec{M}(s + ds) - \vec{r}(s) \times \vec{Q}(s) + \vec{r}(s + ds) \times \vec{Q}(s + ds) \\ + \vec{m}_0(s) ds + \vec{r}(s) \times \vec{q}_0(s) ds = \vec{0}. \end{aligned} \quad (36)$$

Zamijenimo li, kao i prije, priraste funkcija diferencijalima,

$$\begin{aligned} \vec{M}(s + ds) &= \vec{M}(s) + \Delta\vec{M}(s, ds) \cong \vec{M}(s) + d\vec{M}(s, ds), \\ \vec{Q}(s + ds) &= \vec{Q}(s) + \Delta\vec{Q}(s, ds) \cong \vec{Q}(s) + d\vec{Q}(s, ds), \\ \vec{r}(s + ds) &= \vec{r}(s) + \Delta\vec{r}(s, ds) \cong \vec{r}(s) + d\vec{r}(s, ds), \end{aligned}$$

nakon sređivanja i zanemarivanja članova koji sadrže umnoške neizmjereno malih veličina, dobit ćemo

$$\begin{aligned} d\vec{M}(s, ds) + d\vec{r}(s, ds) \times \vec{Q}(s) + \vec{m}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds \\ + \vec{r}(s) \times [d\vec{Q}(s, ds) + \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds] = \vec{0} \end{aligned}$$

i

$$d\vec{M}(s, ds) + d\vec{r}(s, ds) \times \vec{Q}(s) + \vec{m}_0(s) ds + \vec{r}(s) \times [d\vec{Q}(s, ds) + \vec{q}_0(s) ds] = \vec{0}.$$

Kako su podizrazi u uglatim zagradama lijeve strane jednadžbi (24) i (31) koja izražavaju iščezavanje zbroja sila, slijedi

$$d\vec{M}(s, ds) + d\vec{r}(s, ds) \times \vec{Q}(s) + \vec{m}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0} \quad (37)$$

i

$$d\vec{M}(s, ds) + d\vec{r}(s, ds) \times \vec{Q}(s) + \vec{m}_0(s) ds = \vec{0}. \quad (38)$$

[Znamo da se momenti koncentriranih i distribuiranih sila mogu uzeti u odnosu na bilo koju točku. Pokažite da se jednadžba (38) može izvesti i iz uvjeta ravnoteže momenata oko točke  $\mathbf{r}(s)$  ili oko točke  $\mathbf{r}(s + ds)$ !]

Ako još u prethodne jednadžbe uvrstimo definicije diferencijala (20) na stranici 39. i diferencijala

$$d\vec{M}(s, ds) = \vec{M}'(s) ds, \quad (39)$$

dobit ćemo diferencijalne jednadžbe

$$\vec{M}'(s) + \vec{r}'(s) \times \vec{Q}(s) + \vec{m}(s) \|\vec{r}'(s)\| = \vec{0} \quad (40)$$

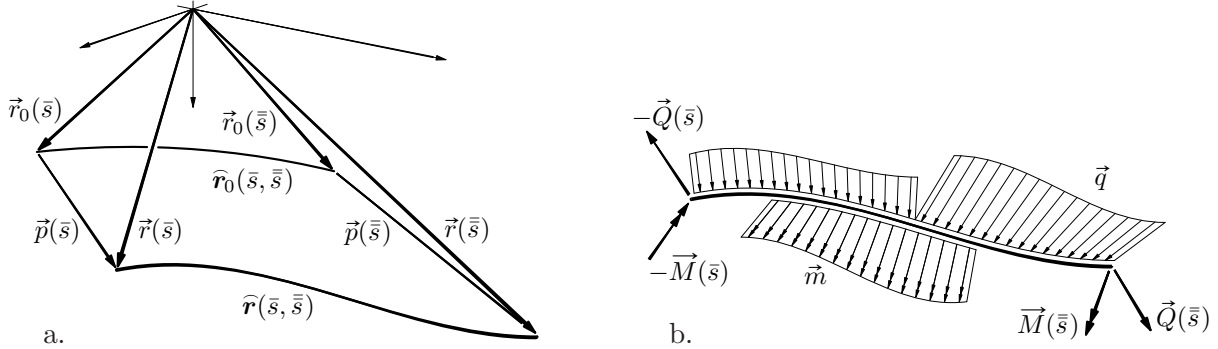
i

$$\vec{M}'(s) + \vec{r}'(s) \times \vec{Q}(s) + \vec{m}_0(s) = \vec{0}. \quad (41)$$

Jednadžbe (26) i (40) te (32) i (41) nazivamo *jednadžbama ravnoteže štapa u diferencijalnom obliku* ili *diferencijalnim jednadžbama ravnoteže štapa*.

### 3.3. Integralni oblik jednadžbi ravnoteže

„Izrezat” ćemo sada iz štapa lučni odsječak konačne duljine između točaka s materijalnim koordinatama  $\bar{s}$  i  $\bar{\bar{s}}$ ,  $\bar{s} < \bar{\bar{s}}$ . Često će biti  $\bar{s} = 0$ , što znači da ćemo izdvojiti dio od početka štapa do odabranoga presjeka  $\bar{\bar{s}}$ ; katkad je pak pogodnije izdvojiti dio od nekog presjeka  $\bar{s}$  do kraja štapa, pa će tada biti  $\bar{\bar{s}} = \ell_0$ . U neopterećenom stanju materijalne točke  $\bar{s}$  i  $\bar{\bar{s}}$  leže u prostornim točkama  $\mathbf{r}_0(\bar{s})$  i  $\mathbf{r}_0(\bar{\bar{s}})$ , a nakon nanošenja opterećenja, u ravnotežnome stanju, u prostornim točkama  $\mathbf{r}(\bar{s})$  i  $\mathbf{r}(\bar{\bar{s}})$ . Kao što slika 22.a. prikazuje, neopterećeni luk  $\widehat{\mathbf{r}}_0(\bar{s}, \bar{\bar{s}})$  prelazi u uravnoteženi luk  $\widehat{\mathbf{r}}(\bar{s}, \bar{\bar{s}})$ .



Slika 22.

Na luk  $\widehat{\mathbf{r}}(\bar{s}, \bar{\bar{s}})$  djeluju koncentrirane sile  $-\vec{Q}(\bar{s})$  i  $\vec{Q}(\bar{\bar{s}})$  i koncentrirani momenti  $-\vec{M}(\bar{s})$  i  $\vec{M}(\bar{\bar{s}})$  u krajnjim presjecima te, po njegovoj duljini, distribuirana sila  $\vec{q}$  i distribuirani moment  $\vec{m}$  (slika 22.b.).

Prvi uvjet ravnoteže luka  $\widehat{\mathbf{r}}(\bar{s}, \bar{\bar{s}})$  zahtijeva sada iščezavanje zbroja koncentriranih sila  $-\vec{Q}(\bar{s})$  i  $\vec{Q}(\bar{\bar{s}})$  i rezultante distribuirane sile  $\vec{q}$ . Kako bismo izračunali tu rezultantu, podijelit ćemo luk  $\widehat{\mathbf{r}}(\bar{s}, \bar{\bar{s}})$  na bezbrojno mnogo neizmjereno malih odsječaka  $\Delta\widehat{\mathbf{r}}(s, ds)$ . U prethodnom smo odjeljku pokazali da je na svakome od njih infinitezimalna rezultanta pripadnoga dijela sile  $\vec{q}$  određena izrazima

$$\vec{q}(s) \|\widehat{\mathbf{r}}'(s)\| ds \quad \text{ili} \quad \vec{q}_0(s) ds,$$

gdje funkcija  $\vec{q}_0$  iskazuje silu  $\vec{q}$  preslikanu na nedeformiranu os. Kao što zbroj konačnoga broja sila konačnih intenziteta daje njihovu rezultatnu, tako ćemo i traženu rezultatnu dobiti zbrajanjem, ali sada svih naših bezbrojno mnogo infinitezimalnih rezultanata. Međutim, da bi takva rezultanta bilo „dobro definirana”, moraju biti zadovoljena dva uvjeta. Ponajprije, „beskonačni” zbroj mora dati vektor konačne duljine. Uz to, ni duljina toga vektora, ni pravac na kojemu leži, ni njegova orijentacija ne smiju ovisiti o načinu podjele luka  $\widehat{\mathbf{r}}(\bar{s}, \bar{\bar{s}})$  na infinitezimalne odsječke — kako god luk podijelili na odsječke, uvijek moramo dobiti isti vektor. Ako su ta dva uvjeta ispunjena, zbroj se naziva (određenim Riemannovim) integralom, pa je rezultanta formalno dana izrazima

$$\int_{\bar{s}}^{\bar{\bar{s}}} \vec{q}(s) \|\widehat{\mathbf{r}}'(s)\| ds \quad \text{i} \quad \int_{\bar{s}}^{\bar{\bar{s}}} \vec{q}_0(s) ds. \quad (42)$$



Integriranje je, kažu, postupak koji oprašta i zaboravlja. Izraze za infinitezimalnu rezultantu sile  $\vec{q}$  na odsječku  $\Delta\vec{r}(s, ds)$  „izveli” smo, naime, uz pretpostavku da su funkcije  $\vec{q}$  i, posredno,  $\vec{q}_0$  neprekinute u  $s$ , no tu, poprilično strogu pretpostavku možemo sada „oslabiti” i uzeti da su funkcija  $\vec{q}$ , kao na slici 22.b., i preslikana funkcija  $\vec{q}_0$ , tek *po dijelovima neprekinute*, što znači da su neprekinute svuda osim u konačno mnogo točaka segmenta  $[0, \ell_0]$ , u kojima smiju imati konačne skokove. (Time nismo obuhvatili sve integrabilne funkcije, ali je skup po dijelovima neprekinutih funkcija dovoljno bogat za naše potrebe . . . barem zasad — koncentrirana djelovanja ostaju priča za sebe.)

Pribrojimo li rezultanti distribuirane sile sile  $-\vec{Q}(\bar{s})$  i  $\vec{Q}(\bar{s})$  koje djeluju u krajnjim presjecima, zbroj mora, ako je odsječak u ravnoteži, iščeznuti:

$$-\vec{Q}(\bar{s}) + \vec{Q}(\bar{s}) + \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0}, \quad (43)$$

odnosno,

$$-\vec{Q}(\bar{s}) + \vec{Q}(\bar{s}) + \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} \vec{q}_0(s) ds = \vec{0}. \quad (44)$$

No, kao što sada već dobro znamo, da bi odsječak  $\vec{r}(\bar{s}, \bar{s})$  bio u ravnoteži, osim zbroja svih sila iščeznuti mora i zbroj svih momenata i momenata svih sila u odnosu na po volji odabranu točku. Odaberemo li ishodište, momenti sila u krajnjim presjecima su

$$-\vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}) \quad \text{i} \quad \vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}),$$

dok su formalni izrazi za rezultatni moment dijela distribuirane sile koji djeluje na luku

$$\int_{\bar{s}}^{\bar{s}} \vec{r}(s) \times \vec{q}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds \quad \text{ili} \quad \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} \vec{r}(s) \times \vec{q}_0(s) ds. \quad (45)$$

Njihov je „izvod” analogan izvodu izrazâ za rezultantu distribuirane sile, a na isti način dobivamo i formalne izraze za rezultatni moment odgovarajućega dijela distribuiranog momenta:

$$\int_{\bar{s}}^{\bar{s}} \vec{m}(s) \|\vec{r}'(s)\| ds \quad \text{ili} \quad \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} \vec{m}_0(s) ds.$$

Uvjet iščezavanja zbroja svih momenata možemo sada izraziti jednadžbama

$$\begin{aligned} -\vec{M}(\bar{s}) + \vec{M}(\bar{s}) - \vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}) + \vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}) \\ + \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} [\vec{r}(s) \times \vec{q}(s) + \vec{m}(s)] \|\vec{r}'(s)\| ds = \vec{0} \end{aligned} \quad (46)$$

ili

$$\begin{aligned} -\vec{M}(\bar{s}) + \vec{M}(\bar{s}) - \vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}) + \vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}) \\ + \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} [\vec{r}(s) \times \vec{q}_0(s) + \vec{m}_0(s)] ds = \vec{0}. \end{aligned} \quad (47)$$

Jednadžbe (43) i (46) te (44) i (47) nazivamo *jednadžbama ravnoteže štapa u integralnom obliku* ili *integralnim jednadžbama ravnoteže štapa*.

Ako je sila  $-\vec{Q}(\bar{s})$  poznata, iz jednadžbe (44) neposredno slijedi izraz za izračunavanje sile  $\vec{Q}(\bar{s})$ :

$$\vec{Q}(\bar{s}) = \vec{Q}(\bar{s}) - \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} \vec{q}_0(s) ds. \quad (48)$$

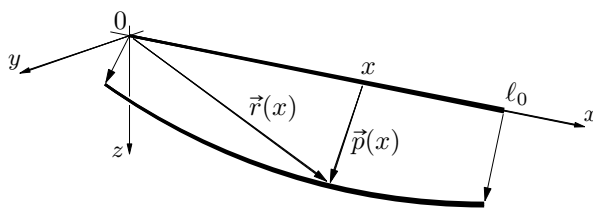
Ako je poznat i moment  $-\vec{M}(\bar{s})$ , moment  $\vec{M}(\bar{s})$  možemo izračunati prema izrazu izvedenom iz jednadžbe (47):

$$\begin{aligned} \vec{M}(\bar{s}) = \vec{M}(\bar{s}) + \vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}) - \vec{r}(\bar{s}) \times \vec{Q}(\bar{s}) \\ - \int_{\bar{s}}^{\bar{s}} [\vec{r}(s) \times \vec{q}_0(s) + \vec{m}_0(s)] ds. \end{aligned} \quad (49)$$

Naravno, na jednak način možemo primijeniti i jednadžbe (43) i (46).

### 3.4. Linearizacija jednadžbi ravnoteže za ravan štap

Neopterećen ravan štap duljine  $\ell_0$  možemo smjestiti u koordinatni sustav tako da se segment  $[0, \ell_0]$  na osi  $x$  poklapa s osi štapa, zamjenjujući pritom parametar  $s$  apscisom  $x$  (slika 23.). Tada su  $\vec{r}_0(x) = x\vec{i}$  i  $\vec{r}(x) = x\vec{i} + \vec{p}(x)$ .



Slika 23.

Integralne jednadžbe ravnoteže ravnoga odsječka  $\vec{r}_0(\bar{x}, \bar{x})$  za  $0 \leq \bar{x} < \bar{x} \leq \ell_0$  dobivamo iz jednadžbi (44) i (47) jednostavnom zamjenom varijabli  $s$  i  $ds$  varijablama  $x$  i  $dx$ :

$$\vec{Q}(\bar{x}) - \vec{Q}(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} \vec{q}_0(x) dx = \vec{0}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}(\bar{x}) - \vec{M}(\bar{x}) + \vec{r}(\bar{x}) \times \vec{Q}(\bar{x}) - \vec{r}(\bar{x}) \times \vec{Q}(\bar{x}) \\ + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} [\vec{r}(x) \times \vec{q}_0(x) + \vec{m}_0(x)] dx = \vec{0}. \end{aligned} \quad (51)$$

Isto tako, kako su sada sve funkcije funkcije apscise  $x$ , u diferencijalnim jednadžbama ravnoteže ' označava derivaciju po  $x$ :

$$\vec{Q}'(x) + \vec{q}_0(x) = \vec{0}, \quad (52)$$

$$\vec{M}'(x) + \vec{r}'(x) \times \vec{Q}(x) + \vec{m}_0(x) = \vec{0}. \quad (53)$$

Pretpostavka da su „pomaci mali” znači da su njihove duljine „mnogo manje” od duljine štapa:

$$\|\vec{p}(x)\| \ll \ell_0. \quad (54)$$

Kako su duljine radijus–vektora pojedinih točaka štapa „istoga reda veličine” kao i duljina štapa, pretpostavku o malim pomacima možemo iskazati i u obliku

$$\|\vec{p}(x)\| \ll \|\vec{r}_0(x)\|, \quad (55)$$

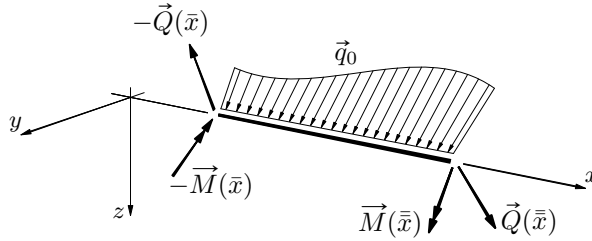
te slijedi

$$\vec{r}(x) = \vec{r}_0(x) + \vec{p}(x) \approx \vec{r}_0(x). \quad (56)$$

Uvjete ravnoteže možemo stoga postaviti na nedeformiranom odsječku (slika 24.) te u jednadžbama (50) i (51) umjesto  $\vec{r}$  pisati  $\vec{r}_0$ . Uz  $\vec{r}_0(x) = x\vec{i}$ , *linearizirane su integralne jednadžbe ravnoteže ravnoga štapa*:

$$\vec{Q}(\bar{x}) - \vec{Q}(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} \vec{q}_0(x) dx = \vec{0}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}(\bar{x}) - \vec{M}(\bar{x}) + \bar{x}\vec{i} \times \vec{Q}(\bar{x}) - \bar{x}\vec{i} \times \vec{Q}(\bar{x}) \\ + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} [x\vec{i} \times \vec{q}_0(x) + \vec{m}_0(x)] dx = \vec{0}. \end{aligned} \quad (58)$$



Slika 24.

Kako je na temelju pretpostavke o malim pomacima  $\vec{r}(x) \approx \vec{r}_0(x) = x\vec{i}$ , bit će

$$\vec{r}'(x) \approx \vec{r}'_0(x) = \vec{i}, \quad (59)$$

pa su *linearizirane diferencijalne jednadžbe ravnoteže ravnoga štapa*:

$$\vec{Q}'(x) + \vec{q}_0(x) = \vec{0}, \quad (60)$$

$$\vec{M}'(x) + \vec{i} \times \vec{Q}(x) + \vec{m}_0(x) = \vec{0}. \quad (61)$$

Unutanje sile u nekom presjeku rastavljaju se u komponente na pogodno odabranim pravcima; orijentiraju li se pravci, komponente su određene svojim skalarnim vrijednostima.

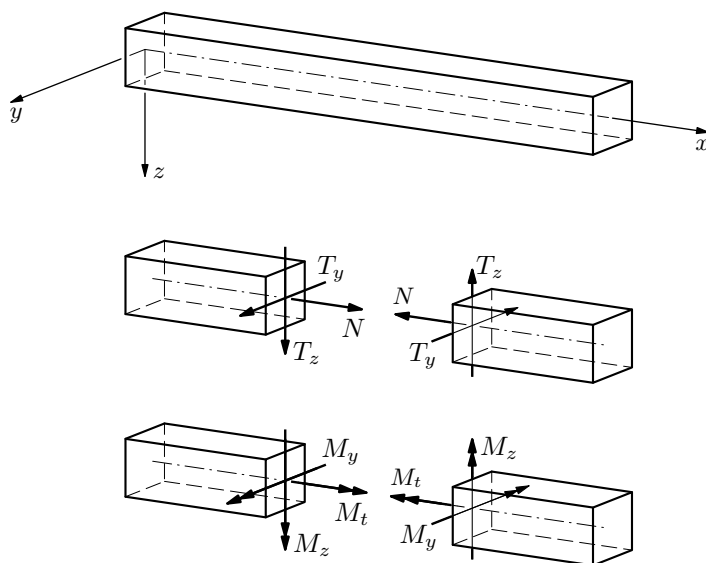
Rezultirajuću sila i rezultirajući moment unutarnjih plošnih sila u poprečnom presjeku rastavljamo u komponente usporedne s koordinatnim osima:

*uzdužna sila*, s vrijednošću  $N$ , komponenta je rezultirajuće sile koja leži na osi štapa, pa je okomita na ravninu poprečnoga presjeka; pozitivnom se, kao na drugom crtežu slike 25., uzima vlačna sila čiji je vektor orijentiran kao vanjska normala na ravninu poprečnoga presjeka;

*poprečne sile*, s vrijednostima  $T_y$  i  $T_z$ , komponente su rezultirajuće sile koje leže u ravnini poprečnoga presjeka, usporedne s osima  $y$  i  $z$ ; na strani presjeka čija je vanjska normala orijentirana kao os  $x$  (pozitivno orijentirana normala) pozitivnima se uzimaju sile orijentirane kao osi  $y$  i  $z$ , a na strani sa suprotno (negativno) orijentiranom normalom suprotno orijentirane sile (drugi crtež slike 25.);

*momenti savijanja*, s vrijednostima  $M_y$  i  $M_z$ , komponente su rezultirajućega momenta u poprečnom presjeku koje su usporedne s osima  $y$  i  $z$ , što znači da je riječ o momentima oko osi u ravnini presjeka, usporednih s osima  $y$  i  $z$  i, stoga, okomitih na os štapa, tako da savijaju ravnu os u krivulju; na strani presjeka čija je vanjska normala pozitivno orijentirana pozitivnima se uzimaju momenti orijentirani kao osi, a na strani s negativno orijentiranom normalom suprotno orijentirani momenti (treći crtež slike 25.);

*torzijski moment* ili *moment uvijanja*, s vrijednošću  $M_t$ , komponenta je rezultirajućega momenta koja leži na osi štapa, odnosno moment oko te osi, moment, dakle, koji pokušava zaokrenuti poprečni presjek u njegovoj ravnini; pozitivnim se uzima moment vektor kojega je orijentiran kao vanjska normala na ravninu poprečnoga presjeka (treći crtež slike 25.).



Slika 25.

Da bi terminološka zbrka bila potpuna, i komponente se unutarnjih sila, vektorske i skalarne, nazivaju, jednostavno i sažeto, unutarnjim silama.

(Ako je os štapa zakrivljena, u svakoj njezinoj točki uvodimo lokalni koordinatni sustav tako da se prva os tog sustava poklapa s tangentom na os štapa u toj točki.

Uzdužna sila i moment torzije na toj su osi, a poprečne sile i momenti savijanja leže u ravnini poprečnoga presjeka.)

Na slici 25. primijenili smo *tehnički način obilježavanja vektora* sila i momenata. Desni dio štapa djeluje na lijevi silom koja ima jednaki intezitet kao sila kojom lijevi dio djeluje na desni, ali joj je smisao djelovanja suprotan. Stoga su odgovarajuće komponente sila i momenata na lijevom i desnom dijelu prikazane suprotno orijentiranim strelicama (ali jednakih duljina). U vektorskom načinu obilježavanja jedna je od, primjerice, uzdužnih sila  $\vec{N}$ , dok je druga  $-\vec{N}$ . Na slici su, međutim, obje strelice koje prikazuju uzdužne sile obilježene s  $N$ . Slovo bez strelice povrh oznaka je vrijednosti sile; ako je konkretna brojčana vrijednost pozitivna, sila je orijentirana kao strelica kojom je prikazana, a ako je ta vrijednost negativna, orijentacija je sile suprotna. (Navodi li se uz prikaz sile konkretan broj, on ne smije biti negativan. Treba (na novom crtežu) promijeniti orijentaciju sile i uz nju upisati pozitivan broj.) Tehnički je način obilježavanja prikladan za označavanje unutarnjih sila, jer obje sile koje tvore jedno međudjelovanje obilježavamo istom oznakom, ali ćemo ga upotrebljavati i za „samostalne” sile i momente. U tekstu ćemo pak pokatkada, da istaknemo da je riječ o paru međusobno uravnotežih sila, unutarnje sile označavati s  $\pm\vec{N}$ ,  $\pm\vec{T}$ , ... Ovisno o kontekstu,  $\pm\vec{N}$  može označavati par suprotno orijentiranih sila jednakih intenziteta (iako ćemo govoriti o uzdužnoj sili (u jedinici)) ili, izdvojimo li dio nosača, jednu od tih sila, pri čemu neće biti bitno djeluje li na taj dio sila  $\vec{N}$  ili sila  $-\vec{N}$ ; bitno će biti je li sila vlačna ili tlačna, a sila je vlačna u odnosu na oba dijela ili je u odnosu na oba dijela tlačna.

Uz rastav sile u presjeku u komponente prema slici 25.,

$$\vec{Q}(x) = N(x) \vec{i} + T_y(x) \vec{j} + T_z(x) \vec{k},$$

i uz odgovarajući rastav zadane distribuirane sile,

$$\vec{q}_0(x) = q_{0,x}(x) \vec{i} + q_{0,y}(x) \vec{j} + q_{0,z}(x) \vec{k},$$

integralna jednadžba ravnoteže sila (57) nakon sređivanja prelazi u

$$\begin{aligned} \left[ N(\bar{x}) - N(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,x}(x) dx \right] \vec{i} + \left[ T_y(\bar{x}) - T_y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,y}(x) dx \right] \vec{j} \\ + \left[ T_z(\bar{x}) - T_z(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,z}(x) dx \right] \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Da bi ta vektorska jednadžba bila zadovoljena, iščeznuti mora svaka komponenta zasebice, pa su *kanonske skalarne linearne integralne jednadžbe ravnoteže sila*

$$N(\bar{x}) - N(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,x}(x) dx = 0, \quad (62)$$

$$T_y(\bar{x}) - T_y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,y}(x) dx = 0, \quad (63)$$

$$T_z(\bar{x}) - T_z(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,z}(x) dx = 0. \quad (64)$$

Nakon rastava momenta u presjeku (slika 25.) i vanjskoga distribuiranog momenta u komponente,

$$\vec{M}(x) = M_t(x) \vec{i} + M_y(x) \vec{j} + M_z(x) \vec{k},$$

$$\vec{m}_0(x) = m_{0,t}(x) \vec{i} + m_{0,y}(x) \vec{j} + m_{0,z}(x) \vec{k},$$

te uz

$$x \vec{i} \times \vec{Q}(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & 0 & 0 \\ N(x) & T_y(x) & T_z(x) \end{vmatrix} = -x T_z(x) \vec{j} + x T_y(x) \vec{k}$$

i

$$x \vec{i} \times \vec{q}_0(x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & 0 & 0 \\ q_{0,x}(x) & q_{0,y}(x) & q_{0,z}(x) \end{vmatrix} = -x q_{0,z}(x) \vec{j} + x q_{0,y}(x) \vec{k},$$

možemo na sličan način iz vektorske jednadžbe (58) „izvesti“ *kanonske skalarne linearne integralne jednadžbe ravnoteže momenata*:

$$M_t(\bar{x}) - M_t(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} m_{0,t}(x) dx = 0, \quad (65)$$

$$M_y(\bar{x}) - M_y(\bar{x}) - \bar{x} T_z(\bar{x}) + \bar{x} T_z(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} [-x q_{0,z}(x) + m_{0,y}(x)] dx = 0, \quad (66)$$

$$M_z(\bar{x}) - M_z(\bar{x}) + \bar{x} T_y(\bar{x}) - \bar{x} T_y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} [x q_{0,y}(x) + m_{0,z}(x)] dx = 0. \quad (67)$$

I analogno, iz vektorskih diferencijalnih jednadžbi (60) i (61) rastavom u komponente dobivamo sustav *kanonskih skalarnih linearnih diferencijalnih jednadžbi ravnoteže*:

$$N'(x) + q_{0,x}(x) = 0, \quad (68)$$

$$T_y'(x) + q_{0,y}(x) = 0, \quad (69)$$

$$T_z'(x) + q_{0,z}(x) = 0, \quad (70)$$

$$M_t'(x) + m_{0,t}(x) = 0, \quad (71)$$

$$M_y'(x) - T_z(x) + m_{0,y}(x) = 0, \quad (72)$$

$$M_z'(x) + T_y(x) + m_{0,z}(x) = 0. \quad (73)$$

Iz jednadžbi (68)–(70) neposredno slijede *diferencijalne veze* sila u presjeku i zadanih distribuiranih sila:

$$N'(x) = -q_{0,x}(x), \quad (74)$$

$$T_y'(x) = -q_{0,y}(x), \quad (75)$$

$$T_z'(x) = -q_{0,z}(x). \quad (76)$$

Ako je  $\vec{m}_0 = \vec{0}$ , diferencijalne su jednađbe ravnoteže momenata:

$$M'_t(x) = 0, \quad (77)$$

$$M'_y(x) - T_z(x) = 0, \quad (78)$$

$$M'_z(x) + T_y(x) = 0. \quad (79)$$

Deriviranjem jednađbi (78) i (79) po  $x$  te, potom, uvrštavanjem (76) i (75) dobivamo:

$$M''_y(x) + q_{0,z}(x) = 0, \quad (80)$$

$$M''_z(x) - q_{0,y}(x) = 0. \quad (81)$$

Diferencijalne su veze momenata savijanja i poprečnih sila te momenata savijanja i distribuiranih sila koje djeluju okomito na os štapa, prema tome:

$$M'_y(x) = T_z(x), \quad (82)$$

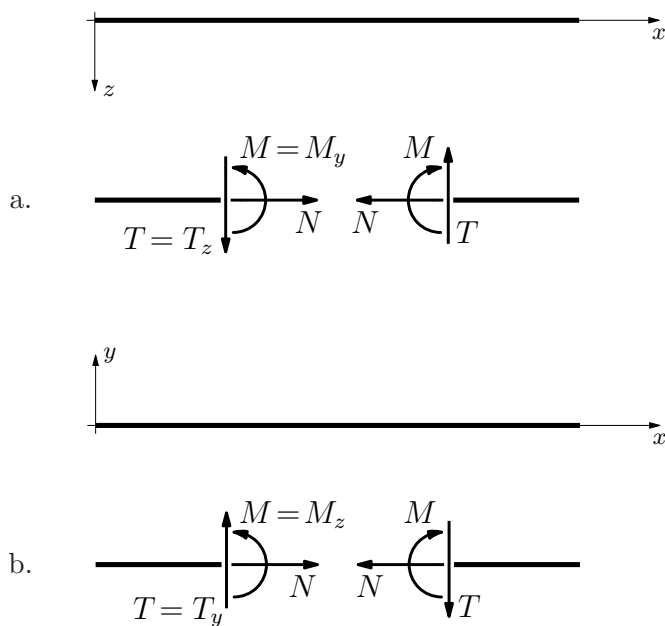
$$M''_y(x) = -q_{0,z}(x), \quad (83)$$

$$M'_z(x) = -T_y(x), \quad (84)$$

$$M''_z(x) = q_{0,y}(x). \quad (85)$$

### 3.4.1. Ravan štap u ravnini

Odaberemo li za ravninu ravninske štapne konstrukcije ravninu  $xz$ , u poprečnim presjecima „preostaju” unutarnje sile prikazane na slici 26.a.; odaberemo li pak ravninu  $xy$ , ostatak će sile sa slike b.



Slika 26.



U ravnini  $xz$  kanonske su integralne jednadžbe

$$N(\bar{x}) - N(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,x}(x) dx = 0, \quad (86)$$

$$T_z(\bar{x}) - T_z(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,z}(x) dx = 0, \quad (87)$$

$$\begin{aligned} M_y(\bar{x}) - M_y(\bar{x}) - \bar{x} T_z(\bar{x}) + \bar{x} T_z(\bar{x}) \\ + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} [-x q_{0,z}(x) + m_{0,y}(x)] dx = 0, \end{aligned} \quad (88)$$

dok su kanonske diferencijalne jednadžbe

$$N'(x) + q_{0,x}(x) = 0, \quad (89)$$

$$T'_z(x) + q_{0,z}(x) = 0, \quad (90)$$

$$M'_y(x) - T_z(x) + m_{0,y}(x) = 0 \quad (91)$$

te

$$M''_y(x) + q_{0,z}(x) = 0. \quad (92)$$

U ravnini pak  $xy$  integralne su jednadžbe

$$N(\bar{x}) - N(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,x}(x) dx = 0, \quad (93)$$

$$T_y(\bar{x}) - T_y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} q_{0,y}(x) dx = 0, \quad (94)$$

$$\begin{aligned} M_z(\bar{x}) - M_z(\bar{x}) + \bar{x} T_y(\bar{x}) - \bar{x} T_y(\bar{x}) \\ + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} [x q_{0,y}(x) + m_{0,z}(x)] dx = 0, \end{aligned} \quad (95)$$

dok su diferencijalne jednadžbe

$$N'(x) + q_{0,x}(x) = 0, \quad (96)$$

$$T'_y(x) + q_{0,y}(x) = 0, \quad (97)$$

$$M'_z(x) + T_y(x) + m_{0,z}(x) = 0 \quad (98)$$

te

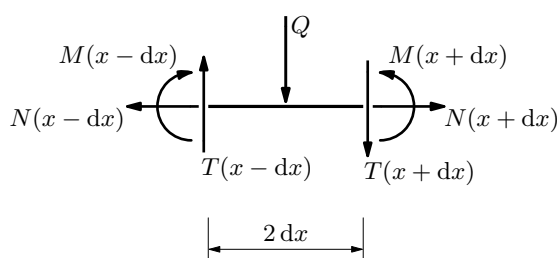
$$M''_z(x) - q_{0,y}(x) = 0. \quad (99)$$

### 3.5. Utjecaj koncentriranih djelovanja

Koncentrirana djelovanja narušavaju glatkost funkcija koje opisuju unutarnje sile, pa se ne mogu obraditi postupcima matematičke analize koje smo primijenili u prethodnim odjeljcima<sup>11</sup>.

Djeluju li na štap koncentrirane sile ili momenti, podijelit ćemo ga na odsječke između hvatišta tih koncentriranih djelovanja. Ravnotežu tih odsječaka opisuju izvedene diferencijalne i integralne jednadžbe.

Izdvojit ćemo infinitezimalan odsječak štapa duljine  $2 dx$  u polovištu kojega je hvatište koncentrirane sile  $\bar{Q}$  koja djeluje okomito na os štapa (slika 27.). (Izvide ćemo provesti za ravan štap u ravnini  $xz$ . [Izvedite odgovarajuće izraze za štap u ravnini  $xy$  te za štap u prostoru!])



Slika 27.

Budući da je daljina odsječaka neizmjereno malena, rezultante distribuiranih sila koje djeluju na odsječku,  $q_{0,x}(x) \cdot 2 dx$  i  $q_{0,z}(x) \cdot 2 dx$ , bit će neizmjereno male veličine i stoga zanemarive u odnosu na konačne veličine ostalih sila koje djeluju na odsječak (pa na slici 27. nisu ni prikazane).

Jednadžba ravnoteže projekcije sila na os štapa,

$$-N(x - dx) + N(x + dx) = 0,$$

daje

$$N(x - dx) = N(x + dx) = N(x), \quad (100)$$

što znači da se vrijednost uzdužne sile pri prijelazu preko hvatišta koncentrirane sile okomite na os ne mijenja. Jednadžba pak ravnoteže projekcije sila na os okomitu na os štapa,

$$-T(x - dx) + Q + T(x + dx) = 0,$$

daje

$$T(x + dx) = T(x - dx) - Q, \quad (101)$$

<sup>11</sup> U „višoj” je analizi uključivanje singulariteta omogućeno uvođenjem Diracove  $\delta$ -funkcije, koja je poopćenje pojma funkcije u klasičnom smislu. Ta funkcija iščezava u svim točkama realne osi osim u ishodištu u kojem joj je vrijednost neizmjerena, dok joj je integral jednak jedan nad realnom osi i na nad bilo kojim odsječkom realne sile koji sadrži ishodište.

pa zaključujemo da se vrijednost poprečne sile pri prijelazu preko hvatišta sile okomite na os mijenja za vrijednost te sile. Možemo reći i da je „skok” vrijednosti poprečne sile jednak (negativnoj) vrijednosti vanjske sile:

$$T(x + dx) - T(x - dx) = -Q. \quad (102)$$

Kao što smo zbog neizmjereno male duljine odsječka smjeli zanemariti rezultante distribuiranih sila, tako smijemo zanemariti i momente sile  $\bar{Q}$  i poprečne sile u lijevom presjeku u odnosu na težište desnoga presjeka,

$$dx \cdot Q \cong 0 \quad \text{i} \quad 2 dx \cdot T(x - dx) \cong 0,$$

pa iz jednadžbe ravnoteže momenata,

$$-M(x - dx) + M(x + dx) = 0,$$

slijedi

$$M(x - dx) = M(x + dx) = M(x); \quad (103)$$

dakle, vrijednost se momenta savijanja pri prijelazu preko hvatišta sile ne mijenja.

Ako se pravac djelovanja koncentrirane sile poklapa s osi štapa [skicirajte!], na sličan ćemo način [napišite jednadžbe ravnoteže!] dobiti

$$N(x + dx) - N(x - dx) = -Q, \quad (104)$$

$$T(x - dx) = T(x + dx) = T(x), \quad (105)$$

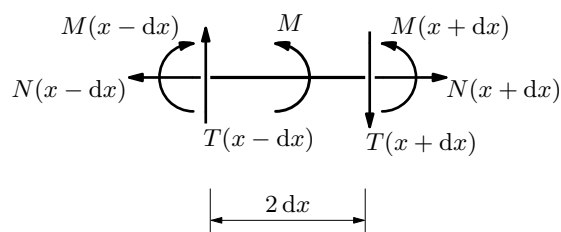
$$M(x - dx) = M(x + dx) = M(x). \quad (106)$$

Djeluje li pak na odsječku umjesto koncentrirane sile koncentrirani moment (slika 28.), iz jednadžbi ravnoteže [napišite ih!] slijedi

$$N(x - dx) = N(x + dx) = N(x), \quad (107)$$

$$T(x - dx) = T(x + dx) = T(x), \quad (108)$$

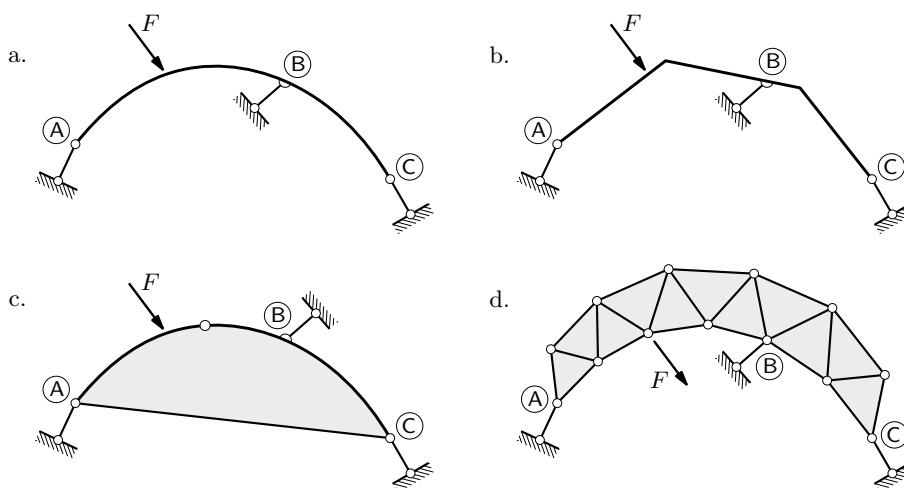
$$M(x + dx) - M(x - dx) = -M(x). \quad (109)$$



Slika 28.

## 4. Statički određeni nosači s jednim punostjenim diskom

Diskom nazivamo dio ravninskoga konstrukcijskog sistema koji, izdvojen, ostaje „iznutra” geometrijski nepromjenjivom figurom. Takva figura, znamo, ima u svojoj ravnini tri stupnja slobode gibanja, pa sistem koji sadrži samo jedan disk mora imati barem tri ispravno raspoređene veze s podlogom da bi u odnosu na nju bio geometrijski nepromjenjiv. (Podsjećamo: pravci po kojima veze sprečavaju pomake ne smiju prolaziti istom konačnom ili neizmjereno dalekom točkom.) Ima li sistem tri takve veze, bit će „izvana” statički određen (slika 29.), a ako je vezâ više od tri, bit će statički neodređen.



Slika 29.

### 4.1. Sile u vanjskim vezama

Na sreću, ne trebamo znati sve da bismo mogli znati nešto.

J. D. Barrow: *Theories of Everything*

Na vrijednosti sila u naznačenim štapnim vezama s podlogom ne utječu ni oblik diska ni njegova unutrašnja struktura. U građevnoj smo se statici ograničili na štapne sisteme pa naš disk može biti jednodijelni punostjeni štap (slike 29.a. i b.) ili može biti sastavljen od elemenata povezanih u geometrijski nepromjenjivu cjelinu (diskovi na slikama c. i d. sastavljeni su od štapnih elemenata; sjenčanjem smo samo naglasili da je u oba slučaja

riječ o po jednom disku). Štoviše, disk može „iznutra” biti i statički neodređen. Vrijednosti sila u vezama ovisit će samo o međusobnom položajnom odnosu pravaca veza i pravca djelovanja sile  $\vec{F}$  i, naravno, o njezinoj vrijednosti. Ta sila može biti i rezultanta više zadanih sila, koncentriranih i distribuiranih, pa i momenata. (Priču započinjemo djelovanjem samo jedne sile radi preglednosti crteža i jednostavnosti izrazâ. Zaplet ćemo graditi postupno: pitanjem određivanja rezultante pozabavit ćemo se kasnije.) Proračuni i grafičke konstrukcije, kao i dobivene vrijednosti sila bit će za sve sisteme na slici 29. jednake. Kako ćemo se u ovom odjeljku baviti samo sistemima s jednim jednodijelnim punostjenim diskom, analizirat ćemo nosač sa slike 29.a.

#### 4.1.1. Kanonske jednadžbe ravnoteže diska

Sustav kanonskih jednadžbi ravnoteže diska sadrži dvije jednadžbe ravnoteže projekcija sila na dvije neparalelne osi (ili dvije jednadžbe ravnoteže komponentata pri rastavu sila u komponente usporedne s takvim osima) te jednu jednadžbu ravnoteže momenata sila u odnosu na po volji odabranu točku i momenata u užem smislu. Najčešće se za osi na koje se projiciraju sile odabiru osi pravokutnoga koordinatnog sustava, dok se momenti sila uzimaju u odnosu na njegovo ishodište. (Kako su osi na koje se projicira međusobno okomite, projekcije su jednake komponentama u odgovarajućem rastavu sila.) U našem ćemo primjeru ishodište ravninskoga (desnog) koordinatnog sustava  $xz$  smjestiti u ležaj A (slika 30.a.).

Pretpostavimo li da su projekcije sila orijentirane kao na slici 30.b., jednadžbe ravnoteže projekcija sila na osi  $x$  i  $z$  bit će

$$\begin{aligned} A^h + B^h - C^h + F^h &= 0, \\ -A^v - B^v - C^v + F^v &= 0, \end{aligned}$$

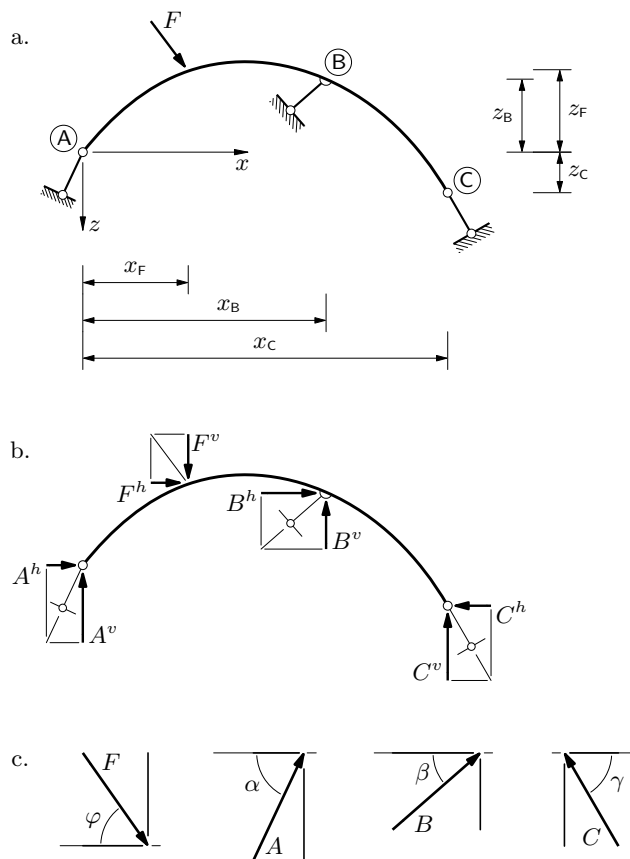
dok će jednadžba ravnoteža momenata sila oko ishodišta/točke A biti

$$x_B \cdot B^v - z_B \cdot B^h + x_C \cdot C^v - z_C \cdot C^h - x_F \cdot F^v - z_F \cdot F^h = 0.$$

Treba naglasiti da u toj jednadžbi  $x$  i  $z$  označavaju udaljenosti, dakle, vrijednosti koje su pozitivne, a ne koordinate, čije vrijednosti mogu biti pozitivne ili negativne. Napisana jednadžba uz to „vrijedi” samo ako su geometrijski odnosi manje–više kao na slici; posebno, kako je ležaj B „iznad”, a ležaj C „ispod” ležaja A, vrijednosti su momenata sila  $\vec{B}^h$  i  $\vec{C}^h$  u odnosu na točku A negativne.

Navedene jednadžbe sadrže, čini se, šest nepoznanica. Međutim, budući da su pravci djelovanja sila poznati, vrijednosti projekcija možemo, prema slici 30.c., izraziti s pomoću vrijednosti sila i neorijentiranih kutova (manjih od  $90^\circ$ ) između pravaca njihova djelovanja i osi  $x$ :

$$\begin{aligned} A^h &= A \cdot \cos \alpha, & A^v &= A \cdot \sin \alpha; & B^h &= B \cdot \cos \beta, & B^v &= B \cdot \sin \beta; \\ C^h &= C \cdot \cos \gamma, & C^v &= C \cdot \sin \gamma; & F^h &= F \cdot \cos \varphi, & F^v &= F \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$



Slika 30.

Uvrštavanje u prethodne jednadžbe daje sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot A + \cos \beta \cdot B - \cos \gamma \cdot C &= -\cos \varphi \cdot F, \\ \sin \alpha \cdot A + \sin \beta \cdot B + \sin \gamma \cdot C &= \sin \varphi \cdot F, \\ (x_B \sin \beta - z_B \cos \beta) \cdot B + (x_C \sin \gamma - z_C \cos \gamma) \cdot C \\ &= (x_F \sin \varphi + z_F \cos \varphi) \cdot F. \end{aligned}$$

Dobijemo li, riješivši sustav, za neku silu negativnu vrijednost, značit će to da je smisao djelovanja te sile suprotan od pretpostavljenoga.

Neka su, kao konkretan primjer:

$$\begin{aligned} x_B = 3,0 \text{ m}, \quad z_B = 0,9 \text{ m}; \quad x_C = 4,5 \text{ m}, \quad z_C = 0,5 \text{ m}; \quad x_F = 1,3 \text{ m}, \quad z_F = 1,0 \text{ m}; \\ \text{tg } \alpha = 2,125/1; \quad \text{tg } \beta = 0,875/1; \quad \text{tg } \gamma = 1,725/1; \quad \text{tg } \varphi = 4/3 \end{aligned}$$

i  $F = 100 \text{ kN}$  ili, u vektorskom obliku,  $\vec{F} = 60,0 \vec{i} + 80,0 \vec{k}$ . Sustav jednadžbi ravnoteže tada je:

$$\begin{aligned} 0,4258 A + 0,7526 B - 0,5015 C &= -60,0, \\ 0,9048 A + 0,6585 B + 0,8651 C &= 80,0, \\ 1,2982 B + 3,6422 C &= 164,0. \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje:

$$A = 74,01 \text{ kN}, \quad B = -74,01 \text{ kN} \quad \text{i} \quad C = 71,41 \text{ kN}.$$

Vrijednost  $B$  sile  $\vec{B}$  je negativna; ta sila, dakle, djeluje „prema jugozapadu”, a ne „prema sjeveroistoku” kao što smo crtajući sliku 30.b. pretpostavili. Vrijednosti komponenata sila  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  i  $\vec{C}$  su (uz orijentacije definirane na slici):

$$\begin{aligned} A^h &= 31,51 \text{ kN}, & A^v &= 66,96 \text{ kN}; \\ B^h &= -55,70 \text{ kN}, & B^v &= -48,74 \text{ kN}; \\ C^h &= 35,81 \text{ kN}, & C^v &= 61,78 \text{ kN}. \end{aligned}$$

U rastavu na kanonske komponente, orijentirane kao koordinatne osi, neki će se predznaci promijeniti:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= 31,51 \vec{i} - 66,96 \vec{k}, \\ \vec{B} &= -55,70 \vec{i} + 48,74 \vec{k}, \\ \vec{C} &= -35,81 \vec{i} - 61,78 \vec{k}. \end{aligned}$$

Prije daljih je proračuna dobro provjeriti izračunane vrijednosti. Zbrojit ćemo stoga vrijednosti momenata sila u odnosu na neku točku koja ne leži na pravcima reakcija, primjerice, u odnosu na hvatište sile  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} & -x_F \cdot A^v + z_F \cdot A^h + (x_B - x_F) \cdot B^v + (z_F - z_B) \cdot B^h \\ & \quad + (x_C - x_F) \cdot C^v - (z_F + z_C) \cdot C^h \\ &= -1,3 \cdot 66,96 + 1,0 \cdot 31,51 + 1,7 \cdot (-48,74) + 0,1 \cdot (-55,70) \\ & \quad + 3,2 \cdot 61,78 - 1,5 \cdot 35,81 = 0,015. \end{aligned}$$

(Izraz u prvom retku izveli smo za orijentacije sila pretpostavljene na slici 30.b. Negativne su vrijednosti komponenata sile  $\vec{B}$  uvrštene tek u drugom retku.) Dobivena vrijednost nije jednaka nuli, te se može činiti da uvjet ravnoteže momenata (u odnosu na bilo koju točku) nije zadovoljen. Da ocijenimo možemo li tu vrijednost prihvatiti kao posljedicu pogrešaka zaokruživanja, a ne neispravnoga proračuna, izračunat ćemo relativnu pogrešku tako da podijelimo dobivenu apsolutnu progresku sa zbrojem svih pozitivnih (ili apsolutnom vrijednošću zbroja svih negativnih) pribrojnika u izrazu:  $0,015/229,21 = 0,007\%$ . Relativna je pogreška dovoljno mala da s popriličnom sigurnošću možemo pretpostaviti da je proračun reakcija bio ispravan.

#### 4.1.2. Ritterov postupak

Umjesto kanonskih mogu se postaviti tri uvjeta ravnoteže momenata u odnosu na tri točke (pri čemu te tri točke ne smiju ležati na istom pravcu). Odaberemo li za to točke u kojima se sijeku po dva pravca djelovanja reaktivnih sila, sustav jednadžbi ravnoteže



raspast će se na tri neovisne jednadžbe s po jednom nepoznanicom: momenti dviju reakcija, čiji se pravci djelovanja sijeku u momentnom polu, iščezavaju, pa u odgovarajućoj jednadžbi ostaje samo treća reakcija. Takav se izbor uvjetâ ravnoteže naziva *Ritterovim postupkom*. Odabrani se pak momentni polovi nazivaju *Ritterovim točkama*.

Sjecišta pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $\vec{C}$ ,  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  te  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  označili smo na slici 31. redom slovima a, b i c. Iz jednadžbe ravnoteže momenata u odnosu na točku a dobivamo vrijednost sile  $\vec{A}$ :

$$-d_{a,A} \cdot A + d_{a,F} \cdot F = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{d_{a,F}}{d_{a,A}} \cdot F; \quad (110)$$

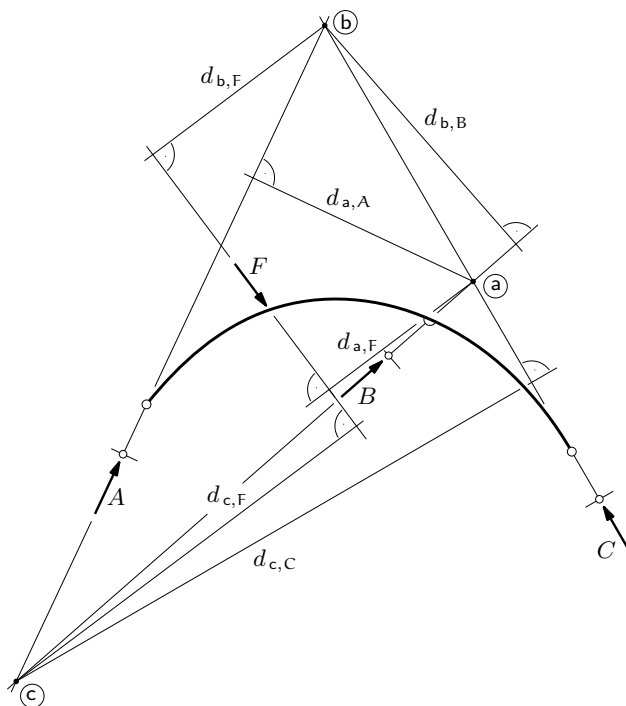
$d_{a,A}$  i  $d_{a,F}$  udaljenosti su točke a od pravaca djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{F}$ . Na sličan način, jednadžbe ravnoteže momenata u odnosu na točke b i c neposredno daju vrijednosti sila  $\vec{B}$  i  $\vec{C}$ :

$$d_{b,B} \cdot B + d_{b,F} \cdot F = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{d_{b,F}}{d_{b,B}} \cdot F, \quad (111)$$

$$d_{c,C} \cdot C - d_{c,F} \cdot F = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{d_{c,F}}{d_{c,C}} \cdot F. \quad (112)$$

Budući da su duljine pozitivne veličine i da je vrijednost  $F$  pozitivna, dobivene su vrijednosti sila  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  pozitivne, dok je vrijednost sile  $\vec{B}$  negativna — njezina je orijentacija, dakle, suprotna od pretpostavljene.

Računski rad u Ritterovu postupku često ipak nije bitno manji nego pri rješavanju sustava kanonskih jednadžbi: kod složenijih ili „nepravilnijih” geometrijskih odnosa, kao



Slika 31.

u našem primjeru, računsko određivanje sjecištâ pravaca djelovanja reakcija (algebarski: rješavanje sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice) i izračunavanje udaljenosti tih sjecišta od ostalih pravaca bit će razmjerno dugotrajno. Stoga ćemo nosač nacrtati u pogodnom mjerilu i na crtežu naći potrebna sjecišta, povući okomice na odgovarajuće pravce te izmjeriti pripadne udaljenosti.

Tako ćemo, primjerice, na slici 31. (nacrtanoj u mjerilu 1:80) izmjeriti

$$\begin{array}{lll} d_{a,A} \approx 2,55 \text{ m}, & d_{b,B} \approx 3,10 \text{ m}, & d_{c,C} \approx 6,30 \text{ m}, \\ d_{a,F} \approx 1,90 \text{ m}, & d_{b,F} \approx 2,30 \text{ m}, & d_{c,F} \approx 4,50 \text{ m} \end{array}$$

pa su:

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1,90}{2,55} \cdot 100 = 74,5 \text{ kN}, & B &\approx -\frac{2,30}{3,10} \cdot 100 = -74,2 \text{ kN}, \\ C &\approx \frac{4,50}{6,30} \cdot 100 = 71,4 \text{ kN}. \end{aligned}$$

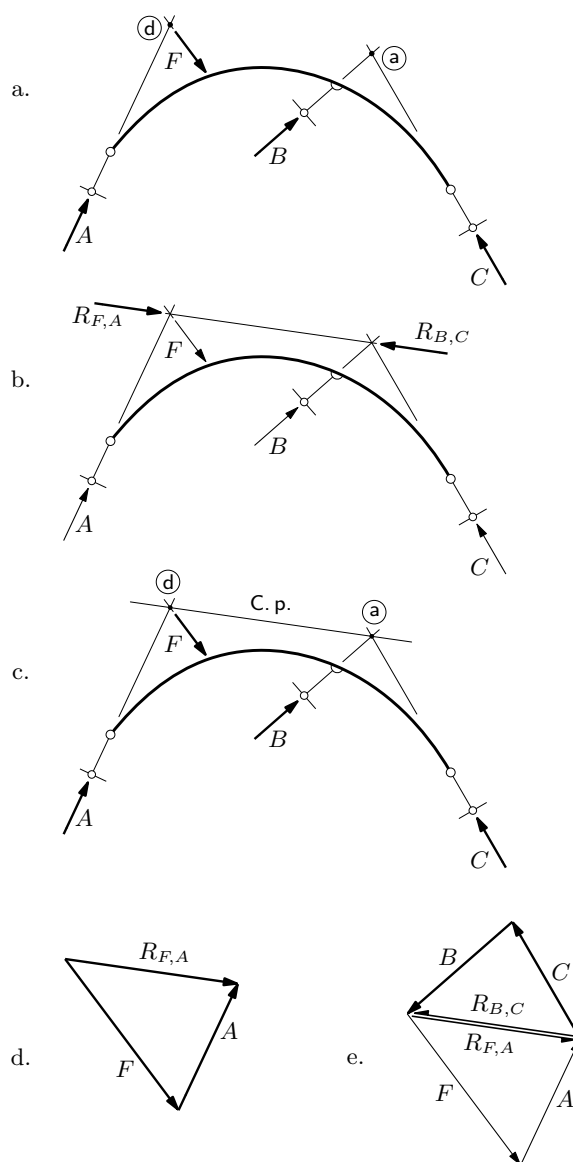
Takav postupak, dijelom grafički, a dijelom analitički, nazvat ćemo *grafoanalitičkim*.

Izračunane vrijednosti možemo sada provjeriti zbrajanjem vrijednosti projekcija sila na neku os koja nije okomita ni na jedan pravac djelovanja sila čije smo vrijednosti tražili; u našem primjeru, recimo, na vertikalnu ili na horizontalnu os.

#### 4.1.3. Culmannov postupak

*Culmannov postupak* primjenjujemo za „čisto” grafičko određivanje intenzitetâ i orijentacija reakcija na poznatim pravcima. Sile pritom smatramo kliznim vektorima: važni su pravci na kojima djeluju, ne i njihova hvatišta.

Budući da su pravci djelovanja svih četiriju sila poznati, mogu se naći točke kroz koje prolaze pravci na kojima djeluju rezultante po dviju od njih: primjerice, pravac djelovanja rezultante  $\vec{R}_{B,C}$  sila  $\vec{B}$  i  $\vec{C}$  prolazi sjecištem pravaca na kojima te sile djeluju — na slici 32.a. to je točka a; pravac na kojem djeluje rezultanta  $\vec{R}_{F,A}$  sila  $\vec{A}$  i  $\vec{F}$  prolazi pak točkom d, sjecištem pravaca djelovanja tih dviju sila. Kako su sile  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  i  $\vec{F}$  u ravnoteži, u ravnoteži moraju biti i rezultante  $\vec{R}_{F,A}$  i  $\vec{R}_{B,C}$ . Time smo naš zadatak — uravnotežiti zadanu silu (silu poznatoga pravca djelovanja, poznatog intenziteta i poznate orijentacije) s tri sile nepoznatih intenziteta i orijentacija, ali na poznatim pravcima djelovanja — sveli, u prvom koraku, na zadatak uravnoteženja dviju sila. Prema već nam znanom (grafičkom) uvjetu ravnoteže dviju sila, sile  $\vec{R}_{F,A}$  i  $\vec{R}_{B,C}$  moraju djelovati na istom pravcu te imati jednake intenzitete i suprotne orijentacije (slika 32.b.). Pravac na kojem te dvije rezultante djeluju naziva se *Culmannovim pravcem*. Određen je poznatim sjecištima d i a pravaca djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{F}$  i pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $\vec{C}$ . Najčešće u crtež nosača (nacrtan u prikladnom mjerilu), koji ćemo zvati planom položajâ, ucrtavamo samo taj pravac, bez rezultanata koje na njemu djeluju (slika 32.c.). *Plan položajâ* prikazuje samo položajne odnose — položaje pravaca djelovanja sila i, u nekim slučajevima, položaje njihovih hvatišta. U njemu se, doduše, vrlo često naznačuju i poznate orijentacije zadanih i pretpostavljene orijentacije traženih sila, a ponekad se



Slika 32.

čak i odnos intenziteta sila nagoviješta različitim duljinama strelica. Za grafički prikaz i za grafički postupak određivanja intenziteta i stvarnih orijentacija sila uvodi se poseban crtež — *poligon sila*. Njegove su stranice usporedne s pravcima djelovanja sila u planu položaja, a duljine tih stranica, u nekom mjerilu, jednake su intenzitetima odgovarajućih sila.

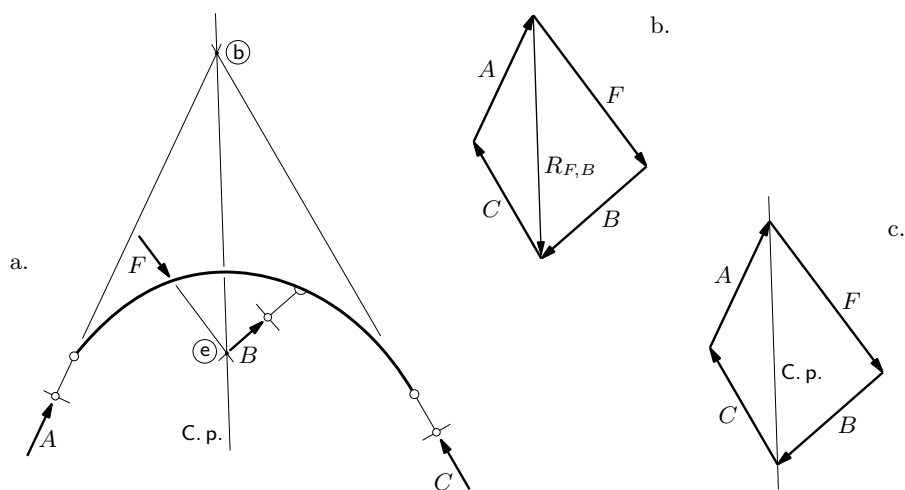
U našem je primjeru sila  $\vec{F}$  poznata, a poznati su i pravci djelovanja sile  $\vec{A}$  i njihove rezultante  $\vec{R}_{F,A}$ . Prema tome, znamo pravce s kojima su paralelne stranice trokuta sila i duljinu jedne njegove stranice pa taj trokut možemo „složiti” (slika 32.d.). Orijetacije sile  $\vec{A}$  i  $\vec{R}_{F,A}$  određene su (vektorskim) uvjetom  $\vec{R}_{F,A} = \vec{F} + \vec{A}$ . Duljine stranica trokuta sila daju, prema odabranom mjerilu, tražene intenzitete sila.

I na kraju, rastavljanjem sile  $\vec{R}_{B,C}$ , čiji je smisao djelovanja suprotan smislu djelovanja sile  $\vec{R}_{F,A}$ ,  $\vec{R}_{B,C} = -\vec{R}_{F,A}$ , u dvije sile na poznatim pravcima, dobivamo i vrijednosti i orijentacije sile  $\vec{B}$  i  $\vec{C}$  (gornji trokut u poligonu sila na slici 32.e.).

Poligone sila nacrtali smo u mjerilu  $2,5\text{ cm} :: 100\text{ kN}$  odnosno  $1\text{ cm} :: 40\text{ kN}$ , pa na slici e. očitavamo:  $A \approx 74\text{ kN}$ ,  $B \approx 74\text{ kN}$ ,  $C \approx 72\text{ kN}$ .

Opisanu grafičku konstrukciju možemo sažeti u *uvjet ravnoteže četiriju sila*: one su u ravnoteži ako rezultanta bilo kojih dviju od njih i rezultanta ostalih dviju leže na istom pravcu i ako te dvije rezultante imaju isti intenzitet, a suprotne orijentacije.

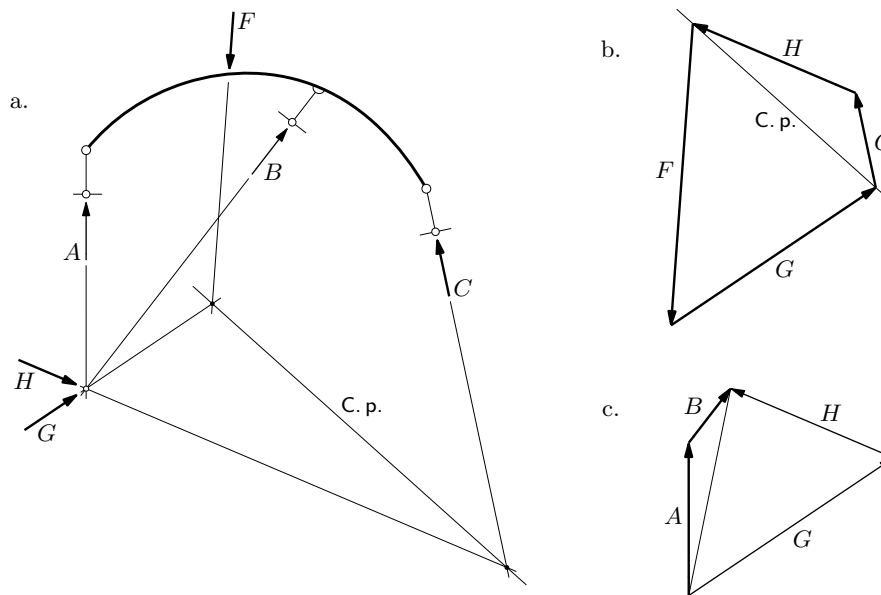
Rekli smo „rezultanta bilo kojih dviju” od te četiri sile (i „rezultanta ostalih dviju”). To znači da se zadatak može riješiti i s pomoću rezultanata sila  $\vec{F}$  i  $\vec{B}$  te sila  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$ . Culmannov je pravac sada određen točkama b i e, sjecištima pravaca djelovanja tih parova sila (slika 33.a.). U poligonu sila prvo nalazimo „duljinu” i smisao djelovanja rezultante  $\vec{R}_{F,B}$  sila  $\vec{F}$  i  $\vec{B}$ , a zatim tu rezultantu uravnotežujemo silom koju rastavljamo u sile  $\vec{C}$  i  $\vec{A}$  (slika 33.b.). Često pomoćne rezultante ni ne označavamo; dovoljno je samo povući pravac usporedan s Culmannovim pravcem (slika 33.c.). Tražene su sile orijentirane tako da ćemo, slijedeći njihove strelice, kružiti poligonom — kažemo da je poligon sila *zatvoren*.



Slika 33.

Treća mogućnost rješavanja, s pomoću rezultanata sila  $\vec{F}$  i  $\vec{C}$  te  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ , u našem je primjeru neprikladna, jer sjecište pravaca djelovanja prvih dviju sila pada izvan dijela ravnine koji je obuhvaćen crtežom. U nekim slučajevima položajnih odnosa ni ne postoje dva para sila čiji se pravci djelovanja sijeku na papiru na kojem crtamo plan položajâ. Primjerice, iako pravac djelovanja reakcije  $\vec{B}$  nosača sa slike 34.a. siječe pravce ostalih sila razmjerno blizu, sjecišta pravaca sila  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$ , sila  $\vec{A}$  i  $\vec{F}$  te sila  $\vec{C}$  i  $\vec{F}$  gotovo su nedohvatljiva.

Zadatak ćemo riješiti tako da dvije nepoznate sile (točnije, sile nepoznatih intenziteta i orijentacija — svi su pravci poznati) zamijenimo silama koje djeluju na pogodno postavljenim pravcima. Rezultanta sila  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  prolazi sjecištem pravaca na kojima te sile djeluju. U toj ćemo točki tu (zasad nepoznatu) rezultantu sastaviti od sila  $\vec{G}$  i  $\vec{H}$  čije ćemo pravce odabrati tako da njihova sjecišta s pravcima djelovanja sila  $\vec{C}$  i  $\vec{F}$  budu pristupačna (slika 34.a.). Culmannovim postupkom određujemo intenzitete i orijentacije sila  $\vec{C}$ ,  $\vec{G}$  i  $\vec{H}$ : Culmannov pravac možemo provući, recimo, sjecištima pravaca sila  $\vec{F}$  i  $\vec{G}$  i sila  $\vec{C}$  i  $\vec{H}$ ; odgovarajući je poligon sila konstruiran na slici 34.b. I na kraju, rezultantu sila  $\vec{G}$  i  $\vec{H}$  rastavljamo u sile  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ : slika 34.c. — obratite pozornost na orijentacije sila!



Slika 34.

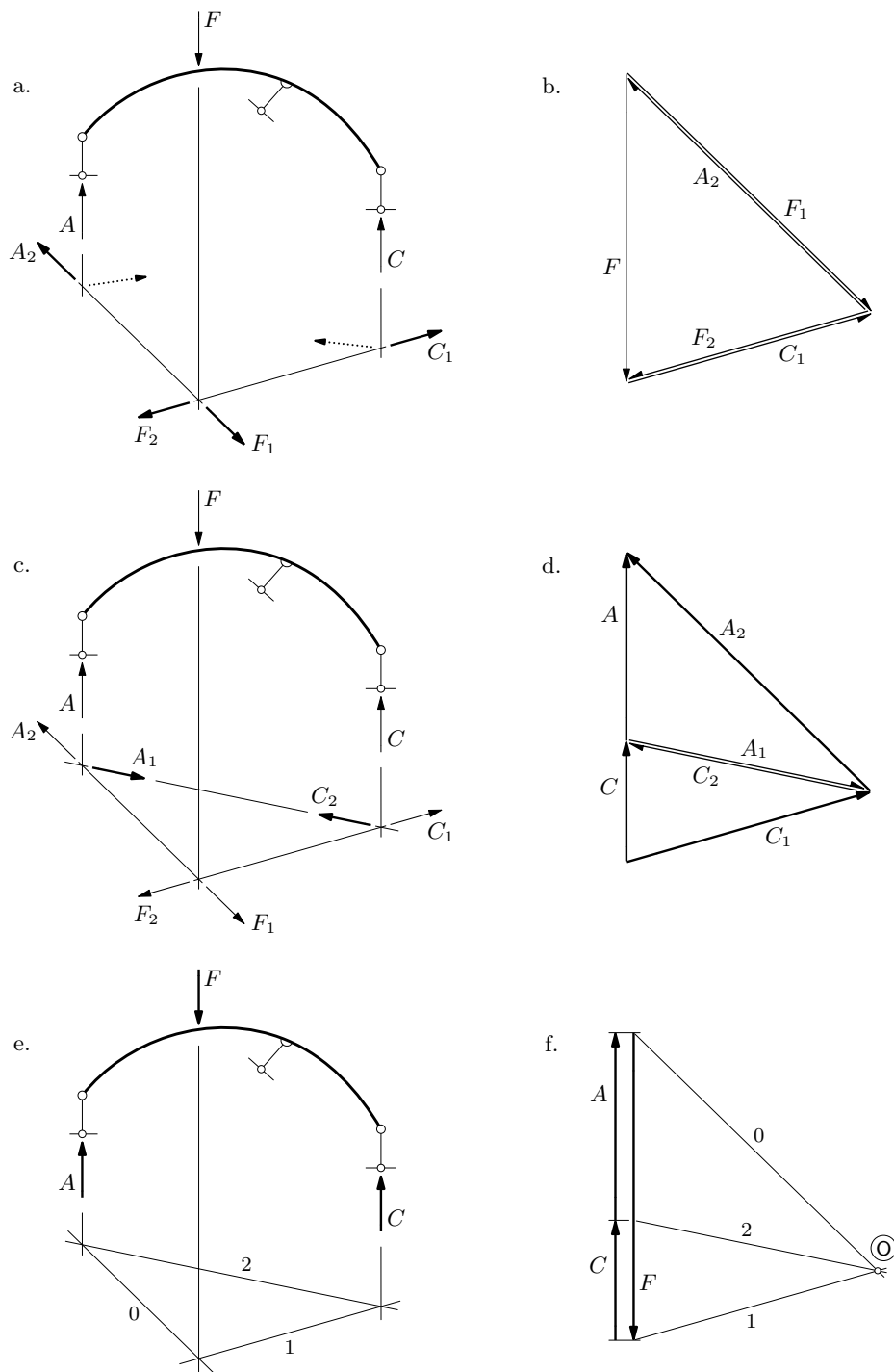
Na sličan ćemo problem naići i pri rješavanju tog zadatka Ritterovim postupkom u grafo-analitičkom ruhu: dok su Ritterove točke za sile  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  (sjecišta pravaca djelovanja sile  $\vec{B}$  i  $\vec{C}$  te sile  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ ) dostupna, Ritterova je točka za silu  $\vec{B}$  (sjecište pravaca sile  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$ ) pobjegla izvan papira. I ovdje možemo sile  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  zamijeniti silama  $\vec{G}$  i  $\vec{H}$ . Zadatak se može riješiti i *modificiranim Ritterovim postupkom*: nakon što vrijednosti sile  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  izračunamo iz jednadžbi ravnoteže momenata oko njihovih Ritterovih točaka, vrijednost sile  $\vec{B}$  izračunat ćemo iz jednadžbe ravnoteže projekcija sila na pogodno odabranu os — na, primjerice, pravac djelovanja te sile ili na vertikalnu os koordinatnoga sustava; pritom se, međutim, odulji proračun ne može izbjeći s pomoću grafičkih međukoraka.

#### 4.1.4. Sile na usporednim pravcima

Analizirat ćemo još poseban slučaj u kojem su pravci djelovanja zadane sile i pravci djelovanja dviju reakcija međusobno usporedni (nosač na slici 35.a.). Iz uvjeta ravnoteže projekcija sila na os koja je okomita na usporedne pravce odmah možemo zaključiti da reakcija, čiji pravac djelovanja nije usporedan s ostalima, iščezava — to je jedina sila koja se na odabranu os ne projicira u točku. U našem je primjeru to reakcija  $\vec{B}$ , pa ostaju sile  $\vec{F}$ ,  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$ . Vrijednost reakcije  $\vec{A}$  možemo sada izračunati iz jednadžbe ravnoteže momenata oko bilo koje točke na pravcu djelovanja sile  $\vec{C}$  i, analogno, vrijednost sile  $\vec{C}$  iz jednadžbe ravnoteže momenata oko bilo koje točke na pravcu djelovanja reakcije  $\vec{A}$ .

Ako su pravci djelovanja svih sila (koje ne iščezavaju) međusobno usporedni, konstruiranje verižnoga poligona ponajčešće je najjednostavniji grafički postupak određivanja vrijednosti i orijentacija (dviju preostalih) reakcija. To je tek posebna primjena mnogo općenitijega postupka o kojem će još biti poprilično mnogo govora.

Zamisao je, ukratko, sljedeća: Sile  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  sastavit ćemo od po dvije komponente. Po jednu komponentu svake sile zadat ćemo tako da njihova rezultanta poništi zadanu



Slika 35.

silu  $\vec{F}$ . Time zadatak svodimo na zadatak uravnoteženja dviju sila — preostalih dviju komponentata.

Zadanu silu  $\vec{F}$  u bilo kojoj točki pravca na kojem djeluje rastavljamo u dvije komponente čiji pravci sijeku (na crtežu) pravce djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  (plan položajâ na slici 35.a., poligon sila na slici b.). Komponentu  $\vec{A}_2$  sile  $\vec{A}$  zadat ćemo tako da djeluje

na pravcu djelovanja komponente  $\vec{F}_1$  sile  $\vec{F}$  (slika a.), da je orijentirana suprotno od nje i da ima isti intenzitet (slika b.); komponentu  $\vec{C}_1$  sile  $\vec{C}$  zadat ćemo pak na pravcu djelovanja komponente  $\vec{F}_2$ , sa suprotnom orijentacijom i jednakim intenzitetom. Budući da su  $\vec{A}_2 = -\vec{F}_1$  i  $\vec{C}_1 = -\vec{F}_2$ , bit će  $\vec{A}_2 + \vec{F}_1 = \vec{0}$  i  $\vec{C}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ . (U sâmom vektorskom zapisu nije vidljiva još jedna pojedinost koja je nužna za poništavanje sila: da odgovarajući parovi djeluju na istim pravcima.)

Slijedi da je  $\vec{F} + \vec{A}_2 + \vec{C}_1 = \vec{0}$ . Na taj smo način tri sile (sile  $\vec{F}$ ,  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$ ) zamijenili dvjema — (zasad nepoznatom) komponentom  $\vec{A}_1$ , koju moramo dodati komponenti  $\vec{A}_2$  da dobijemo silu  $\vec{A}$ , i (zasad nepoznatom) komponentom  $\vec{C}_2$ , koja će dodana komponenti  $\vec{C}_1$  dati silu  $\vec{C}$ . Da bi sistem bio u ravnoteži, te dvije komponente moraju djelovati na istom pravcu: pravcu određenom točkom u kojoj se sijeku pravci djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{A}_1$  i točkom u kojoj se sijeku pravci djelovanja sila  $\vec{C}$  i  $\vec{C}_2$ . (slika 35.c.). Sada je, dakle, poznat pravac djelovanja komponente  $\vec{A}_1$ , a poznati su i pravac djelovanja sile  $\vec{A}$  te pravac djelovanja, intenzitet i orijentacija komponente  $\vec{A}_2$  pa možemo složiti trokut sila koji određuje intenzitete i orijentacije sile  $\vec{A}$  i njezine komponente  $\vec{A}_1$  (gornji trokut u poligonu sila na slici 35.d.); orijentacije su određene uvjetom  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ . Isti zaključak vrijedi za silu  $\vec{C}$  i njezine komponente (donji trokut u poligonu sila). U poligonu sila uz to vidimo da su zadovoljena i ostala dva (pod)uvjeta ravnoteže komponentata  $\vec{A}_1$  i  $\vec{C}_2$ : te sile imaju suprotne orijentacije i jednake intenzitete.

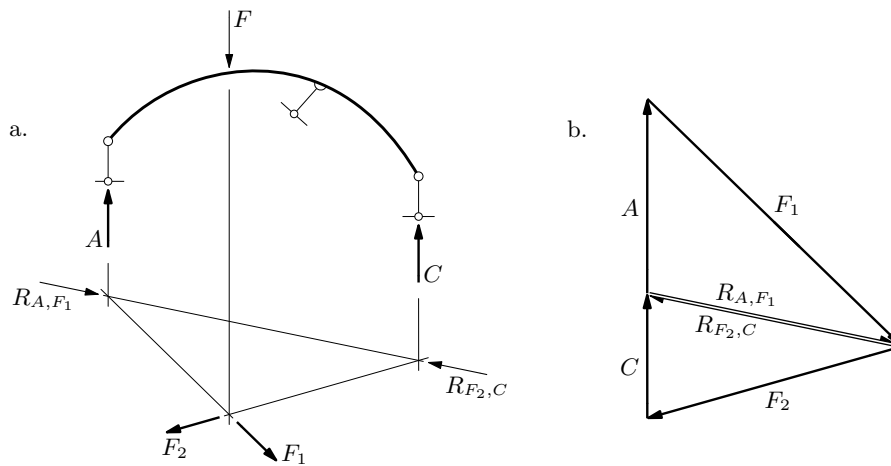
Trokut u planu položajâ na slici 35.c., sastavljen od pravaca na kojima djeluju komponente sila  $\vec{F}$ ,  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$ , naziva se *verižnim poligonom* (vidjet ćemo kasnije da je u općem slučaju, kad su u igri više od tri sile, zaista riječ o višekutniku). Komponente sila na toj slici i u poligonima sila na slikama 35.b. i d. ucrtali smo da opis postupka i njegovu statičku interpretaciju učinimo zornijima. Pri konstruiranju verižnoga poligona crtaju se samo njegove *stranice* (slika 35.e.), a pri konstruiranju poligona sila samo pravci komponentata, nazvani *zrakama* (slika f.); odgovarajuće stranice i zrake označavaju se pritom istim brojkama: 0, 1, 2, ... (U poligonu sila na slici f. sile  $\vec{F}$ ,  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  u stvari su na istom pravcu, ali smo sile  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  radi preglednosti izmaknuli.) Spomenut ćemo još da se točka O, u kojoj se zrake sijeku, naziva *polom*.

Culmannovim se postupkom taj zadatak može riješiti, kao i prethodni (na slici 34.), uvođenjem pomoćnih sila u sjecištu pravaca djelovanja reakcija  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Ako, međutim, odmah zaključimo da reakcija  $\vec{B}$  iščezava, postupak se pojednostavljuje.

I sada započinjemo rastavljanjem sile  $\vec{F}$  u dvije po volji odabrane komponente  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  (slika 36.; radi usporedbe s konstrukcijom verižnoga poligona na slici 35. odabrat ćemo iste komponente). Uočite da smo rastavili zadanu silu, a ne kao na slici 34. nepoznatu rezultantu! Pravac, koji ima ulogu Culmannova pravca, prolazi, recimo, sjecištima pravaca djelovanja sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{A}$  i sila  $\vec{F}_2$  i  $\vec{C}$  (slika 36.a.). Drugim riječima, zadatak svodimo na uravnoteženje rezultante sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{A}$  i rezultante sila  $\vec{F}_2$  i  $\vec{C}$ . Poligon sila kojim određujemo orijentacije i intenzitete sila  $\vec{A}$  i  $\vec{C}$  prikazan je na slici 36.b.; za razliku od zadatka s općim položajem sila, koje rješavamo klasičnim Culmannovim postupkom, ovdje znamo intenzitete i orijentacije dviju sila, u svakom paru po jedne.

Usporedimo li slike 36.a. i b. sa slikama 35.c. i d., zanemarujući pritom na trenutak oznake sila, vidjet ćemo da su odgovarajući crteži jednaki. Usporedba opisâ njihova nastanka pokazuje



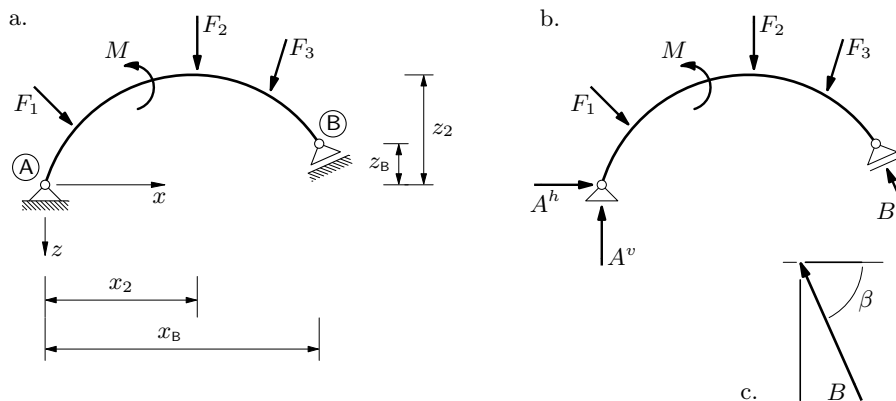


Slika 36.

da je čak i redoslijed povlačenja crta isti. A ipak, statička je interpretacija tih crteža (sad ćemo vratiti oznake sila) i motivacije pojedinih koraka u crtanju različita: u modificiranom Culmannovu postupku tražimo rezultante parova sila (primjerice  $\vec{A} + \vec{F}_1 = \vec{R}_{A,F_1}$ ) i, kao ključni korak, pravac na kojem obje djeluju, dok smo pri konstruiranju verižnoga poligona tražili razlike sila ( $\vec{A} - \vec{A}_2 = \vec{A}_1$ , na primjer) i, ponovo kao ključni korak, pravac njihova djelovanja. (No, da zatvorimo krug: treba također uočiti da je  $\vec{A}_1 = \vec{R}_{A,F_1}$  jer je  $-\vec{A}_2 = \vec{F}_1$ .)

#### 4.1.5. Zglobni ležajevi

Nosači s jednim diskom često imaju jedan nepomičan i jedan pomičan zglobni ležaj (slika 37.a.). Po svojim je statičkim i kinematičkim svojstvima pomičan zglobni ležaj istovrijedan štapnoj vezi čija je os okomita na pravac po kojem ležaj dopušta pomak. Reakcija u nepomičnom zglobnom ležaju djeluje na pravcu koji prolazi središtem zgloba, a može imati bilo koji nagib — nepoznanice su, dakle, vrijednost te reakcije i nagib njezina pravca. U analitičkom je postupku uobičajeno silu nepoznate vrijednosti koja djeluje na pravcu nepoznata nagiba rastaviti u dvije komponente na pogodno odabranim pravcima, pa u proračun kao nepoznanice, umjesto vrijednosti i nagiba pravca sile, ulaze vrijednosti tih dviju komponenata. Rečeno slikovitije, nepomični se zglobni ležaj može zamijeniti



Slika 37.

dvjema štapnim vezama, postavljenima tako da im se osi sijeku u središtu zgloba. To pak znači da možemo primijeniti neki od postupaka opisanih na prethodnim stranicama.

Primjerice, rastavimo li reakciju u nepomičnom zglobnom ležaju u horizontalnu i vertikalnu komponentu (slika 37.b.), kanonske su jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} A^h - \cos \beta \cdot B + F_1^h - F_3^h &= 0, \\ -A^v - \sin \beta \cdot B + F_1^v + F_2^v + F_3^v &= 0, \\ (x_B \sin \beta + z_B \cos \beta) \cdot B + M - x_1 \cdot F_1^v - z_1 \cdot F_1^h \\ -x_2 \cdot F_2^v - x_3 \cdot F_3^v + z_3 \cdot F_3^h &= 0, \end{aligned}$$

pri čemu smo za momentni pol ponovo odabrali ležaj A; takav je izbor ovdje posebno pogodan jer sile  $\vec{A}^h$  i  $\vec{A}^v$  ne daju momente oko te točke, pa  $A^h$  i  $A^v$  ne ulaze u treću jednadžbu. Uz to, iskoristili smo činjenicu da je kut nagiba pravca djelovanja reakcije  $\vec{B}$  poznat, pa smo vrijednosti njezinih komponentata, prema slici 37.c., izrazili u obliku

$$B^h = \cos \beta \cdot B \quad \text{i} \quad B^v = \sin \beta \cdot B.$$

Još jednom naglašavamo da su, s druge strane,  $A^h$  i  $A^v$  sada međusobno neovisne nepoznanice.

Zbroj vrijednosti horizontalnih komponentata zadanih sila daje vrijednost horizontalne, a zbroj vrijednosti njihovih vertikalnih komponentata vrijednost vertikalne komponente rezultirajuće sile:

$$F_1^h - F_3^h = R^h \quad \text{i} \quad F_1^v + F_2^v + F_3^v = R^v.$$

Izraze za vrijednosti komponentata rezultirajuće sile pisat ćemo u sažetijem obliku

$$R^h = \sum_i F_i^h \quad \text{i} \quad R^v = \sum_i F_i^v, \quad (113)$$

prešutno podrazumijevajući da pri razvoju podizrazâ sa znakom sumacije predznake pojedinih pribrojnika treba odrediti na crtežu te da neki pribrojnici mogu biti jednaki nuli (u našem je primjeru  $F_2^h = 0$ ). Vrijednosti koncentriranih momenata i momenata sila u odnosu na odabrani pol daju pak vrijednost rezultirajućega momenta (u odnosu na taj pol):

$$M_{R/A} = \sum_j M_j + \sum_i x_i \cdot F_i^v + \sum_i z_i \cdot F_i^h; \quad (114)$$

predznake pojedinih pribrojnika koji ulaze pod znakove sumacije treba i ovdje odrediti s pomoću crteža.

Uvođenjem vrijednosti rezultirajuće sile i rezultirajućega momenta i prebacivanjem poznatih veličina na desnu stranu znaka jednakosti jednadžbe ravnoteže prelaze u

$$\begin{aligned} A^h - \cos \beta \cdot B &= -R^h, \\ -A^v - \sin \beta \cdot B &= -R^v, \\ (x_B \sin \beta + z_B \cos \beta) \cdot B &= -M_{R/A}. \end{aligned}$$

U trećoj je jednadžbi  $B$  jedina nepoznanica pa se može izravno izračunati:

$$B = -\frac{M_{R/A}}{x_B \sin \beta + z_B \cos \beta}.$$

Uz poznatu vrijednost  $B$ , prva jednadžba neposredno daje  $A^h$ , a druga  $A^v$ :

$$A^h = -R^h + \cos \beta \cdot B,$$

$$A^v = R^v - \sin \beta \cdot B.$$

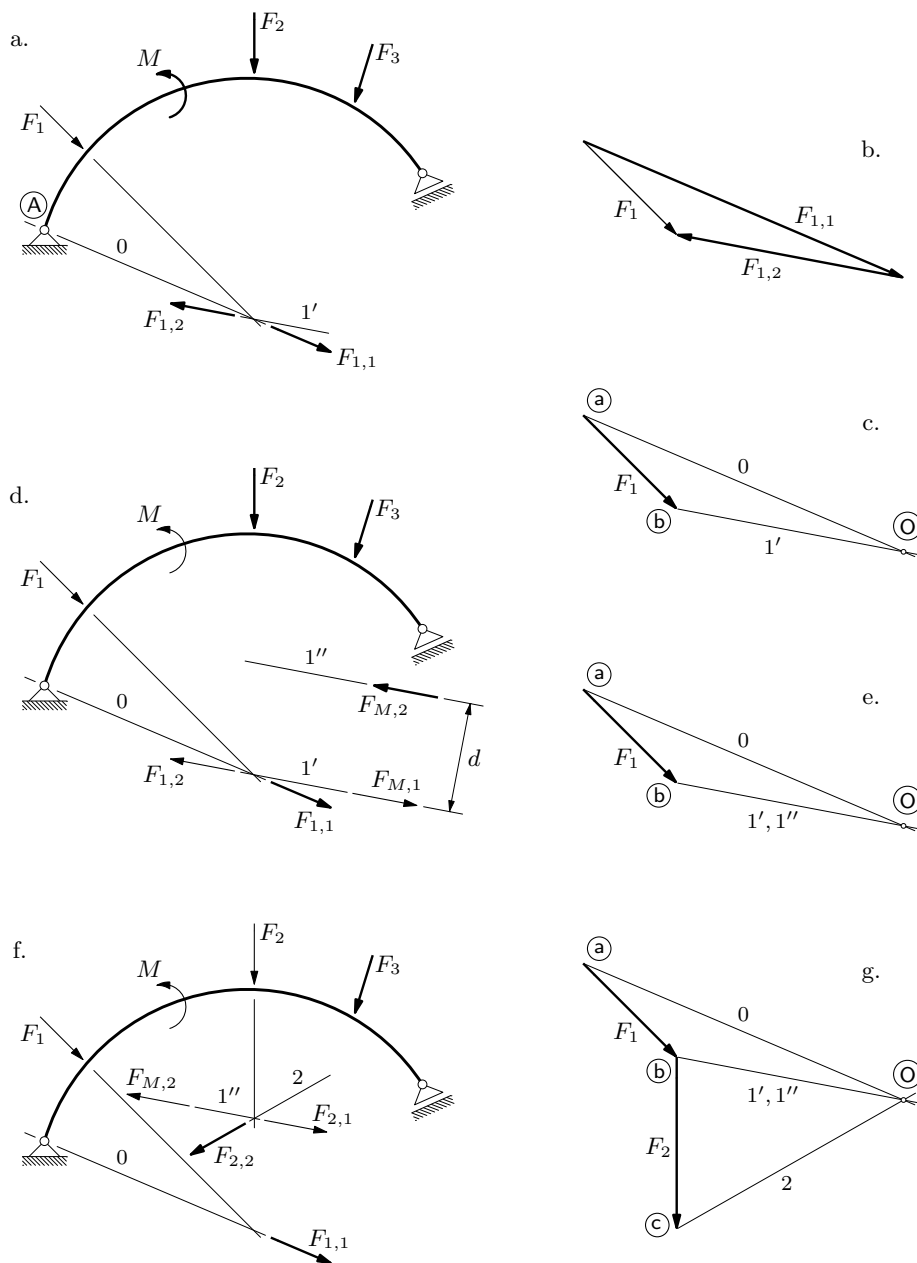
#### 4.1.6. Verižni poligon

Djeluje li na nosač više zadanih sila i momenata, a njihova rezultanta ili, u posebnom slučaju, rezultirajući spreg nisu (još) poznati, konstruiranje verižnoga poligona vjerojatno je najprimjereniji način grafičkog određivanja reakcija. Ključni je korak u tom postupku svođenje svih sila i svih momenata, i zadanih i reaktivnih, na samo dvije sile koje potom treba još samo uravnotežiti. I, što je gotovo jednako važno, u koraku prije na dvije su sile svedene sve zadane sile i svi zadani momenti, pa bez zamjetnijega dodatnog rada dobivamo i rezultantu ili rezultirajući spreg zadanih djelovanja.

Svođenje svih sila i momenata na samo dvije sile ostvarujemo — duboko udahnite — rastavljanjem svake zadane sile u dvije komponente i zamjenjivanjem svakoga zadanog momenta spregom sila, pri čemu te komponente i sile tih spregova biramo tako da jedna komponenta svake sile ili jedna sila svakog sprega ponište jednu komponentu neke druge sile ili jednu silu nekog drugog sprega; dvije pak tražene sile sastavljamo od po dvije komponente, pri čemu u svakom paru komponenata jednu zadajemo tako da poništi po jednu od dvije sile na koje smo netom sveli zadane sile i momente. Zvuči zamršeno, ali potpunije i potanje razrađeni primjer — rješavanje nosača sa slike 37.a. — razmršit će, vjerujemo, ovaj pomalo šturi opis.

Za razliku od primjera sa slike 35. (str. 66.) u kojem su pravci djelovanja obje tražene sile bili poznati, sada o reakciji  $\vec{A}$  znamo tek da djeluje na jednom od pravaca iz pramena kroz točku A. Želimo li je sastaviti od komponenata, moći ćemo to napraviti sàmo u toj točki. Verižni poligon mora stoga proći tom točkom, a to možemo ostvariti jedino tako da konstruiranje poligona započnemo pravcem kroz nju. Kako jednu komponentu sile  $\vec{A}$  možemo zadati bilo kako, zahtijevat ćemo samo da pravac na kojem djeluje siječe na crtežu pravac djelovanja prve poznate sile, sile  $\vec{F}_1$ . (I k tomu je još poželjno da ne crtamo preko crteža nosača.) Odabrani smo pravac na slici 38.a. označili sa 0.

Silu  $\vec{F}_1$  rastavit ćemo potom u dvije komponente tako da jedna od njih djeluje na pravcu 0. Tu ćemo komponentu označiti sa  $\vec{F}_{1,1}$ . U poligonu sila kroz početak sile  $\vec{F}_1$  povlačimo paralelu s pravcem 0; na njemu leži vektor  $\vec{F}_{1,1}$  koji određuje komponentu  $\vec{F}_{1,1}$  (slika 38.b.). Njezin intenzitet i orijentaciju možemo odabrati po volji. Druga je komponenta tada jednoznačno određena. Označimo li rep vektora  $\vec{F}_1$  sa  $\mathbf{a}$ , njegov višak sa  $\mathbf{b}$ , a odabrani vršak vektora  $\vec{F}_{1,1}$  sa  $\mathbf{O}$  (slika 38.c.), bit će  $\vec{F}_{1,1} = \mathbf{a}\vec{\mathbf{O}}$  i  $\vec{F}_{1,2} = \vec{\mathbf{O}}\mathbf{b}$ . Točka  $\mathbf{O}$  je *pol*, dok su pravci kroz točke  $\mathbf{O}$  i  $\mathbf{a}$  te  $\mathbf{O}$  i  $\mathbf{b}$  *zrake* poligona sila; zrake ćemo označiti sa 0 i 1' (uskoro će postati jasno zašto 1', a ne jednostavno 1). Zraka 1' određuje smjer



Slika 38.

pravca djelovanja komponente  $\vec{F}_{1,2}$  pa u planu položajâ na slici 38.a. možemo kroz sjecište pravca djelovanja sile  $\vec{F}_1$  i pravca 0, na kojem djeluje komponenta  $\vec{F}_{1,1}$ , povući taj pravac. I njega ćemo označiti sa 1'. Pravci 0 i 1' u planu položajâ *stranice* su verižnoga poligona.

Sljedeći je u nizu djelovanjâ moment  $M$  (budući da su u ravninskim problemima vektori svih momenata okomiti na ravninu sistema, momenti su potpuno određeni svojom vrijendošću, pa ih možemo obilježavati kao skalare.) Moment  $M$  ćemo zamijeniti spregom sila tako da jedna od njih — označit ćemo je sa  $\vec{F}_{M,1}$  — poništi komponentu  $\vec{F}_{1,2}$  sile  $\vec{F}_1$ :  $\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{M,1} = \vec{0}$  pa je  $\vec{F}_{M,1} = -\vec{F}_{1,2}$ . Sila  $\vec{F}_{M,1}$  djeluje, prema tome, na stranici 1' verižnoga poligona (slika 38.d.). Njezin je intenzitet jednak intenzitetu sile  $\vec{F}_{1,2}$ , a smisao

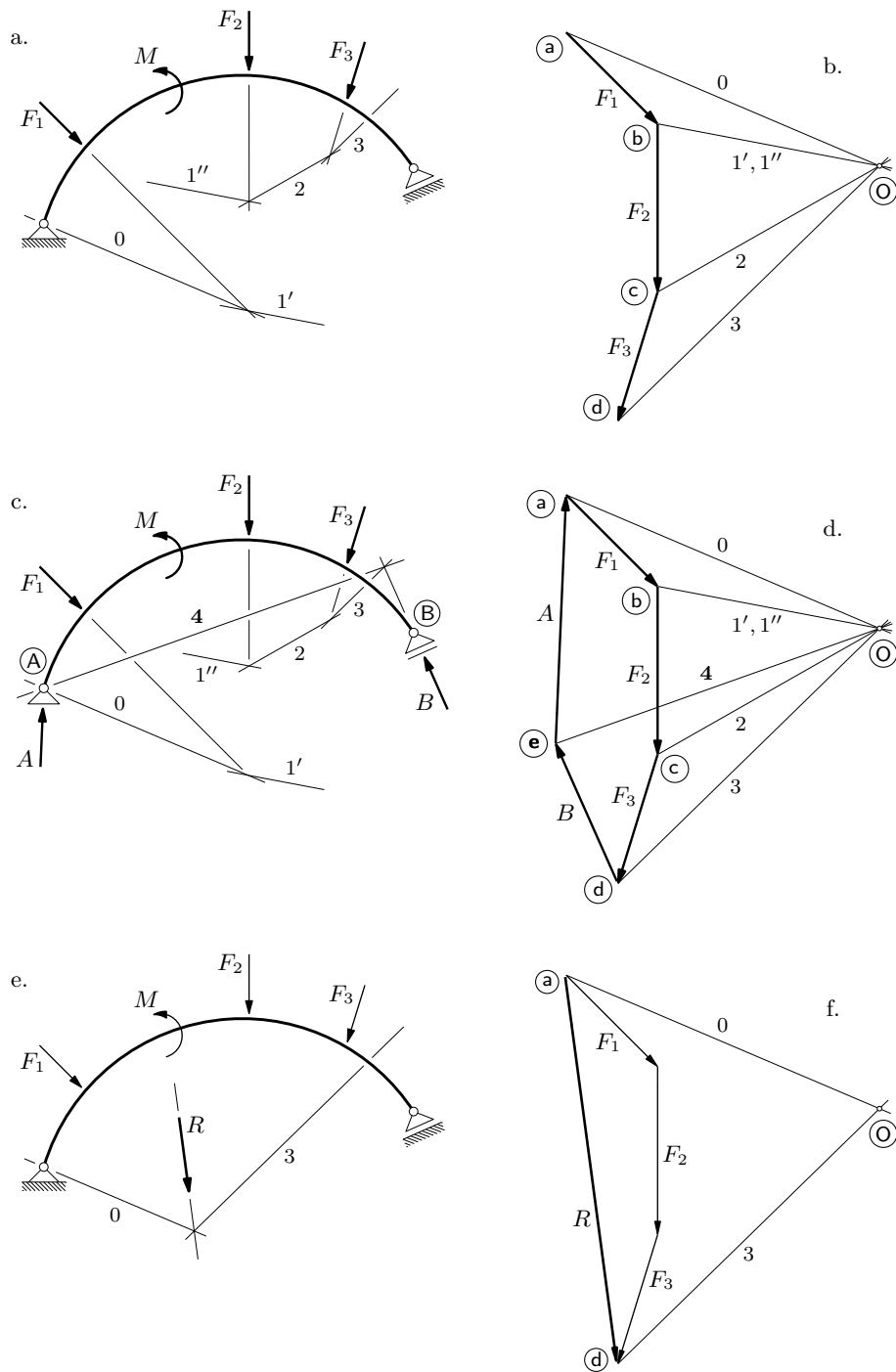
djelovanja suprotan, pa je u poligonu sila (slika 38.c.) određena vektorom od točke  $b$  do točke  $O$ :  $\vec{F}_{M,1} = \vec{bO}$ . Druga sila sprega,  $\vec{F}_{M,2}$ , ima, znamo, suprotan smisao djelovanja i isti intenzitet kao sila  $\vec{F}_{M,1}$ ,  $\vec{F}_{M,2} = -\vec{F}_{M,1}$ , a djeluje na pravcu koji je usporedan s pravcem djelovanja sile  $\vec{F}_{M,1}$ , dakle, sa stranicom  $1'$  verižnoga poligona. Novu ćemo stranicu označiti sa  $1''$  (slika 38.d.). Udaljenost  $d$  stranica  $1'$  i  $1''$  zadana je uvjetom  $|M| = d \cdot |F_{M,1}| = d \cdot |F_{M,2}|$  pa je  $d = |M|/|F_{M,1}|$ . Međusobni je pak položajni odnos tih stranica određen zahtjevom da spreg i moment imaju isti smisao vrtnje; u našem primjeru mora stranica  $1''$  biti iznad stranice  $1'$ . U poligonu sila se zraka  $1''$ , usporedna s istoimenom stranicom verižnoga poligona, poklapa sa zrakom  $1'$  (slika 38.e.). Sila  $\vec{F}_{M,2}$  je stoga određena vektorom od točke  $O$  do točke  $b$ :  $\vec{F}_{M,2} = \vec{Ob}$ . Time smo silu  $\vec{F}_1$  i moment  $M$  zamijenili dvjema silama, silama  $\vec{F}_{1,1}$  i  $\vec{F}_{M,2}$ .

Prelazimo na sljedeću silu, silu  $\vec{F}_2$ . Nju ćemo rastaviti tako da jedna njezina komponenta poništi silu  $\vec{F}_{M,2}$ . Ta će komponenta, neka je to  $\vec{F}_{2,1}$ , djelovati stoga na stranici  $1''$  verižnoga poligona. Slijedi da silu  $\vec{F}_2$  moramo rastaviti u točki u kojoj ta stranica siječe njezin pravac djelovanja. Smjer pravca na kojem djeluje druga komponenta određujemo u poligonu sila. Budući da je  $\vec{F}_{M,2} = \vec{Ob}$ , mora biti  $\vec{F}_{2,1} = \vec{bO}$ , pa je  $\vec{F}_{2,2} = \vec{Oc}$ , gdje je  $c$  vršak vektora  $\vec{F}_2$  (slika 38.g.); zraku kroz točke  $O$  i  $c$  označit ćemo sa  $2$ . Stranica  $2$  verižnoga poligona (slika 38.f.) uporedna je sa zrakom  $2$ . Sada na nosač umjesto sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  i momenta  $M$  djeluju sile  $\vec{F}_{1,1}$  i  $\vec{F}_{2,2}$ .

Na kraju ćemo rastaviti i silu  $\vec{F}_3$  i to tako da pritom poništimo silu  $\vec{F}_{2,2}$ . Postupamo kao sa silom  $\vec{F}_2$  pa ćemo taj postupak i opisati istim riječima. Obratite ipak pozornost na oznake sila, zrakâ u poligonu sila i stranica verižnoga poligona! Jedna komponenta sile  $\vec{F}_3$ , neka je to  $\vec{F}_{3,1}$ , djelovat će na stranici  $2$  verižnoga poligona. Slijedi da silu  $\vec{F}_3$  moramo rastaviti u točki u kojoj ta stranica siječe njezin pravac djelovanja. Smjer pravca na kojem djeluje druga komponenta određujemo u poligonu sila. Budući da je  $\vec{F}_{2,2} = \vec{Oc}$ , mora biti  $\vec{F}_{3,1} = \vec{cO}$ , pa je  $\vec{F}_{3,2} = \vec{Od}$ , gdje je  $d$  vršak vektora  $\vec{F}_3$  (slika 39.b.); zraku kroz točke  $O$  i  $d$  označit ćemo sa  $3$ . Stranica  $3$  verižnoga poligona (slika 39.a.) uporedna je sa zrakom  $3$ . Sva smo zadana djelovanja sada sveli na sile  $\vec{F}_{1,1}$  i  $\vec{F}_{3,2}$ , pa se možemo posvetiti pitanju reakcija  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ .

Rekli smo već da ćemo reakcije sastaviti od po dvije komponente. Jednu komponentu sile  $\vec{B}$  zadajemo tako da poništi preostalu komponentu sile koju smo posljednju rastavili — komponentu  $\vec{F}_{3,2}$  sile  $\vec{F}_3$ . Komponenta  $\vec{B}_1$  djelovat će, prema tome, na stranici  $3$  verižnoga poligona, pa komponenta  $\vec{B}_2$  mora proći točkom u kojoj ta stranica siječe pravac djelovanja sile  $\vec{B}$  (slika 39.c.). Slično tome, komponentu  $\vec{A}_2$  reakcije  $\vec{A}$  zadajemo tako da poništi i posljednju komponentu zadanih djelovanja — ili: prvu komponentu prve rastavljene sile, dakle komponentu  $\vec{F}_{1,1}$ . Prisjetite se: da omogućimo takvo zadavanje sile  $\vec{A}_2$ , slaganje verižnoga poligona započeli smo povlačenjem stranice  $0$ , na kojoj sila  $\vec{F}_{1,1}$  djeluje, upravo kroz točku  $A$ .

Nakon svega, nakon svih poništavanja, ostaju nam još samo (nepoznate) komponente  $\vec{A}_1$  sile  $\vec{A}$  i  $\vec{B}_2$  sile  $\vec{B}$ . Budući da je cijeli sistem u ravnoteži, u ravnoteži su i te dvije komponente. Dobro nam znana „pjesmica” kaže: dvije su sile u ravnoteži ako djeluju na istom pravcu te ako su im orijentacije suprotne, a intenziteti jednaki. Sila  $\vec{A}_1$



Slika 39.

prolazi, znamo, točkom A, a sila  $\vec{B}_2$  sjecištem pravca djelovanja sile  $\vec{B}$  i stranice 3, pa te dvije točke određuju njihov zajednički pravac djelovanja — stranicu 4 verižnoga poligona, nazvanu i *zaključnom linijom* (slika 39.c).

Intenzitet i orijentacija komponente  $\vec{B}_1$  sile  $\vec{B}$ , koja poništava silu  $\vec{F}_{3,2}$ , određeni su u poligonu sila:  $\vec{B}_1 = \vec{dO}$ . Njezina druga komponenta,  $\vec{B}_2$ , ležat će na pravcu 4 koji kroz pol O prolazi usporedno sa stranicom 4 verižnoga poligona. Budući da je poznat i pravac djelovanja sile  $\vec{B}$ , možemo sastaviti trokut sila sa stranicama  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  i  $\vec{B}$  tako da bude

$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}$ : ako sa  $e$  označimo sjecište zrake 4 i pravca koji je usporedan s pravcem djelovanja sile  $\vec{B}$ , a prolazi točkom  $d$ , tada su  $\vec{B}_2 = \vec{Oe}$  i  $\vec{B} = \vec{de}$  (slika 39.d.).

I na kraju, reakcija  $\vec{A}$  određena je vektorom  $\vec{A} = \vec{ea}$ . Naime, iz uvjeta ravnoteže sile  $\vec{A}_1$  i  $\vec{B}_2$  slijedi  $\vec{A}_1 = \vec{eO}$ , a komponentu  $\vec{A}_2$  zadali smo tako da je  $\vec{A}_2 = \vec{Oa}$ . Prema tome,  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{eO} + \vec{Oa} = \vec{ea}$  (slika 39.d., ponovo).

Treba uočiti da reakciju  $\vec{A}$  nismo mogli odrediti prije reakcije  $\vec{B}$ , točnije, prije komponente  $\vec{B}_2$ : pravac djelovanja sile  $\vec{A}$  je nepoznat, pa za sastavljanje trokuta sile moraju biti poznate obje njezine komponente, i  $\vec{A}_2$  i  $\vec{A}_1$ ; geometrijskim rječnikom, moramo poznavati pravce na kojima leže dvije stranice trokuta i duljine tih stranica. To je druga razlika u odnosu na primjer sa slike 35. na stranici 66.: kako su tada pravci djelovanja obje reakcije bili poznati, trokute sile potrebne za njihovo određivanje mogli smo sastaviti neovisno jedan o drugom.

Vratimo se sada malo unatrag, do trenutka kada smo zadane sile  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  i zadani moment  $M$  zamijenili silama  $\vec{F}_{1,1}$  i  $\vec{F}_{3,2}$ . Jasno je da bismo, kad bi na nosač djelovale dâljnje sile i momenti, takav postupak mogli nastaviti. Drugim riječima, neovisno o tome koliko sile i momenata djeluje, konstruiranjem verižnoga poligona sve ih možemo svesti na samo dvije sile. A rezultantu dviju sila lako je naći. Smjer pravca djelovanja, orijentaciju i intenzitet nalazimo u poligonu sila (slika 39.f.):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{1,1} + \vec{F}_{3,2} = \vec{aO} + \vec{Od} = \vec{ad}.$$

Kako je  $\vec{R}$  rezultanta sila  $\vec{F}_{1,1}$  i  $\vec{F}_{3,2}$ , pravac na kojem djeluje mora proći sjecištem pravaca djelovanja tih dviju sila, a to je—u planu položajâ—sjecište stranica 0 i 3 verižnoga poligona (slika 39.e.).

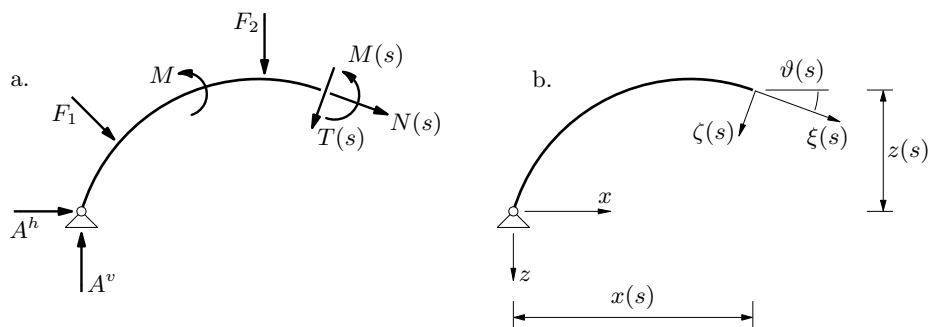
Moment  $M$  se, naravno, u prethodnom izrazu za  $\vec{R}$  ne pojavljuje; on samo „paralelno pomiče” pravac djelovanja rezultante. (Da nema momenta, stranica 1'' verižnoga poligona poklopila bi se sa stranicom 1' pa bi stranica 3 na crtežu ležala „niže”, a to bi pak pravac djelovanja rezultante pomaknulo udesno.)

## 4.2. Sile u poprečnim presjecima

Kada su reakcije poznate, možemo odrediti i sile u poprečnim presjecima. Vidjet ćemo da sile u presjecima, za razliku od reakcija, ovise o obliku osi diska te da u obzir treba uzeti i hvatišta zadanih sila—točnije rečeno, sjecišta pravaca djelovanja zadanih sila s osi diska.

### 4.2.1. Analitički postupak

Vrijednosti sile u odabranom poprečnom presjeku izračunavamo *metodom jednostavnih presjeka*: odbacujemo dio nosača s jedne strane tog presjeka i uravnotežujemo preostali dio na koji, uz vanjske, djeluju i sile u presjeku (slika 40.a.; dio je izdvojen iz nosača sa slike 37.a. na stranici 68.). Osim vrijednostî triju sila u presjeku, sve su ostale sile—i zadane i reakcije—koje djeluju na promatrani dio poznate, pa su za izračunavanje nepoznatih vrijednosti dovoljne tri jednadžbe ravnoteže koje možemo napisati za taj dio.



Slika 40.

Os nosača ćemo, kao u odjeljku 3., opisati parametarski zadanom krivuljom:

$$\vec{r} : s \mapsto \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + z(s)\vec{k}.$$

(Često je  $s \equiv x$  pa je  $\vec{r}(x) = x\vec{i} + z(x)\vec{k}$ .) Uzet ćemo da je parametrizacija takva da se pri porastu vrijednosti parametra  $s$  po nosaču krećemo slijeva nadesno, od ležaja A prema ležaju B. K tomu je još pogodno uzeti i da je  $s = 0$  u ležaju A i da su  $x(0) = 0$  i  $z(0) = 0$ .

Zadržat ćemo, kao na slici 40.a., i uravnotežiti lijevi dio nosača, između ležaja A i odabranoga presjeka čije je težište točka  $\vec{r}(s)$ . U točki  $\vec{r}(s)$  definirat ćemo lokalni (desni) koordinatni sustav  $(\xi\zeta)(s)$  tako da se ravnina  $(\xi\zeta)(s)$  poklapa s ravinom  $xz$  i da su pravac i orijentacija osi  $\xi(s)$  određeni vektorom  $\vec{r}'(s)$ ;  $\vec{r}'(s)$  je vektor tangente na krivulju  $\vec{r}$  u točki  $\vec{r}(s)$ , pa je okomit na ravinu poprečnog presjeka, a zbog izbora parametrizacije „izlazi” iz nje (slika 40.b.). Lako je vidjeti da je os  $\eta(s)$  usporedna s osi  $y$  i da je jednako orijentirana (izlazi iz papira prema nama). Kut između globalne osi  $x$  i lokalne osi  $\xi(s)$  označit ćemo s  $\vartheta(s)$ . Uzdužna sila djeluje na pravcu osi  $\xi(s)$ , a poprečna na pravcu osi  $\zeta(s)$ ; po definiciji, pozitivne orijentacije sila podudaraju se s orijentacijama odgovarajućih osi (usporedite slike 40.a. i b.). Vektor momenta savijanja leži na pravcu osi  $\eta(s)$ ; i njegova se pozitivna orijentacija, po definiciji, podudara s orijentacijom te osi, što znači da ćemo moment savijanja smatrati pozitivnim ako je njegov smisao vrtnje suprotan od smisla vrtnje kazaljke na satu.

Rezultirajuću silu zadanih sila koje djeluju na promatrani dio nosača označit ćemo s  $\vec{R}_{\widehat{As}}$ :

$$\vec{R}_{\widehat{As}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Projiciramo li na os  $\xi(s)$  sve sile koje djeluju na promatrani dio, vrijednost  $N(s)$  uzdužne sile možemo izračunati iz jednadžbe ravnoteže tih projekcija,

$$\cos \vartheta(s) \cdot A^h - \sin \vartheta(s) \cdot A^v + R_{\widehat{As}}^{\xi(s)} + N(s) = 0, \quad (115)$$

gdje je  $R_{\widehat{As}}^{\xi(s)}$  vrijednost projekcije sile  $\vec{R}_{\widehat{As}}$  na os  $\xi(s)$ :

$$R_{\widehat{As}}^{\xi(s)} = \cos \vartheta(s) \cdot R_{\widehat{As}}^h + \sin \vartheta(s) \cdot R_{\widehat{As}}^v = \cos \vartheta(s) \cdot F_1^h + \sin \vartheta(s) \cdot (F_1^v + F_2^v)$$



[nacrtajte skicu!]. Iz jednadžbe (115) neposredno slijedi

$$N(s) = -\cos \vartheta(s) \cdot A^h + \sin \vartheta(s) \cdot A^v - R_{\widehat{A}s}^{\zeta(s)}. \quad (116)$$

Analogno, vrijednost  $T(s)$  poprečne sile možemo neposredno izračunati iz jednadžbe ravnoteže projekcija sila na os  $\zeta(s)$ ,

$$-\sin \vartheta(s) \cdot A^h - \cos \vartheta(s) \cdot A^v + R_{\widehat{A}s}^{\zeta(s)} + T(s) = 0, \quad (117)$$

pri čemu je

$$R_{\widehat{A}s}^{\zeta(s)} = -\sin \vartheta(s) \cdot R_{\widehat{A}s}^h + \cos \vartheta(s) \cdot R_{\widehat{A}s}^v = -\sin \vartheta(s) \cdot F_1^h + \cos \vartheta(s) \cdot (F_1^v + F_2^v)$$

vrijednost projekcije sile  $\vec{R}_{\widehat{A}s}$  na tu os [skicirajte!]. Slijedi:

$$T(s) = \sin \vartheta(s) \cdot A^h + \cos \vartheta(s) \cdot A^v - R_{\widehat{A}s}^{\zeta(s)}. \quad (118)$$

Često je jednostavnije (i manje podložno greškama) vrijednosti  $N(s)$  i  $T(s)$  izračunati rješavajući sustav jednadžbi ravnoteže projekcija sila na osi  $x$  i  $z$ :

$$\begin{aligned} \cos \vartheta(s) \cdot N(s) - \sin \vartheta(s) \cdot T(s) + A^h + R_{\widehat{A}s}^h &= 0, \\ \sin \vartheta(s) \cdot N(s) + \cos \vartheta(s) \cdot T(s) - A^v + R_{\widehat{A}s}^v &= 0. \end{aligned} \quad (119)$$

I napokon, vrijednost  $M(s)$  momenta savijanja izračunavamo iz jednadžbe ravnoteže momenata oko točke  $\vec{r}(s)$ ,

$$z(s) \cdot A^h - x(s) \cdot A^v + M_{\widehat{A}s/\vec{r}(s)} + M(s) = 0, \quad (120)$$

pa je

$$M(s) = -z(s) \cdot A^h + x(s) \cdot A^v - M_{\widehat{A}s/\vec{r}(s)} \quad (121)$$

gdje je  $M_{\widehat{A}s/\vec{r}(s)}$  vrijednost rezultirajućeg momenta zadanoga momenta (općenitije: zadanih momenata) i momenata sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  u odnosu na točku  $\vec{r}(s)$ :

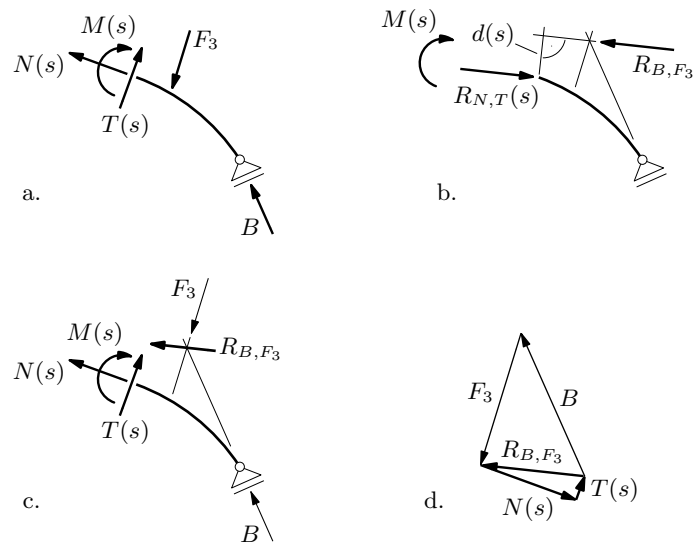
$$M_{\widehat{A}s/\vec{r}(s)} = M + \{[z(s) - z_1] \cdot F_1^h + [x(s) - x_1] \cdot F_1^v\} + \{[x(s) - x_2] \cdot F_2^v\}$$

(kao i prije, razni  $x$  i  $z$  označavaju udaljenosti, a ne koordinate). Točka  $\vec{r}(s)$  je najpogodniji momentni pol, jer u jednadžbu ravnoteže momenata tada ne ulaze sile  $\vec{N}(s)$  i  $\vec{T}(s)$ .

[Napišite izraze za sile u odabranom presjeku tako da odbacite lijevi, a zadržite desni dio nosača, između presjeka u točki  $\vec{r}(s)$  i ležaja B!]

#### 4.2.2. Grafički postupak

I pri grafičkom postupku određivanja sila u odabranom poprečnom presjeku zamišljamo da smo odbacili dio nosača s jedne strane presjeka. Pozabavit ćemo se ponovo nosačem sa slike 37.a. na stranici 68. i odrediti sile u istom presjeku kao i pri opisu analitičkoga postupka (slika 40., stranica 75.).



Slika 41.

Budući da prvo treba naći rezultantu svih poznatih sila koje djeluju na dio nosača koji smo zadržali, pogodno je zadržati dio na kojemu ima manje sila. U našem je primjeru to dio desno od promatranoga presjeka — na njega, osim sila u presjeku, djeluju još samo sila  $\vec{F}_3$  i reakcija  $\vec{B}$  (slika 41.a.). Odbacit ćemo stoga dio lijevo od presjeka.

Intenzitet rezultante  $\vec{R}_{B,F_3}$  sila  $\vec{F}_3$  i  $\vec{B}$ , njezin smisao i smjer pravca na kojem djeluje nalazimo u poligonu sila (gornji trokut u poligonu na slici 41.d.). Pravac djelovanja sile  $\vec{R}_{B,F_3}$  prolazi sjecištem pravaca na kojima djeluju sile  $\vec{F}_3$  i  $\vec{B}$  (slika 41.c.); njegov je smjer, rekosmo, određen u poligonu sila.

Sile u presjeku uravnotežuju rezultantu  $\vec{R}_{B,F_3}$ . Pravci djelovanja uzdužne i poprečne sile poznati su: uzdužna sila djeluje na tangenti na os nosača, a poprečna okomito na nju (slika 41.c.; naznačene su i dogovorne pozitivne orijentacije — te su orijentacije, naravno, suprotne od onih na lijevom dijelu prikazanom na slici 40.a.). U poligonu sila možemo, prema tome, zatvoriti trokut koji čine sile  $\vec{R}_{B,F_3}$ ,  $\vec{N}(s)$  i  $\vec{T}(s)$ ; to je donji trokut u poligonu na slici 41.d. Stranice trokuta na kojima leže sile u presjeku usporedne su s pravcima djelovanja tih sila na slici c. Tim su trokutom određeni intenziteti i orijentacije sila  $\vec{N}(s)$  i  $\vec{T}(s)$ ; orijentacije su takve da vrijedi  $\vec{N}(s) + \vec{T}(s) + \vec{R}_{B,F_3} = \vec{0}$ : slijedimo li strelice, kružit ćemo trokutom. (Dapače, zaboravimo li na časak rezultantu, slijedeći strelice kružit ćemo četverokutom koji čine sile  $\vec{B}$ ,  $\vec{F}_3$ ,  $\vec{N}(s)$  i  $\vec{T}(s)$ ; drugim riječima, poligon sastavljen od svih (stvarnih) sila koje djeluju na promatrani dio zatvoren je.) Vidimo da je stvarna orijentacija sile  $\vec{N}(s)$  suprotna od pretpostavljene — ta sila djeluje, dakle, „prema” poprečnom presjeku, pa je tlačna.

Kako rezultanta  $\vec{R}_{B,F_3}$  ne prolazi težištem poprečnoga presjeka, ravnoteža momenata neće biti zadovoljena samo sa silama  $\vec{N}(s)$  i  $\vec{T}(s)$ . Sila  $\vec{R}_{B,F_3}$  i rezultanta  $\vec{R}_{N,T}(s)$  sila  $\vec{N}(s)$  i  $\vec{T}(s)$  ne djeluju, naime, na istom pravcu pa tvore spreg (slika 41.b.). Ravnotežu momenata osigurava moment savijanja  $M(s)$  u poprečnom presjeku. Stoga mora smisao vrtnje momenta  $M(s)$  biti suprotan od smisla vrtnje momenta sprega, a njegov pak intenzitet

mora biti jednak intenzitetu momenta sprega. Na slici b. sile su skicirane sa stvarnim orijentacijama, a moment  $M(s)$  s pretpostavljenom orijentacijom. Iz prethodnog zahtjeva sada slijedi da je stvarna orijentacija momenta jednaka pretpostavljenoj. Njegov intenzitet možemo najlakše izračunati kao intenzitet momenta sile  $\vec{R}_{B,F_3}$  u odnosu na težište poprečnoga presjeka. Kako sve orijentacije na slici odgovaraju stvarnim orijentacijama, možemo pisati

$$M(s) = d(s) \cdot R_{B,F_3},$$

pri čemu je  $d(s)$  udaljenost težišta poprečnoga presjeka od pravca djelovanja sile  $\vec{R}_{B,F_3}$ . Općenitije je

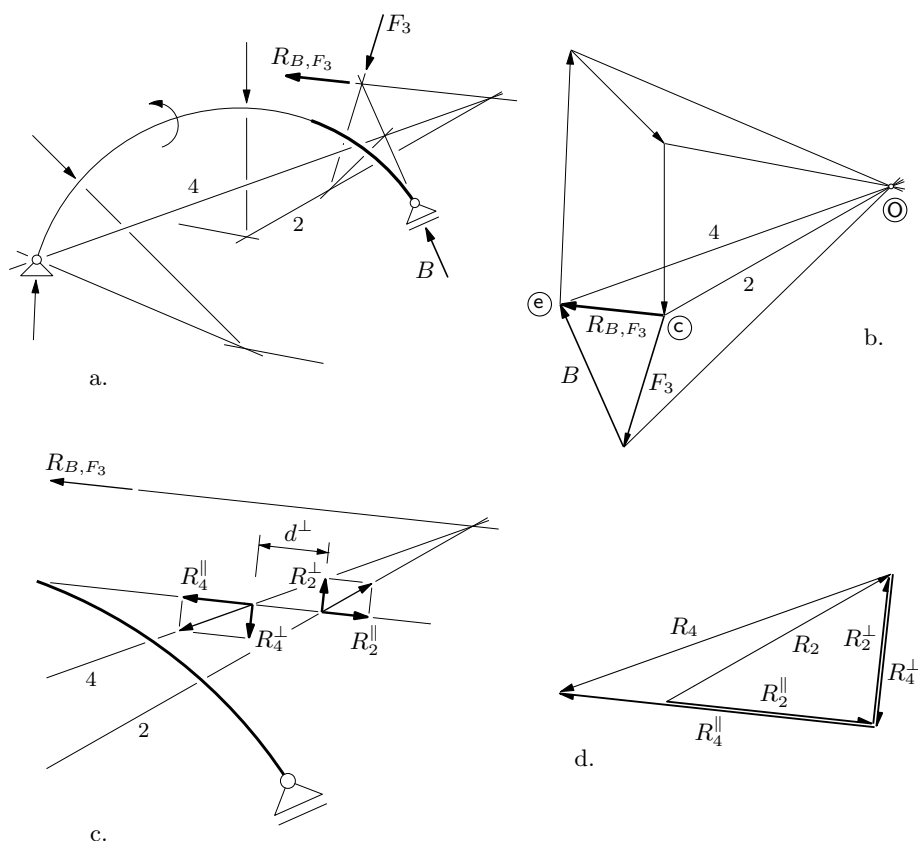
$$|M(s)| = d(s) \cdot |R_{B,F_3}|.$$

### 4.2.3. Primjene verižnoga poligona

U poligonu sila na slici 42.b. vidimo da je

$$\vec{R}_{B,F_3} = \vec{c}e = \vec{c}O + \vec{O}e.$$

Kako sile  $\vec{c}O$  i  $\vec{O}e$  leže na zrakama 2 i 4 poligona sila, mora pravac djelovanja njihove rezultante proći sjecištem stranica 2 i 4 verižnoga poligona (slika 42.a.). Prema tome, pravac na kojem djeluje sila  $\vec{R}_{B,F_3}$  možemo odrediti i tako da tim sjecištem povučemo paralelu s pravcem kroz točke c i e.



Slika 42.

Činjenicu da postoje (barem) dva načina određivanja pravca djelovanja rezultante možemo upotrijebiti i za provjeru ispravnosti grafičke konstrukcije: paralela s pravcem rezultante u poligonu sila povučena kroz sjecište stranica 2 i 4 verižnoga poligona mora proći i sjecištem pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $\vec{F}_3$ ; i obratno, paralela kroz sjecište djelovanja tih sila mora proći sjecištem stranica verižnog poligona. Napokon, pravac djelovanja rezultante možemo odrediti i kao spojnicu sjecišta pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $\vec{F}_3$  i sjecište stranica 2 i 4 verižnoga poligona; ta spojnica mora, naravno, biti usporedna s pravcem na kojem rezultanta leži u poligonu sila.

S pomoću verižnoga poligona možemo moment  $M(s)$  odrediti i kada je pravac djelovanja rezultante nepoznat (primjerice, kada leži izvan dijela ravnine obuhvaćena crtežom): umjesto momenta rezultante u odnosu na težište poprečnoga presjeka naći ćemo moment njezinih komponenata na stranicama verižnoga poligona. Vidjet ćemo kasnije da postupak koji ćemo opisati ima dalekosežne posljedice.

Komponente rezultante  $\vec{R}_{B,F_3}$  koje djeluju na stranicama 2 i 4 verižnoga poligona označit ćemo sa  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_4$ . Svaku od tih komponenata rastavit ćemo u po dvije komponente. Jedna komponenta komponente  $\vec{R}_2$ , koju ćemo označiti s  $\vec{R}_2^{\parallel}$ , i jedna komponenta komponente  $\vec{R}_4$ , s oznakom  $\vec{R}_4^{\parallel}$ , djelovat će na pravcu koji prolazi težištem poprečnoga presjeka, a usporedan je s pravcem djelovanja sile  $\vec{R}_{B,F_3}$ , dok će druga komponenta sile  $\vec{R}_2$  i druga komponenta sile  $\vec{R}_4$ , označit ćemo ih s  $\vec{R}_2^{\perp}$  i  $\vec{R}_4^{\perp}$ , djelovati na pravcima okomitima na taj pravac (slika 42.c.; prikazani je odsječak preglednosti radi povećan).

Budući da pravac djelovanja komponenata  $\vec{R}_2^{\parallel}$  i  $\vec{R}_4^{\parallel}$  prolazi težištem poprečnoga presjeka, te dvije komponente ne doprinose momentu rezultante  $\vec{R}_{B,F_3}$  u odnosu na tu točku. Komponente  $\vec{R}_2^{\perp}$  i  $\vec{R}_4^{\perp}$  djeluju na međusobno usporednim pravcima, a u poligonu sila na slici 42.d. vidimo da imaju jednake intenzitete,  $|R_2^{\perp}| = |R_4^{\perp}| = H_{2,4}$ , i da su im orijentacije suprotne — one, dakle, tvore spreg. Označimo li udaljenost pravaca na kojima djeluju s  $d^{\perp}$ , intenzitet će momenta sprega biti  $d^{\perp} \cdot H_{2,4}$ . Njegov je smisao vrtnje, naravno, jednak smislu vrtnje momenta sile  $\vec{R}_{B,F_3}$  u odnosu na težište presjeka. Slijedi da je intenzitet momenta savijanja u poprečnom presjeku  $M(s) = d^{\perp} \cdot H_{2,4}$ . Treba, međutim, reći da udaljenost  $d^{\perp}$  ovisi o položaju poprečnoga presjeka, pa je potpuniji izraz za intenzitet momenta

$$M(s) = d^{\perp}(s) \cdot H_{2,4}.$$

Opisani se postupak može primijeniti za određivanja pravca djelovanja rezultante bilo kojega broja sila i momenata. Zamislimo, primjerice, da smo zadržali dio nosača lijevo od odabranoga presjeka (na slici 42.a. prikazan tanjom linijom). Na njega djeluju sile  $\vec{A}$ ,  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  i moment  $M$ . Sada je, prema poligonu sila na slici 42.b.,

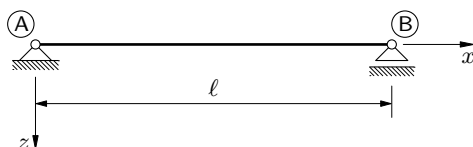
$$\vec{R}_{A,F_1,F_2} = \vec{A} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{e}\vec{c} = \vec{e}\vec{O} + \vec{O}\vec{c}.$$

pa možemo zaključiti da i sada pravac djelovanja te rezultante prolazi sjecištem stranica 2 i 4 verižnoga poligona na slici 42.a. Učinak momenta  $M$ , koji paralelno pomiče pravac njezina djelovanja, uvažen je pri crtanju verižnoga poligona paralelnim pomakom stranice 1' u stranicu 1''. Naravno,  $\vec{R}_{A,F_1,F_2} = -\vec{R}_{B,F_3}$ .

### 4.3. Jednostavno oslonjena greda

*Jednostavno oslonjena greda u širem smislu* ravninski je štapni nosač približno ravne osi s jednim diskom koji je za podlogu pričvršćen u dvije točke tako da je u jednoj točki nepomičan, a u drugoj pomičan zglobni ležaj; umjesto zglobnih, ležajne veze mogu biti i statički i kinematički istovrijedne štapne veze — jedna je točka vezana dvama zglobnim štapovima čije osi ne leže istom pravcu, a druga jednim štapom. Disk grede može biti punostjeni štapni element ili rešetkasti disk. Ležajevi mogu, ali ne moraju biti u krajnjim točkama diska.

*Jednostavno oslonjena greda u užem smislu* ili *sàmo jednostavno oslonjena greda*<sup>12</sup> punostjeni je štapni nosač ravne, horizontalno položene osi, sa zglobnim ležajevima u krajnjim točkama, pri čemu je pomični ležaj horizontalno pomičan (slika 43.). Ako ležajevi nisu na krajevima diska, riječ je o gredi s prepustom ili o gredi s prepustima. Grede pak s rešetkastim diskom nazivat ćemo rešetkastim gredama.



Slika 43.

Gredu ćemo, kao na slici 43., u koordinatni sistem  $xz$  smjestiti tako da se njezina os poklapa s osi  $x$  i da joj je lijevi ležaj u ishodištu, a desni u točki  $(\ell, 0)$ ; duljinu  $\ell$  nazivamo *rasponom grede*. Budući da je za sve točke osi  $z = 0$ , umjesto „točka  $(x, 0)$ ” reći ćemo „točka  $x$ ”, a kasnije ćemo govoriti i o „presjeku  $x$ ”. Lijevi ćemo ležaj označiti slovom A, a desni slovom B.

Pokazat ćemo uskoro da će, djeluju li na jednostavno oslonjenu gredu (u užem smislu) samo vertikalne sile i, možda, momenti, reakcije u oba ležaja također biti vertikalne. Jednostavno oslonjena greda može stoga biti i proračunska shema slobodno položenih greda — greda kod kojih zaokretanja u dvjema točkama u kojima su oslonjene nisu spriječena — poput onih u Stonehengeu, prikazanih na slici 44. (iako je u slučaju takvih kamenih gromada vjedostojnost te proračunske sheme poprilično upitna).

Vrijeme je da u našu priču uvedemo i *distribuirane sile*. Kao primjer uzet ćemo jednostavno oslonjenu gredu sa slike 45.a., na koju djeluje distribuirana sila  $\vec{q}$  zadana funkcijom

$$\vec{q} : x \mapsto \vec{q}(x) = q(x) \vec{k} = \left( q_1 - \frac{q_1}{\ell} x \right) \vec{k}, \quad x \in [0, \ell]. \quad (122)$$

Skalarna funkcija

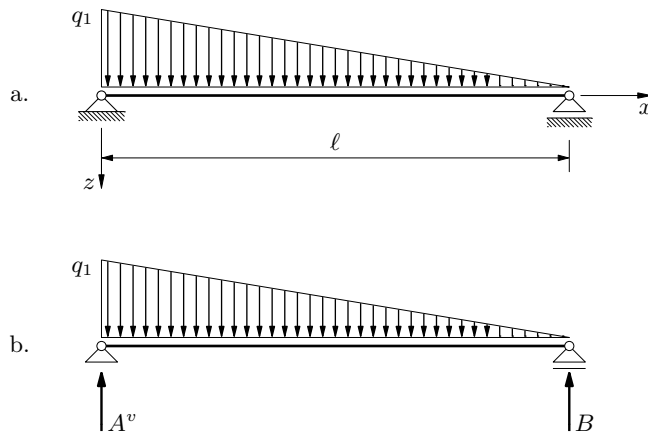
$$q : x \mapsto q(x) = q_1 - \frac{q_1}{\ell} x = \frac{q_1}{\ell} (\ell - x), \quad x \in [0, \ell]. \quad (123)$$

opisuje vrijednost distribuirane sile po jedinici duljine osi grede. (Budući da su za  $q_1 > 0$  i za  $x \in [0, \ell]$  vrijednosti funkcije  $q$  nenegativne, možemo reći i da ta funkcija opisuje intenzitet sile po jedinici duljine osi.) Jedinični vektor  $\vec{k}$  u zapisu funkcije  $\vec{q}$  pokazuje da, uz pozitivne vrijednosti funkcije  $q$ , sila djeluje „prema dolje”, okomito na os grede.

<sup>12</sup> Tradicionalno se u domaćoj literaturi jednostavno oslonjene grede nazivaju prostim gredama.



Slika 44.



Slika 45.

#### 4.3.1. Sile u vanjskim vezama

Kao i uvijek, analizu započinjemo izračunavanjem reakcija (slika 45.b.). Budući da je reakcija  $\vec{A}$  jedina sila koja može imati horizontalnu komponentu, iz jednadžbe ravnoteže projekcija sila na os  $x$  odmah slijedi da je  $A^h = 0$ . Jasno je da zaključak vrijedi općenito, za bilo koji skup zadanih vertikalnih sila, koncentriranih ili distribuiranih, pa i pri djelovanju momenata.

Vrijednosti reakcije  $\vec{B}$  i vertikalne komponente reakcije  $\vec{A}$  izračunat ćemo iz jednadžbi ravnoteže momenata u odnosu na točke A i B; u prvu ne ulazi sila  $\vec{A}$ , u drugu sila  $\vec{B}$ :

$$M_{q/A} + M_{B/A} = 0, \quad (124)$$

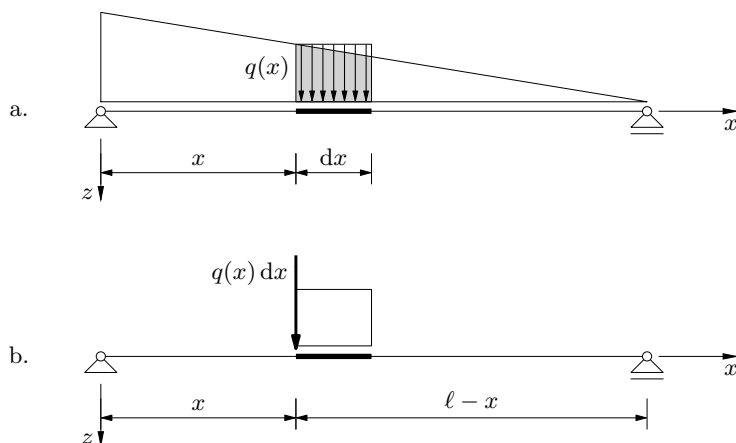
$$M_{A^v/B} + M_{q/B} = 0. \quad (125)$$

$M_{A^v/B}$  i  $M_{B/A}$  vrijednosti su momenata vertikalne komponente reakcije  $\vec{A}$  i reakcije  $\vec{B}$  oko točaka B i A; njih znamo izračunati:

$$M_{A^v/B} = -\ell \cdot A^v \quad \text{i} \quad M_{B/A} = \ell \cdot B$$

ako su sile orijentirane kao na slici 45.b.  $M_{q/A}$  i  $M_{q/B}$  vrijednosti su momenata distribuirane sile  $\vec{q}$  u odnosu na točke A i B; njihovo izračunavanje uključuje, neposredno ili prikriveno, postupak integriranja.

Prvo ćemo izvesti izraze u općem obliku, tako da ih možemo primijeniti za bilo koju vertikalno usmjerenu distribuiranu silu (ili za vertikalnu komponentu kose sile), a potom i jednostavnije izraze za naš poseban slučaj.



Slika 46.

Iz grede ćemo „izrezati” infinitezimalni odsječak između poprečnih presjeka u točkama  $x$  i  $x + dx$  (slika 46.a.). Možemo uzeti da se na njemu vrijednost distribuirane sile  $\vec{q}$  ne mijenja i da je jednaka vrijednosti  $q(x)$  u točki  $x$ , pa će vrijednost infinitezimalne rezultante pripadnoga dijela biti  $q(x) dx$ . Naime, u našem je primjeru

$$\frac{1}{2} \left( \frac{q_1}{\ell} (\ell - x) + \frac{q_1}{\ell} (\ell - (x + dx)) \right) dx = \frac{q_1}{\ell} (\ell - x) dx - \frac{q_1}{2\ell} (dx)^2 \approx q(x) dx,$$

a na sličan se način može pokazati da je i za bilo koju drugu „pristojnu” funkciju  $q$  doprinos prirasta na odsječku, kao neizmjereno mala veličina drugoga reda, zanemariv.

Štoviše, u izračunavanju momenata možemo uzeti i da infinitezimalna rezultanta djeluje u točki  $x$  (slika 46.b.). Lako je pokazati da je doprinos pomaka tog hvatišta od točke  $x$  prema točki  $x + dx$  zanemariv: djeluje li rezultanta u bilo kojoj točki  $x + \alpha dx$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) između točaka  $x$  i  $x + dx$ , vrijednost je njezina momenta u odnosu na točku A

$$-(x + \alpha dx) \cdot (q(x) dx) = -x \cdot q(x) dx + \alpha (dx)^2 \cdot q(x) \approx -x \cdot q(x) dx.$$

Odmah možemo zaključiti i da će vrijednost njezina momenta u odnosu na točku B biti

$$(\ell - x) \cdot q(x) dx.$$

Moment distribuirane sile  $\vec{q}$  u odnosu na neku točku dobivamo „zbrajanjem” momenata infinitezimalnih rezultanata sa svih takvih odsječaka uzduž grede. Budući da infinitezimalnih odsječaka ima neizmjereno mnogo i da za „pristojne” funkcije  $q$  konačna

vrijednost ne ovisi o načinu podjele na odsječke (ako su infinitezimalni i ako se ne preklapaju), zbrajanje se pretvara u integriranje, pa su vrijednosti momenata u odnosu na točke A i B

$$M_{q/A} = -\int_0^\ell x \cdot q(x) dx, \quad (126)$$

$$M_{q/B} = \int_0^\ell (\ell - x) \cdot q(x) dx. \quad (127)$$

Uvrštavanjem tih izraza u jednadžbe (124) i (125) dobivamo

$$-\int_0^\ell x \cdot q(x) dx + \ell \cdot B = 0, \quad (128)$$

$$-\ell \cdot A^v + \int_0^\ell (\ell - x) \cdot q(x) dx = 0. \quad (129)$$

Iz druge jednadžbe neposredno slijedi

$$A^v = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell (\ell - x) \cdot q(x) dx, \quad (130)$$

dok je iz prve jednadžbe

$$B = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell x \cdot q(x) dx. \quad (131)$$

U našem je primjeru vrijednost distribuirane sile zadana izrazom (123), pa su

$$\begin{aligned} A^v &= \frac{1}{\ell} \int_0^\ell (\ell - x) \cdot \left( \frac{q_1}{\ell} (\ell - x) \right) dx = \frac{q_1}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell^2 - 2\ell x + x^2) dx \\ &= \frac{q_1}{\ell^2} \left[ \ell^2 x - \ell x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right] \Big|_0^\ell = \frac{q_1 \ell}{3}, \\ B &= \frac{1}{\ell} \int_0^\ell x \cdot \left( \frac{q_1}{\ell} (\ell - x) \right) dx = \frac{q_1}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell x - x^2) dx \\ &= \frac{q_1}{\ell^2} \left[ \frac{1}{2} \ell x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right] \Big|_0^\ell = \frac{q_1 \ell}{6}. \end{aligned}$$

Dobivene vrijednosti možemo provjeriti uvrštavanjem u jednadžbu ravnoteže projekcija sila na os  $z$ :

$$-A^v - B + Q = 0,$$

gdje je  $Q$  vrijednost rezultante  $\vec{Q}$  distribuirane sile  $\vec{q}$ . U općem je slučaju  $Q$  „zbroj” vrijednosti infinitezimalnih rezultanata sa svih neizmjereno mnogo infinitezimalnih odsječaka,

$$Q = \int_0^\ell q(x) dx, \quad (132)$$



pa je u našem primjeru

$$Q = \frac{q_1}{\ell} \int_0^\ell (\ell - x) dx = \frac{q_1}{\ell} \left( \ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^\ell = \frac{q_1 \ell}{2}.$$

Rezultirajuće momente distribuirane sile  $\vec{q}$  u odnosu na točke A i B možemo, prema Varignonovu teoremu, izračunati i kao momente rezultante  $\vec{Q}$  u odnosu na te točke. Za to treba poznavati ne samo intenzitet rezultante, nego i pravac na kojemu djeluje. Rezultanta vertikalno usmjerene distribuirane sile djeluje na vertikalnom pravcu; njeгова je jednadžba

$$x = x_Q, \quad (133)$$

pri čemu je konstanta  $x_Q$  određena uvjetom

$$x_Q \cdot Q = M_{q/O},$$

gdje je  $M_{q/O}$  vrijednost momenta distribuirane sile u odnosu na ishodište. Slijedi:

$$x_Q = \frac{M_{q/O}}{Q} = \frac{\int_0^\ell x \cdot q(x) dx}{\int_0^\ell q(x) dx}. \quad (134)$$

Kako smo točku A smjestili u ishodište,  $M_{q/O} = M_{q/A}$ , tako da se, dijelom, vrtimo u krugu. Ali, za izračunavanje vrijednosti  $x_Q$  riješiti treba samo dva integrala, a ostali se momenti potom mogu izračunati kao momenti rezultante. Štoviše, u mnogim slučajevima integrale niti ne treba rješavati. Naime, intenzitet rezultante možemo izračunati kao površinu lika kojim je na crtežu prikazana distribuirana sila, a pravac na kojem rezultanta djeluje prolazi težištem toga lika. Za mnoge su jednostavnije likove izrazi za izračunavanje površine i položaja težišta poznati, a za neke se složenije mogu izvesti i bez uporabe integrala.

Distribuiranu silu u našem primjeru nazivamo, što nas ne treba začuditi, „trokutnim opterećenjem” (slika 47.). Prema izrazu (134) je

$$x_Q = \frac{\frac{q_1 \ell^2}{6}}{\frac{q_1 \ell}{2}} = \frac{1}{3} \ell,$$

a to je poznati izraz za apscisu težišta trokuta kojim je opterećenje prikazano. Isto je tako

$$Q = \frac{1}{2} q_1 \ell$$

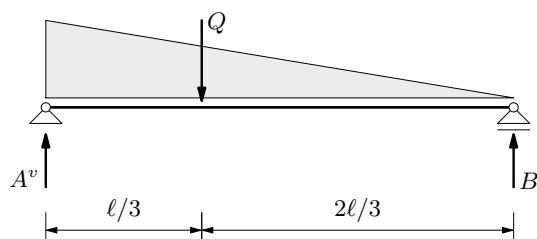
dobro poznati izraz za površinu tog trokuta.

Primjenom tih izraza možemo neposredno, bez integriranja, izračunati vrijednost momenta rezultante u odnosu na točku B,

$$M_{Q/B} = (\ell - x_Q) \cdot Q = \left( \frac{2}{3} \ell \right) \cdot \left( \frac{1}{2} q_1 \ell \right) = \frac{q_1 \ell^2}{3},$$

pa je

$$A^v = \frac{1}{\ell} M_{Q/B} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{q_1 \ell^2}{3} = \frac{q_1 \ell}{3}.$$

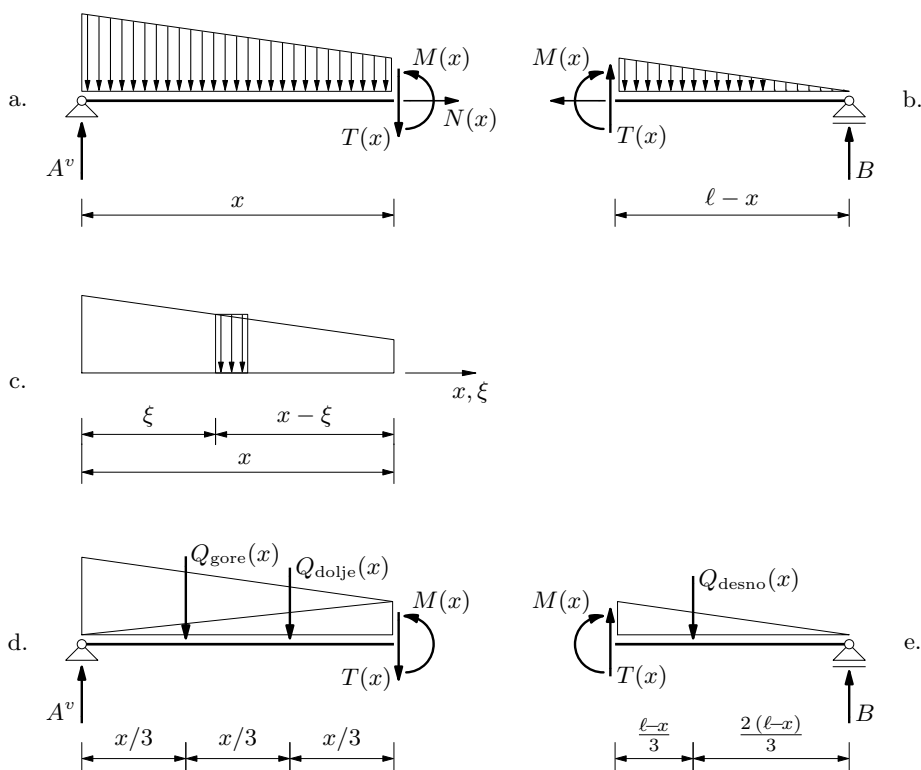


Slika 47.

### 4.3.2. Sile u presjecima

Opće izraze za vrijednosti sila u poprečnim presjecima izvest ćemo i sada metodom jednostavnih presjeka — odbacit ćemo dio grede desno od nekog, bilo kojega, presjeka  $x$ .

Na lijevi dio djeluju vertikalna komponenta reakcije u ležaju A, pripadni dio distribuirane sile  $\vec{q}$  i sile u poprečnom presjeku: uzdužna i poprečna sila te moment savijanja (slika 48.a.). Nepoznate su, zasad, sile u poprečnom presjeku.



Slika 48.

Jednadžba ravnoteže projekcija sila na os grede odmah daje

$$N(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \ell]. \quad (135)$$

Vrijednost poprečne sile izračunat ćemo iz jednadžbe ravnoteže projekcija sile na okomitu na os grede:

$$-A^v + \int_0^x q(\xi) d\xi + T(x) = 0 \quad (136)$$

(kako je  $x$  sada granica integracije, u podintegralnu smo funkciju morali uvesti pomoćnu varijablu  $\xi$ ; slika 48.c.). Slijedi:

$$T(x) = A^v - \int_0^x q(\xi) d\xi, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle. \quad (137)$$

Izraz vrijedi za  $x \in \langle 0, \ell \rangle$ , jer su točke A i B ( $x = 0$  i  $x = \ell$ ) hvatišta koncentriranih sila  $\vec{A}^v$  i  $\vec{B}$ , pa u njima poprečne sile nisu definirane. Kako je  $q(x) dx \cong 0$ , u uvjete ravnoteže postavljene za infinitezimalne dijelove nosača između presjekâ  $x = 0$  i  $x = 0 + dx = 0^+$  i između presjekâ  $x = \ell - dx = \ell^-$  i  $x = \ell$  ući će samo reakcije i poprečne sile, tako da su

$$T(0^+) = A^v \quad \text{i} \quad T(\ell^-) = -B;$$

dakle, vrijednosti poprečnih sila neposredno desno od točke A, u  $x = 0^+$ , i neposredno lijevo od točke B, u  $x = \ell^-$ , jednake su vrijednostima reakcija, uz promjenu predznaka u  $\ell^-$ .

Uvrstimo li u izraz (137) izraz (123) za vrijednost distribuirane sile,

$$T(x) = A^v - \int_0^x \frac{q_1}{\ell} (\ell - \xi) d\xi = \frac{q_1 \ell}{3} - \frac{q_1}{\ell} \left( \ell \xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \Big|_0^x,$$

dobit ćemo konačni funkcijski izraz za vrijednost poprečne sile:

$$T(x) = \frac{q_1 \ell}{3} - q_1 x + \frac{q_1}{2\ell} x^2, \quad x \in \langle 0, \ell \rangle. \quad (138)$$

Izvedeni izraz možemo provjeriti tako da izračunamo vrijednosti sile neposredno uz ležajeve. Iako je sa statičkoga stajališta primjenjiv samo za  $x \in \langle 0, \ell \rangle$ , izraz matematički gledano ima smisla i za šire područje, pa vrijednosti sile u presjecima  $x = 0^+$  i  $x = \ell^-$  izračunavamo formalno uvrštavajući  $x = 0$  i  $x = \ell$ :

$$T(0^+) \cong T(0) = q_1 \ell / 3 = A^v \quad \text{i} \quad T(\ell^-) \cong T(\ell) = -q_1 \ell / 6 = -B.$$

Kako pravac djelovanja sile  $\vec{T}(x)$  prolazi točkom  $x$ , za izračunavanje vrijednosti momenta savijanja  $M(x)$  najpogodnije je napisati jednadžbu ravnoteže momenata oko te točke,

$$-x \cdot A^v + \int_0^x (x - \xi) \cdot q(\xi) d\xi + M(x) = 0, \quad (139)$$

pa je u općem slučaju

$$M(x) = x \cdot A^v - \int_0^x (x - \xi) \cdot q(\xi) d\xi, \quad x \in [0, \ell]. \quad (140)$$

U našem je primjeru

$$\begin{aligned} M(x) &= x \cdot A^v - \int_0^x (x - \xi) \cdot \left( \frac{q_1}{\ell} (\ell - \xi) \right) d\xi \\ &= \frac{q_1 \ell}{3} x - \frac{q_1}{\ell} \left( \ell x \xi - \frac{1}{2} (\ell + x) \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^3 \right) \Big|_0^x \end{aligned}$$

i, nakon uvrštavanja granica integracije i sređivanja,

$$M(x) = \frac{q_1 \ell}{3} x - \frac{q_1}{2} x^2 + \frac{q_1}{6\ell} x^3, \quad x \in [0, \ell]. \quad (141)$$

Na krajevima grede su zglobovi, pa vrijednosti momenata moraju biti jednake nuli. Kako u dobivenom funkcijskom izrazu nema konstantnoga člana, odmah možemo vidjeti da je  $M(0) = 0$ , a lako je provjeriti i da je  $M(\ell) = 0$ .

Izraze (141) i (138) izveli smo iz integralnih jednadžbi ravnoteže. Deriviranjem se može pokazati da vrijedi

$$M'(x) = T(x) \quad \text{i} \quad T'(x) = -q(x).$$

Dakle, kao što i treba očekivati nakon ispravno provedena postupka, funkcije  $M$  i  $T$  zadovoljavaju diferencijalne odnose, a time i diferencijalne jednadžbe ravnoteže.

Funkcijske izraze za vrijednosti sila u presjecima možemo izvesti i uvođenjem rezultante dijela distribuirane sile koji djeluje na promatranome odsječku grede. Intenzitet te rezultante jednak je površini trapeza kojim je pripadni dio distribuirane sile prikazan; zgodno je taj trapez, kao na slici 48.d., sastaviti od dva trokuta čije su površine

$$\begin{aligned} Q_{\text{gore}}(x) &= \frac{1}{2} q_1 x, \\ Q_{\text{dolje}}(x) &= \frac{1}{2} q(x) x = \frac{q_1}{2\ell} (\ell x - x^2); \end{aligned}$$

apscise su njihovih težišta  $x_{Q_{\text{gore}}} = \frac{1}{3} x$  i  $x_{Q_{\text{dolje}}} = \frac{2}{3} x$ .

Jednadžba ravnoteže projekcija sila na os okomitu na os grede,

$$-A^v + Q_{\text{gore}}(x) + Q_{\text{dolje}}(x) + T(x) = 0,$$

daje

$$T(x) = A^v - Q_{\text{gore}}(x) - Q_{\text{dolje}}(x) = \frac{q_1 \ell}{3} - q_1 x + \frac{q_1}{2\ell} x^2,$$

a iz jednadžbe ravnoteže momenata oko točke  $x$ ,

$$-x \cdot A^v + \frac{2}{3} x \cdot Q_{\text{gore}}(x) + \frac{1}{3} x \cdot Q_{\text{dolje}}(x) + M(x) = 0,$$

slijedi

$$M(x) = x \cdot A^v - \frac{2}{3} x \cdot Q_{\text{gore}}(x) - \frac{1}{3} x \cdot Q_{\text{dolje}}(x) = \frac{q_1 \ell}{3} x - \frac{q_1}{2} x^2 + \frac{q_1}{6\ell} x^3.$$

Ispravnost postupka možemo provjeriti uvrštavanjem dobivenih izraza u, primjerice, jednadžbu ravnoteže momenata oko ishodišta/točke A:

$$-\frac{1}{3}x \cdot Q_{\text{gore}}(x) - \frac{2}{3}x \cdot Q_{\text{dolje}}(x) - x \cdot T(x) + M(x) = 0.$$

Izraze za vrijednosti sila u poprečnim presjecima možemo, naravno, izvesti i tako da odbacimo dio grede lijevo od presjeka  $x$  (slike 48.b. i e.).

Intenzitet rezultante dijela distribuirane sile koji djeluje na odsječku grede desno od presjeka sada je jednak površini trokuta

$$Q_{\text{desno}}(x) = \frac{1}{2}q(x)(\ell - x) = \frac{q_1}{2\ell}(\ell - x)^2.$$

Zamijenimo li distribuiranu silu rezultantom (slika 48.e.), za promatrani su dio jednadžba ravnoteže projekcija sila na os  $z$  i jednadžba ravnoteže momenata oko točke  $x$

$$-T(x) + Q_{\text{desno}}(x) - B = 0$$

i

$$-M(x) - \frac{1}{3}(\ell - x) \cdot Q_{\text{desno}}(x) + (\ell - x) \cdot B = 0,$$

pa su

$$T(x) = Q_{\text{desno}}(x) - B$$

i

$$M(x) = (\ell - x) \cdot B - \frac{1}{3}(\ell - x) \cdot Q_{\text{desno}}(x);$$

nakon uvrštavanja izraza za  $B$  i  $Q_{\text{desno}}(x)$  i sređivanja ponovo ćemo dobiti izraze (138) i (141).

Ili, za dio desno od presjeka  $x$  možemo napisati integralne jednadžbe ravnoteže,

$$-T(x) + \int_x^\ell q(\xi) d\xi - B = 0,$$

$$-M(x) - \int_x^\ell (\xi - x) \cdot q(\xi) d\xi + (\ell - x) \cdot B = 0,$$

i iz njih izvesti izraze za vrijednosti poprečne sile i momenta savijanja:

$$T(x) = \int_x^\ell q(\xi) d\xi - B$$

$$M(x) = (\ell - x) \cdot B - \int_x^\ell (\xi - x) \cdot q(\xi) d\xi.$$

Za distribuiranu silu zadanu izrazom (123) bit će

$$T(x) = \frac{q_1}{\ell} \int_x^\ell (\ell - \xi) d\xi - B = \frac{q_1}{\ell} \left[ \ell\xi - \frac{1}{2}\xi^2 \right] \Big|_x^\ell - \frac{q_1\ell}{6},$$

$$\begin{aligned} M(x) &= (\ell - x) \cdot B - \frac{q_1}{\ell} \int_x^\ell (\xi - x)(\ell - \xi) d\xi \\ &= \frac{q_1\ell}{6}(\ell - x) - \frac{q_1}{\ell} \left[ -\ell x\xi + \frac{1}{2}(\ell + x)\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3 \right] \Big|_x^\ell; \end{aligned}$$

nakon sređivanja dobit ćemo iste izraze kao u prethodna tri izvoda.

### 4.3.3. Dijagrami unutarnjih sila

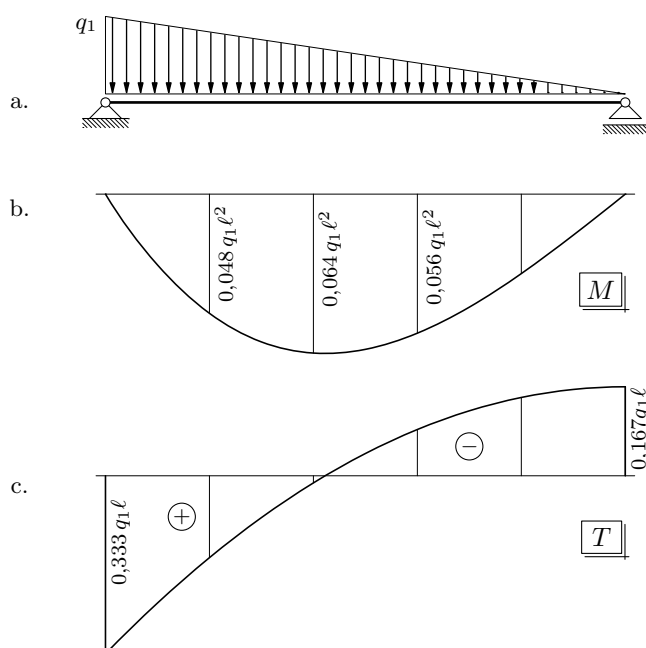
*Dijagrami unutarnjih sila* grafički su prikazi tōka vrijednosti unutarnjih sila uzduž osi štapnih elemenata. Ili, formalnije, matematičkim rječnikom: dijagrami unutarnjih sila su grafovi funkcija  $N$ ,  $T$  i  $M$  koje opisuju vrijednosti sila u presjecima; primjerice, momentni je dijagram

$$\{(x, M(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \ell]\}.$$

Te dijagrame u općem slučaju crtamo tako da izračunamo vrijednosti sila u dovoljnom broju presjeka (tablica 1.) te potom kroz dobivene točke interpoliramo krivulje (slike 49.b. i c.). (Kao što znamo, poprečne su sile, strogo govoreći, definirane u presjecima  $x = 0^+$  i  $x = \ell^-$ , ali vrijednosti izračunavamo uvrštavanjem  $x = 0$  i  $x = \ell$ .)

Tablica 1.

x	M(x)	T(x)
0,0 $\ell$	0,0	0,3333 $q_1 \ell$
0,2 $\ell$	0,0480 $q_1 \ell^2$	0,1533 $q_1 \ell$
0,4 $\ell$	0,0640 $q_1 \ell^2$	0,0133 $q_1 \ell$
0,6 $\ell$	0,0560 $q_1 \ell^2$	-0,0867 $q_1 \ell$
0,8 $\ell$	0,0320 $q_1 \ell^2$	-0,1467 $q_1 \ell$
1,0 $\ell$	0,0	-0,1667 $q_1 \ell$



Slika 49.

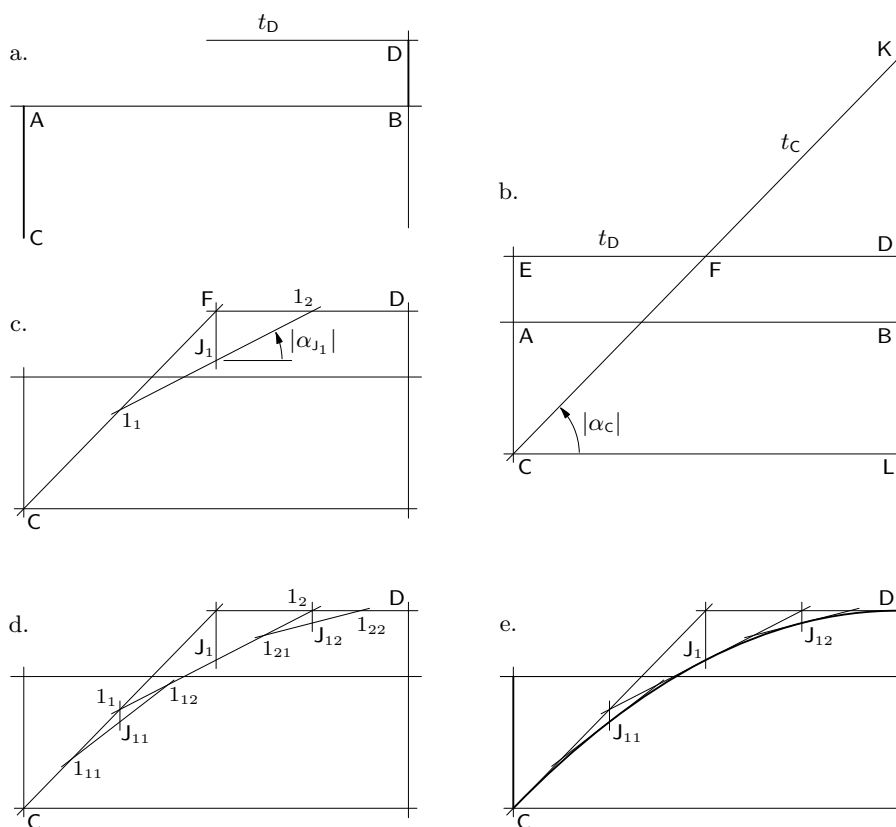
Za mnoge se slučajeve opterećenja, međutim, može preskočiti izvođenje funkcijskih izraza, a često se čak mogu izbjeći i izračunavanja vrijednosti u većem broju točaka.

Tako ćemo na temelju diferencijalnoga odnosa  $T' = -q$  i inverznoga odnosa operacija deriviranja i integriranja „predvidjeti” da će za linearno promjenjivo opterećenje dijagram poprečnih sila biti dio kvadratne parabole koji možemo nacrtati poznavajući tri elementa koja je lako odrediti [31]. Pokazali smo već da iz jednadžbi ravnoteže odmah slijedi da su vrijednosti poprečnih sila neposredno uz ležajeve jednake vrijednostima reakcija (uz promjenu predznaka na desnom kraju),

$$T(0^+) = A^v \quad \text{i} \quad T(\ell^-) = -B,$$

pa možemo uzeti da su  $(0, A^v)$  i  $(\ell, -B)$  točke parabole. Iz  $q(\ell) = 0$  pak slijedi da je tangenta u točki  $(\ell, -B)$  usporedna s osi  $x$ , jer u geometrijskoj interpretaciji diferencijalnoga odnosa  $T = -q$  funkcija  $q$  daje nagibe tangenata u točkama grafa funkcije  $T$ .

Na slici 50.a. smo točke  $(0, A^v)$  i  $(\ell, -B)$  označili sa C i D, a tangentu u točki D sa  $t_D$ ; točke A i B određuju os  $x$ . Kako je tangenta  $t_D$  okomita na os  $z$ , s kojom je os parabole usporedna, točka D je tjeme parabole, a pravac kroz točke D i B njezina je os.



Slika 50.

Prvo ćemo naći tangentu  $t_C$  u točki C. Sjecište tjemene tangente i paralele s osi kroz točku C označit ćemo sa E, a potom polovište odsječka između točaka E i D sa F (slika 50.b.). Udaljenost točaka C i E je

$$d(C, E) = d(C, A) + d(A, E) = d(C, A) + d(B, D) = A^v + B = \frac{q_1 \ell}{2},$$

dok je udaljenost točkama E i F

$$d(E, F) = \frac{\ell}{2}.$$

Slijedi da je

$$\frac{d(C, E)}{d(E, F)} = q_1.$$

Nagib tangente  $t_C$  mora biti  $\operatorname{tg} \alpha_C = T'(0) = -q(0) = -q_1$ , tako da je ta tangenta određena točkama C i F.<sup>13</sup>

U sljedećem ćemo koraku konstruirati točku  $J_1$  na paraboli, s apscisom  $x = \ell/2$ , i tangentu  $t_{J_1}$  u njoj (slika 50.c.): raspolovimo li odsječke na tangentama  $t_C$  i  $t_D$  između njihova sjecišta F i dirališta C i D, dobit ćemo točke  $1_1$  i  $1_2$  kojima je određena tangenta  $t_{J_1}$ , a njezino sjecište s pravcem koji kroz točku F prolazi usporedno s osi parabole bit će diralište  $J_1$ .

Kako bismo opisanoj konstrukciji, koja se temelji na projektivnogeometrijskim svojstvima parabole [31], dali statičko opravdanje, izračunat ćemo odgovarajuće vrijednosti poprečne sile i nagiba tangente (no, ponavljamo, za crtanje dijagrama te nam vrijednosti ne trebaju). Odvojimo li dio grede desno od presjeka  $x = \ell/2$ , iz jednadžbe ravnoteže projekcija sila na os  $z$  dobivamo

$$T(\ell/2) = -B + \frac{q_1 \ell}{8};$$

dakle, razlika je vrijednosti poprečnih sila u presjecima  $\ell/2$  i  $\ell^-$  jednaka četvrtini razlike vrijednosti sila u presjecima  $0^+$  i  $\ell^-$ . Točke F i  $J_1$  imaju jednake apscise,  $\ell/2$ , a apscise točkama  $1_1$  i  $1_2$  su  $\ell/4$  i  $3\ell/4$ ; slijedi da je točka  $J_1$  polovište odsječka između točkama  $1_1$  i  $1_2$  na pravcu kroz te dvije točke. Razlika aplikata točkama  $1_1$  i D polovina je razlike  $d_z(C, D)$  aplikata točkama C i D, pa je razlika aplikata točkama  $J_1$  i D,  $d_z(J_1, D)$ , četvrtina razlike  $d_z(C, D)$ ; prema tome, točka  $J_1$  upravo je točka  $(\ell/2, T(\ell/2))$ . Iz  $T' = q$  pak slijedi da je u točki  $(\ell/2, T(\ell/2))$  nagib tangente

$$\operatorname{tg} \alpha(\ell/2) = q(\ell/2) = -\frac{q_1}{2};$$

s druge je strane

$$\frac{d(J_1, F)}{d(F, 1_2)} = \frac{d_z(J_1, D)}{d(F, 1_2)} = \frac{\frac{1}{4} d_z(C, D)}{d(F, 1_2)} = \frac{\frac{1}{4} \frac{q_1 \ell}{2}}{\frac{\ell}{4}} = \frac{q_1}{2},$$

pa možemo zaključiti da je pravac kroz točke  $1_1$  i  $1_2$  tangenta s diralištem u točki  $J_1$ .

Daljim raspolavljanjem odsječaka na tangentama  $t_C$  i  $t_D$  između njihovih dirališta i njihovih sjecišta s tangentom  $t_{J_1}$  te raspolavljanjem odsječaka na tangenti  $t_{J_1}$  između dirališta  $J_1$  i sjecišta s tangentama  $t_C$  i  $t_D$  dobivamo parove točkama  $1_{11}$ ,  $1_{12}$  i  $1_{21}$ ,  $1_{22}$  kojima prolaze daljnje dvije tangente,  $t_{J_{11}}$  i  $t_{J_{12}}$ . Pravci usporedni s osi parabole kroz točke  $1_1$  i  $1_2$  sijeku novodobivene tangente u pripadnim diralištima  $J_{11}$  i  $J_{12}$  (slika 50.d.). Statičko/analitičko opravdanje takvoga „povlačenja crta” slično je opravdanju prethodnoga koraka.

<sup>13</sup> Neka je točka L nožište okomice iz točke C na os parabole i neka je točka K sjecište tangente  $t_C$  s osi parabole. Iz sličnosti trokutâ  $\triangle KDF$  i  $\triangle KLC$  i iz  $d(D, F) = \frac{1}{2} d(D, E) = \frac{1}{2} d(L, C)$  slijedi poznato svojstvo parabole:  $d(K, D) = d(D, L)$ .



U sljedećem bismo koraku mogli na sličan način odrediti još četiri tangente i njihova dirališta, no i došad nađene tangente s diralištima dovoljne su za uredan crtež parabole (slika e.).

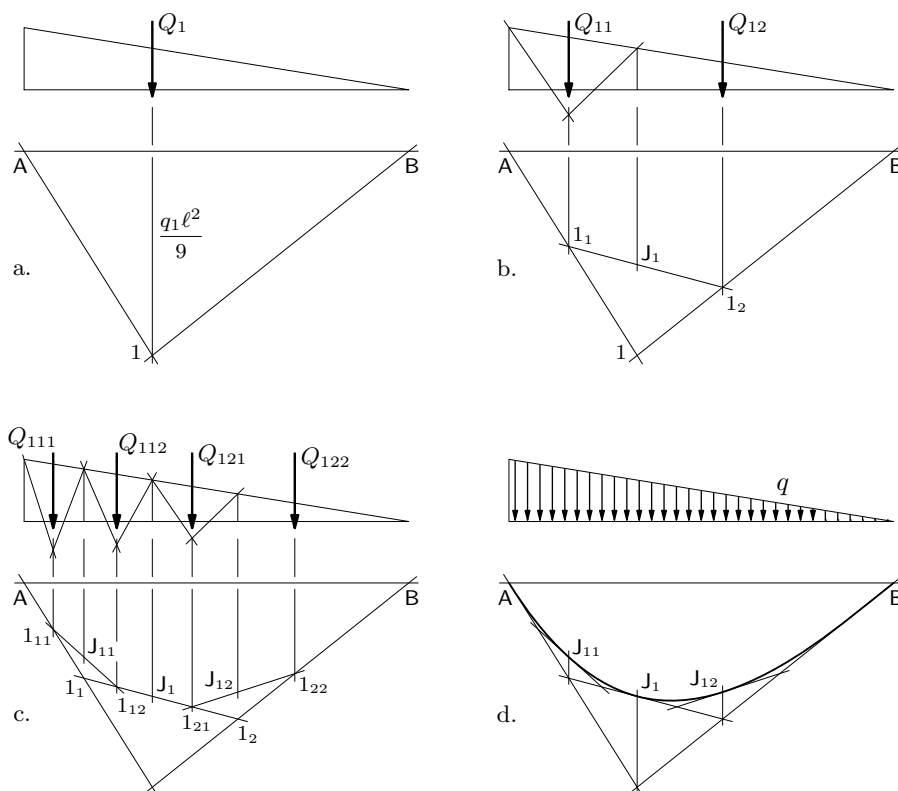
Diferencijalni odnos  $M'' = -q$  integralnim obratom „propisuje” da momentni dijagram mora u našem primjeru biti dio kubne parabole. Tu ćemo parabolu konstruirati rekursivno, sve bolje aproksimirajući distribuiranu silu nizovima koncentriranih sila.

U prvom ćemo koraku zamisliti da na gredu umjesto distribuirane sile  $\bar{q}$  djeluje samo jedna koncentrirana sila, njezina rezultanta, koju ćemo sada označiti sa  $\bar{Q}_1$  (gornji dio slike 51.a.). Znamo da će dijagram momenata savijanja tada biti sastavljen od dijelova dvaju pravaca koji se sijeku „ispod” hvatišta rezultante; to ćemo sjecište označiti sa 1 (donji dio slike a.). Vrijednost je momenta u hvatištu rezultante

$$M(\ell/3) = \frac{\ell}{3} \cdot A^v = \frac{\ell}{3} \cdot \frac{q_1 \ell}{3} = \frac{q_1 \ell^2}{9};$$

to je i jedina vrijednost koju treba izračunati. Dijagram je, dakle, sklopljen od odsječaka  $\overline{A1}$  i  $\overline{1B}$ . Pravci  $p_{A1}$  i  $p_{1B}$ , na kojima ti odsječci leže, tangente su konačnoga momentnog dijagrama — dijela kubne parabole — u točkama A i B (slika 51.d.). Promatramo li, naime, gredu u cjelini, rezultanta  $\bar{Q}_1$  statički je ekvivalentna zadanoj distribuiranoj sili, pa su reakcije za oba načina opterećivanja jednake. Vrijednost momenta u nekom presjeku  $x$  pri djelovanju distribuirane sile izračunavamo prema (općem) izrazu

$$M(x) = x \cdot A^v - \int_0^x (x - \xi) \cdot q(\xi) d\xi;$$



Slika 51.

neposredno desno od lijevog ležaja doprinos je drugoga pribrojnik zanemariv, tako da ostaje samo  $M(x) = x \cdot A^v$ , a to je izraz za vrijednost momenta pri djelovanju koncentrirane sile (u nekom presjeku lijevo od njezina hvatišta). Sličan zaključak možemo izvesti za moment neposredno lijevo od desnoga ležaja.

U drugome koraku distribuiranu silu zamjenjujemo dvjema koncentriranim silama,  $\vec{Q}_{11}$  i  $\vec{Q}_{12}$ , rezultatama dijelova sile  $\vec{q}$  desno i lijevo od pravca djelovanja rezultante iz prethodnoga koraka, sile  $\vec{Q}_1$  (gornji dio slike 51.b.). Momentni će dijagram biti složen od odsječaka  $\overline{A1_1}$ ,  $\overline{1_1 1_2}$  i  $\overline{1_2 B}$ , sa „šiljcima”  $1_1$  i  $1_2$  ispod hvatištâ sila  $\vec{Q}_{11}$  i  $\vec{Q}_{12}$  (donji dio slike b.). U tim točkama, međutim, ne treba računati vrijednosti: sile  $\vec{Q}_{11}$  i  $\vec{Q}_{12}$  su za gredu u cjelini statički ekvivalentne distribuiranoj sili, a time i rezultanti  $\vec{Q}_1$ , tako da su reakcije u sva tri sličaja jednake. To pak znači da su i momenti u svim presjecima između ležaja A i hvatišta sile  $\vec{Q}_{11}$  te između hvatišta sile  $\vec{Q}_{12}$  i ležaja B jednaki onima iz prethodnoga koraka. Drugim riječima, odsječci dijagrama za te dijelove grede ponovo leže na pravcima  $p_{A1}$  i  $p_{1B}$ . Srednji je pak odsječak na pravcu  $p_{1_1 1_2}$  koji prolazi sjecištima  $1_1$  i  $1_2$  pravaca  $p_{A1}$  i  $p_{1B}$  s pravcima djelovanja sila  $\vec{Q}_{11}$  i  $\vec{Q}_{12}$ . I pravac  $p_{1_1 1_2}$  tangenta je na kubnu parabolu. Diralište je njegovo sjecište s pravcem koji razdvaja dijelove distribuirane sile: moment rezultante  $\vec{Q}_{12}$  u odnosu na težište poprečnoga presjeka na tom pravcu jednak je momentu pripadnoga trokutnog dijela distribuirane sile; i, naravno, s druge je strane moment rezultante  $\vec{Q}_{11}$  jednak momentu odgovarajućega trapeznog dijela.

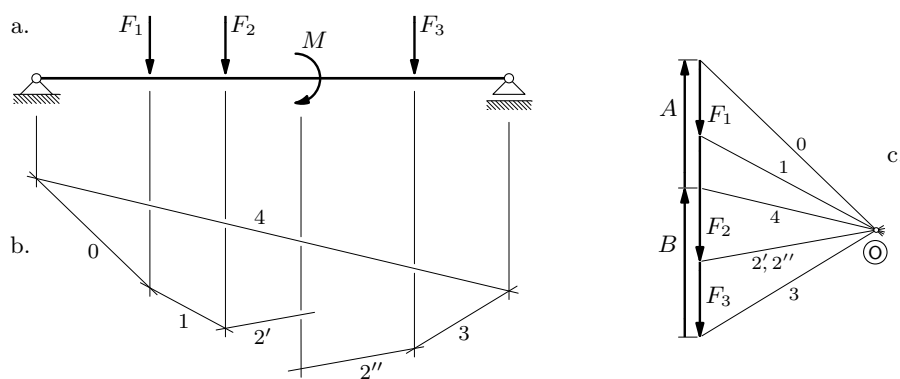
Postupak možemo nastaviti do željene točnosti (slike 51.c. i d.).

#### 4.3.4. Verižni poligon i momentni dijagram

U odjeljku 4.2.3. pokazali smo kako s pomoću verižnoga poligona možemo izračunati vrijednost momenta savijanja u nekom presjeku. Postupak je lakše objasniti, a i provesti, ako su, kao u primjeru na slici 52.a., pravci djelovanja svih sila vertikalni. Štoviše, pokazat ćemo da se uz malo pjesničke slobode može reći da verižni poligon (slika b.) tada jest momentni dijagram — izobličen, doduše, i nacrtan u pomalo neobičnu mjerilu.<sup>14</sup>

Djeluju li na jednostavno oslonjenu gredu sile na vertikalnim pravcima i momenti, za početak konstruiranja verižnoga poligona imamo više mogućnosti izbora negoli pri djelovanju sila na pravcima općih, različitih nagiba: budući da i reakcija u nepomičnom zglobu sada leži na vertikalnom — dakle, na poznatom — pravcu, možemo je sastaviti od komponenata u bilo kojoj točki tog pravca, tako da crtanje ne moramo započeti pravcem kroz ležaj. (Nagnemo li crtež, vidjet ćemo da se naš posebni slučaj može malo poopćiti: pravci djelovanja svih sila, uključujući reakcije, moraju biti međusobno paralelni; nije nužno da su vertikalni.) Uočite odmah još jednu, za nastavak priče važnu pojedinost: ako su pravci djelovanja svih sila usporedni, u poligonu sila vektori tih sila leže na istom pravcu (slika 52.c.). Nastavak crtanja verižnoga poligona nimalo se ne razlikuje od postupka opisana na stranicama 70.–74. uz slike 38. i 39., a prisjetite se i primjera sa slike 35. na stranici 66.!

<sup>14</sup> Formalnije, projektivnogeometrijskim rječnikom rečeno, verižni je poligon *afina slika* momentnoga dijagrama. Afinim ćemo se preslikavanjem iscrpnije pozabaviti u poglavlju o trozglobnim nosačima, u odjeljku 7.4.



Slika 52.

Pokazat ćemo sada kako upotrijebiti verižni poligon i poligon sila za izračunavanje vrijednosti momenta savijanja u nekom po volji odabranom presjeku, poput presjeka  $x$  na slici 53.a. Nakon toga će korak do „prepoznavanja” dijagrama momenata biti trivijalan.

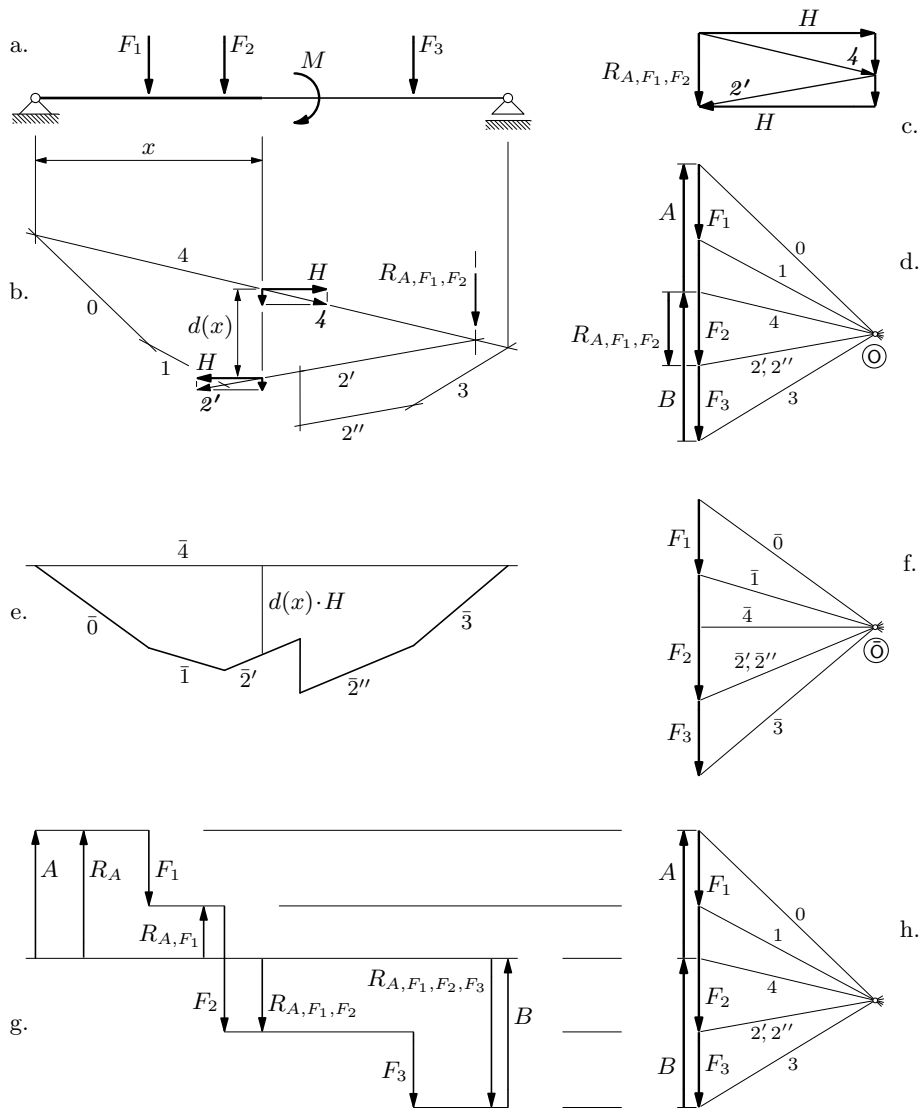
Zamislit ćemo, kao i obično, da smo odbacili dio nosača s jedne strane promatranoga presjeka, recimo desno od njega. Poprečna sila (koja nas zasad ne zanima) i moment savijanja u presjeku  $x$  moraju uravnotežiti sile  $\vec{A}$ ,  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  koje djeluju na preostali, lijevi dio. Intenzitet i smisao djelovanja rezultante  $\vec{R}_{A,F_1,F_2}$  sila  $\vec{A}$ ,  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  nalazimo u poligonu sila prikazanom na slici 53.d. Uz to, u poligonu sila vidimo da pravac na kojemu ta rezultanta djeluje prolazi sjecištem stranica  $2'$  i  $4$  verižnoga poligona sa slike b.

Intenzitet momenta savijanja u presjeku  $x$  možemo izračunati kao umnožak intenziteta rezultante  $\vec{R}_{A,F_1,F_2}$  i udaljenosti težišta presjeka od pravca njezina djelovanja; smisao je vrtnje tog momenta suprotan od smisla vrtnje momenta rezultante oko težišta presjeka, jer se ta dva momenta međusobno uravnotežuju. Međutim, zanimljiviji će nam i mnogo korisniji biti drugi način izračunavanja intenziteta momenta  $M(x)$ : izračunat ćemo intenzitet momenta komponentata  $\vec{4}$  i  $\vec{2}'$  rezultante na stranicama  $4$  i  $2'$  verižnoga poligona u odnosu na težište presjeka, ali ne neposredno, nego uz još jedno rastavljanje — svaku od tih dviju komponentata ćemo u točkama, u kojima vertikalni pravac kroz presjek  $x$  siječe stranice na kojima djeluju, rastaviti u po dvije komponente, po jednu na vertikalnom i po jednu na horizontalnim pravcima (slika 53.b. vjerojatno govori više od riječi). Vertikalne komponente prolaze kroz težište presjeka, pa njihovi momenti oko njega iščezavaju. U isječku iz poligona sila, prikazanu na slici c., vidimo da komponente na horizontalnim pravcima imaju jednake intenzitete, ali suprotan smisao djelovanja. Prema tome, te dvije sile tvore spreg čiji je moment jednak momentu rezultante  $\vec{R}_{A,F_1,F_2}$  u odnosu na težište presjeka, pa intenzitet momenta savijanja u presjeku  $x$  mora biti jednak intenzitetu momenta sprega: označimo li udaljenost pravaca sila sprega sa  $d(x)$ , a intenzitet tih sila sa  $H$ , bit će

$$M(x) = d(x) \cdot H; \quad (142)$$

smisao je vrtnje momenta savijanja suprotan od smisla vrtnje momenta sprega.

Sada, kad znamo izračunati vrijednost momenta savijanja u nekom, bilo kojem presjeku, možemo napokon na slici 53.b. „potražiti” i momentni dijagram. Neovisno o položaju presjeka  $x$ , na dio grede lijevo od njega uvijek će djelovati reakcija  $\vec{A}$ , što znači



Slika 53.

da će se u poligonu sila rep rezultante sila koje djeluju na taj dio poklapati s repom sile  $\vec{A}$ ; jedna će komponenta rezultante stoga uvijek biti na zaključnoj liniji verižnoga poligona, u našem primjeru na stranici 4. Stranica pak na kojoj je druga komponenta ovisit će o položaju presjeka (slike 53.g. i h.): ako je presjek lijevo od hvatišta sile  $\vec{F}_1$ , bit će to stranica 0 zato što se vršak „rezultante”  $\vec{R}_A = \vec{A}$  poklapa s vrškom sile  $\vec{A}$ ; ako je presjek između hvatišta sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , to je stranica 1 jer rezultanta  $\vec{R}_{A,F_1} = \vec{A} + \vec{F}_1$  tada završava u vršku sile  $\vec{F}_1$ ; i tako dalje.

Moment rezultante u odnosu na težište presjeka  $x$  zamjenjujemo momentom sprega koji nastaje tako da „ispod” presjeka rastavimo komponente rezultante na stranicama verižnoga poligona u vertikalne i horizontalne komponente; vertikalne komponente otpadaju, a par horizontalnih komponenata naš je spreg. Usporedba slika 53.c. i d. pokazuje da je intenzitet  $H$  sila sprega jednak „udaljenosti” pola O od pravca na kojemu leže vek-

tori  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$ , a iz te jednakosti možemo odmah zaključiti da sve horizontalne komponente komponenata sila na stranicama verižnoga poligona imaju isti intenzitet,  $H$ . (Ne smijemo zaboraviti da spomenuta „udaljenost“ nije geometrijska duljina, nego da je treba izraziti u nekoj od mjernih jedinica sile. Udaljenost pravaca sprega, s druge strane, jest geometrijska duljina, te će umnožak  $d(x) \cdot H$  biti u nekoj od mjernih jedinica momenta.) Kako je intenzitet  $H$  sila sprega konstantna vrijednost, izraz (142) pokazuje da je intenzitet  $M(x)$  momenta savijanja u presjeku  $x$  proporcionalan duljini  $d(x)$ , koja je pak jednaka duljini odsječaka (izraženoj u mjerilu plana položaja) između sjecištâ vertikale kroz presjek sa stranicama poligona na kojima djeluju komponente rezultante. Jedna od tih stranica uvijek je, rekosmo, zaključna linija, tako da možemo reći da duljinu  $d(x)$  mjerimo od nje, kao od osi.

Iz svega rečenog možemo zaključiti da je verižni poligon po obliku jednak dijagramu momenata čija je „os“ nagnuta i u kojemu su prikazane vrijednosti  $d(x) \cdot H = M(x)$ , ali te vrijednosti očitavamo po vertikalama, a ne po okomicama na os.

Verižni se poligon može svesti na horizontalnu zaključnu liniju tako da se na okomice na horizontalni pravac nanese duljine odsječaka, izmjerene po vertikalama, između zaključne linije i njegovih vrhova „ispod“ hvatištâ sila i momenta. Ili, u poligonu sila posljednju zraku (u našem primjeru zraku 4) možemo, ne mijenjajući pritom udaljenost pola, rotacijom oko njezina sjecišta s pravcem na kojemu leže vektori sila „dovesti“ u horizontalan položaj (slika 53.f.), te potom, crtanjem paralela s „novim“ zrakama, nacrtati novi verižni poligon/momentni dijagram čija će zaključna linija/os biti horizontalna (slika e.).

Ako je plan položaja crtan u mjerilu  $1 \text{ cm} :: n \text{ m}$ , tada verižni poligon možemo smatrati momentnim dijagramom koji je nacrtan u mjerilu  $1 \text{ cm} :: n \cdot H \text{ kNm}$ .

Primjerice, uzmimo da je raspon grede  $\ell = 5,0 \text{ m}$ ; crtež grede na slici 53.a. duljine je  $\tilde{\ell} = 62,5 \text{ mm}$ , što znači da je plan položajâ nacrtan u mjerilu  $1 : 80$ , odnosno,  $1 \text{ cm} :: 0,8 \text{ m}$ . Uzmimo, nadalje, da su intenziteti zadanih sila i momenta

$$F_1 = 75,0 \text{ kN}, \quad F_2 = 125,0 \text{ kN}, \quad F_3 = 75,0 \text{ kN} \quad \text{i} \quad M = 100,0 \text{ kNm}$$

(u poligonima na slikama d. i f. sile su nacrtane u mjerilu  $1 \text{ cm} :: 75 \text{ kN}$ ; mjerilo sila, međutim, ne igra nikakvu ulogu u određivanju intenzitetâ momenata). I napokon, neka su hvatišta sila i momenta u točkama

$$x_1 = 1,2 \text{ m}, \quad x_2 = 2,0 \text{ m}, \quad x_3 = 4,0 \text{ m} \quad \text{i} \quad x_M = 2,8 \text{ m}.$$

Za konstruiranje verižnih poligona na slikama 53.b. i e. odabrali smo  $H = 175,0 \text{ kN}$ .

Izmjerene duljine odsječaka između zaključne linije i vrhova verižnoga poligona su:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x_1) &= 11 \text{ mm}, & \tilde{d}(x_2) &= 14 \text{ mm}, & \tilde{d}(x_M^-) &= 10 \text{ mm}, \\ \tilde{d}(x_M^+) &= 17 \text{ mm} & \text{i} & & \tilde{d}(x_3) &= 10,5 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Verižni je poligon nacrtan u mjerilu plana položajâ, pa duljina od  $1 \text{ cm}$  na crtežu odgovara stvarnoj duljini od  $0,8 \text{ m}$ . Slijedi:

$$\begin{aligned} M(x_1) &= (1,1 \cdot 0,8) \cdot 175 = 1,1 \cdot (0,8 \cdot 175) = 1,1 \cdot 140 = 154 \text{ kNm}, \\ M(x_2) &= (1,4 \cdot 0,8) \cdot 175 = 1,4 \cdot (0,8 \cdot 175) = 1,4 \cdot 140 = 196 \text{ kNm}, \\ M(x_M^-) &= (1 \cdot 0,8) \cdot 175 = 1 \cdot (0,8 \cdot 175) = 1 \cdot 140 = 140 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$M(x_M^+) = (1,7 \cdot 0,8) \cdot 175 = 1,7 \cdot (0,8 \cdot 175) = 1,7 \cdot 140 = 238 \text{ kNm},$$

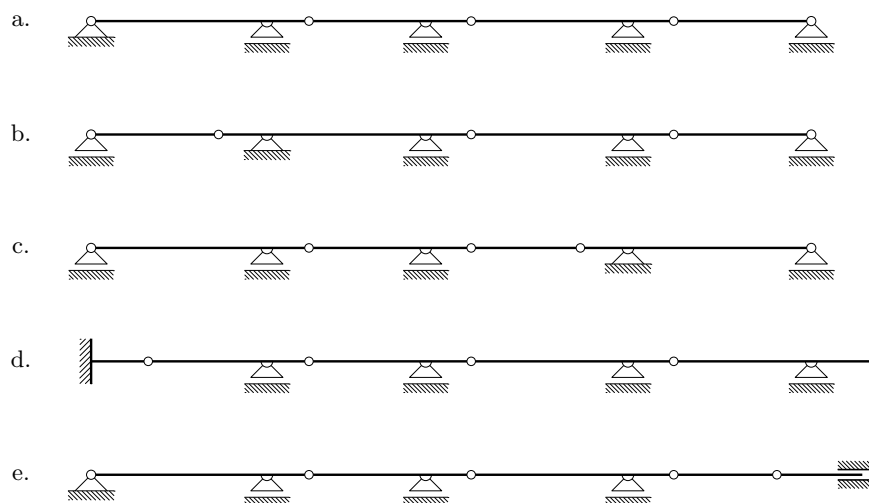
$$M(x_3) = (1,05 \cdot 0,8) \cdot 175 = 1,05 \cdot (0,8 \cdot 175) = 1,05 \cdot 140 = 147 \text{ kNm}.$$

Naznačena promjena redoslijeda množenjâ pokazuje da je verižni poligon ujedno i momentni dijagram nacrtan u mjerilu  $1 \text{ cm} :: 140 \text{ kNm}$ .

## 5. Gerberovi nosači

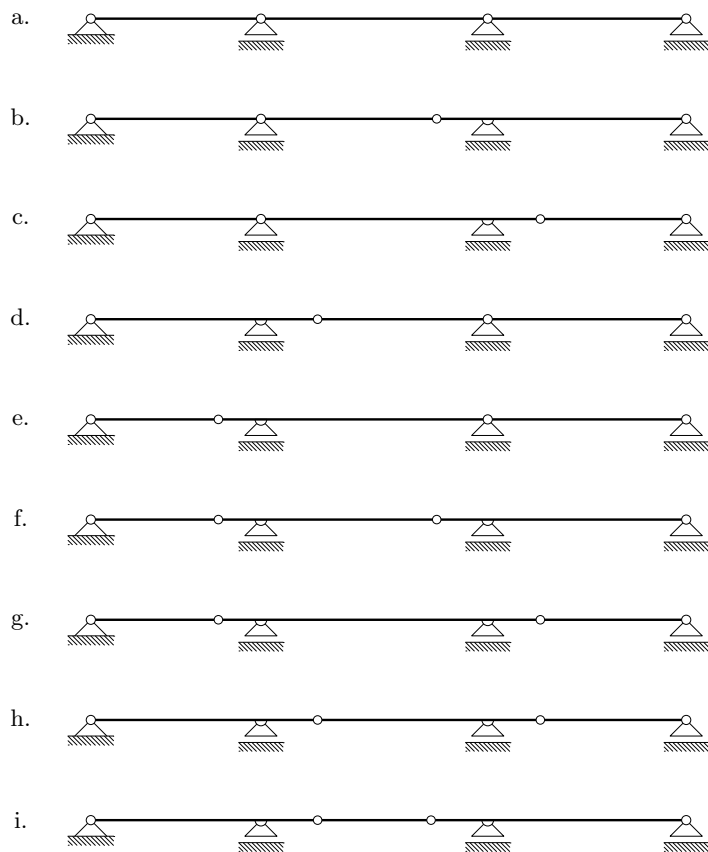
### 5.1. Značajke

Statički određeni ravninski ravni nosači horizontalno položeni iznad dva ili više otvora nazivaju se *Gerberovim nosačima* ili *nosačima sa zglobovima*. U osnovnom obliku ti nosači imaju samo zglobne ležajeve, pri čemu je jedan, bilo koji, nepomičan, dok su ostali uzdužno pomični — omogućuju pomake usporedne s osi nosača. I k tomu još na krajevima nosača nema prepustâ (slike 54.a., b. i c., primjerice). No, Gerberovim ćemo nosačima nazivati i razne varijacije s prepustima i upetim ležajevima poput onih na slikama d. i e.



Slika 54.

Pogodnim se razmještajem zglobova intenziteti momenata savijanja u pojedinim poljima mogu osjetno smanjiti u odnosu na intenzitete momenata u nizu jednostavno oslonjenih greda nad istim otvorima. (Poljem nazivamo dio nosača između dva ležaja.) Kao primjer ćemo uzeti polaganje statički određenoga nosača preko tri otvora/četiri ležaja. Ograničimo li se samo na zglobne ležajeve i pretpostavimo li da nije važno koji je od njih nepomičan, taj se zadatak može riješiti na beskonačno mnogo načina koje ćemo svrstati u devet skupina čiji su „predstavници” skicirani na slici 55. Trivijalno rješenje sa slike a. sastavljeno je od tri jednostavno oslonjene grede. Nosači sa slike f. do i. „pravi” su Gerberovi nosači; u pojedinim se skupinama pritom zglobovi mogu pomaknuti u druge položaje unutar polja u kojima se nalaze, što u svakoj skupini otvara beskonačno mnogo



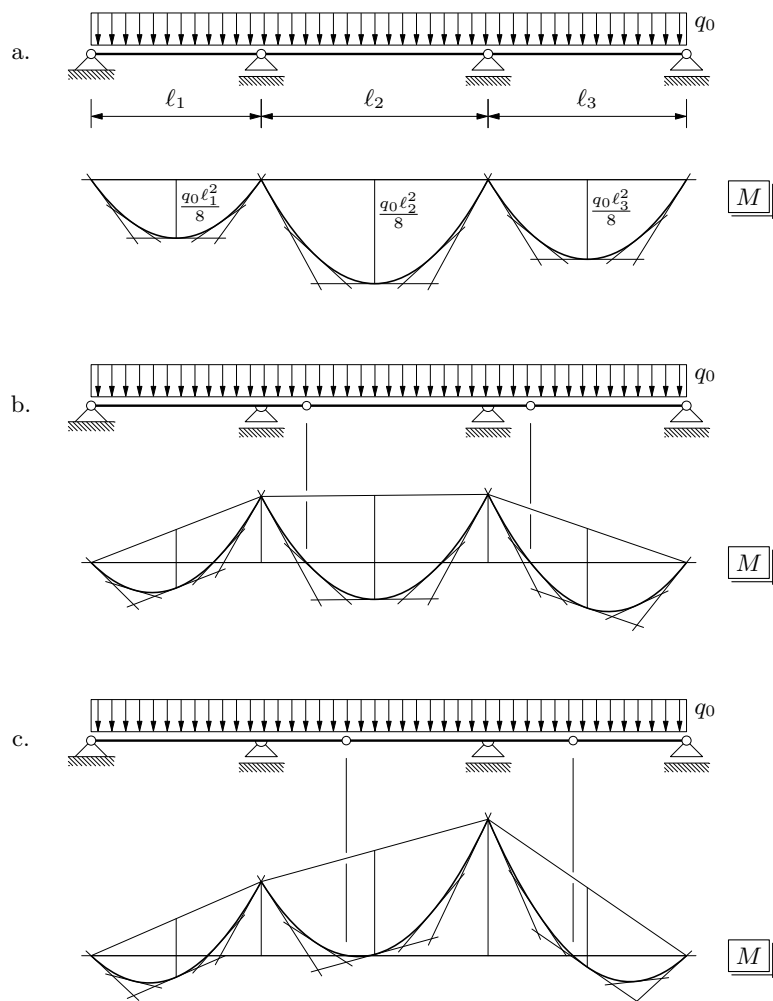
Slika 55.

moгуćnosti. Napokon, za ostale nosače — slike b. do e. — možemo reći da su „negdje između”: dio je svakoga od njih jednostavno oslonjena greda, a dio „pravi” Gerberov nosač.

Usporedba momentnih dijagrama za, primjerice, jednoliko distribuirano opterećenje na nizu jednostavno oslonjenih greda i na jednom od mogućih Gerberovih nosača (slike 56.a. i b.) pokazuje da su intenziteti momenata u poljima Gerberova nosača manji nego na jednostavno oslonjenim gredama. (Postupci izračunavanja vrijednosti i crtanja tih dijagrama bit će uskoro opisani.)

Inženjeri, koji su u prvoj polovini devetnaestoga stoljeća projektirali željezničke mostove, znali su da to, neprijeporno statički povoljno, svojstvo imaju *kontinuirani nosači* — nosači preko više otvora, ali bez zglobova. No, isto su tako znali da su kontinuirani nosači statički neodređeni i da su zbog toga neprikladni za slučajeve u kojima se mogu pojaviti nejednolika slijeganja ležajeva — primjerice, na lošem tlu — ili veće, nejednolike promjene temperature, jer takva djelovanja u neodređenim sistemima uzrokuju pojavu značajnih unutarnjih sila i reakcija. Da to izbjegnu, gredne su mostove ponajčešće oblikovali kao jednostavne nizove jednostavno oslonjenih greda, žrtvujući time mogućnost smanjivanja momenata savijanja u poljima. Njemački inženjer Heinrich Gerber (1832.–1912.) uočio je da se ugradnjom zglobova u ispravno raspoređene presjeke mogu momenti u poljima smanjiti uz istodobno izbjegavanje nepovoljnih utjecaja slijeganja; godine 1868. zamisao je i patentirao.



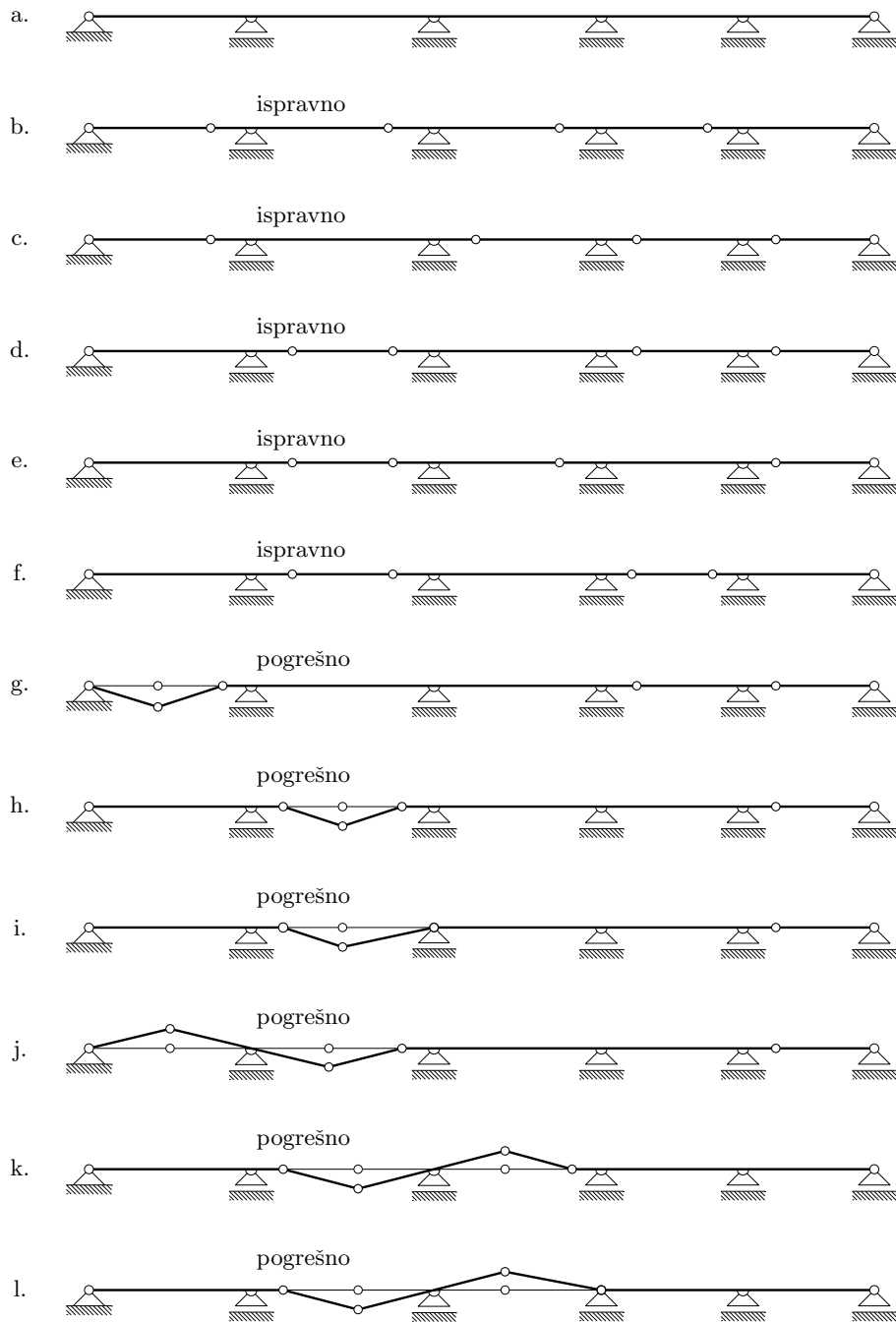


Slika 56.

Treba, međutim, naglasiti da sâmo pomicanje zglobova s ležajeva u polja ne osigurava smanjenje najvećih intenzitetâ momenata. Naime, kako su se na Gerberovu nosaču nul-točke momentnog dijagrama pomaknule u polja, pojavljuju se i momenti nad ležajevima. Pri nepovoljnom će razmještaju zglobova (pa i u istim poljima, ali na drugim mjestima: slika 56.c.) intenziteti tih momenata biti čak i veći od intenziteta momenata u poljima jednostavno oslonjenih greda.

## 5.2. Raspored zglobova

Sa stajališta je geometrijske nepromjenjivosti raspored zglobova u Gerberovu nosaču vrlo važan. Govoreći ovdje o „rasporedu zglobova” mislimo na to u kojim se poljima i, u граниčnim slučajevima, nad kojim se ležajevima zglobovi nalaze — geometrijska nepromjenjivost ovisi samo o tome, dok položaji zglobova unutar tih polja nisu bitni. Osnovni je zahtjev, dakako, da broj zglobova i njihov raspored moraju osigurati geometrijsku nepromjenjivost sistema i njegovu statičku određenost. Slučajevi skicirani na slici 55. iscrpljuju mogućnosti ispravnih rasporeda zglobova u Gerberovu nosaču s tri polja. Isto



Slika 57.

tako, u svim je primjerima na slici 54. raspored zglobova ispravan (za te su nosače mogući i drugi ispravni rasporedi). Dva jednostavna pravila koja osiguravaju ispravan raspored zglobova prikazat ćemo i obrazložiti s pomoću primjera na slici 57.

Lako je vidjeti da je kontinuirani nosač sa slike 57.a. četiri puta statički neodređen:

$$S = n_D \cdot 3 - n_L = 1 \cdot 3 - 7 = -4.$$

Prema tome, želimo li ga „pretvoriti” u statički određeni Gerberov nosač, moramo ume-  
tnuti četiri zglobova. O njihovu će ispravnu rasporedu ovisiti geometrijska nepromjenjivost

nosača. Kako će nakon umetanja četiri zgloba nuždan uvjet za statičku određenost,  $S = 0$ , biti ispunjen, geometrijska će nepromjenjivost značiti i statičku određenost. Pet je primjera ispravnih rasporeda zglobova skicirano na slikama b.–f. (Time nisu iscrpljene sve ispravne mogućnosti.) Kao što skice mogućih pomaka sistemâ na slikama g.–l. pokazuju, riječ je o primjerima pogrešnih rasporeda zglobova: dijelovi tih sistema su mehanizmi. (Ni spektar neispravnih mogućnosti nismo iscrpili.)

Na temelju slika 57.g., h. i i. možemo zaključiti da u jednom polju ne smiju biti više od dva zgloba. Drugo pravilo slijedi iz slika j.–l.: u dva susjedna polja ne smiju biti po dva zgloba. Oba pravila obuhvaćaju i granične slučajeve kad su zglobovi nadležajevima. [Pokušajte pronaći sve mogućnosti ispravnih rasporeda zglobova koje daju „prave” Gerberove nosače! Vratimo se još na trenutak na primjer sa slike 55.: koji su rasporedi zglobova neispravni?]

Vidjeli smo da je pri neispravnu rasporedu zglobova dio sistema mehanizam — na tom je dijelu, prema tome, raskinuto previše veza. Kako je ubačeno upravo onoliko zglobova koliko je potrebno za zadovoljenje nužnoga uvjeta za statičku određenost, jasno je da je na dijelu sistema raskinuto premalo veza, pa je taj dio statički neodređen. U sistemu sa slike 57.g. statički je neodređen dio između drugoga i četvrtog ležaja, u sistemima sa slika h.–j. neodređeni su dijelovi između trećeg i petog ležaja, a u sistemima sa slika k. i l. neodređeni su dijelovi između četvrtog i šestog ležaja. [Pronađite još nekoliko neispravnih mogućnosti te označite statički neodređene dijelove i skicirajte moguće pomake dijelova koji su mehanizmi!]

### 5.3. Analitički postupci

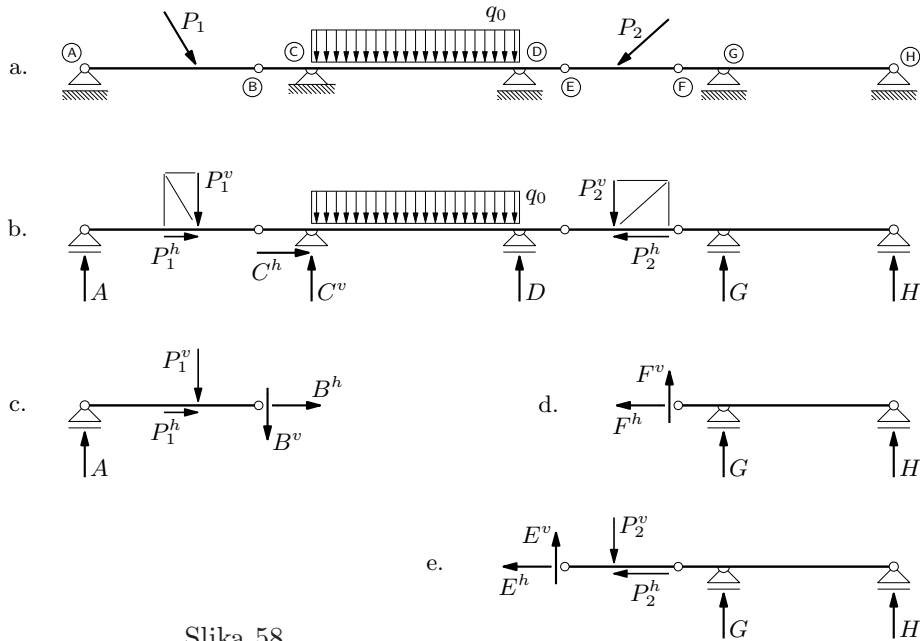
U svakom pomičnom zglobnom ležaju Gerberova nosača može postojati vertikalna reakcija, a reakcija u nepomičnom ležaju može imati vertikalnu i horizontalnu komponentu. Promatramo li nosač u cjelini, silâ nepoznatih vrijednosti bit će više od jednadžbi ravnoteže kojima raspolažemo za njihovo izračunavanje. Tako će na nosaču preko četiri otvora/pet ležajeva (slika 58.a.) biti šest sila nepoznatih vrijednosti (slika b.), a za nosač kao cjelinu možemo, kao i uvijek, postaviti samo tri jednadžbe ravnoteže. „Nedostaju” nam, dakle, tri jednadžbe.

Dodatne se jednadžbe mogu izvesti na dva načina: neraščlanjenim ili raščlanjenim postupkom.

#### 5.3.1. Neraščlanjeni postupak

Dodatne ćemo jednadžbe oblikovati izdvajanjem i uravnoteženjem dijelova nosača. Izdvojimo li dio nosača, na njega će, osim zadanih sila i sila u vanjskim vezama, djelovati i poopćene sile u presjeku s pomoću kojeg smo ga odvojili; no, u zglobovima su vrijednosti momenata savijanja jednake nuli, pa presijecanjima kroz zglobove i dodavanjem jednadžbi ravnoteže momenata u odnosu na njih nećemo u te jednadžbe uvesti i nove nepoznanice.

Nosač u našem primjeru ima tri zgloba. Prema tome, možemo napraviti tri presjeka i izdvojiti tri dijela (slike 58.c., d. i e.) čija će uravnoteženja dati tri nedostajuće jednadžbe.



Slika 58.

Uz tri jednadžbe ravnoteže nosača kao cjeline, dobivamo tako sustav od šest jednadžbi sa šest nepoznanica.

Za jednadžbe ravnoteže nosača kao cjeline (slika 58.b.) možemo uzeti, primjerice, jednadžbu ravnoteže projekcija sila na osi  $x$  i jednadžbe ravnoteže momenata u odnosu na točke A i H:

$$\sum_{\overline{AH}} F_x = 0, \quad \sum_{\overline{AH}} M_{/A} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\overline{AH}} M_{/H} = 0;$$

s  $\overline{AH}$  pored znakova sumacije označili smo da zbrajamo po cijelom nosaču. Tri su dodatne jednadžbe: jednadžba ravnoteže momenata oko zgloba B za dio  $\overline{AB}$  (slika c.), jednadžba ravnoteže momenata oko zgloba F za dio  $\overline{FH}$  (slika d.) i jednadžba ravnoteže momenata oko zgloba E za dio  $\overline{EH}$  (slika e.):

$$\sum_{\overline{AB}} M_{/B} = 0, \quad \sum_{\overline{FH}} M_{/F} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\overline{EH}} M_{/E} = 0;$$

$\overline{AB}$ ,  $\overline{FH}$  i  $\overline{EH}$  uz znakove sumacije označavaju da sada u te zbrojeve ulaze samo momenti sila koje djeluju na navedenim dijelovima. [Napišite jednadžbe sustava!]

Ponovit ćemo: iako su sile  $\vec{B}^h$ ,  $\vec{B}^v$ ,  $\vec{F}^h$ ,  $\vec{F}^v$ ,  $\vec{E}^h$  i  $\vec{E}^v$  na slikama 58.c., d. i e. nacrtane, njihove vrijednosti nisu ušle ni u jednu jednadžbu ravnoteže. Jedine su nepoznanice vrijednosti reakcija.

Riječ je o razmjerno velikom sustavu jednadžbi, ali ga možemo lako „ručno” riješiti. Neke su jednadžbe u stanovitom smislu neovisne: tako jednadžba ravnoteže projekcija sila na os  $x$  odmah daje vrijednost  $C^h$  (ta je jednadžba zaista neovisna), a jednadžba ravnoteže momenata oko zgloba B za dio  $\overline{AB}$  daje vrijednost  $A$  (kako se  $A$  pojavljuje u još nekim jednadžbama, ta je jednadžba tek uvjetno neovisna). Jednadžbe ravnoteže momenata oko zglobova F i E za dijelove  $\overline{FH}$  i  $\overline{EH}$  čine (uvjetno) neovisni sustav od dvije jednadžbe s nepoznanicama  $G$  i  $H$ . I na kraju, uz poznate  $A$ ,  $G$  i  $H$  preostale dvije

jednadžbe čine sustav od dvije jednadžbe s nepoznicama  $C^v$  i  $D$ . Štoviše, zamijenimo li jednadžbe ravnoteže momenata oko točaka A i H (za cijeli nosač) jednadžbama ravnoteže momenata u odnosu na točke C i D,

$$\sum_{\overline{AH}} M_{/C} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\overline{AH}} M_{/D} = 0,$$

prva će od njih neposredno dati  $D$ , a druga  $C^v$ .

U svim se primjerima Gerberovih nosača sličnim izdvajanjem pogodnih dijelova i odgovarajućim redosljedom rješavanja veći sustavi jednadžbi mogu „razbiti” na niz manjih sustava i „neovisnih” jednadžbi.

Naglasit ćemo još jednom da su dodatne jednadžbe jednadžbe ravnoteže momenata u odnosu na zglobove za izdvojene dijelove nosača, a ne jednadžbe ravnoteže momenata za cijeli nosač.

### 5.3.2. Raščlanjeni postupak

I u ovom postupku nosač rastavljamo presijecanjem kroz zglobove. Međutim, izdvajat ćemo sàmo dijelove između dva susjedna zgloba, dok smo u neraščlanjenu postupku katkad izdvajali i veće cjeline (primjerice, dio na slici 58.e.).

U *raščlanjenu postupku* dio po dio rješavamo redosljedom koji utvrđujemo na temelju sheme statičkoga djelovanja nosača. Postupak ćemo prikazati na primjeru koji smo već riješili neraščlanjenim postupkom; vjerujemo da će tako razlike u postupcima lakše doći do izražaja.

Vidjet ćemo da *statičko djelovanje sistema* — slijed kojim se sile prenose s dijela na dio, do podloge — ovisi o tome jesu li zadane sile horizontalne ili vertikalne. Zbog toga treba razlikovati dva statička djelovanja, pa ćemo zadane sile (slika 59.a.) rastaviti na horizontalne (slika b.) i vertikalne (slika d.) komponente.

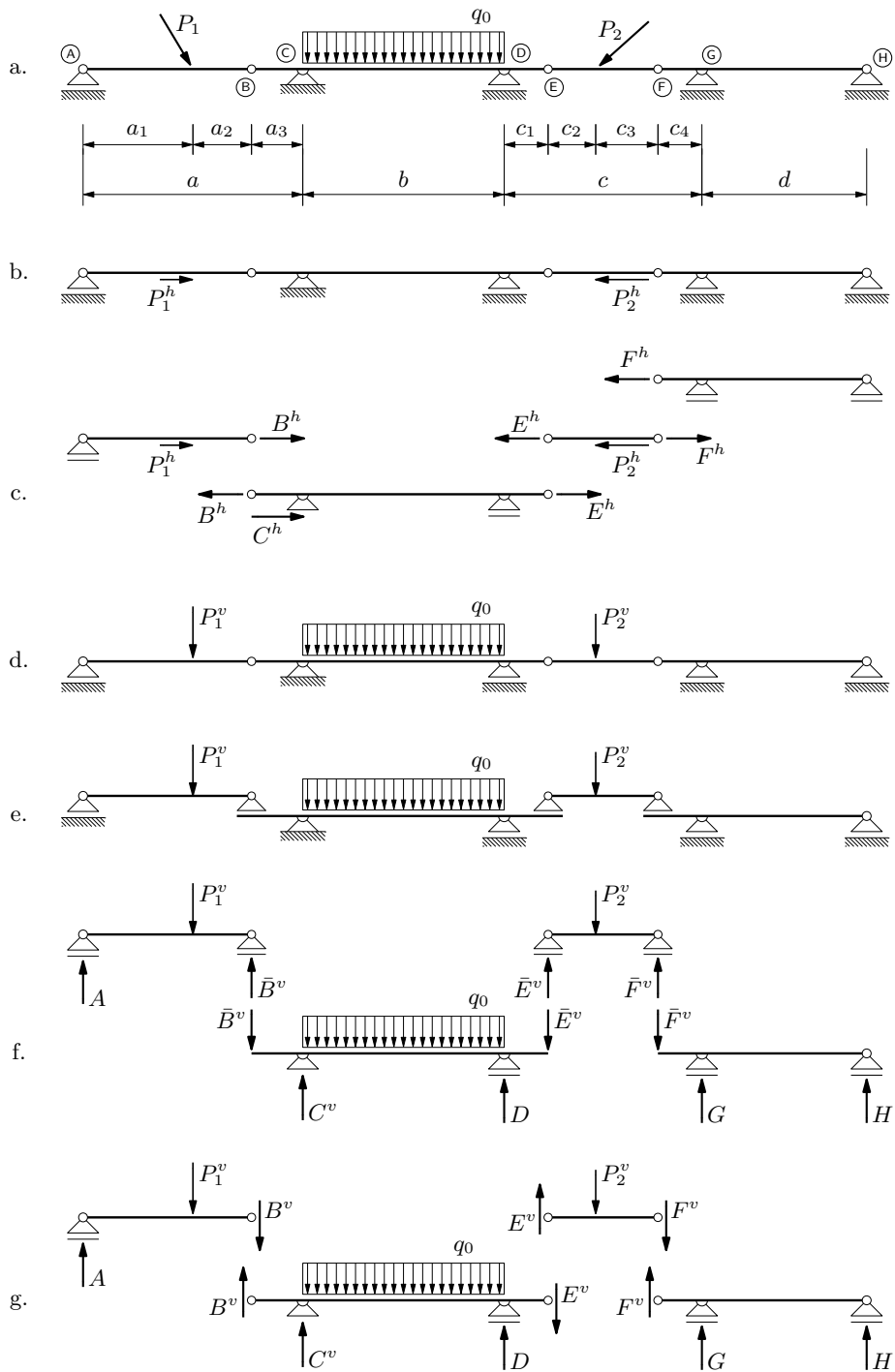
Nepomični zglobni ležaj u točki C jedini je ležaj koji može preuzeti i na podlogu prenijeti horizontalne sile, pa je jasno da sva horizontalna opterećenja treba „dovesti” do njega (slika 59.c.). Polazeći s jednoga i, potom, s drugog kraja nosača, redom zbrajamo zadane horizontalne sile, te ih horizontalnim komponentama sila u zglobovima prenosimo s dijela na dio, do dijela na kojemu je nepomični ležaj. Kako te komponente djeluju na pravcu osi nosača, možemo ih poistovjetiti s uzdužnim silama.

Slijêva, na dijelu  $\overline{AB}$  djeluje zadana sila  $\vec{P}_1^h$ . Ta se sila horizontalnom komponentom  $\pm \vec{B}^h$  sile u zglobu B prenosi na dio  $\overline{BE}$  na kojemu je nepomični ležaj. Na slici 59.c. horizontalne komponente  $\pm \vec{B}^h$  i  $\pm \vec{E}^h$  sila u zglobovima označili smo tehničkim načinom. Pretpostavljeno je, kao uvijek, da su te komponente vlačne; drugim riječima, vlačne sile smatramo pozitivnima. Silu  $\pm \vec{B}^h$  izračunavamo uravnoteženjem dijela  $\overline{AB}$ : na njega djeluju sila  $\vec{P}_1^h$  i (jedna od) sila  $\pm \vec{B}^h$ , pa je jednadžba ravnoteže horizontalnih komponenata sila za taj dio

$$\sum_{\overline{AB}} F_x = 0 \quad : \quad P_1^h + B^h = 0,$$

a iz nje slijedi

$$B^h = -P_1^h.$$



Slika 59.

Na dio  $\overline{BE}$  djeluje druga sila iz para  $\pm \vec{B}^h$ , suprotno orijentirana, pa je jednačba ravnoteže za taj dio

$$\sum_{\overline{BE}} F_x = 0 : \quad -B^h + C^h + E^h = 0. \quad (\spadesuit)$$

U njoj je, međutim, osim vrijednosti  $C^h$  nepoznata i vrijednost  $E^h$ , pa je zasad ne možemo riješiti.

Zdësna je prvi dio dio  $\overline{FH}$ . U našem je primjeru neopterećen, pa je  $F^h = 0$ . Slijedi dio  $\overline{EF}$ . Na njega djeluje zadana sila  $\vec{P}_2^h$ . Ona se silom  $\vec{E}^h$  u zglobu E prenosi do dijela  $\overline{BE}$ . Jednadžba je ravnoteže horizontalnih komponentata sila za dio  $\overline{EF}$

$$\sum_{\overline{EF}} F_x = 0 \quad : \quad -E^h - P_2^h + F^h = 0;$$

upisali smo i vrijednost sile  $\vec{F}^h$  jer bi se preko dijela  $\overline{EF}$  na dio  $\overline{BE}$  prenosi i horizontalne sile koje djeluju na dio  $\overline{FH}$ , da postoje. Iz prethodne je jednadžbe

$$E^h = F^h - P_2^h,$$

odnosno, u našem primjeru,

$$E^h = -P_2^h.$$

Sada su, osim horizontalne komponente reakcije u ležaju C, poznate sve horizontalne sile koje djeluju na dio  $\overline{BE}$ . Iz jednadžbe ( $\spadesuit$ ) koja izražava ravnotežu horizontalnih komponentata sila za taj dio, dobivamo

$$C^h = B^h - E^h = -P_1^h + P_2^h.$$

Neka su:

$$P_1^h = 45,0 \text{ kN}, \quad P_1^v = 75,0 \text{ kN}, \quad P_2^h = 72,5 \text{ kN} \quad \text{i} \quad P_2^v = 65,0 \text{ kN}.$$

Tada su:

$$B^h = -45,0 \text{ kN}, \quad E^h = -72,5 \text{ kN} \quad \text{i} \quad C^h = -45,0 + 72,5 = 27,5 \text{ kN}.$$

Sila  $\vec{C}^h$  orijentirana je kao što je na slici 59.c. pretpostavljeno, dok su sile  $\pm \vec{B}^h$  i  $\pm \vec{E}^h$  orijentirane suprotno — te su dvije sile tlačne.

Problem je prijenosa horizontalnih sila lako rješiv, jer je u Gerberovu mosaču samo jedan ležaj nepomičan. Za vertikalne je sile zaplet nešto zamršeniji: svi ležajevi preuzimaju vertikalne sile, pa slijed prijenosa sila nije odmah očit.

Na slici 59.e. skicirana je shema statičkoga djelovanja za vertikalno opterećenje: zamišljamo da je Gerberov nosač sastavljen od — uvjetno ćemo ih tako nazvati — jednostavno oslonjenih greda i greda s prepustom ili s prepustima. Naime, kako nas sada zanimaju samo „ležajne” veze koje prenose vertikalne sile, i horizontalno pomične mehanizme nazivat ćemo, zlorabeći privremeno terminologiju, jednostavno oslonjenim gredama ili gredama s prepustima.

Neke se grede preko obje ležajne veze oslanjanju neposredno o podlogu, neke jednom vezom o podlogu, a drugom o prepust druge grede, a neke s obje veze o prepuste drugih greda. Grede koje se s obje veze oslanjaju o podlogu osnovni su dijelovi sistema — one mogu pod vertikalnim opterećenjem „stajati” same za sebe (ponavljamo: prijenos horizontalnih sila više nas ne zanima). Ostale su grede priključeni dijelovi koji se barem jednom vezom oslanjaju na druge grede (kad bismo uklonili te druge grede, priključeni bi dijelovi ostali „visjeti u zraku”). U našem su primjeru (slika 59.e.) osnovni nosači greda s prepustima  $\overline{BE}$ , s ležajevima C i D, i greda s prepustom  $\overline{FH}$ , s ležajevima G i H. Priključeni

su dijelovi jednostavno oslonjena greda  $\overline{AB}$ , sa stvarnim ležajem A i zamišljenim ležajem B preko kojega se oslanja na lijevi prepust grede  $\overline{BE}$ , i jednostavno oslonjena greda  $\overline{EF}$ , sa zamišljenim ležajevima E i F preko kojih se oslanja na desni prepust grede  $\overline{BE}$  i na prepust grede  $\overline{FH}$ .

Redoslijed rješavanja dijelova obratan je od redoslijeda sastavljanja sistema. Prema jednom od općih svojstava statički određenih nosača, opterećenja na osnovnim dijelovima ne utječu na priključene dijelove, ali se opterećenja s priključenih vezama prenose na osnovne dijelove. Zbog toga „reakcije” u zamišljenim ležajevima priključenih postaju „opterećenjima” osnovnih dijelova (slika 59.f.). Osnovne nosače ne možemo rješavati dok nisu poznata sva opterećenja koja na njih djeluju pa treba prvo riješiti priključene dijelove. Redoslijed će, prema tome, u našem primjeru biti:  $\overline{AB}$  i  $\overline{EF}$ , a potom  $\overline{BE}$  i  $\overline{FH}$ .

Zamišljeni ležajevi ne postoje — oni su tek pomoćno sredstvo za zorniji prikaz statičkoga djelovanja nosača. „Reakcije” u zamišljenim ležajevima u stvari su vertikalne komponente sila u zglobovima kojima su priključeni dijelovi spojeni s osnovnim dijelovima. Te komponente djeluju na pravcima okomitima na os nosača, pa ih možemo poistovjetiti s poprečnim silama. Stoga ćemo pri oblikovanju jednadžbi ravnoteže pretpostaviti da su orijentirane kao na slici 59.g.

Na dio  $\overline{AB}$  djeluju zadana sila  $\vec{P}_1^v$ , reakcija  $\vec{A}$  u ležaju A i vertikalna komponenta  $\pm \vec{B}^v$  sile u zglobu B. Nepoznate vrijednosti A i  $B^v$  možemo izračunati iz jednadžbi ravnoteže momenata oko točaka B i A:

$$\begin{aligned} \sum_{\overline{AB}} M_{/B} = 0 : & \quad -(a_1 + a_2) \cdot A + a_2 \cdot P_1^v = 0, \\ \sum_{\overline{AB}} M_{/A} = 0 : & \quad -a_1 \cdot P_1^v - (a_1 + a_2) \cdot B^v = 0. \end{aligned}$$

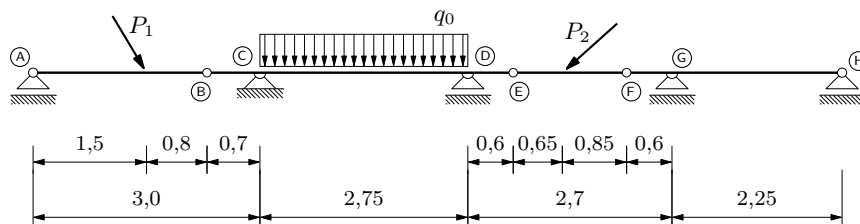
Uzet ćemo da su duljine  $a_1, a_2$  itd. kao na slici 60. Tada su:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_2}{a_1 + a_2} P_1^v = \frac{0,8}{2,3} \cdot 75,0 = 26,09 \text{ kN}, \\ B^v &= -\frac{a_1}{a_1 + a_2} P_1^v = -\frac{1,5}{2,3} \cdot 75,0 = -48,91 \text{ kN}; \end{aligned}$$

negativna vrijednost, kao i uvijek, pokazuje da je smisao djelovanja sile  $\pm \vec{B}^v$  suprotan od pretpostavljenoga. Izračunane vrijednosti možemo provjeriti zbrajanjem vertikalnih komponenata sila:

$$\sum_{\overline{AB}} F_z : \quad -A + B^v + P_1^v = -26,09 + (-48,91) + 75,00 = 0,00;$$

budući da zbroj iščezava, vertikalne su komponente sila u ravnoteži.



Slika 60.



Na dio  $\overline{EF}$  djeluju zadana sila  $\overline{P}_2^v$  i komponente  $\pm \overline{E}^v$  i  $\pm \overline{F}^v$  sila u zglobovima E i F. Jednadžbe ravnoteže momenata oko točaka F i E,

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{EF}} M/F &= 0 : & -(c_2 + c_3) \cdot E^v + c_3 \cdot P_2^v &= 0, \\ \sum_{\overline{EF}} M/E &= 0 : & -c_2 \cdot P_2^v - (c_2 + c_3) \cdot F^v &= 0,\end{aligned}$$

daju vrijednosti  $E^v$  i  $F^v$ :

$$\begin{aligned}E^v &= \frac{c_3}{c_2 + c_3} P_2^v = \frac{0,85}{1,5} \cdot 65,0 = 36,83 \text{ kN}, \\ F^v &= -\frac{c_2}{c_2 + c_3} P_2^v = \frac{0,65}{1,5} \cdot 65,0 = -28,17 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Provjera:

$$\sum_{\overline{EF}} F_z : \quad -E^v + F^v + P_2^v = -36,83 + (-28,17) + 65,00 = 0,00.$$

Prijedemo li na dio  $\overline{FH}$ , silu  $\pm \overline{F}^v$ , sada poznatu, možemo smatrati zadanom silom. Nepoznate vrijednosti reakcija  $\vec{G}$  i  $\vec{H}$  izračunavamo, primjerice, iz jednadžbi ravnoteže momenata oko točaka H i G,

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{FH}} M/H &= 0 : & -(c_4 + d) \cdot F^v - d \cdot G &= 0, \\ \sum_{\overline{FH}} M/G &= 0 : & -c_4 \cdot F^v + d \cdot H &= 0,\end{aligned}$$

a provjeravamo uvrštavanjem u zbroj  $\sum_{\overline{FH}} F_z$ . U našem su primjeru:

$$\begin{aligned}G &= -\frac{c_4 + d}{d} F^v = -\frac{2,85}{2,25} \cdot (-28,17) = 35,68 \text{ kN}, \\ H &= \frac{c_4}{d} F^v = \frac{0,6}{2,25} \cdot (-28,17) = -7,51 \text{ kN},\end{aligned}$$

pa je

$$-F^v - G - H = -(-28,17) - 35,68 - (-7,51) = 0,00;$$

Preostaje dio  $\overline{BE}$ . Poznate sile koje djeluju na taj dio su: jednoliko distribuirana sila  $\vec{q}_0$  (uzet ćemo da je  $q_0 = 50,0 \text{ kN/m}'$ ) i prethodno izračunane vertikalne komponente  $\pm \overline{B}^v$  i  $\pm \overline{E}^v$  sila u zglobovima. Jednadžba ravnoteže momenata oko točke D,

$$\sum_{\overline{BE}} M/D = 0 : \quad -(a_3 + b) \cdot B^v - b \cdot C^v + \frac{b}{2} \cdot (q_0 \cdot b) - c_1 \cdot E^v = 0,$$

daje vrijednost vertikalne komponente reakcije  $\vec{C}$ :

$$\begin{aligned}C^v &= -\frac{a_3 + b}{b} B^v + \frac{q_0 b}{2} - \frac{c_1}{b} E^v \\ &= -\frac{3,45}{2,75} \cdot (-48,91) + \frac{50,0 \cdot 2,75}{2} - \frac{0,6}{2,75} \cdot 36,83 = 122,07 \text{ kN};\end{aligned}$$

jednadžba pak ravnoteže momenata oko točke C,

$$\sum_{\overline{BE}} M/C = 0 : \quad -a_3 \cdot B^v - \frac{b}{2} \cdot (q_0 \cdot b) + b \cdot D - (b + c_1) \cdot E^v = 0,$$

daje vrijednost reakcije  $D$ :

$$\begin{aligned} D &= \frac{a_3}{b} B^v + \frac{q_0 b}{2} + \frac{b + c_1}{b} E^v \\ &= \frac{0,7}{2,75} \cdot (-48,91) + \frac{50,0 \cdot 2,75}{2} + \frac{3,35}{2,75} \cdot 36,83 = 101,17 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Kao i prije, za provjeru dobivenih vrijednosti možemo zbrojiti vrijednosti vertikalnih komponenta sila koje djeluju na dio  $\overline{BE}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\overline{BE}} F_z : \quad & -B^v - C^v + q_0 \cdot b - D + E^v \\ & = -(-48,91) - 122,07 + 50,0 \cdot 2,75 - 101,17 + 36,83 = 0,00. \end{aligned}$$

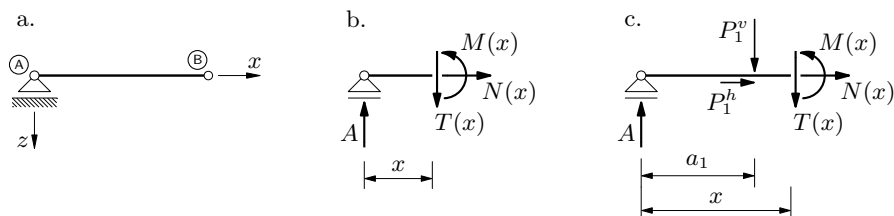
Za razliku od neraščlanjenoga postupka u kojem izbjegavamo uvođenje dodatnih nepoznanica, u raščlanjenu postupku, rješavajući pojedine dijelove nosača, izračunavamo usput i vrijednosti sila u zglobovima.

### 5.3.3. Unutarnje sile

Za izvođenje funkcijskih izraza koji opisuju vrijednosti sila u poprečnim presjecima uzduž osi nosača iskoristit ćemo rastav nosača (slike 59.c. i g. na stranici 105.) koji smo uveli u raščlanjenu postupku izračunavanja vrijednosti reakcija i uzeti da su osim njih poznate i vrijednosti sila u zglobovima. Da pojednostavnimo izraze, za svaki ćemo dio zadati zasebni lokalni koordinatni sustav.

Na dijelu  $\overline{AB}$  treba razlikovati dva područja: od ležaja A do hvatišta sile  $\vec{P}_1$  i od te točke do zgloba B—vrijednosti sila u poprečnim presjecima bit će na tim područjima opisane različitim funkcijskim izrazima.

Ishodište lokalnoga koordinatnog sustava smjestit ćemo u točku A; os  $x$  će se poklapati s osi nosača, a bit će orijentirana od točke A prema točki B (slika 61.a.).



Slika 61.

Kao i uvijek, za izvođenje funkcijskih izraza za vrijednosti sila na prvom području presjeći ćemo nosač u bilo kojoj točki  $x$  između točke A i hvatišta sile  $\vec{P}_1$  i odbaciti dio desno od odabranoga presjeka (slika 61.b.). U ravnini poprečnoga presjeka pojavit će se

uzdužna i poprečna sila i moment savijanja. Iz jednadžbe ravnoteže projekcija sila na os  $x$  odmah slijedi

$$N(x) = 0,$$

a jednadžba ravnoteže projekcija sila na os  $z$ ,

$$\sum_{Ax} F_z = 0 : \quad -A + T(x) = 0,$$

daje funkcijski izraz za vrijednost poprečne sile:

$$T(x) = A.$$

Vrijednosti poprečne i uzdužne sile konstantne su na cijelom području. Funkcijski izraz za vrijednost momenta savijanja izvest ćemo iz jednadžbe ravnoteže momenata oko težišta poprečnoga presjeka:

$$\sum_{Ax} M_{/x} = 0 : \quad -x \cdot A + M(x) = 0.$$

Dobivamo

$$M(x) = Ax;$$

dakle, vrijednosti momenata savijanja mijenjaju se linearno.

Za izvođenje izrazâ za vrijednosti sila na drugom području odabrat ćemo neki presjek  $x$  između hvatišta sile  $\bar{P}_1$  i točke **B** i odbaciti dio nosača desno od njega (slika 61.c.). Ponovo ćemo upotrijebiti jednadžbe ravnoteže projekcija sila na osi  $x$  i  $z$  i jednadžbu ravnoteže momenata oko težišta novoodabranoga presjeka u točki  $x$ :

$$\begin{aligned} \sum_{Ax} F_x = 0 : & \quad P_1^h + N(x) = 0, \\ \sum_{Ax} F_z = 0 : & \quad -A + P_1^v + T(x) = 0, \\ \sum_{Ax} M_{/x} = 0 : & \quad -x \cdot A + (x - a_1) \cdot P_1^v + M(x) = 0. \end{aligned}$$

Iz tih jednadžbi slijedi:

$$\begin{aligned} N(x) &= -P_1^h, \\ T(x) &= A - P_1^v, \\ M(x) &= Ax - P_1^v(x - a_1) = P_1^v a_1 + (A - P_1^v)x. \end{aligned}$$

Vrijednosti uzdužne i poprečne sile i sada su konstantne, a vrijednosti momenata savijanja i sada se mijenjaju linearno<sup>15</sup>. Za provjeru izvedenih izraza za  $T(x)$  i  $M(x)$  uvrstit ćemo

<sup>15</sup> Strogo govoreći, na prvome je području funkcija  $M$  linearna, dok je na drugom području afina. Budući da su odredbena svojstva linearnosti

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

samo je  $x \mapsto ax$  linearna funkcija, dok se funkcija  $x \mapsto ax + b$  naziva afinom. No, kako su grafovi obje funkcije pravci (linearne pravac koji prolazi ishodištem, a affine tom pravcu usporedan pravac pomaknut za  $b$  „prema gore” ako je  $b > 0$  ili „prema dolje” ako je  $b < 0$ ) i kako se funkcije grafovi kojih su krivulje nazivaju nelinearnima, afina se funkcija obično također naziva linearnom.

ih u izraz moment sila koje djeluju na dijelu  $\overline{Ax}$  u odnosu na točku A:

$$\sum_{\overline{Ax}} M/A : \\ -a_1 \cdot P_1^v - x \cdot T(x) + M(x) = -P_1^v a_1 - (A - P_1^v) x + P_1^v a_1 + (A - P_1^v) x = 0.$$

Ili, možda i jednostavnija provjera: očito je da vrijedi  $M'(x) = T(x)$ .

Preglednije zapisani, funkcijski su izrazi za vrijednosti unutarnjih sila na dijelu  $\overline{AB}$ :

$$N(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in [0, a_1], \\ -P_1^h & \text{za } x \in \langle a_1, a_1 + a_2 \rangle; \end{cases} \\ T(x) = \begin{cases} A & \text{za } x \in \langle 0, a_1 \rangle, \\ A - P_1^v & \text{za } x \in \langle a_1, a_1 + a_2 \rangle; \end{cases} \\ M(x) = \begin{cases} Ax & \text{za } x \in [0, a_1], \\ P_1^v a_1 + (A - P_1^v) x & \text{za } x \in [a_1, a_1 + a_2]. \end{cases}$$

U hvatištu sile  $\vec{P}_1$  ( $x = a_1$ ) uzdužna i poprečna sila nisu definirane, a između točaka  $x = a_1^-$  i  $x = a_1^+$  njihovi grafovi imaju skokove:

$$N(a_1^+) - N(a_1^-) = -P_1^h \quad \text{i} \quad T(a_1^+) - T(a_1^-) = -P_1^v.$$

Vrijednosti momenata savijanja u točkama  $x = a_1^-$  i  $x = a_1^+$  međusobno su jednake,

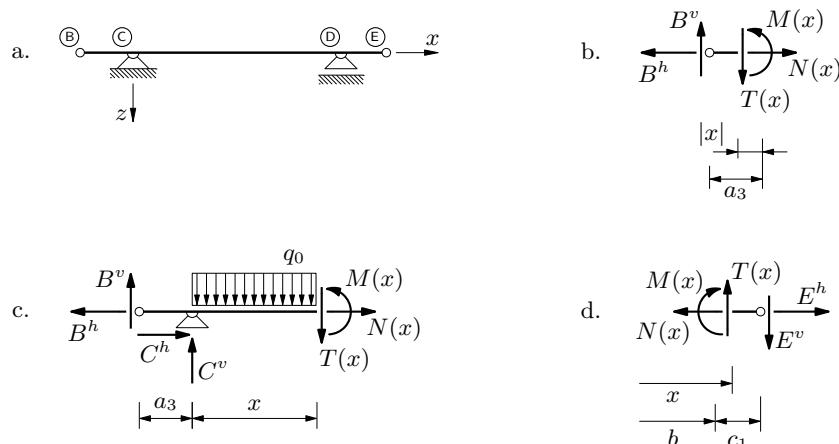
$$M(a_1^-) = M(a_1^+) = M(a_1) = A a_1,$$

pa je svejedno u koje područje stavimo samu točku  $x = a_1$ . Kako su vrijednosti momenata u ta dva područja opisane različitim funkcijskim izrazima, graf u točki  $x = a_1$  ima lom; drugim riječima, dijelovi pravaca kojima su izrazi prikazani imaju različite koeficijente smjera:  $A$  i  $A - P_1^v$ . U ležajnoj točki ( $x = 0$ ) okomito na os nosača djeluje koncentrirana sila  $\vec{A}$ , pa poprečna sila nije definirana, a između točaka  $x = 0$  i  $x = 0^+$  njezin graf ima skok za vrijednost  $A$ .

Ishodište lokalnoga koordinatnog sustava za dio  $\overline{BE}$  smjestit ćemo u točku C (slika 62.a.). Na tom ćemo dijelu razlikovati tri područja: između točaka B i C, između točaka C i D te između točaka D i E.

Za prvo su područje (slika 62.b.) jednadžbe ravnoteže projekcija sila na osi  $x$  i  $z$  i jednadžba ravnoteže momenata oko težišta poprečnoga presjeka u točki  $x$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\overline{Bx}} F_x = 0 : & \quad -B^h + N(x) = 0, \\ \sum_{\overline{Bx}} F_z = 0 : & \quad -B^v + T(x) = 0, \\ \sum_{\overline{Bx}} M/x = 0 : & \quad -(a_3 - |x|) \cdot B^v + M(x) = 0. \end{aligned}$$



Slika 62.

Uočite da su na tom području vrijednosti apscise  $x$  negativne; u jednadžbi ravnoteže momenata oko težišta poprečnoga presjeka udaljenost je stoga izražena s pomoću apsolutne vrijednosti. Slijedi:

$$\begin{aligned} N(x) &= B^h, \\ T(x) &= B^v, \\ M(x) &= B^v (a_3 - |x|) = B^v a_3 + B^v x. \end{aligned}$$

U točki B nema zadanih vanjskih koncentriranih sila; sile  $\pm \bar{B}^h$  i  $\pm \bar{B}^v$  komponente su unutarnje sile u zglobovima koje ćemo poistovjetiti s uzdužnom i poprečnom silom. Zbog toga pri prijelazu preko zgloba, s desnoga područja dijela  $\overline{AB}$  na područje  $\overline{BC}$ , dijagrami unutarnjih sila ne smiju imati ni lomova ni skokova, a u samom su zglobovima sve unutarnje sile definirane. U našem to primjeru znači da se vrijednosti uzdužne i poprečne sile ne smiju promijeniti i da vrijednosti momenata moraju biti prikazane istim pravcem (ali ne nužno i istom funkcijom). Kako su  $B^h = -P_1^h$  i  $B^v = A - P_1^v$ , vidimo da je taj zahtjev ispunjen.

Za područje između ležajeva (slika 62.c.) uobičajene jednadžbe ravnoteže za izvođenje izraza za vrijednosti unutarnjih sila glase

$$\begin{aligned} \sum_{\overline{Bx}} F_x = 0 &: & -B^h + C^h + N(x) &= 0, \\ \sum_{\overline{Bx}} F_z = 0 &: & -B^v - C^v + q_0 \cdot x + T(x) &= 0, \\ \sum_{\overline{Bx}} M/x = 0 &: & -(a_3 + x) \cdot B^v - x \cdot C^v + \frac{x}{2} \cdot (q_0 \cdot x) + M(x) &= 0, \end{aligned}$$

pa su

$$\begin{aligned} N(x) &= B^h - C^h, \\ T(x) &= -q_0 x + B^v + C^v, \\ M(x) &= B^v a_3 + (B^v + C^v) x - \frac{q_0}{2} x^2. \end{aligned}$$

Kako na promatranom području djeluje jednoliko distribuirana sila, vrijednosti poprečne sile opisane su linearnom (točnije: afinom) funkcijom, a vrijednosti momenata savijanja polinomom drugoga stupnja; dijagram poprečnih sila bit će odsječak pravca, a dijagram momenata dio kvadratne parabole. Dobivene izraze za vrijednosti poprečnih sila i momenata možemo provjeriti, primjerice, uvrštavanjem u izraz za moment oko točke C, a lako je vidjeti i da je  $M'(x) = T(x)$ .

Za izvođenje funkcijskih izraza za vrijednosti unutarnjih sila na području između točaka D i E pogodnije je odbaciti dio lijevo od odabranoga presjeka i jednadžbe ravnoteže napisati za desni dio (slika 62.d.):

$$\begin{aligned} \sum_{x\bar{E}} F_x &= 0 : & -N(x) + E^h &= 0, \\ \sum_{x\bar{E}} F_z &= 0 : & -T(x) + E^v &= 0, \\ \sum_{x\bar{E}} M_{/x} &= 0 : & -M(x) - (b + c_1 - x) \cdot E^v &= 0; \end{aligned}$$

iz njih slijedi:

$$\begin{aligned} N(x) &= E^h, \\ T(x) &= E^v, \\ M(x) &= -E^v (b + c_1) + E^v x. \end{aligned}$$

U preglednijem su zapisu izrazi za vrijednosti unutarnjih sila na dijelu  $\overline{BE}$ :

$$\begin{aligned} N(x) &= \begin{cases} B^h & \text{za } x \in [-a_1, 0), \\ B^h - C^h & \text{za } x \in \langle 0, b \rangle, \\ E^h & \text{za } x \in [b, b + c_1); \end{cases} \\ T(x) &= \begin{cases} B^v & \text{za } x \in [-a_1, 0), \\ B^v + C^v - q_0 x & \text{za } x \in \langle 0, b \rangle, \\ E^v & \text{za } x \in \langle b, b + c_1 \rangle; \end{cases} \\ M(x) &= \begin{cases} B^v a_3 + B^v x & \text{za } x \in [-a_1, 0), \\ B^v a_3 + (B^v + C^v) x - \frac{q_0}{2} x^2 & \text{za } x \in [0, b), \\ -E^v (b + c_1) + E^v x & \text{za } x \in [b, b + c_1). \end{cases} \end{aligned}$$

U ležaju C postoji reakcija  $\vec{C}$  koja ima horizontalnu i vertikalnu komponentu, pa su u ležajnoj točki ( $x = 0$ ) nedefinirane i uzdužna i poprečna sila, a pri prijelazu preko nje dijagrami tih sila imaju skokove:

$$N(0^+) - N(0^-) = -C^h \quad \text{i} \quad T(0^+) - T(0^-) = C^v.$$

Reakcija je u ležaju D vertikalna, pa poprečna sila u točki  $x = b$  nije definirana, a postojanje reakcije, naravno, znači skok u dijagramu poprečnih sila:

$$T(b^+) - T(b^-) = E^v - B^v - C^v + q_0 b = D$$

(druga jednakost slijedi iz jednadžbe ravnoteže vertikalnih komponenta sila koje djeluju na dio  $\overline{BE}$  kao cjelinu: slika 59.g., str. 105).

Pokažite da su, ako je ishodište lokalnoga koordinatnog sustava u točki E, funkcijski izrazi za vrijednosti unutarnjih sila u dijelu  $\overline{EF}$ :

$$N(x) = \begin{cases} E^h & \text{za } x \in [0, c_2], \\ E^h + P_2^h = 0 & \text{za } x \in \langle c_2, c_2 + c_3 \rangle; \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} E^v & \text{za } x \in [0, c_2], \\ E^v - P_2^v = F^v & \text{za } x \in \langle c_2, c_2 + c_3 \rangle; \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} E^v x & \text{za } x \in [0, c_2], \\ P_2^v c_2 + (E^v - P_2^v) x = -F^v (c_2 + c_3) + F^v x & \text{za } x \in [c_2, c_2 + c_3]. \end{cases}$$

Stavite, nadalje, ishodište lokalnoga sustava za dio  $\overline{FH}$  u točku G i pokažite da su izrazi za vrijednosti unutarnjih sila:

$$N(x) = 0 \quad \text{za } x \in [-c_4, d];$$

$$T(x) = \begin{cases} F^v & \text{za } x \in [-c_4, 0], \\ F^v + G & \text{za } x \in \langle 0, d \rangle; \end{cases}$$

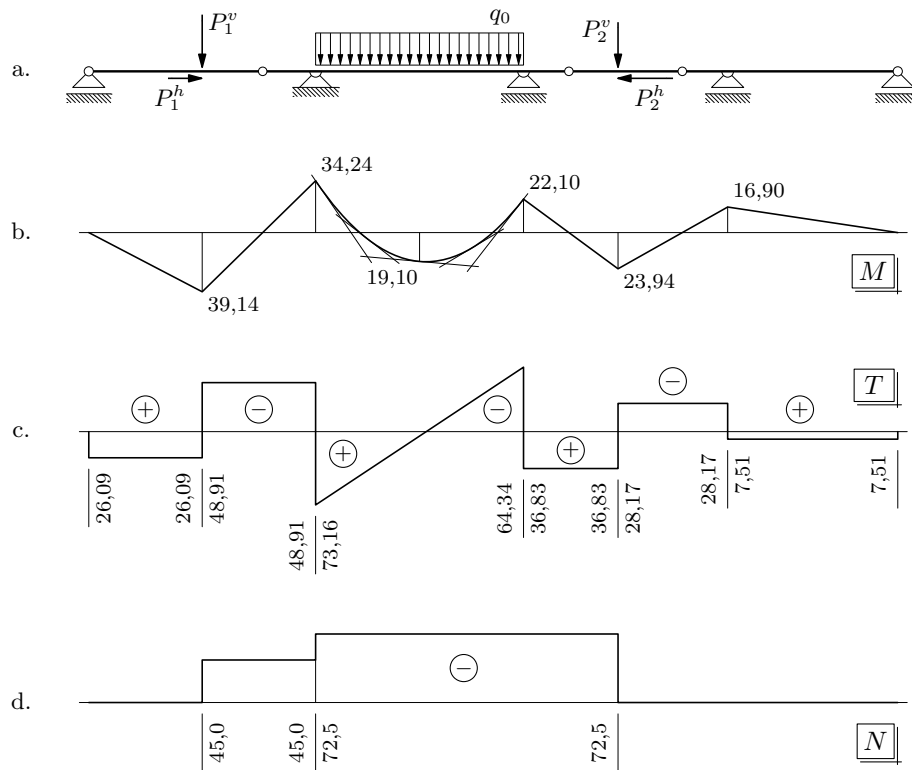
$$M(x) = \begin{cases} F^v (c_4 - |x|) = F^v c_4 + F^v x & \text{za } x \in [-c_4, 0], \\ F^v c_4 + (F^v + G) x & \text{za } x \in [0, d]. \end{cases}$$

U kojim točkama nisu definirane poprečne, a u kojima uzdužne sile? Uočite da se pri prijelazu preko zglobova E i F vrijednosti uzdužnih i poprečnih sila ne mijenjaju. Usporedite i koeficijente smjera pravaca kojima su prikazane vrijednosti momenata na područjima lijevo i desno od zgloba F.

#### 5.3.4. Dijagrami unutarnjih sila

Formalno smo dijagrame unutarnjih sila definirali kao grafove funkcija koje opisuju njihove vrijednosti. No, znamo da za crtanje tih dijagrama ne treba izvoditi funkcijske izraze poput onih koje smo netom izveli. Dovoljno je izračunati vrijednosti sila u karakterističnim točkama. *Karakteristične točke* su točke u kojima se funkcijski izrazi mijenjaju — primjerice, hvatišta zadanih koncentriranih sila, ležajne točke (hvatišta reakcija), točke na krajevima područjâ na kojima djeluju distribuirane sile. . . Vrste krivulja između karakterističnih točaka određene su diferencijalnim odnosima unutarnjih i vanjskih sila.

Prvo ćemo nacrtati momentni dijagram (slika 63.b.). Karakteristične su točke hvatišta sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$  (zapravo,  $\vec{P}_1^v$  i  $\vec{P}_2^v$ ) i ležajne točke C, D i G. Uz to, znamo da su vrijednosti momenata u zglobovima A, B, E, F i H jednake nuli. No, B, E i F nisu (ili, barem, ne moraju biti) karakteristične točke — dio dijagrama na području između hvatišta sile  $\vec{P}_1$  i ležaja C, primjerice, dio je jednoga pravca (budući da smo u proračunu nosač rastavili



Slika 63.

u zglobu B, za pravce na područjima lijevo i desno od njega izveli smo naizgled različite izraze, ali oba imaju isti koeficijent smjera i oba u zglobu imaju vrijednost nula).

Za izračunavanje vrijednosti momenata savijanja u karakterističnim točkama upotrijebit ćemo, kao i pri izvođenju funkcijskih izraza, rastav nosača prikazan na slici 59.g. na stranici 105. i uzeti da su poznate vrijednosti reakcija i sila u zglobovima:

$$M_{P_1} = a_1 \cdot A = 1,5 \cdot 26,09 = 39,14 \text{ kNm},$$

$$M_C = a_3 \cdot B^v = 0,7 \cdot (-48,91) = -34,24 \text{ kNm},$$

$$M_D = -c_1 \cdot E^v = -0,6 \cdot 36,83 = 22,10 \text{ kNm},$$

$$M_{P_2} = c_2 \cdot E^v = 0,65 \cdot 36,83 = 23,94 \text{ kNm},$$

$$M_G = c_4 \cdot F^v = 0,6 \cdot (-28,17) = 16,90 \text{ kNm}.$$

U svim je karakterističnim točkama funkcija koja opisuje vrijednosti momenata savijanja neprekidna (ta funkcija prekid može imati samo u hvatištu koncentriranoga momenta). Na temelju poznatoga diferencijalnog odnosa

$$M''(x) = -q(x)$$

znamo da su vrijednosti momenata na neopterećenome dijelu između dviju karakterističnih točaka prikazane linearnom (afinom), a na dijelu na kojem djeluje jednoliko distribuirana sila kvadratnom funkcijom. Dijelovi momentnoga dijagrama bit će stoga na područjima između točke A i hvatišta sile  $\vec{P}_1$ , između hvatišta sile  $\vec{P}_1$  i točke C, između

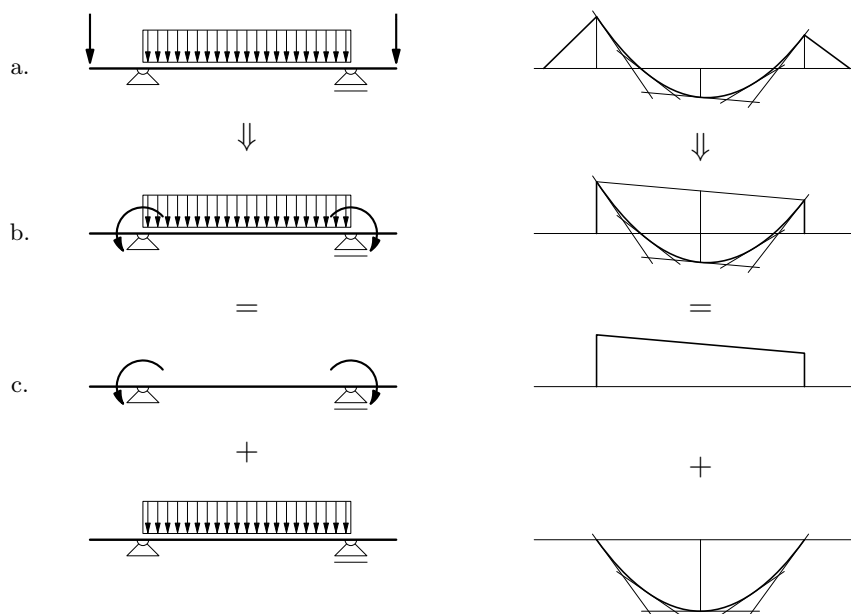


točke D i hvatišta sile  $\vec{P}_2$ , između hvatišta sile  $\vec{P}_2$  i točke G te između točaka G i H dijelovi pravaca, a u području između točaka C i D dio kvadratne parabole. Dijelovi pravaca na područjima između hvatišta sile  $\vec{P}_1$  i točke C, između točke D i hvatišta sile  $\vec{P}_2$  i između hvatišta sile  $\vec{P}_2$  i točke G sijeku os dijagrama u točkama „ispod” zglobova.

Za crtanje parabole treba naći još jednu točku. Najjednostavnije je izračunati vrijednost momenta u polovištu polja između ležaja C i D. Zamijenimo li opterećenje na dijelu diska statički određenoga nosača statički ekvivalentnim opterećenjem, sile u dijelovima nosača izvan područja zahvaćena tim opterećenjima neće se promijeniti (slike 64.a. i b.). Poznajući to svojstvo određenih nosača, primjenom je principa superpozicije lako pokazati da momentni dijagram u polju možemo nacrtati tako da o spojnicu vrijednosti nad ležajevima „objesimo” momentni dijagram na jednostavno oslonjenoj gredi istoga raspona i s istim opterećenjem (slike 64.b. i c.) pa je

$$M_{b/2} = \frac{M_C + M_D}{2} + \frac{q_0 b^2}{8} = \frac{-34,24 - 22,10}{2} + \frac{50,0 \cdot 2,75^2}{8} = 19,10 \text{ kNm.}$$

Grafička konstrukcija pokazuje i da je tangenta na parabolu u toj točki paralelna sa spojnicom vrijednosti nad ležajevima.



Slika 64.

Za dijagram poprečnih sila (slika 63.c.) karakteristične su točke svi ležajevi i hvatišta obje zadane sile — u ležajevima postoje vertikalne komponente reakcija, okomite na os nosača, a i obje sile imaju komponente okomite na nju. U samim točkama poprečna sila nije definirana, a pri prijelazu preko njih njezine se vrijednosti mijenjaju skokovito, pa za svaku točku treba izračunati dvije vrijednosti — neposredno lijevo i neposredno desno od nje.

Iz diferencijalnoga odnosa

$$T'(x) = -q(x)$$

slijedi da će se vrijednosti poprečnih sila na području između točaka C i D mijenjati linearno, dok će na ostalim područjima biti konstantne (ali različite).

Neposredno desno od ležaja A vrijednost je poprečne sile

$$T_A^{\text{desno}} = A = 26,09 \text{ kN.}$$

Na području između ležaja i hvatišta sile  $\vec{P}_1$  vrijednost poprečne sile se ne mijenja, pa je

$$T_{P_1}^{\text{lijevo}} = T_A^{\text{desno}} = 26,09 \text{ kN.}$$

Neposredno desno od hvatišta sile  $\vec{P}_1$  vrijednost je

$$T_{P_1}^{\text{desno}} = T_{P_1}^{\text{lijevo}} - P_1^v = 26,09 - 75,0 = -48,91 \text{ kN;}$$

izračunavamo je iz jednadžbe ravnoteže vertikalnih komponenta sila koje djeluju na diferencijalni odsječak koji sadrži hvatište sile  $\vec{P}_1$ :

$$-T_{P_1}^{\text{lijevo}} + P_1^v + T_{P_1}^{\text{desno}} = 0.$$

Ta se vrijednost ne mijenja sve do točke C, ali u samoj je točki vrijednost nedefinirana. (To je i vrijednost vertikalne komponente sile u zglobu B koji leži u ovom području; rekli smo već da tu komponentu možemo poistovjetiti s poprečnom silom, pa se stoga dijagram u zglobu ne prekida.)

Pri prijelazu preko ležaja C vrijednost poprečne sile mijenja se za vrijednost vertikalne komponente reakcije:

$$T_C^{\text{desno}} = T_C^{\text{lijevo}} + C^v = -48,91 + 122,07 = 73,16 \text{ kN.}$$

Na dijelu nosača između točaka C i D djeluje jednoliko distribuirana sila, pa se vrijednosti poprečnih sila mijenjaju linearno. Vrijednost na kraju područja, neposredno lijevo od točke D, izračunat ćemo iz jednadžbe ravnoteže vertikalnih komponenta sila koje djeluju na odsječak između točaka C i D:

$$-T_C^{\text{desno}} + q_0 b + T_D^{\text{lijevo}} = 0;$$

slijedi:

$$T_D^{\text{lijevo}} = T_C^{\text{desno}} - q_0 b = 73,16 - 50,0 \cdot 2,75 = -64,34 \text{ kN.}$$

Izračunavanje karakterističnih vrijednosti poprečnih sila na ostatku nosača prepuštamo revnom čitatelju. (Napomenut ćemo tek da na kraju treba dobiti  $T_H^{\text{lijevo}} = -H$ , što je lako vidjeti krene li se s desnoga kraja nosača.)

I na koncu priče o dijagramima, karakteristične su točke za dijagram uzdužnih sila (slika 63.d.) hvatišta sile  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$  (obje imaju komponente koje djeluju na pravcu osi nosača) i točka C (u tom ležaju postoji horizontalna komponenta reakcije). Budući da ne postoje uzdužne distribuirane sile, iz diferencijalnoga odnosa

$$N'(x) = -p(x)$$

slijedi da će vrijednosti uzdužnih sila između karakterističnih točaka biti konstantne. Ležaj C, koji jedini može preuzeti horizontalne sile, nalazi se između hvatišta zadanih sila, pa će vrijednosti uzdužnih sila biti različite od nule samo između tih hvatišta.

Presiječemo li nosač bilo gdje između hvatišta sile  $\vec{P}_1$  i ležaja C, iz jednadžbe ravnoteže horizontalnih komponenata sila koje djeluju lijevo od presjeka dobivamo

$$N_{\overline{P_1C}} = -P_1^h.$$

Isto tako, presiječemo li nosač bilo gdje između ležaja C i hvatišta sile  $\vec{P}_2$ , jednadžba ravnoteže horizontalnih komponenata sila koje djeluju desno od presjeka daje

$$N_{\overline{CP_2}} = -P_2^h.$$

U hvatištima silâ i u točki C uzdužna sila nije definirana.

## 5.4. Superpozicijski postupak

Zamislit ćemo na trenutak da je umjesto Gerberova nosača sa slike 65.a. nad istim otvorima zadan sistem prikazan na gornjem crtežu slike b., sastavljen od jednostavno oslonjene grede  $\overline{AB}$  i grede s prepustom  $\overline{BDE}$ , sa zajedničkim ležajem B. Razmještaj opterećenja na oba je sistema jednak.

Na donjem je dijelu slike b. prikazan dijagram momenata savijanja  $M^0$  za zadano opterećenje na zamišljenome zamjenjujućem sistemu. Očito je da to nije i ne može biti dijagram na izvornom Gerberovu nosaču — na mjestu njegova zgloba C vrijednost momenta nije jednaka nuli. Druga je razlika nepostojanje momenta savijanja nad srednjim ležajem. Pokušat ćemo „dodavanjem” tog momenta zamišljeni sistem dovesti u mehaničko stanje u kojemu je Gerberov nosač.

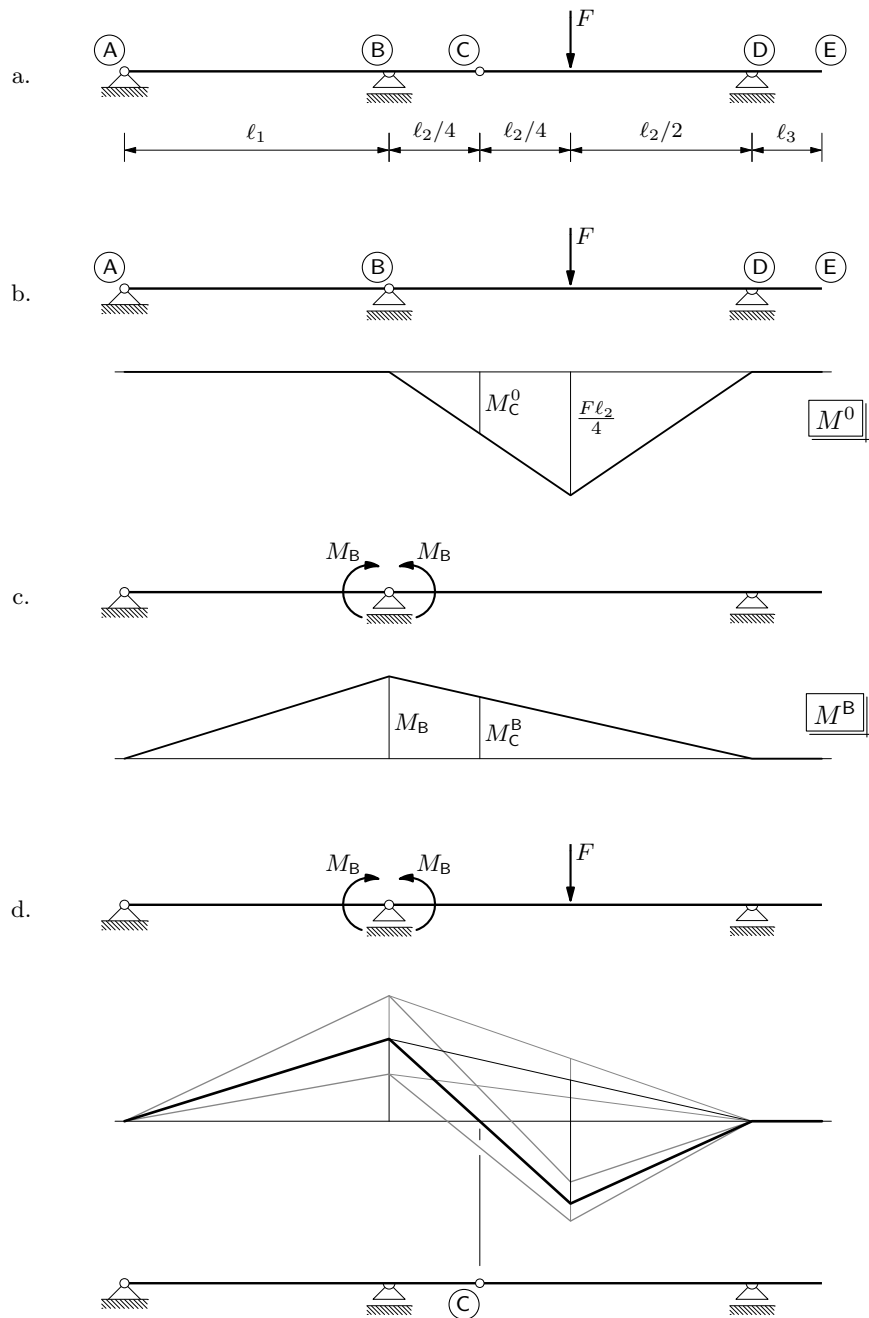
Kako je na zamišljenom sistemu nad ležajem B zglob, dodati moramo, kao vanjsko djelovanje, par koncentriranih momenata  $\mp \vec{M}_B$  jednakih intenziteta, jedan moment para neposredno lijevo, a drugi, suprotnoga smisla vrtnje, neposredno desno od zgloba (gornji crtež na slici 65.d.). Problem je, međutim, u tome što nam vrijednost  $M_B$  tih momenata nije (barem naizgled) poznata prije nego što riješimo izvorni Gerberov nosač. Na srednjem su dijelu slike d. skicirana tri momentna dijagrama za tri različite vrijednosti  $M_B$ ; samo je dijagram nacrtan crnom linijom „onaj pravi”, traženi: jedino njegov srednji segment siječe os u točki koja odgovara zglobu Gerberova nosača.

Budući da je vrijednost  $M(x)$  momenta savijanja u svakom presjeku  $x$  jednaka zbroju vrijednosti  $M^0(x)$  momenta izazvanoga djelovanjem zadanoga opterećenja (u našem primjeru sile  $\vec{F}$ ) i vrijednosti  $M^B(x)$  momenta zbog djelovanja dodanoga para momenata  $\mp \vec{M}_B$ , ta se dva utjecaja na mjestu zgloba C moraju poništiti:

$$M^0(x_C) + M^B(x_C) = 0 \quad \text{ili, sažetije zapisano,} \quad M_C^0 + M_C^B = 0.$$

Odmah slijedi:

$$M_C^B = -M_C^0.$$



Slika 65.

Ta nam jednakost daje jednostavan postupak grafičkoga nalaženja tražene vrijednosti  $M_B$ . Djeluju li na zamišljeni nosač samo momenti  $\mp \vec{M}_B$ , momentni će dijagram biti sastavljen od dijelova pravaca (slika 65.c.). Za crtanje pravca nad poljem  $\overline{BD}$  poznavati treba dvije njegove točke. Jedna od njih je točka na osi koja odgovara ležaju D, jer vrijednost momenta nad tim ležajem mora biti jednaka nuli. Za drugu ćemo točku u dijagramu  $M^0$  na donjem crtežu slike b. očitati vrijednost  $M_C^0$  i nanijeti je, zbog promjene predznaka, na suprotnu stranu osi kao  $M_C^B$ . Produljimo li spojnicu tih dviju točaka nad ležaj B, dobivamo

i vrijednost  $M_B$ . Tu vrijednost možemo i izračunati primjenom „sličnosti trokutâ”:

$$\frac{M_B}{\ell_2} = \frac{M_C^B}{\frac{3}{4}\ell_2} \quad \Rightarrow \quad M_B = \frac{4}{3}M_C^B = -\frac{4}{3}M_C^0.$$

Uz poznatu je vrijednost momenta nad ležajem lako dovršiti dijagram  $M^B$  odsječkom pravca nad poljem  $\overline{AB}$ : nad ležajem A vrijednost je momenta savijanja jednaka nuli.

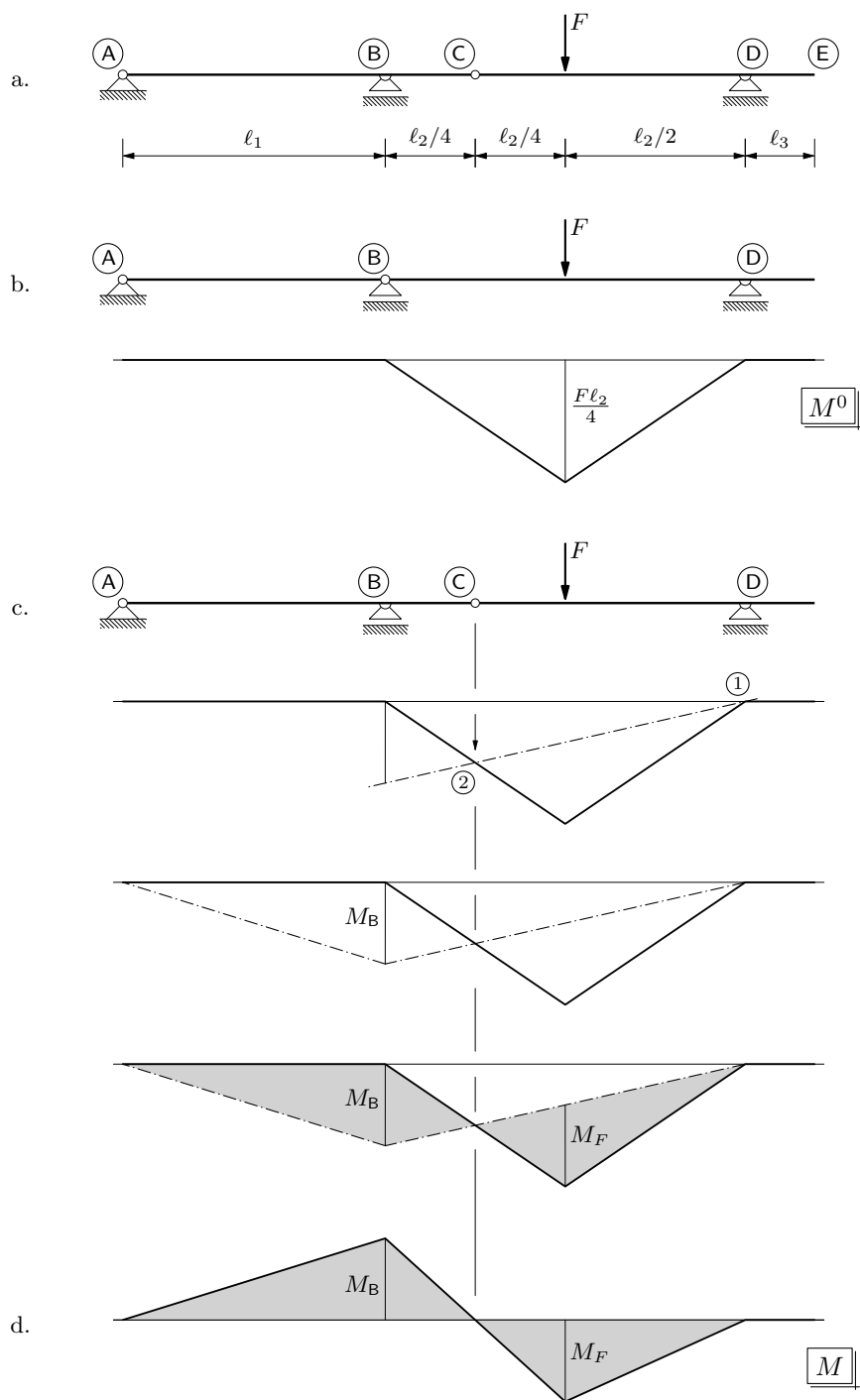
Konačni dijagram momenata savijanja za zajedničko djelovanje opterećenja zadanog na izvornom nosaču i dodanoga para momenata možemo nacrtati tako da na dijagram  $M^B$  „objesimo” odgovarajuće dijelove dijagrama  $M^0$ : u našem ćemo primjeru u polovište odsječka dijagrama  $M^B$  nad poljem  $\overline{BD}$  iz dijagrama  $M^0$  prenijeti vrijednost  $F\ell_2/4$  momenta savijanja „ispod” sile  $\vec{F}$  (već spomenuti dijagram nacrtan crnom linijom na srednjem crtežu slike 65.d.; kako u polju  $\overline{AB}$  nema zadanoga opterećenja, pripadni se dio dijagrama  $M^B$  ne mijenja).

Cijelu je grafičku konstrukciju momentnoga dijagrama na zamjenjujućem sistemu za mehaničko stanje koje se podudara s mehaničkim stanjem Gerberova nosača, utemeljenu na opisanim zamislima, najpogodnije provesti na jednom crtežu. Prvo ćemo za zadano opterećenje na zamjenjujućem sistemu na uobičajeni način nacrtati dijagram  $M^0$  (slika 66.b.). Dijagram  $M^B$  pak zrcalimo u osi i crtamo „preko” dijagrama  $M^0$ . Znamo da su  $M_D^B = 0$  i  $M_C^B = -M_C^0$ , pa ćemo odsječak dijagrama  $M^B$  nad poljem  $\overline{BD}$  stoga provući kroz točku na osi nad ležajem D i kroz točku dijagrama  $M^0$  koja daje  $M_C^0$  (točke 1 i 2 na drugom crtežu slike c.). Time dobivamo i vrijednost  $M_B$  nad ležajem B, pa je spojnica s točkom na osi nad ležajem A (jer je  $M_A^B = 0$ ) odsječak nad poljem  $\overline{AB}$  (treći crtež na slici c.).

Takvo crtanje omogućava neposredno grafičko oduzimanje drugog dijagrama od prvoga: preklopljene se površine između osi i linija tih dijagramâ međusobno poništavaju, a linija drugoga dijagrama postaje novom, doduše izlomljenom osi, što znači da se vrijednosti razlike odmjeravaju od nje (najdonji crtež slike 66.c.). Posebno, budući da na mjestu zgloba C linija dijagrama siječe novu os, vrijednost je momenta savijanja u toj točki jednaka nuli.

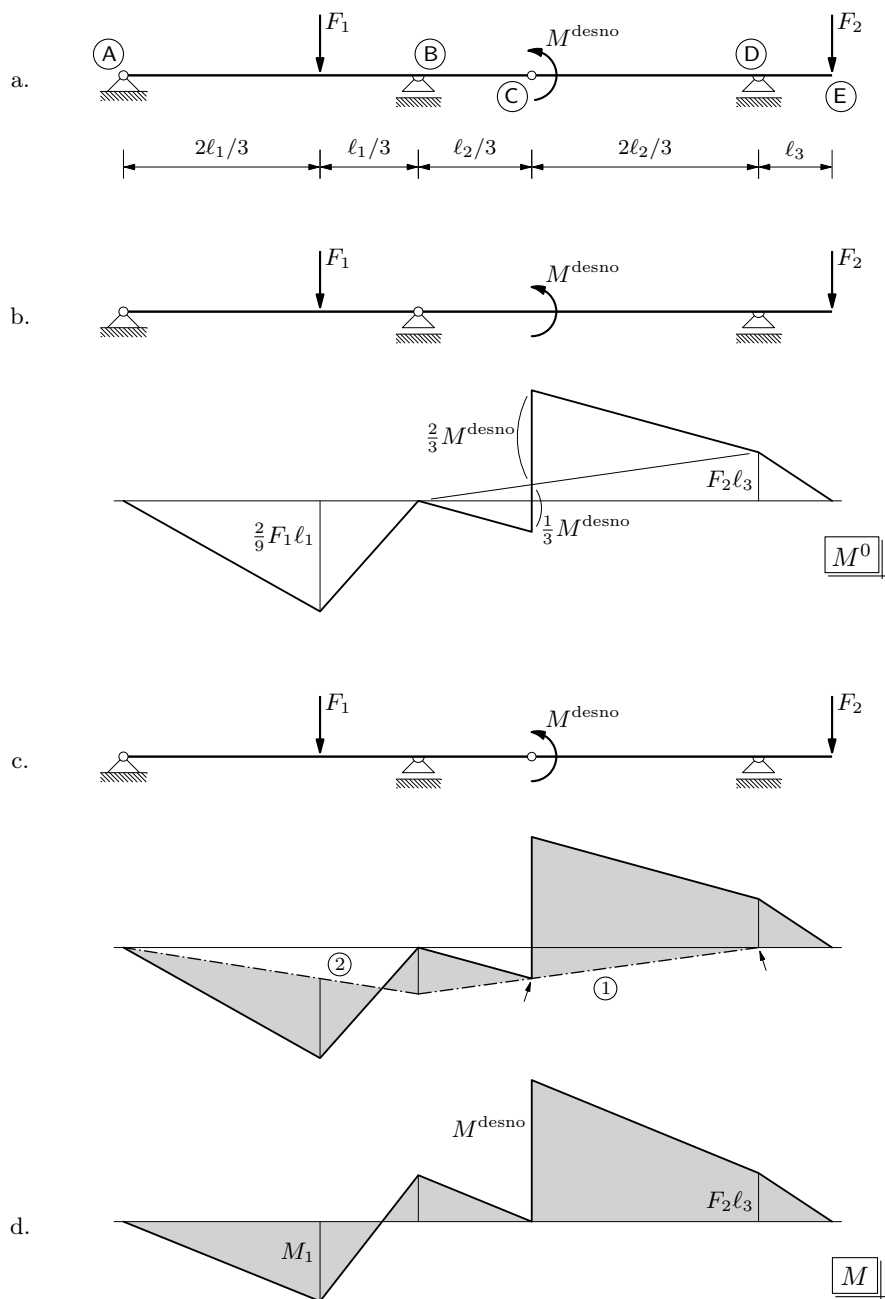
Treba li, nova se os lako može i „izravnati” (slika 66.d.).

Sličan je Gerberov nosač, s nešto složenijim opterećenjem, zadan na slici 67.a. na stranici 122. Dijagram  $M^0$  za isti raspored opterećenja na zamišljenom zamjenjujućem sistemu, sastavljenu ponovno od jednostavno oslonjene grede i grede s prepustom sa zajedničkim srednjim ležajem, prikazan je na slici b.; momenti savijanja postoje sada u oba polja i na prepustu. Kao i u prethodnom primjeru, želimo li zamjenjujući sistem dovesti u mehaničko stanje u kojemu je izvorni Gerberov nosač, od tog dijagrama moramo oduzeti dijagram momenata savijanja zbog para momenata zasad nepoznate vrijednosti koji djeluju neposredno lijevo i desno od zgloba nad ležajem B. Kako je dijagram  $M^B$  sastavljen od odsječaka pravaca, njegovo crtanje možemo i moramo započeti nad poljem u kojem su u dvije točke poznate konačne vrijednosti momenata. U lijevome je polju zasad poznata samo vrijednost u ležaju A [kolika je?], ali znamo da na mjestu zgloba C vrijednost mora biti jednaka nuli i da se nad ležajem D vrijednost  $F_2\ell_3$  ne može promijeniti [zašto?]. Stoga prvo crtamo odsječak dijagrama  $M^B$  nad poljem  $\overline{BD}$  — odsječak označen



Slika 66.

sa 1 na donjem crtežu slike 67.c. Taj odsječak prolazi točkom na osi nad ležajem D, tako da tu konačna vrijednost ostaje  $F_2\ell_3$ , i donjom točkom „skoka” u dijagramu  $M^0$  na mjestu točke C; zadani koncentrirani moment  $\vec{M}^{\text{desno}}$ , naime, na Gerberovu nosaču djeluje neposredno desno od zgloba C, pa konačni dijagram slijêva „ulazi u nulu”. Odsječak 1 daje vrijednost momenta nad ležajem B, pa su sada i u polju  $\overline{AB}$  poznate dvije vrijednosti, te možemo nad tim poljem nacrtati odsječak 2.



Slika 67.

Odsječci 2 i 1 i dio „stare” osi nad prepustom čine izlomljenu os konačnoga dijagrama. To je dijagram momenata savijanja na zamišljenu zamjenjujućem sistemu koji je u istom mehaničkom stanju kao i izvorni Gerberov nosača, pa, prema tome, i dijagrama momenata na tom Gerberovu nosaču. (Dijagram, s osi svedenom na horizontalu, prikazan je na slici 67.d.)

Dòsad smo govorili o oduzimanju dijagrama  $M^B$  od dijagrama  $M^0$ , ali ponegdje se, u stvari, ti dijagrami zbrajaju. Tako u našem primjeru linije dijagramâ  $M^0$  i  $M^B$  između točaka C i D leže s različitih strana osi, pa se, kao što vidimo na slici 67.c., površine između osi i tih linija u osi nadovezuju i, stoga, zbrajaju.

Iz opisa postupka možemo izvesti opće pravilo za grafičko zbrajanje/oduzimanje dviju funkcija: graf druge funkcije crta se s promijenjenim predznacima svih vrijednosti i pretvara u novu os. Pritom se vrijednosti, koje se nadovezuju, pribrajaaju, a preklopljene se vrijednosti poništavaju.

Budući da zamjenjujući sistem dovodimo u mehaničko stanje u kojemu je Gerberov nosač zbrajanjem/oduzimanjem ili, rječnikom statike, *superponiranjem* dvaju stanja — stanja pri djelovanju opterećenja prenesenih s Gerberova nosača i stanja pri djelovanju para momenata oko zgloba nad ležajem — postupak nazivamo *superpozicijskim postupkom*.

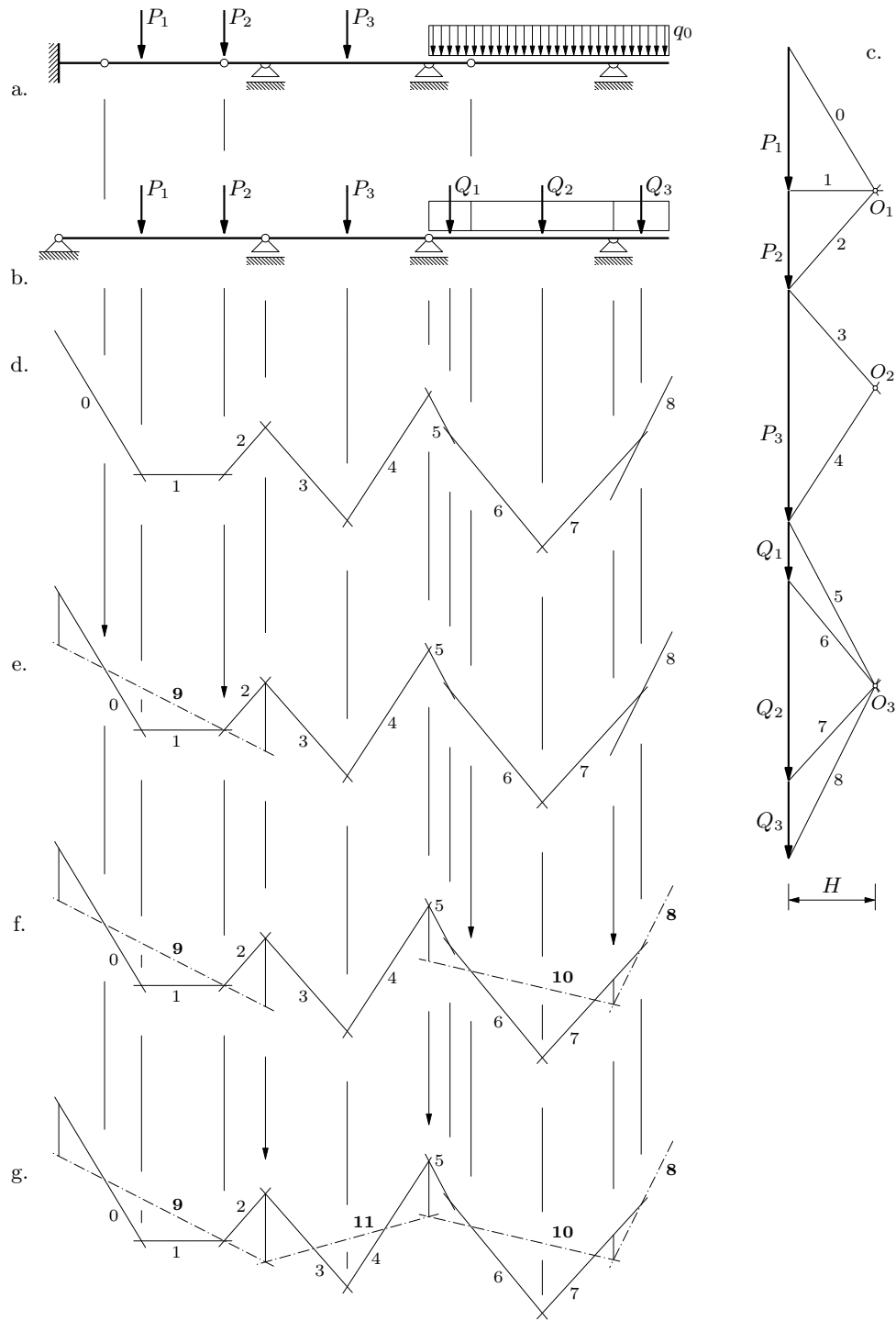
Ako, kao u prethodnim primjerima, karakteristične vrijednosti potrebne za crtanje dijagrama  $M^0$  izračunavamo, provedba je postupka *grafoanalitička* — tek u drugom koraku na crtežu nalazimo točke kojima prolazi nova os. Na primjeru sa slike 68.a. prikazat ćemo grafičku provedbu postupka; razlika je samo u prvome koraku.

Zamjenjujući je sistem sada niz dviju jednostavno oslonjenih greda i grede s prepustom (slika 68.b.). Na slici 68.d. smo linije momentnih dijagrama na pojedinim gredama, za djelovanje sila s izvornoga nosača, nacrtali kao verižne poligone, s pomoću poligona sila sa slike c. Pritom smo distribuiranu silu zamijenili koncentriranim silama, pa je verižni poligon na gredi s prepustom tangentni poligon verižne krivulje. (Uskoro ćete saznati zašto smo distribuiranu silu u polju podijelili na mjestu zgloba Gerberova nosača.) Verižni se poligoni u točkama koje odgovaraju zajedničkim ležajevima susjednih greda nadovezuju jedan na drugi. Kako bi mjerila vrijednosti momenata u sva tri dijagrama bila jednaka, sva smo tri pola u poligonu sila stavili na jednake udaljenosti od pravca na koji smo nanizali vektore sila.

Rekosmo maločas „linije momentnih dijagrama”, a ne „momentne dijagrame” — budući da još nismo ucrtali zaključne linije, dijagrami nemaju osi, pa nisu dovršeni. Kad bi nas zanimali dijagrami na gredama zamjenjujućega sistema za djelovanje koncentriranih sila  $\vec{P}_i$  i distribuirane sile  $\vec{q}_0$ , za prvu bi gredu zaključna linija prošla točkama u kojima vertikale kroz prvi i drugi ležaj sijeku stranice 0 i 2 prvoga verižnog poligona, za drugu gredu točkama u kojima vertikale kroz drugi i treći ležaj sijeku stranice 3 i 4 drugog poligona, a za polje između ležajeva treće grede točkama u kojima vertikale kroz treći i četvrti ležaj sijeku stranice 5 i 8 trećeg poligona, dok bi se za prepust poklapala sa stranicom 8. Kako, međutim, tražimo mehaničko stanje Gerberova nosača, zaključne su linije, prema pravilu za grafičko zbrajanje/oduzimanje funkcija, linije momentnih dijagrama zbog djelovanja dodanih parova uravnoteženih koncentriranih momenata oko zglobova nad drugim i trećim ležajem i dodanoga koncentriranog momenta neposredno desno od zgloba u prvom ležaju (drugi moment para ovdje djeluje na podlogu), crtane „iza zrcala”. Vrijednosti tih koncentriranih momenata nisu nam poznate, ali znamo da njima izazvani momenti savijanja moraju na mjestima zglobova Gerberova nosača poništiti momente savijanja zbog sila  $\vec{P}_i$  i  $\vec{q}_0$ . To znači da zaključne linije moraju sjeći stranice verižnih poligona „ispod” tih zglobova.

U prvom su polju Gerberova nosača dva zgloba, pa u odgovarajućim presjecima zamjenjućega sistema momenti savijanja moraju iščeznuti. Prema tome, u prvom su polju poznate dvije točke kojima prolazi zaključna linija. Povlačenjem odsječka zaključne linije





Slika 68.

između prvoga i drugog ležaja, na slici 68.e. označenoga s 9 dobivamo i vrijednosti momenta nad tim ležajevima, pa je poznata i vrijednost momenta na početku drugoga polja. To je, međutim, jedina poznata vrijednost u drugome polju — u njemu nema zgloba,<sup>16</sup>

<sup>16</sup> Prema drugomu pravilu o rasporedu zglobova (odjeljak 5.2.) u tom polju ne smiju biti dva zgloba. A ako bi bila, trebalo bi povući pravac kroz tri točke, što u općemu slučaju nije moguće.

a zasad ne znamo vrijednost momenta nad trećim ležajem. Drugo polje moramo, stoga, preskočiti; možda ćemo više sreće imati u trećem polju. I zaista, Gerberov nosač u njemu ima zglob, a kako preko četvrtoga ležaja prelazi (opterećeni) prepust, vrijednost je momenta savijanja nad tim ležajem poznata, iako nije jednaka nuli. Jedna točka kojom prolazi zaključna linija za treće polje sjecište je vertikale kroz četvrti ležaj i stranice 8 verižnoga poligona (koja je ujedno i zaključna linija za prepust). Budući da smo distribuiranu silu između ležajeva razdvojili u dijelove, koje smo zamijenili koncentriranim silama  $\vec{Q}_1$  i  $\vec{Q}_2$ , u točki koja odgovara zglobu Gerberova nosača, na vertikali kroz zglob bit će diralište verižne krivulje na stranici poligona između tih sila — stranici 6; ta je točka ništište momentnog dijagrama u trećem polju i, stoga, druga poznata točka kojom će proći odsječak 10 zaključne linije (slika 68.f.). Taj odsječak daje i vrijednost momenta savijanja nad trećim ležajem i, time, vrijednost na kraju drugoga polja, pa se sada možemo „vratiti” i ucrtati odsječak 11 zaključne linije za to polje (slika g.).

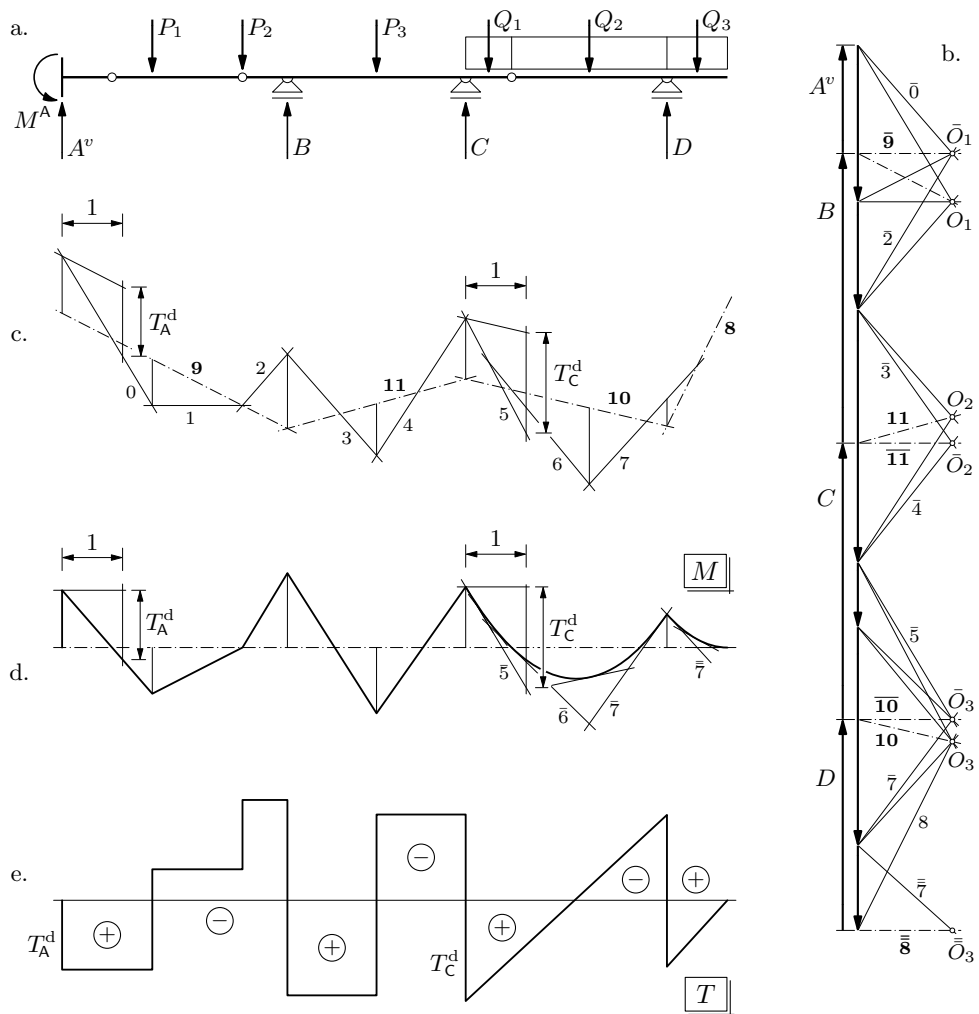
Na kraju se, naravno, izlomljena zaključna linija 9–11–10–8 može i izravnati. Već smo u odjeljku o jednostavno oslonjenoj gredi pokazali da se „iskrivljeni” momentni dijagram, koji smo konstruirali kao verižni poligon, na horizontalnu os može svesti na dva načina. Prvi je neposredno prenošenje odabranih vrijednosti u novi dijagram: po vertikalama izmjerene duljine odsječaka između vrhova verižnoga poligona i zaključne linije (slika 69.c.) vrijednosti su momenata u karakterističnim točkama (slika d.).

Druga je mogućnost određivanje traženih nagiba stranica verižnog poligona u poligonu sila (slika 69.b.): uvedemo li nove polove  $\bar{O}_1$ ,  $\bar{O}_2$ ,  $\bar{O}_3$  i, za prepust,  $\bar{O}_3$  na razinama sjecištâ pravca na kojemu leže vektori zadanih sila sa zrakama 9, 11, 10 i 8, paralelnima s odsječcima izlomljene zaključne linije, novi će verižni poligon, čije su stranice paralelne s novim zrakama, označenima s  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ , ...,  $\bar{7}$  i, na prepustu,  $\bar{7}$ , imati, očito je, horizontalnu zaključnu liniju. U verižnom poligonu/dijagramu momenata savijanja na slici d. ucrtani su i dijelovi kvadratnih parabola u trećem polju i na prepustu.

Spomenuta sjecišta zraka usporednih s odsječcima zaključne linije i pravca vektorâ zadanih sila daju i vektore reakcija  $\vec{A}^v$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  i  $\vec{D}$  (slika 69.b.).

Dijagram poprečnih sila prikazan na slici 69.e. možemo na temelju diferencijalnog odnosa  $T = M'$  „izvesti” iz momentnoga dijagrama. Naime, dobro je znano da je geometrijsko značenje derivacije funkcije u nekoj točki nagib tangente na graf funkcije u toj točki. Prema tome, vrijednost poprečne sile bit će jednaka prirastu tangente pri jediničnom prirastu apscise. Na slikama c. i d. na taj su način određene poprečne sile neposredno desno od ležaja A i neposredno desno od ležaja C. Priraste tangenata u momentnom dijagramu s nakošenim odsječcima osi treba, kao na slici c., očitavati od pravaca usporednih s tim odsječcima; jedinični se prirasti apscise, međutim, moraju izmjeriti po horizontali, jer su pojedini dijelovi dijagrama s nakošenim odsječcima osi „posmično deformirane” slike odgovarajućih dijelova dijagrama s horizontalnom osi.

Ako je nosač nacrtan u mjerilu 1 cm ::  $n$  m i ako je u poligonu sila „udaljenost” polova od pravca vektorâ sila  $H$  kN, mjerilo je momentnog dijagrama, konstruiranoga kao verižni poligon, 1 cm ::  $nH$  kNm, dok je mjerilo na opisani način očitanih vrijednosti poprečnih sila 1 cm ::  $nH$  kN.

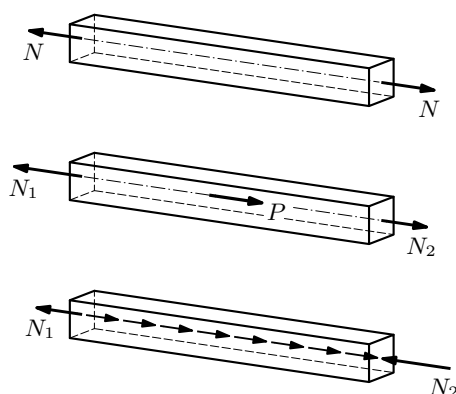


Slika 69.

## 6. Statički određeni ravninski rešetkasti nosači

*Rešetkastim nosačima* nazivamo konstrukcije proračunske sheme kojih sadrže sàmo zglobne čvorove povezane zglobnim štapovima.

*Zglobni* je štap ravan štap koji prenosi sile sàmo uzduž svoje osi: rezultirajuće sile unutarnjih plošnih sila u poprečnim presjecima djeluju na osi, a rezultirajući momenti iščezavaju, pa u poprečnim presjecima postoje samo uzdužne sile; na slici 70. prikazan je dio štapa između dva poprečna presjeka. Da bi unutarnje sile koje djeluju na osi mogle održati ravnotežu sa zadanim vanjskim silama, vanjske sile, koncentrirane i distribuirane, moraju također djelovati na pravcu osi. Tradicionalno se zglobnima nazivaju jedino štapi na koje vanjske sile „smiju” djelovati isključivo na krajevima, tako da su unutarnje sile u svim presjecima jednake. Kao što sâm naziv kaže, veze su štapa s podlogom ili s drugim dijelovima konstrukcije zglobne; te veze uz to smiju biti sàmo na njegovim krajevima.

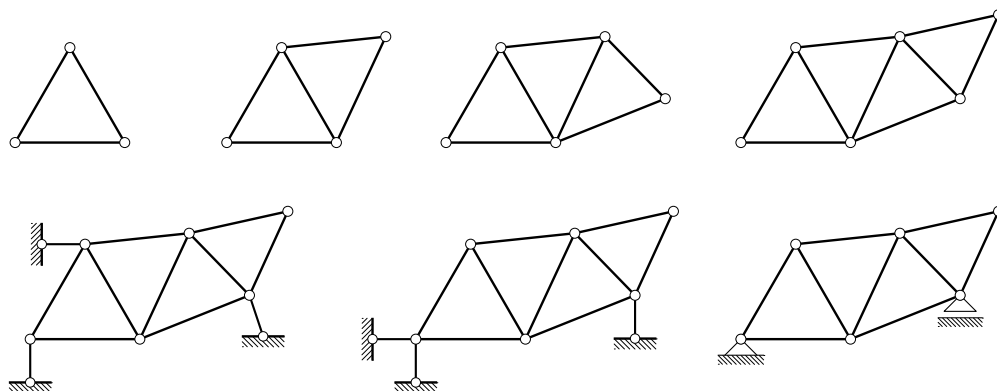


Slika 70.

Unutarnje sile u zglobnom štapu mogu biti vlačne ili tlačne. Posljedice djelovanja tih sila produljenja su ili skraćenja štapa. S matematičkoga se gledišta vlačna i tlačna sila razlikuju samo po predznacima svojih vrijednosti, ali s fizičkoga stajališta ponašanje štapa može pri djelovanju tlačne sile biti bitno drugačije nego pri djelovanju vlačne — vitki se štap može pri djelovanju velike tlačne sile izviti.

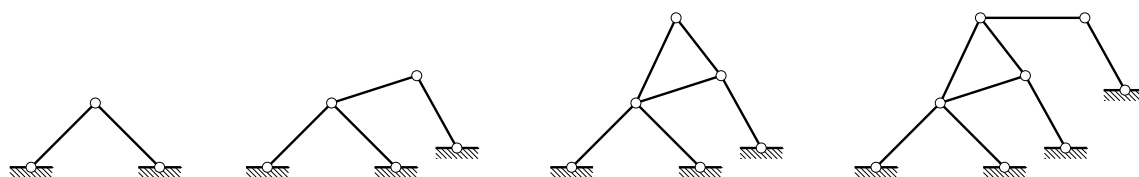
Osnovni je iznutra geometrijski nepromjenjiv ravninski sklop zglobnih štapova trokut. *Jednostavnim statički određenim ravninskim rešetkastim nosačima* nazivat ćemo nosače sastavljene od trokuta zglobnih štapova. Budući da ćemo se ograničiti na ravninske statičko određene nosače, govorit ćemo kratko o jednostavnim rešetkastim nosačima.

Možemo razlikovati dva osnovna postupka sklapanja jednostavnih rešetkastih nosača. U prvome u prvom koraku sklapamo jednostavno iznutra geometrijski nepromjenivo ravninsko ulančeno rešetkasto tijelo (slika 71., gornji niz). koje u drugom koraku dovoljnim brojem vanjskih veza spajamo s podlogom (donji niz na istoj slici).



Slika 71.

U drugom pak postupku zglobne čvorove uzastopno s po dva zglobna štapa spajamo s podlogom i/ili s nepomičnim čvorovima (slika 72.).



Slika 72.

## 6.1. Metode čvorova

Sve veze rešetkastoga nosača s podlogom zamijenit ćemo odgovarajućim brojem pravilno raspoređenih zglobnih štapova (treći i drugi crtež u donjemu nizu na slici 71.). Čvorove koji nisu ležajni nazvat ćemo (uz malo pjesničke slobode) slobodnima. Broj je čvorova nosača  $n_a$ , a broj je njegovih štapova  $b$ .

Čvorove ćemo označiti uzastopnim brojevima od 1 do  $n_a$  tako da prvo pobrojimo slobodne, a potom ležajne čvorove: ako je  $n$  čvorova slobodno, oznake će slobodnih čvorova biti brojevi  $1, 2, \dots, n$ , a oznake ležajnih brojevi  $n + 1, \dots, n_a$ .

Štap između čvorova  $i$  i  $j$  označit ćemo sa  $\{i, j\}$ ; jasno je da je uvijek  $i \neq j$  te da  $\{i, j\}$  i  $\{j, i\}$  označavaju isti štapa. Pogodno je štapove označiti i uzastopnim brojevima od 1 do  $b$ .

Neka su  $\vec{e}_{i,j}$  i  $\vec{e}_{j,i}$  jedinični vektori na osi štapa  $\{i, j\}$ , pri čemu je vektor  $\vec{e}_{i,j}$  orijentiran od čvora  $i$  prema čvoru  $j$ , dok je vektor  $\vec{e}_{j,i}$  orijentiran od čvora  $j$  prema čvoru  $i$ , tako da je  $\vec{e}_{j,i} = -\vec{e}_{i,j}$ . Vanjska je normala na ravninu poprečnoga presjeka na kraju  $i$  orijentirana kao vektor  $\vec{e}_{j,i}$ , a na kraju  $j$  kao vektor  $\vec{e}_{i,j}$ .

Uzdužna sila na kraju  $i$  određena je vektorom

$$\vec{S}_{i,j} = S_{i,j} \vec{e}_{j,i}. \quad (143)$$

Skalar  $S_{i,j}$  njezina je vrijednost; za vlačnu je silu  $S_{i,j} > 0$ , dok je za tlačnu silu  $S_{i,j} < 0$ . Analogno, vektor je uzdužne sile na kraju  $j$

$$\vec{S}_{j,i} = S_{j,i} \vec{e}_{i,j}.$$

Kako je  $\vec{S}_{j,i} = -\vec{S}_{i,j}$ , bit će, s druge strane,

$$\vec{S}_{j,i} = -(S_{i,j} \vec{e}_{j,i}) = S_{i,j} (-\vec{e}_{j,i}) = S_{i,j} \vec{e}_{i,j},$$

pa je, naravno,  $S_{j,i} = S_{i,j}$ ; uvest ćemo oznaku  $S_{\{i,j\}} = S_{j,i} = S_{i,j}$ .

Ako su  $(x_i, y_i)$  i  $(x_j, y_j)$  koordinate čvorova  $i$  i  $j$ , vektori  $\vec{e}_{i,j}$  i  $\vec{e}_{j,i}$  dani su izrazima

$$\begin{aligned} \vec{e}_{i,j} &= \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}} \vec{j}, \\ \vec{e}_{j,i} &= \frac{x_i - x_j}{\ell_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{y_i - y_j}{\ell_{\{i,j\}}} \vec{j}, \end{aligned} \quad (144)$$

gdje je

$$\ell_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (145)$$

duljina štapa  $\{i, j\}$ . Uvedemo li oznake

$$c_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}} \quad \text{i} \quad s_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}},$$

možemo pisati

$$\vec{e}_{i,j} = c_{i,j} \vec{i} + s_{i,j} \vec{j} \quad \text{i} \quad \vec{e}_{j,i} = c_{j,i} \vec{i} + s_{j,i} \vec{j}. \quad (146)$$

Rezultantu vanjskih sila koje djeluju na slobodni čvor  $i$  označit ćemo sa  $\vec{F}_i$ ; njezine su skalarne komponente  $F_{i,x}$  i  $F_{i,y}$ . Štap  $\{i, j\}$  pak na čvor  $i$  djeluje silom

$$-\vec{S}_{i,j} = -S_{\{i,j\}} \vec{e}_{j,i} = S_{\{i,j\}} \vec{e}_{i,j}. \quad (147)$$

Za svaki se slobodan čvor  $i = 1, \dots, n$  može napisati vektorska jednadžba ravnoteže sila koje na nj djeluju:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (-\vec{S}_{i,j}) + \vec{F}_i = \vec{0}$$

ili

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_{\{i,j\}} \vec{e}_{i,j} + \vec{F}_i = \vec{0}, \quad (148)$$

pri čemu je  $\mathcal{N}_i$  skup čvorova koji su štapovima povezani sa čvorom  $i$ .

Ta je jednađžba, znamo, istovrijedna dvjema jednađžbama koje izražavaju iščezavanje zbrojeva projekcija sila na koordinatne osi:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} c_{i,j} S_{\{i,j\}} + F_{i,x} &= 0, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} s_{i,j} S_{\{i,j\}} + F_{i,y} &= 0 \end{aligned} \tag{149}$$

za  $i = 1, \dots, n$ . Dobiveni sustav sadrži  $n$  jednađžbi, dok je broj nepoznatih vrijednosti sila u štapovima  $b$ .

Za analizu uvjeta rješivosti pogodno je sustav (149) zapisati u matricnom obliku, pa će sažeto, matricnom stenografijom, biti

$$\mathbf{A} \mathbf{s} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

ili

$$\mathbf{A} \mathbf{s} = -\mathbf{f}. \tag{150}$$

Zasad nepoznate vrijednosti sila u štapovima poredane su pritom u vektor  $\mathbf{s}$  prema brojčanim oznakama štapova: ako je  $\kappa$  brojčana oznaka štapa  $\{i, j\}$ , onda je  $S_{\{i,j\}}$  komponenta  $\kappa$  vektora  $\mathbf{s}$ ,  $S_\kappa = S_{\{i,j\}}$ .

Matricu sustava  $\mathbf{A}$  nazivamo *ravnotežnom* ili *statičkom matricom*. Koeficijenti uz  $S_{\{i,j\}} = S_\kappa$  u jednađžbama ravnoteže čvora  $i$  njezine su komponente u sjecištima redaka  $2(i-1)+1$  i  $2(i-1)+2$  sa stupcem  $\kappa$ :

$$a_{2(i-1)+1, \kappa} = c_{i,j} \quad \text{i} \quad a_{2(i-1)+2, \kappa} = s_{i,j}, \tag{151}$$

Vrijednost  $S_{\{i,j\}} = S_\kappa$  ulazi i u jednađžbe ravnoteže čvora  $j$ , kojima odgovaraju redci  $2(j-1)+1$  i  $2(j-1)+2$  matrice  $\mathbf{A}$ , pa su, u istom stupcu,

$$a_{2(j-1)+1, \kappa} = c_{j,i} \quad \text{i} \quad a_{2(j-1)+2, \kappa} = s_{j,i}. \tag{152}$$

Matrica  $\mathbf{A}$  ima  $2n$  redaka i  $b$  stupaca. Broj stupaca jednak je broju komponentata vektora  $\mathbf{s}$ , dok je broj redaka jednak broju komponentata vektora  $\mathbf{f}$ .

Komponente vektora  $\mathbf{f}$  s indeksima  $2(i-1)+1$  i  $2(i-1)+2$  skalarne su komponente  $F_{i,x}$  i  $F_{i,y}$  vanjske sile  $\vec{F}_i$  koja djeluje u čvoru  $i$ .

Ako je broj nepoznatih vrijednosti sila jednak broju jednađžbi ravnoteže,  $b = 2n$ , i ako je matrica  $\mathbf{A}$  regularna (ako joj je rang  $2n$ ), sustav jednađžbi ravnoteže (150) ima jedinstveno rješenje za bilo koji vektor  $\mathbf{f}$ ; formalno je

$$\mathbf{s} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}. \tag{153}$$

Za oba je spomenuta postupka sklapanja jednostavnih statički određenih ravninskih rešetkastih nosača lako dokazati *Maxwellovo pravilo*: za ravninski sklop koji sadrži  $n$  slobodnih zglobnih čvorova najmanji je broj (matematičkim rječnikom: nuždan broj) zglobnih štapova potrebnih za geometrijsku nepromjenjivost

$$b = 2n. \tag{154}$$

A kako su ti nosači sastavljeni od trokuta<sup>17</sup>, taj je najmanji broj štapova i dovoljan za geometrijsku nepromjenjivost. Sâm pak najmanji broj znači statičku određenost, pa će sustav (150) imati jedinstveno rješenje, odnosno, matrica  $\mathbf{A}$  će biti regularna.

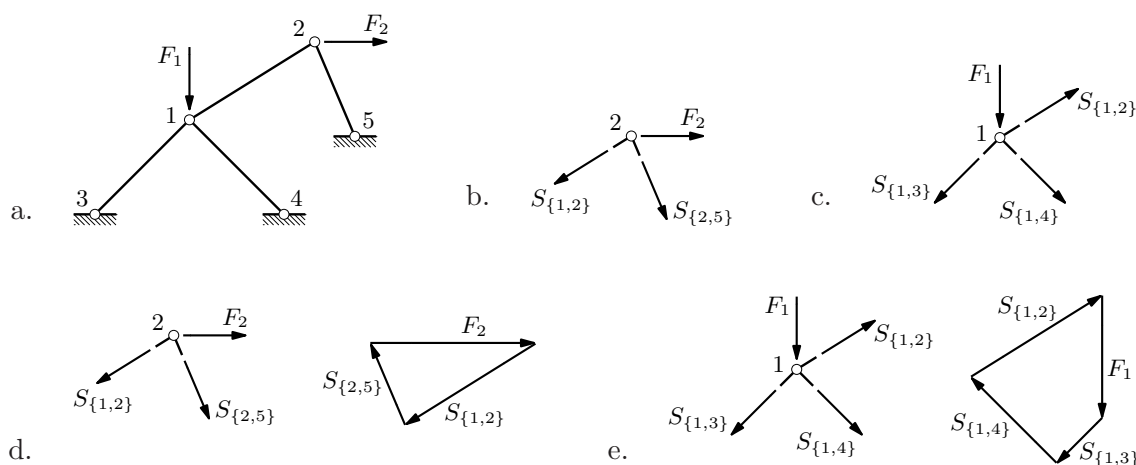
Obilježje je jednostavnih rešetkastih nosača da se jednadžbe (149) mogu poredati tako da se sustav ne mora rješavati kao cjelina, nego postupno, u nizu s  $n$  koraka. U svakom se koraku, naime, može pronaći barem jedan čvor u kojem su nepoznate samo dvije vrijednosti sila u priključenim štapovima. Ako je nosač sklopljen prvim postupkom, u nekim će slučajevima prije izračunavanja vrijednosti sila u štapovima rešetkastoga tijela trebati izračunati vrijednosti sila u štapovima koje tijelo spajaju s podlogom. Za nosače pak sklopljene drugim postupkom redosljed rješavanja je suprotan od redosljeda sklapanja.

Primjerice, u čvor 2 nosača sa slike 73.a. priključena su dva štapa, pa ćemo, napišemo li (prema slici b.) jednadžbe ravnoteže za taj čvor, dobiti sustav koji sadrži dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} c_{2,1} S_{\{1,2\}} + c_{2,5} S_{\{2,5\}} &= -F_2, \\ s_{2,1} S_{\{1,2\}} + s_{2,5} S_{\{2,5\}} &= 0. \end{aligned}$$

U čvoru 1 sastaju se tri štapa, ali je vrijednost sile u jednome od njih, u štapu  $\{1,2\}$ , iz prethodnoga koraka poznata. Jednadžbe ravnoteže za taj čvor (prema slici c.) stoga ponovno tvore sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} c_{1,3} S_{\{1,3\}} + c_{1,4} S_{\{1,4\}} &= -c_{1,2} S_{\{1,2\}}, \\ s_{1,3} S_{\{1,3\}} + s_{1,4} S_{\{1,4\}} &= F_1 - s_{1,2} S_{\{1,2\}}. \end{aligned}$$



Slika 73.

Čvorove možemo uravnotežiti i grafički, zatvaranjem poligona sila: poligon sila u čvoru 2 na slici d., potom poligon sila u čvoru 1 na slici e.

[Pokušajte odrediti redosljed rješavanja čvorova za drugi nosač u donjem nizu slike 71.]

<sup>17</sup> Degenerirane slučajeve u kojima sva tri vrha „trokuta” leže na pravcu isključujemo.

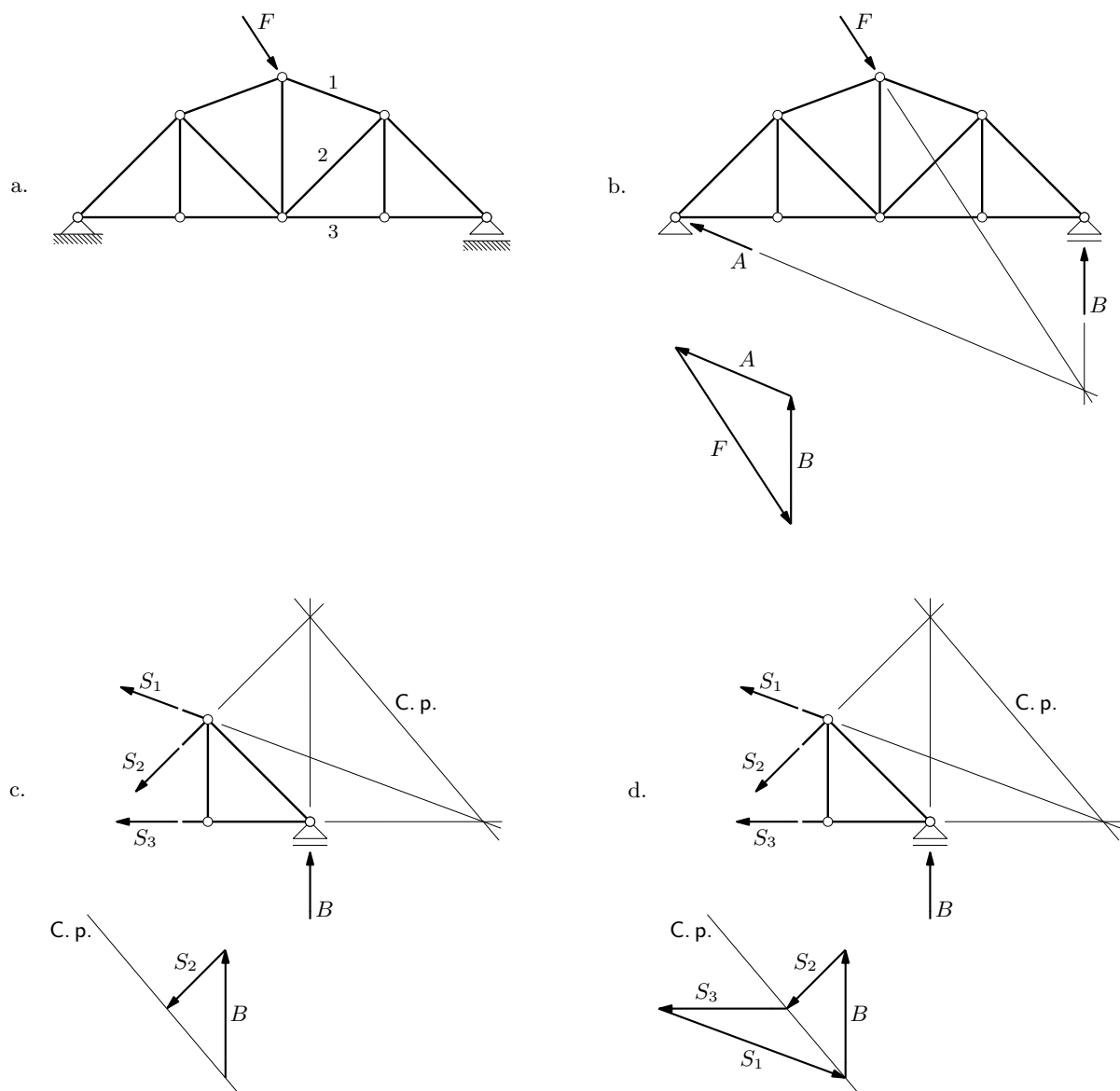


## 6.2. Metode presjeka

### 6.2.1. Culmannov postupak

Već ste u odjeljku 4.1.3. naučili da je Culmannov postupak grafički postupak uravnoteženja četiriju sila u ravnini. Podsjećamo: četiri su sile u ravnoteži ako rezultanta bilo koje dvije sile djeluje na pravcu određenom rezultantom preostalih dviju sila (taj se pravac naziva Culmannovim pravcem) te ako su te dvije rezultante jednakih intenziteta, a suprotna smisla djelovanja.

Culmannov je postupak primjenjiv kad je zadana jedna sila zadana (pravac i smisao djelovanja te intenzitet), a zadani su i pravci djelovanja preostalih triju sila, a traže se njihovi intenziteti i orijentacije.



Slika 74.

U primjeni Culmannova postupka u rješavanju rešetkastoga nosača zamišljenim presijecanjem nekoliko štapova razdvajamo ga u dva dijela. Pri tome sile smiju biti nepoznate u tri ili, kod K rešetke, u četiri presječena štapa. Na dio nosača s jedne strane presjeka tada djeluju četiri sile: tri nepoznate sile u presječenim štapovima i rezultanta svih poznatih sila; nepoznate se sile određuje iz navedenoga grafičkog uvjeta ravnoteže četiriju sila.

Kao primjer, odredit ćemo sile u štapovima 1, 2 i 3 nosača sa slike 74.a. na prethodnoj stranici. U prvom koraku određujemo reakcije (slika b.). Potom izdvajamo dio nosača desno od presjeka kroz štapove 1, 2 i 3 (slika c.). Culmannov pravac prolazi sjecištima pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $\pm\vec{S}_2$  te sila  $\pm\vec{S}_1$  i  $\pm\vec{S}_3$ . Budući da je sila  $\vec{B}$  poznata, zatvaranjem trokuta sila kojem su stranice sila  $\vec{B}$ , paralela s pravcem djelovanja sile  $\pm\vec{S}_2$  i paralela s Culmannovim pravcem određujemo orijentaciju i intenzitet sile  $\pm\vec{S}_2$  te orijentaciju i intenzitet rezultante tih dviju sila na Culmannovu pravcu (slika c.). U posljednjem koraku zatvaranjem novoga trokuta sila, stranice kojeg su rezultanta na Culmannovu pravcu i paralele s pravcima djelovanja sila  $\pm\vec{S}_1$  i  $\pm\vec{S}_3$ , određujemo orijentacije i intenzitete tih dviju sila (slika d.).

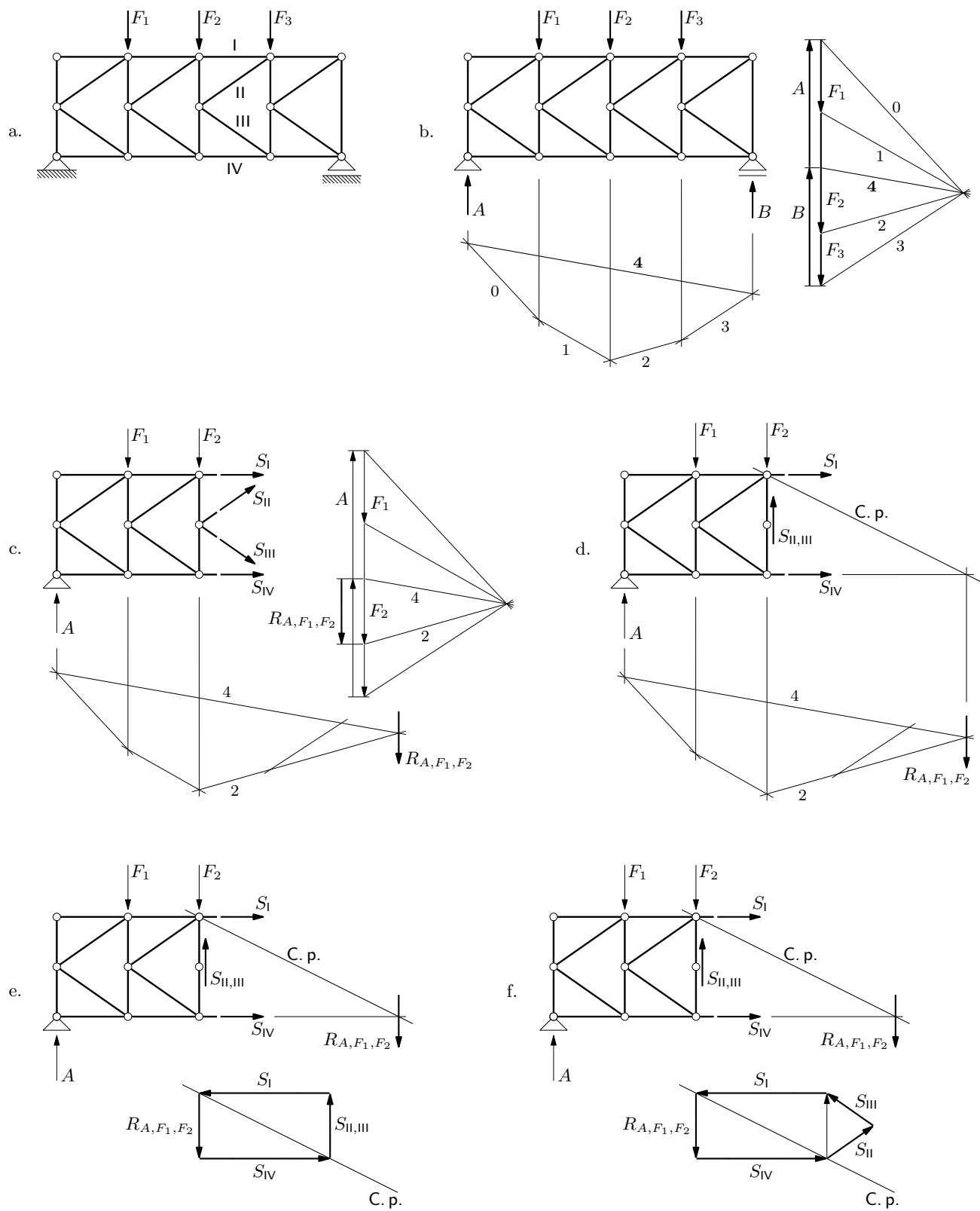
### 6.2.2. Nosač s K ispunom

Rešetkasti se nosači s K ispunom (slika 75.a.) ne mogu razdvojiti presijecanjem samo tri štapa. Ipak, Culmannov se postupak može primijeniti nakon presijecanja četiri štapa jednoga polja, jer se može naći pravac djelovanja rezultante sila u dva presječena dijagonalna štapa, čime se broj pravaca na kojima djeluju sile nepoznatih vrijednosti svodi na tri. Rezultanta sila u dvije presječene dijagonale mora uravnotežiti rezultantu sila u ostala dva štapa priključena u isti čvor (čvora oblika slova K). Te druge dvije sile djeluju na istom vertikalnom pravcu, pa je na tom pravcu i njihova rezultanta. Slijedi da i rezultanta sila u dijagonalama mora biti vertikalna.

Primjer rješavanja prikazan je na slici 75. Reakcije su određene primjenom verižnoga poligona i poligona sila (slika b.). Ti su poligoni upotrijebljeni i za nalaženje rezultante vanjskih sila koje djeluju na lijevi dio nosača, izdvojen presijecanjem štapova I–IV (slika c.). Culmannov je pravac spojnica sjecišta pravaca djelovanja sile u štapu gornjega pojasa i rezultante sila u dijagonalama i sjecišta pravaca djelovanja sile u štapu donjega pojasa i rezultante vanjskih sila (slika d.). Nakon što smo Culmannovim postupkom odredili intenziteta i orijentacije sila u štapovima donjega i gornjega pojasa i rezultante sila u dijagonalama (slika e.), tu smo rezultantu rastavili u dijagonalne komponente (slika f.).

### 6.2.3. Ritterov postupak

Ritterov ste postupak, kao analitički postupak izračunavanja vrijednosti triju sila, upoznali u odjeljku 4.1.2. Zamišljenim presijecanjem nekoliko štapova, od kojih su u tri (odnosno, u slučaju K rešetke, u četiri) sile nepoznate, rešetkasti nosač razdvajamo u dva dijela, pa sile u „presječenim” štapovima nalazimo iz uvjeta ravnoteže jednoga dijela. Za tri uvjeta uzimamo uvjete ravnoteže momenata u odnosu na točke u kojima se sijeku osi



Slika 75.

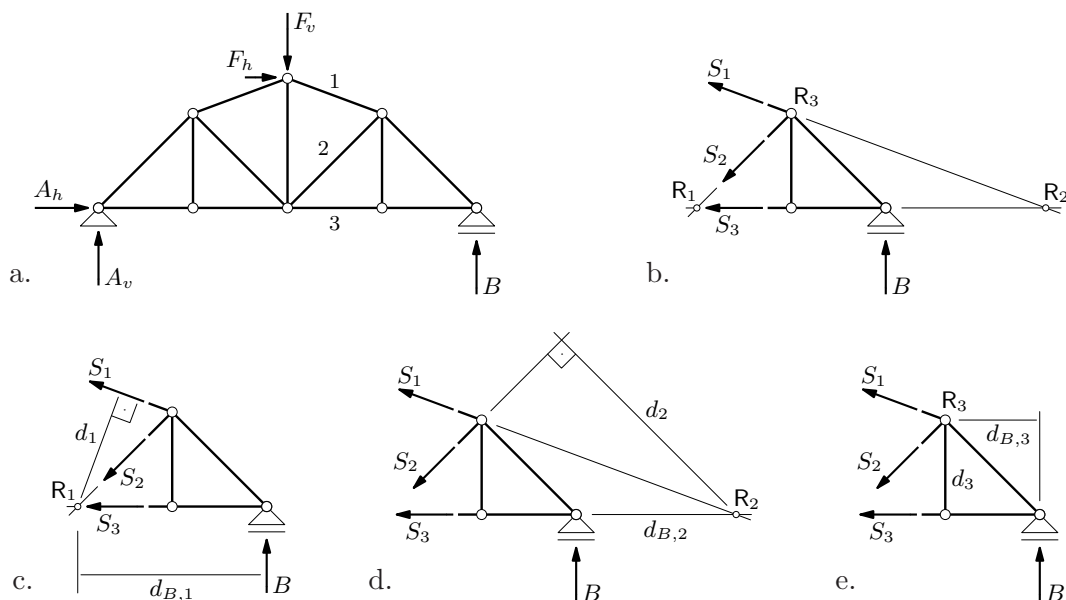
dvaju od tri odabrana štapa (i koje i sada nazivamo Ritterovim točkama), jer se u svakoj jednađbi ravnoteže tada kao jedina nepoznatica pojavljuje sila u trećem štapu.

Na slici 76.b. određene su Ritterove točke za sile u štapovima 1, 2 i 3 nosača sa slike a.: Ritterova točka  $R_1$  za silu  $\pm \vec{S}_1$  sjecište je osi štapova 2 i 3, točka  $R_2$  za silu  $\pm \vec{S}_2$  sjecište je osi štapova 1 i 3, dok je točka  $R_3$  za silu  $\pm \vec{S}_3$  sjecište osi štapova 1 i 2. Jednađbe ravnoteže momenata u odnosu na Ritterove točke (prema slikama c., d. i e.) neposredno daju izraze za vrijednosti sila:

$$\sum_{\text{desni dio}} M_{/R_1} = 0 : \quad S_1 \cdot d_1 + B \cdot d_{B,1} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = -\frac{d_{B,1}}{d_1} B,$$

$$\sum_{\text{desni dio}} M_{/R_2} = 0 : \quad S_2 \cdot d_2 - B \cdot d_{B,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{d_{B,2}}{d_2} B,$$

$$\sum_{\text{desni dio}} M_{/R_3} = 0 : \quad -S_3 \cdot d_3 + B \cdot d_{B,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{d_{B,3}}{d_3} B.$$



Slika 76.

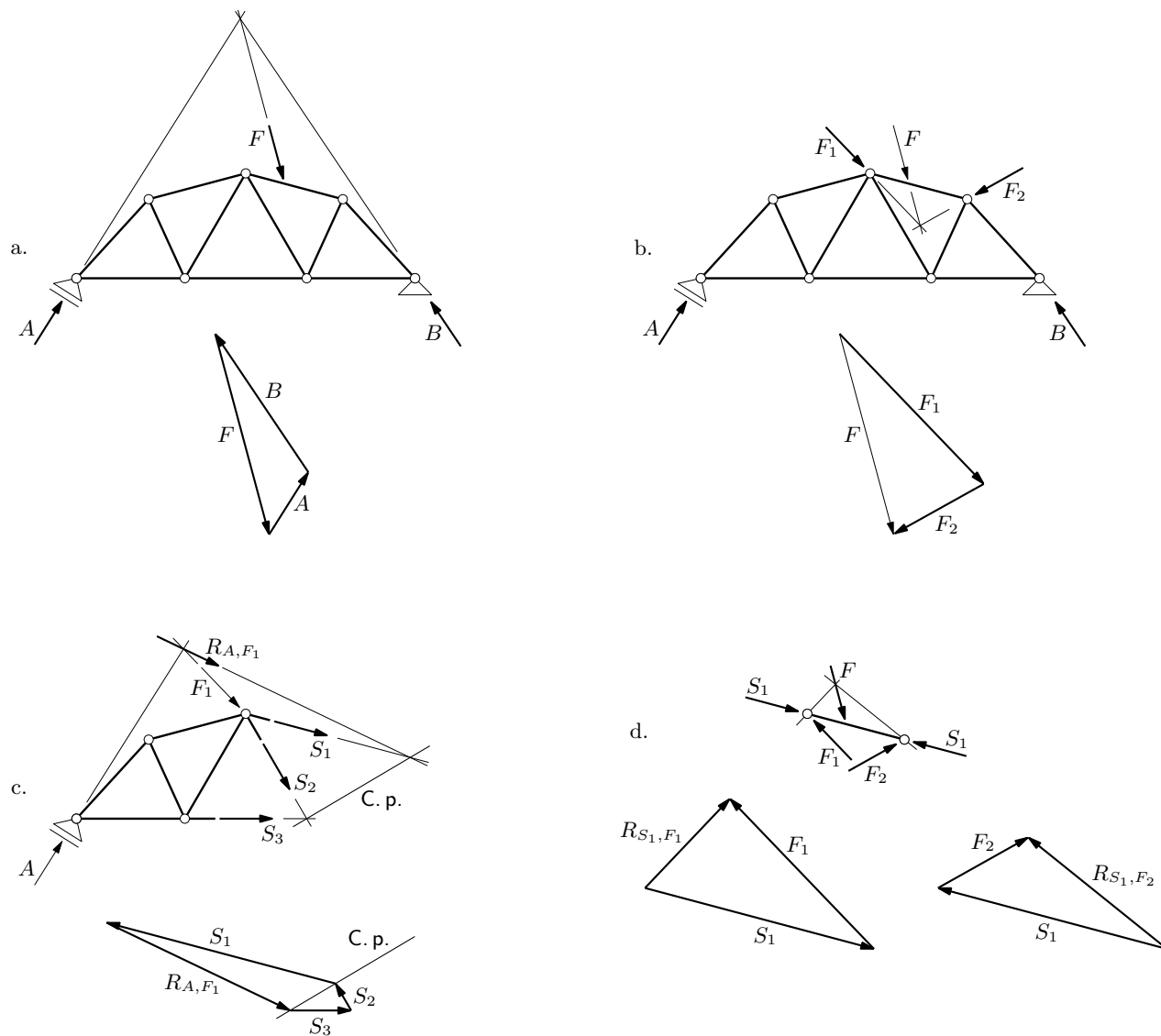
Budući da je kod nosača složenije ili nepravilne geometrije krakove sila najlakše odrediti mjerenjem na crtežu, u provedbi je Ritterov postupak često grafoanalitički.

Ako su osi dvaju presječenih štapova međusobno usporedne, vrijednost sile u trećemu štapu izračunava se iz uvjeta ravnoteže projekcija sila na pravac okomit na te osi.

### 6.3. Proširenje pojma rešetkastoga nosača

Postavka da su rešetkasti nosači opterećeni samo u zglobovima i da, stoga, u štapovima postoje samo uzdužne sile vrijedi samo kao proračunska shema i kao stanje koje je u većini slučajeva dovoljno točno. Ako vlastitu težinu štapova ne možemo zanemariti ili

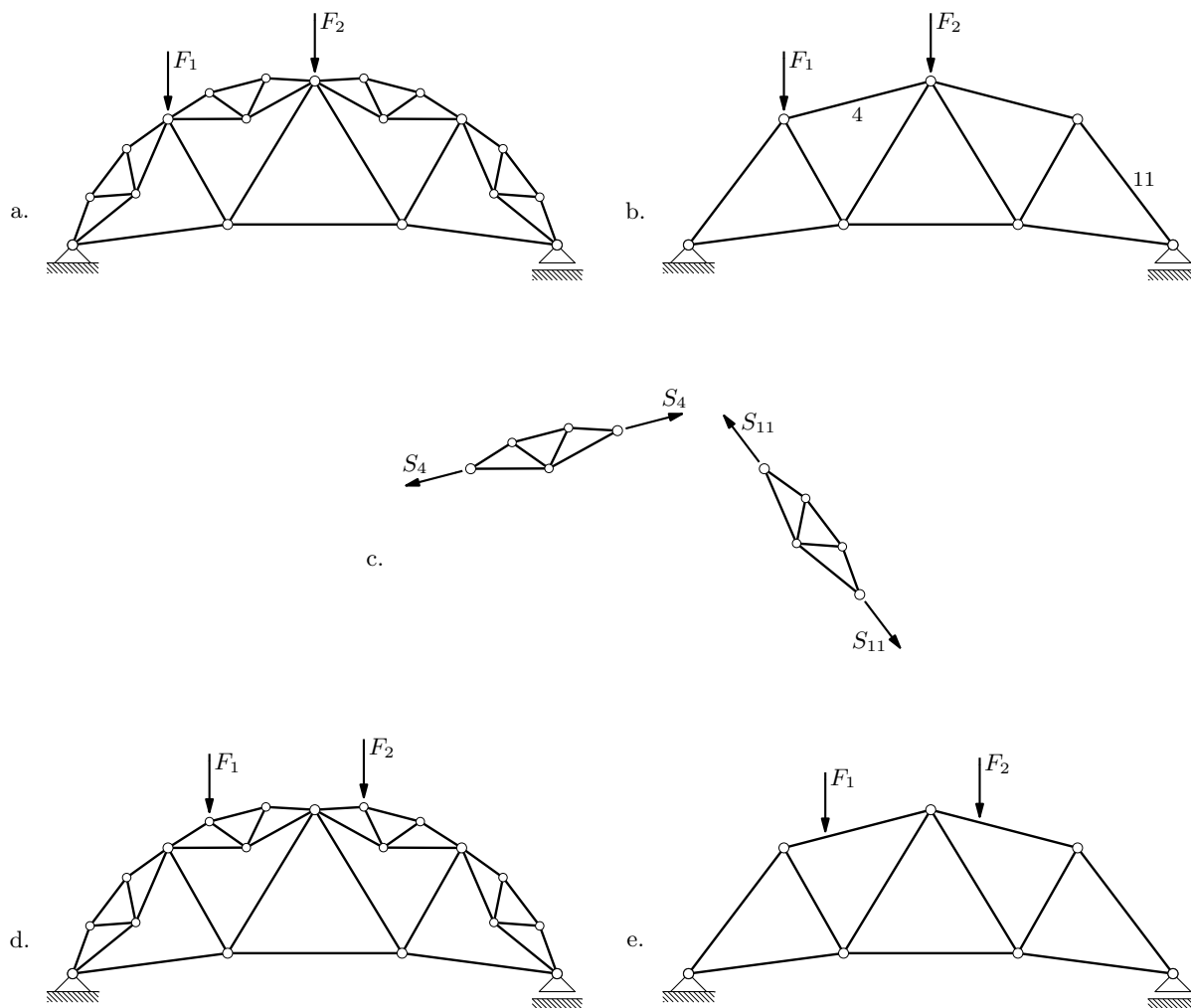
ako su štapovi neposredno opterećeni (slika 77.a.), moramo osim uzdužnih u obzir uzeti i poprečne sile i momente savijanja u njima. I u tom slučaju možemo nosač proračunati kao rešetkasti, pri čemu opterećenja rastavljanjem u komponente prenosimo u zglobove (slike b. i c.). Ukupne sile u štapovima potom nalazimo superpozicijom (slika d.).



Slika 77.

## 6.4. Složeni rešetkasti nosači

Složeni rešetkasti nosači sastavljeni su od štapova i rešetkastih tijela (slike 78.a. i d.). U prvome se koraku proračuna rešetkasta tijela zamjenjuju štapovima (slike b. i e.), a u drugom se koraku izračunavaju sile u štapovima tijela, pri čemu su tijela opterećena silama koje su u prvom koraku izračunane kao sile u zamjenjujućim štapovima (primjerice, slike c. za nosač i opterećenje sa slike a.).



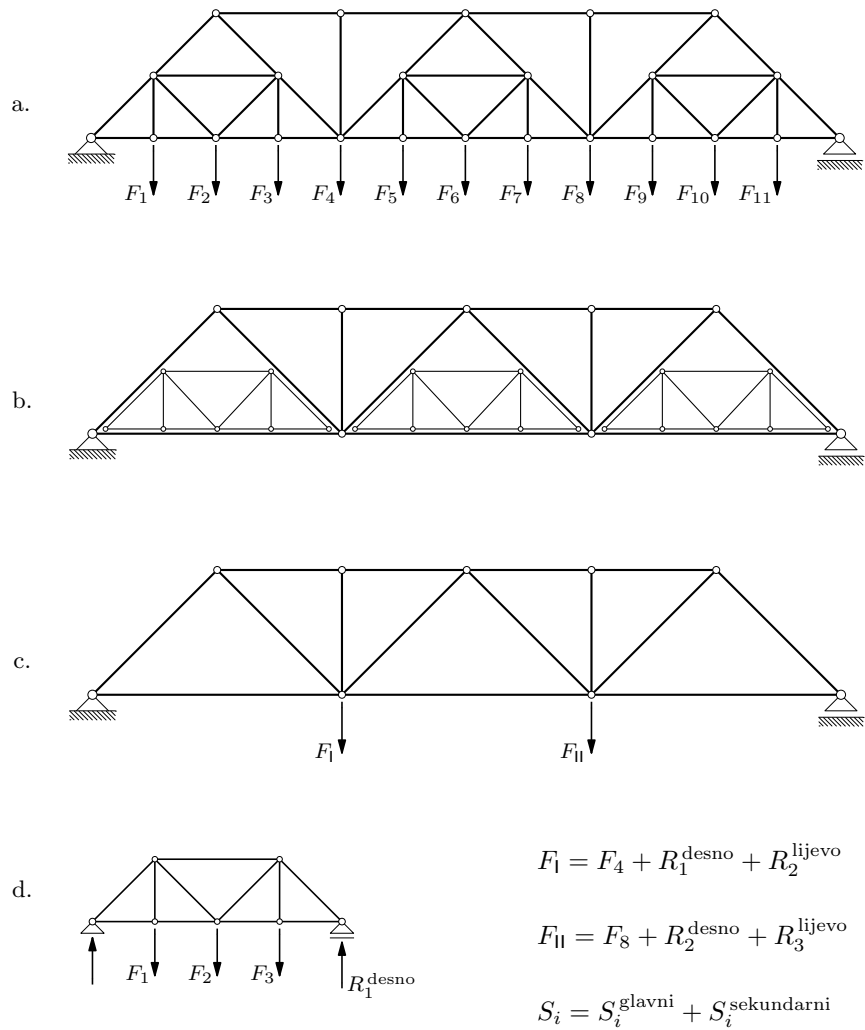
Slika 78.

## 6.5. Rešetkasti nosači sa sekundarnom ispunom

Rešetkasti nosači sa sekundarnom ispunom nastaju dodavanjem štapova u rešetkaste nosače jednostavnije strukture (slika 79.a.). Štapovi se mogu dodavati, primjerice, radi smanjenja duljine štapova kako bi se izbjegli preveliki lokalni momenti savijanja, radi smanjenja rasponâ sekundarnih nosača čije se opterećenje prenosi na čvorove rešetke te radi smanjenja duljina izvijanja tlačnih štapova.

Takve nosače proračunavamo rastavljanjem na glavni sistem i na sekundarne sisteme (slika b.), pri čemu prvo rješavamo sekundarne sisteme (slika d.), a potom dobivenim „reakcijama” opterećujemo glavni nosač (slika c.). Uzimamo, naime, da su „ležajevi” sekundarnih rešetaka u čvorovima glavnoga nosača.

Konačne vrijednosti sila u štapovima nalazimo primjenom superpozicije.

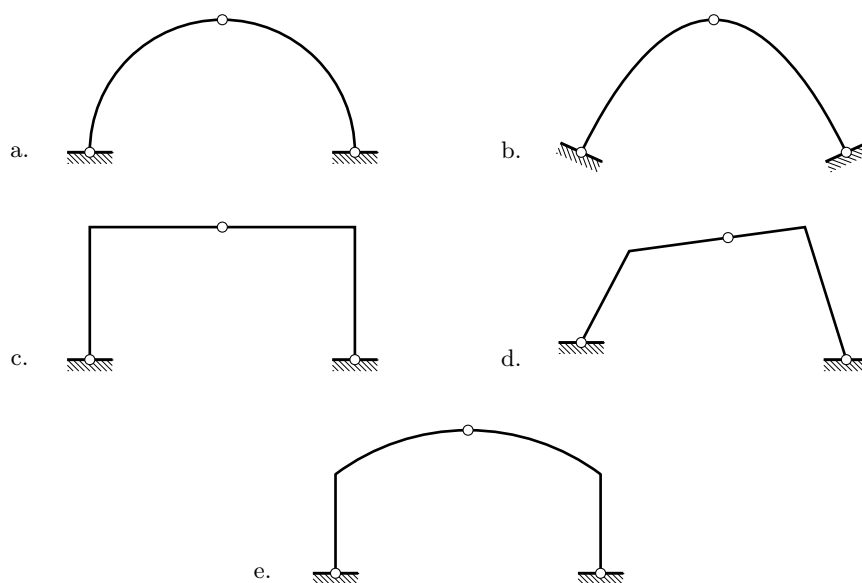


Slika 79.

## 7. Trozglobni lukovi i okviri

### 7.1. Opis. Geometrijska nepromjenjivost i statička određenost

Trozglobni su nosači konstrukcijski sistemi sastavljeni od dvaju diskova koji mogu biti punostjeni ili rešetkasti. Diskovi su međusobno povezani zglibom, a svaki je disk zglibno vezan i za podlogu. Zglob koji povezuje diskove nazvat ćemo srednjim zglibom. Ležajni zglibovi mogu, ali ne moraju biti na istoj visini. Ako su osi diskova dijelovi krivulja, nosači se obično nazivaju *trozglobnim lukovima* (slike 80.a. i b.), a ako su osi poligonalne linije *trozglobnim okvirima* (slike 80.c. i d.). Osim toga, osi diskova mogu biti i samo na dijelu zakrivljene (slika 80.e.). Najvišu točku luka nazivamo tjemenom.



Slika 80.

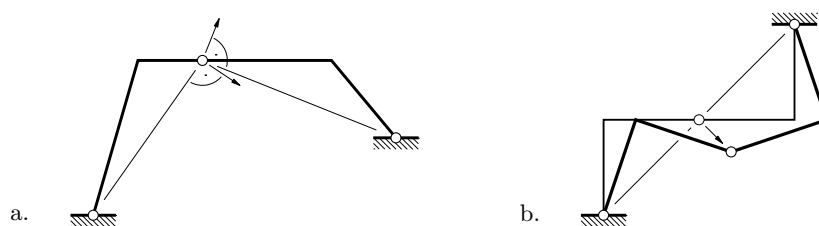
Trozglobni se sistemi često upotrebljavaju kao glavni nosači tvorničkih hala, skladišta, sportskih dvorana, mostova, . . . , a izvide se od armiranoga betona, čelika te monolitnog ili lijepljenog lameliranog drva. Osim zbog široke rasprostranjenosti u primjenama, trozglobni su nosači vrlo važna skupina konstrukcija i s teorijskoga i s edukacijskog gledišta: kao što ćemo u sljedećim poglavljima pokazati, nosači koji pripadaju nekim drugim tipovima proračunavaju se svodenjem na njih ili prema analogiji s njima.

Trozglobni sistemi zadovoljavaju nuždan uvjet geometrijske nepromjenjivosti:

$$S_{\min} = n_D \cdot 3 - n_{Z_1} \cdot 2 - n_L = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0.$$



Ako, kao na slikama 80.a.—e., sva tri zgloba ne leže na jednom pravcu, ti su sistemi geometrijski nepromjenjivi: pri zakretanju lijevoga diska oko njegova ležajnog zgloba srednji bi se zglob trebao početi gibati po okomici na spojnicu ta dva zgloba (slika 81.a.); no, srednji zglob „pripada” i desnom disku, pa bi se zbog toga morao pokrenuti po okomici na spojnicu s desnim ležajnim zglobom; kako ne može istodobno putovati po dva različita pravca, zaključujemo da mora ostati nepomičan (*QED*). Budući da u sistemu postoji upravo najmanji mogući broj veza neophodan za geometrijsku nepromjenjivost, ona odmah povlači i statičku određenost.



Slika 81.

Leže li, međutim, njegovi zglobovi na jednom pravcu, sistem (slika 81.b., tanja linija) je trenutno promjenjiv ... trenutno, sve dok se srednji zglob ne pomakne sa spojnice ležajnih zglobova (slika 81.b., deblja linija).

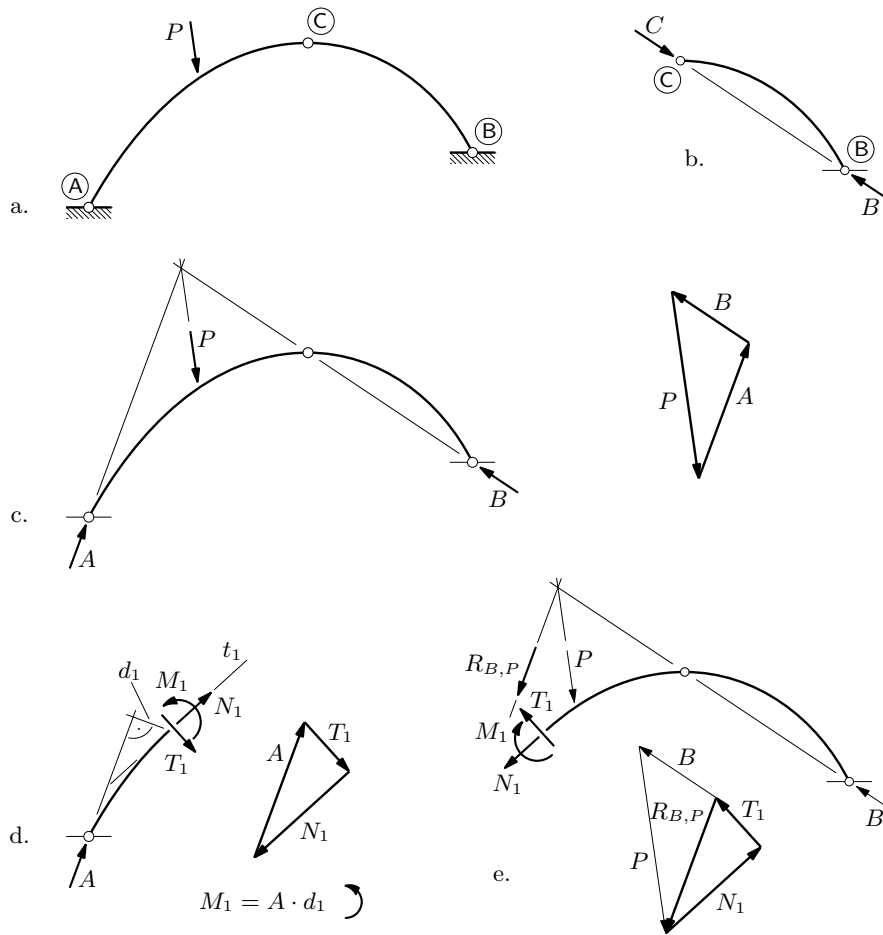
## 7.2. Grafički postupak

Kao i uvijek, započet ćemo s određivanjem reakcija. Budući da su oba ležaja nepomična, poznate su samo točke u kojima te reakcije djeluju, ali ne i njihove vrijednosti i pravci djelovanja — nepoznate su, prema tome, četiri veličine. Culmannov postupak, konstrukcija verižnoga poligona i neposredno uravnoteženje triju sila primjenjivi su ako su nepoznate tri veličine.<sup>18</sup>

### 7.2.1. Jedna zadana sila

Ako je opterećen samo jedan disk, primjerice lijevi (slika 82.a.), pravac na kojemu djeluje jedna reakcija može se lako odrediti iz uvjeta ravnoteže drugoga, neopterećenog diska; u našem je primjeru to desni disk. Na njega djeluju samo dvije sile: reakcija  $\vec{B}$  u desnom ležaju i spojna sila  $\vec{C}$  u srednjem zglobu. Da bi te dvije sile bile u ravnoteži, moraju, kao što znamo, djelovati na istom pravcu te imati jednake intenzitete i suprotne orijentacije. Zasad nam je potreban samo prvi dio toga uvjeta — njime je određen pravac djelovanja reakcije  $\vec{B}$ : on mora u planu položaja, osim kroz ležaj B, proći i kroz zglob C (slika 82.b.). Sada se možemo vratiti na cijeli nosač: utvrđivanjem pravca djelovanja jedne reakcije zadatak smo sveli na neposredno uravnoteženje triju sila od kojih je jedna ( $\vec{P}$ ) poznata (poznati su joj i pravac djelovanja i vrijednost), drugoj ( $\vec{B}$ ) znamo pravac djelovanja, a za

<sup>18</sup> Podsjećamo: Culmannov je postupak primjenjiv ako su nepoznate vrijednosti triju sila na poznatim pravcima, dok su neposredno uravnoteženje triju sila i verižni poligon primjenjivi ako su nepoznati pravac i vrijednost sile u poznatoj točki te vrijednost druge sile na poznatom pravcu.



Slika 82.

treću ( $\vec{A}$ ) znamo kojom točkom prolazi. Ravnoteža je moguća samo ako pravci djelovanja sve tri sile prolaze istom točkom (prvi geometrijski uvjet ravnoteže triju sila). Time je određen pravac djelovanja reakcije  $\vec{A}$ : on mora u planu položaja proći sjecištem pravaca djelovanja sile  $\vec{P}$  i  $\vec{B}$  (lijevi crtež na slici 82.c.). Drugi geometrijski uvjet ravnoteže triju sila — trokut sila mora biti zatvoren — daje intenzitete i smisao djelovanja reakcija  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  (desni crtež na slici 82.c.).

Kad su poznate reakcije, mogu se metodom jednostavnih presjeka odrediti sile u odabranom poprečnom presjeku. Priča je već poznata: zamišljenim presjekom odvajamo dio nosača, pa sile u presjeku moraju uravnotežiti rezultantu svih ostalih sila koje djeluju na promatrani dio. U našem primjeru na dio lijevo od presjeka djeluje samo reakcija  $\vec{A}$  (slika 82.d.), dok za dio desno od presjeka treba odrediti rezultantu  $\vec{R}_{B,P}$  zadane sile  $\vec{P}$  i reakcije  $\vec{B}$  (slika 82.e.). Sila  $\vec{R}_{B,P}$  ima isti intenzitet i isti pravac djelovanja kao sila  $\vec{A}$ , a suprotan smisao [zašto?].

Postupak se nimalo ne razlikuje od grafičkoga postupka određivanja sila u odabranom presjeku nosača s jednim diskom, opisana u odjeljku 4.2.2., budući da su pravci djelovanja uzdužne i poprečne sile poznati — uzdužna leži na pravcu tangente  $t_1$  na os nosača u točki presjeka, a poprečna na okomici na tu tangentu — njihove intenzitete i smisao

dobivamo zatvaranjem trokuta sila. Uravnotežavanjem dijelova nosača lijevo i desno od presjeka dobivamo, kao što znamo, sile jednakih intenziteta, ali suprotnih. Treba, stoga, uz crtež trokuta/poligona sila uvijek jasno navesti na koji dio dobivene sile djeluju, posebno ako se promatrani dio ne crta izdvojeno (što će i biti slučaj u većini primjera koji slijede).

Intenzitet  $|M_1|$  momenta savijanja jednak je umnošku intenziteta rezultante koja djeluje na promatrani dio i udaljenosti  $d_1$  pravca njena djelovanja od težišta presjeka:

$$|M_1| = |A| \cdot d_1 = |R_{B,P}| \cdot d_1 ;$$

udaljenost  $d_1$  očitavamo u planu položaja. Smisao vrtnje momenta suprotan je od smisla vrtnje momenta rezultante u odnosu na težište presjeka (u našem je primjeru jednak pretpostavljenom). I za smisao vrtnje momenata koji djeluju na lijevi i na desni dio vrijedi ono što je rečeno za smisao djelovanja uzdužne i poprečne sile.

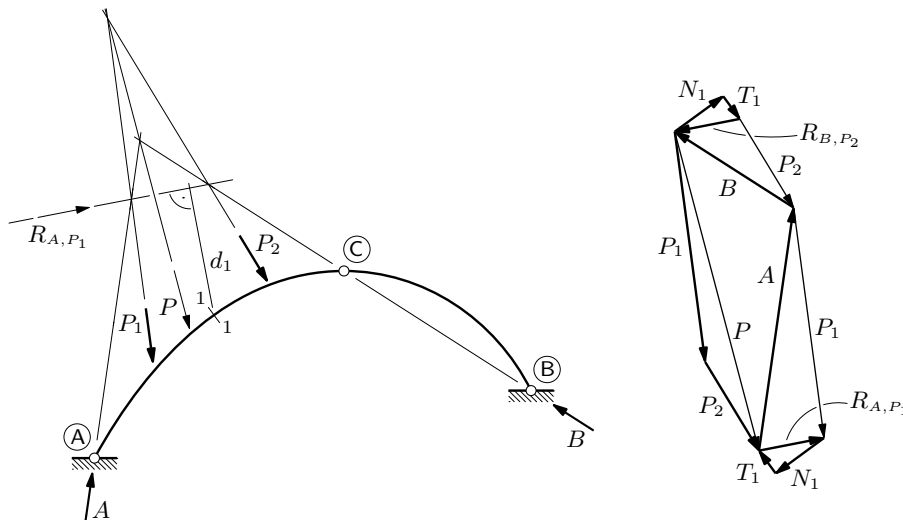
### 7.2.2. Više sila zadanih na jednome disku

U primjeru smo, jednostavnosti opisa radi, uzeli da je zadana samo jedna sila. Što se određivanja reakcija tiče, sila  $\vec{P}$  može biti i rezultanta više sila, ali, naglašavamo, sve moraju djelovati na jedan disk — reakcija u ležaju drugoga diska prolazit će kroz srednji zglob samo ako je taj disk neopterećen. I za određivanje sila u presjecima neopterećenoga diska svejedno je je li sila  $\vec{P}$  jedina ili je rezultanta više sila. Uz to, ništa se u postupku ne mijenja ni pri određivanju sila u presjecima opterećenoga diska koji leže lijevo od prve ili desno od zadnje sile zadanoga niza sila. Jedino za presjeke između tih sila treba u obzir uzeti pravce djelovanja, odnosno hvatišta pojedinih sila — uravnotežuju se samo one sile koje djeluju na dio nosača lijevo ili na dio desno od odabranoga presjeka.

Primjerice, na lijevi disk luka sa slike 83. djeluju sile  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$ . Kako je desni disk neopterećen, pravac djelovanja reakcije  $\vec{B}$  i sada prolazi kroz zglob C. Pravac na kojemu djeluje reakcija  $\vec{A}$  prolazi kroz sjecište pravaca djelovanja reakcije  $\vec{B}$  i rezultante  $\vec{P}$  sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$ . U poligonu sila možemo očitati intenzitete i orijentacije reakcija  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Za sada ništa novo.

Presjek 1–1 odabrat ćemo između hvatištâ sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$ . Na dio lijevo od tog presjeka djeluju sile  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_1$  (naglašavamo: samo sile  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_1$ , iako je prema crtežu i hvatište rezultante  $\vec{P}$  na tom dijelu), a na dio desno od njega reakcija  $\vec{B}$  i sila  $\vec{P}_2$ . Promatramo li lijevi dio, sile u presjeku 1–1 moraju, dakle, uravnotežiti rezultantu  $\vec{R}_{A,P_1}$  sila  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_1$ . Nagib pravca djelovanja, intenzitet i orijentaciju te rezultante određujemo u poligonu sila. Uz poznatu silu  $\vec{R}_{A,P_1}$ , u poligonu sila nalazimo i intenzitete i orijentacije uzdužne i poprečne sile u presjeku (trokut sila u dnu poligona). Za izračunavanje intenziteta momenta savijanja treba još na planu položaja očitati udaljenost  $d_1$  pravca djelovanja sile  $\vec{R}_{A,P_1}$  od presjeka 1–1. Taj pravac prolazi sjecištem pravaca na kojima djeluju sile  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_1$ , a uspoređan je s rezultantom  $\vec{R}_{A,P_1}$  određenom u poligonu sila.

Uravnoteženjem dijela nosača desno od presjeka 1–1 dobit ćemo unutarne sile istih intenziteta, ali suprotnih orijentacija. Poprečna i uzdužna sila uravnotežuju sada rezultantu  $\vec{R}_{B,P_2}$  sila  $\vec{P}_2$  i  $\vec{B}$  (trokut na vrhu poligona sila); intenzitet te rezultante jednak

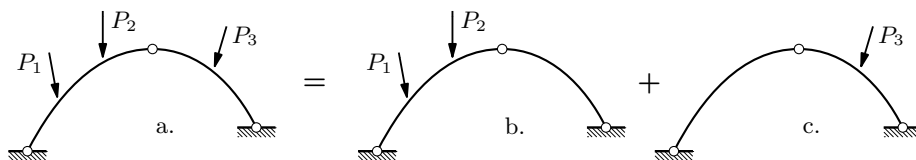


Slika 83.

je intenzitetu rezultante  $\vec{R}_{A,P_1}$ , a smisao djelovanja suprotan. U planu položaja pravac djelovanja sile  $\vec{R}_{B,P_2}$  (potreban za izračunavanje momenta savijanja) prolazi sjecištem pravaca na kojima djeluju sile  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_2$ , a usporedan je s rezultantom konstruiranom u poligonu sila. Taj se pravac mora podudarati s pravcem na kojem djeluje rezultanta  $\vec{R}_{A,P_1}$  [zašto?]. Dakle, pravac djelovanja rezultanta  $\vec{R}_{A,P_1}$  i  $\vec{R}_{B,P_2}$  možemo nacrtati i kao spojnicu sjecišta pravaca djelovanja sile  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_1$  te pravaca djelovanja sile  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_2$ .

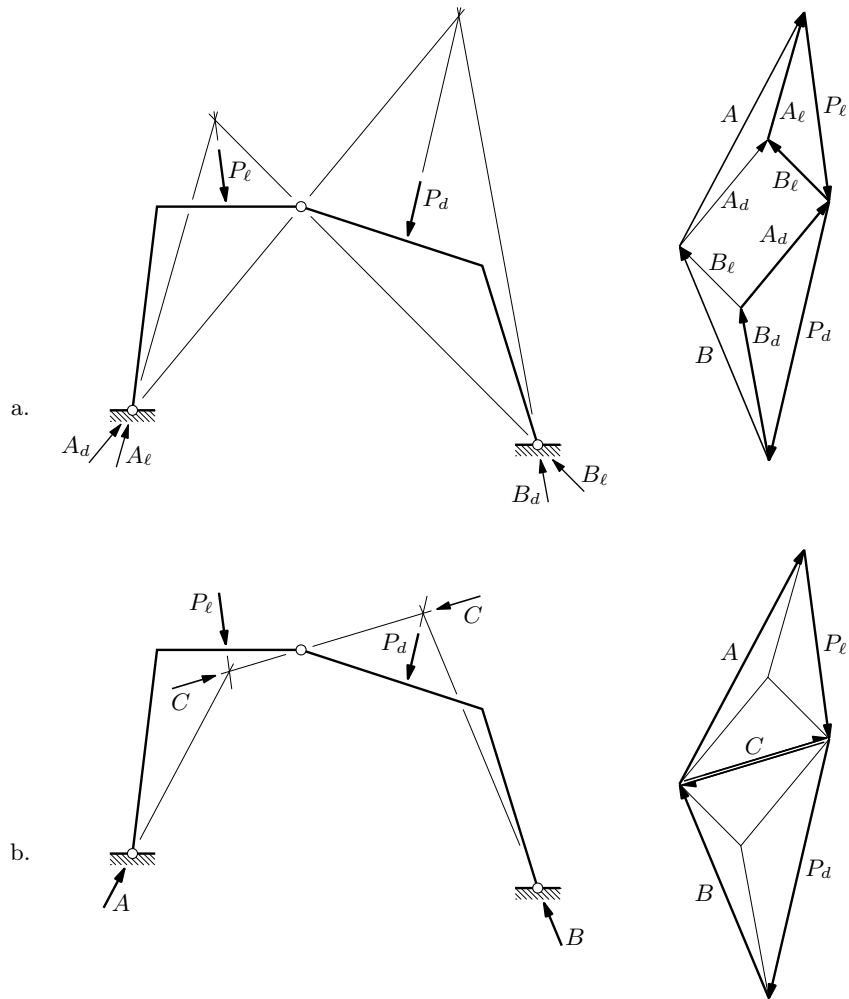
### 7.2.3. Sile zadane na oba diska

Slučaj u kojem su opterećena oba diska (slika 84.a.) svodimo primjenom principa superpozicije na opisani slučaj. U prvom koraku „uklanjamo” opterećenje s, primjerice, desnoga diska — opterećen je, dakle, samo jedan, lijevi disk (slika 84.b.) — i opisanim postupkom određujemo reakcije. U drugom ćemo pak koraku ostaviti samo opterećenje na desnom disku (slika 84.c.). Ukupne su reakcije vektorski zbrojevi reakcija dobivenih u prvom i drugom koraku. Uz poznate reakcije lako je odrediti sile u bilo kojem presjeku (primjena principa superpozicije pritom više nije potrebna).



Slika 84.

Kao primjer, odredit ćemo reakcije i spojnu silu u srednjemu zglobu trozglobnoga okvira sa slike 85. (Sila  $\vec{P}_\ell$  može biti i rezultanta više sila koje djeluju na lijevi disk, a sila  $\vec{P}_d$  sila koje djeluju na desni disk.) Na slici 85.a. prikazano je određivanje reakcija.



Slika 85.

Zamislit ćemo prvo da na okvir djeluje samo sila  $\vec{P}_\ell$ . Pravac djelovanja reakcije  $\vec{B}_\ell$  u ležaju desnoga, „neopterećenog” diska mora stoga u planu položaja proći zglobom C, dok će pravac djelovanja reakcije  $\vec{A}_\ell$  proći sada poznatim sjecištem pravaca djelovanja sila  $\vec{B}_\ell$  i  $\vec{P}_\ell$ . Znači da su pravci djelovanja sila  $\vec{B}_\ell$  i  $\vec{A}_\ell$  poznati, pa u poligonu sila možemo odrediti njihove intenzitete i orijentacije. Potom ćemo „zaboraviti” silu  $\vec{P}_\ell$  i uzeti da je opterećen samo desni disk (silom  $\vec{P}_d$ ). Kako je sada lijevi disk neopterećen, pravac djelovanja reakcije  $\vec{A}_d$  prolazi srednjim zglobom te, potom, pravac djelovanja reakcije  $\vec{B}_d$  sjecištem pravaca na kojima djeluju  $\vec{A}_d$  i  $\vec{P}_d$ ; uz poznate pravce djelovanja, intenzitete i orijentacije tih reakcija određujemo u poligonu sila. Ukupne reakcije dobivamo zbrajanjem parcijalnih reakcija — u vektorskom zapisu  $\vec{A} = \vec{A}_\ell + \vec{A}_d$  i  $\vec{B} = \vec{B}_\ell + \vec{B}_d$ ; grafički smo njihove intenzitete i orijentacije, kao i nagibe pravaca na kojima djeluju, odredili u poligonu sila.

Na lijevi disk djeluju sile  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_\ell$ , a na desni sile  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_d$ . Budući da su sile  $\vec{P}_\ell$ ,  $\vec{P}_d$ ,  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  u ravnoteži, u ravnoteži su i rezultanta sila  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_\ell$  i rezultanta sila  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_d$ . Te dvije rezultante, prema tome, djeluju na istom pravcu i jednakih su intenziteta, a suprotnih orijentacija. Njihov je pravac djelovanja spojnica sjecišta pravaca djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_\ell$

te pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_d$  (plan položaja na slici 85.b.), a intenzitete i orijentacije određujemo u poligonu sila (također na slici 85.b. — gornja je sila para  $\pm\vec{C}$  rezultanta silâ  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_\ell$ , a donja silâ  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_d$ ). Rezultanta sila  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_\ell$  ujedno je i sila kojom, razdvojimo li nosač presjekom kroz zglob C, lijevi disk djeluje na desni, dok je rezultanta sila  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_d$  sila kojom desni disk djeluje na lijevi; te smo rezultante, stoga, kao sile u zglobu, označili jednostavno sa  $\pm\vec{C}$ . Kako zglob ne preuzima moment savijanja, da bi jedan disk bio u ravnoteži, pravac rezultante svih sila koje na njega djeluju, osim sile kojom na nj djeluje drugi disk, mora proći kroz zglob — drugim riječima, sjecište pravaca djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{P}_\ell$ , zglob C i sjecište pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $\vec{P}_d$  moraju ležati na pravcu.

## 7.3. Analitički postupak

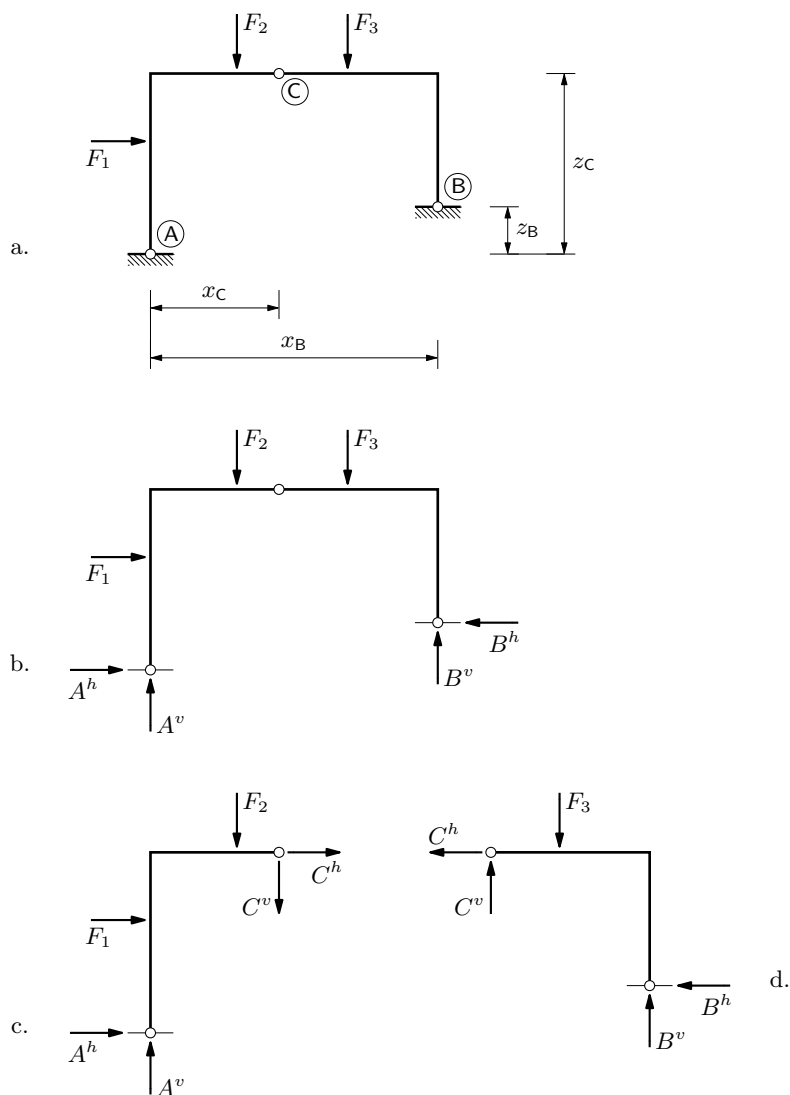
### 7.3.1. Sile u vanjskim vezama i u srednjem zglobu

Već smo rekli: obje reakcije trozglobnoga sistema leže na pravcima nepoznata nagiba, što zajedno s njihovim nepoznatim vrijednostima daje u prvom koraku proračuna, izračunavanju reakcija, četiri nepoznanice. Za ravninski nosač kao cjelinu na raspolaganju su nam tri jednadžbe ravnoteže, nedovoljno za izračunavanje vrijednosti tih nepoznanica.<sup>19</sup> Zbog toga moramo izdvajanjem i uravnoteženjem dijela sistema uvesti dodatne jednadžbe. Kao i u grafičkom postupku, razdvojiti ćemo diskove u srednjem zglobu. Na taj način u priču uvodimo samo dvije nove nepoznate veličine — vrijednost sile u tom zglobu i nagib pravca njezina djelovanja; u svim se drugim presjecima kao treća nepoznanica pojavljuje i moment savijanja.

Za svaki disk možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže. S tri jednadžbe za cijeli nosač, dobiveni sustav sadrži devet jednadžbi. Pokazat ćemo na razmjerno jednostavnom primjeru da je samo šest jednadžbi linearno nezavisno. Intuitivno: neka su oba diska, svaki za sebe, u ravnoteži; kako će se, „spojimo” li ponovo diskove, sila kojom u srednjem zglobu desni disk djeluje na lijevi i sila kojom lijevi disk djeluje na desni međusobno poništiti, i nastali će sklop nužno biti u ravnoteži, pa nam uvjeti ravnoteže cjeline ne daju ništa novo. Broj nezavisnih jednadžbi odgovara, prema tome, broju nepoznanica, pa postoji jedinstveno rješenje.

Umjesto nepoznatih vrijednosti sila i nagiba pravaca njihova djelovanja u proračun unosimo nepoznate vrijednosti dviju komponenata svake sile na odabranim pravcima. Na slici 86.b. reakcije trozglobnoga okvira sa slike a. rastavljene su u horizontalne i vertikalne komponente:  $\vec{A}$  u  $\vec{A}^h$  i  $\vec{A}^v$ , a  $\vec{B}$  u  $\vec{B}^h$  i  $\vec{B}^v$ . Silu  $\vec{C}$  u srednjem zglobu također rastavljamo u  $\vec{C}^h$  i  $\vec{C}^v$  (slike c. i d.). Uz poznate pravce djelovanja te uz na slikama naznačene pretpostavljene orijentacije tih sila, u nastavak proračuna ulaze samo njihove vrijednosti.

<sup>19</sup> S druge strane, odvojen od podloge, trozglobni sistem nije iznutra geometrijski nepromjeniv — riječ je o dva međusobno zglobno spojena diska pa, dakle, o spojenom sistemu sa četiri stupnja slobode ( $S = n_D \cdot 3 - n_{Z_1} \cdot 2 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4$ ).



Slika 86.

Jednadžbe su ravnoteže projekcija sila na horizontalnu os za cijeli okvir te za lijevi i za desni disk

$$\sum_{\widehat{AB}} F_x = 0 : \quad A^h + F_1 - B^h = 0,$$

$$\sum_{\widehat{AC}} F_x = 0 : \quad A^h + F_1 + C^h = 0,$$

$$\sum_{\widehat{CB}} F_x = 0 : \quad -C^h - B^h = 0;$$

$\widehat{AB}$ ,  $\widehat{AC}$  i  $\widehat{CB}$  kraj simbolâ sumacije označavaju da se zbrajanja provode po cijelom okviru (od ležaja A do ležaja B), samo po lijevom disku (od ležaja A do zgloba C) te samo po desnom disku (od zgloba C do ležaja B).

Lako je vidjeti da je prva jednadžba zbroj drugih dviju,  $\sum_{\widehat{AB}} F_x = \sum_{\widehat{AC}} F_x + \sum_{\widehat{CB}} F_x$ , što znači da su od tri jednadžbe samo dvije nezavisne.

Slično tome, jednadžbe su ravnoteže projekcija sila na vertikalnu os za cijeli nosač, za lijevi disk i za desni disk

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{AB}} F_z = 0 & : & -A^v + F_2 + F_3 - B^v = 0, \\ \sum_{\overline{AC}} F_z = 0 & : & -A^v + F_2 + C^v = 0, \\ \sum_{\overline{CB}} F_z = 0 & : & -C^v + F_3 - B^v = 0.\end{aligned}$$

I sada je prva jednadžba zbroj ostalih dviju,  $\sum_{\overline{AB}} F_z = \sum_{\overline{AC}} F_z + \sum_{\overline{CB}} F_z$ , te su ponovo samo dvije nezavisne. Kako su u jednadžbama ravnoteže projekcija sila na vertikalnu os nepoznanice  $A^v, B^v$  i  $C^v$ , dok su u jednadžbama ravnoteže projekcija sila na horizontalnu os nepoznanice  $A^h, B^h$  i  $C^h$ , jednadžbe tih dviju skupina međusobno su nezavisne.

Jednadžbu ravnoteže momenata za cijeli sistem napisat ćemo u odnosu na točku A:

$$\sum_{\overline{AB}} M/A = 0 : \quad -z_1 F_1 - x_2 F_2 - x_3 F_3 + x_B B^v + z_B B^h = 0$$

( $x$  i  $z$  označavaju udaljenosti, a ne koordinate). Napišemo li i jednadžbe ravnoteže momenata za lijevi i za desni disk u odnosu na tu točku,

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{AC}} M/A = 0 & : & -z_1 F_1 - x_2 F_2 - x_C C^v - z_C C^h = 0, \\ \sum_{\overline{CB}} M/A = 0 & : & x_C C^v + z_C C^h - x_3 F_3 + x_B B^v + z_B B^h = 0,\end{aligned}$$

jednadžba je ravnoteže momenata za cijeli sistem zbroj jednadžbi ravnoteži momenata za lijevi i za desni disk. Napišemo li pak jednadžbu ravnoteže momenata za desni disk u odnosu na točku B,

$$\sum_{\overline{CB}} M/B = 0 : \quad -(x_B - x_C) C^v + (z_C - z_B) C^h + (x_B - x_3) F_3 = 0.$$

prva jednadžba neće biti zbroj ostalih dviju. Može se stoga učiniti da izborom različitih točaka u odnosu na koje pišemo jednadžbe momenata možemo, ali ne moramo dobiti nezavisne jednadžbe, te da broj neovisnih jednadžbi ovisi o izboru te točke. Međutim, ...

Jednadžbe ravnoteže projekcija sila na horizontalnu os i na vertikalnu os za desni disk pomnožit ćemo s  $-z_B$  i  $-x_B$ :

$$\begin{aligned}-z_B \sum_{\overline{CB}} F_x = 0 & : & z_B C^h + z_B B^h = 0, \\ -x_B \sum_{\overline{CB}} F_z = 0 & : & x_B C^v - x_B F_3 + x_B B^v = 0.\end{aligned}$$

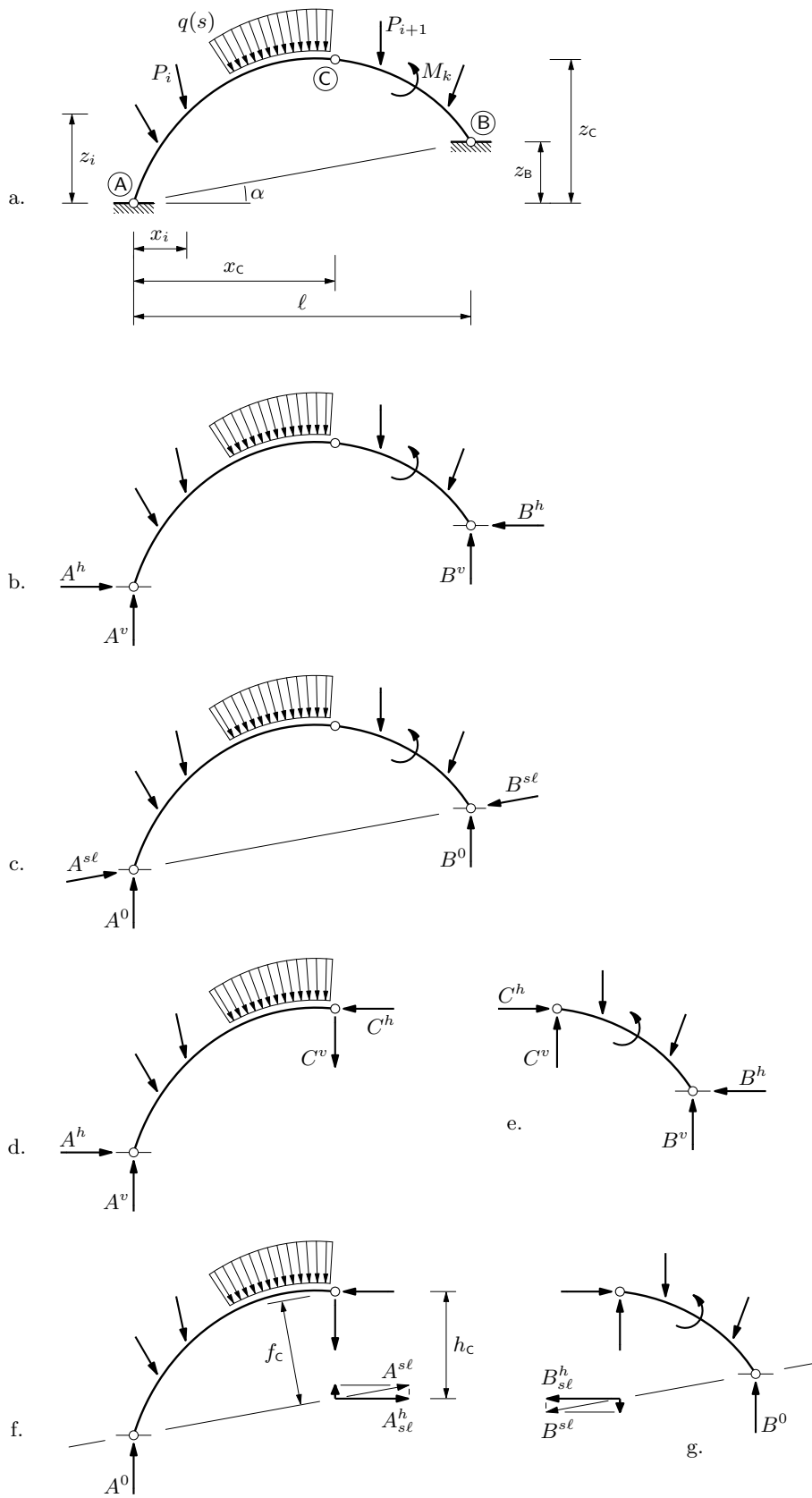
Pribrojimo li dobivene jednadžbe zbroju jednadžbi ravnoteže momenata za lijevi i za desni disk (u odnosu na točke A i B), dobit ćemo

$$\sum_{\overline{AC}} M/A + \sum_{\overline{CB}} M/B - z_B \sum_{\overline{CB}} F_x - x_B \sum_{\overline{CB}} F_z = \sum_{\overline{AB}} M/A,$$

što znači da je jedna od tih pet jednadžbi ravnoteže linearna kombinacija ostale četiri.

Iako se na prvi pogled čini da smo kao linearno zavisne „odbacili” jednadžbe ravnoteže cijeloga okvira, zadržati možemo bilo kojih šest nezavisnih jednadžbi. Naime,





Slika 87.

odabirom pogodnih nepoznanica i prikladnih uvjeta ravnoteže te odgovarajućim redosljedom rješavanja dobivenih jednadžbi „puni” se sustav sa šest jednadžbi može razbiti na manje sustave s po dvije jednadžbe, pa i na niz pojedinačnih jednadžbi. Dvije najčešće primjenjivane mogućnosti opisat ćemo na primjeru troglobnoga luka sa slike 87.a.

Na slici 87.b. reakcije su, kao i u prethodnom primjeru, rastavljene u horizontalne i vertikalne komponente, a u horizontalnu i vertikalnu komponentu rastavit ćemo i silu u srednjem zglobu (slike d. i e.). Napišemo li jednadžbu ravnoteže momenata oko ležaja B za cijeli nosač (slika b.), u nju će kao nepoznanice ući samo vrijednosti  $A^h$  i  $A^v$  sila  $\vec{A}^h$  i  $\vec{A}^v$ . Samo te dvije vrijednosti ulaze kao nepoznanice i u jednadžbu ravnoteže momenata oko zgloba C za lijevi disk (slika d.). Dobili smo, dakle, sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\sum_{\overline{AB}} M_{i/B} = 0 : \quad z_B \cdot A^h - \ell \cdot A^v + \sum_{i \in \overline{AB}} M_{i/B} = 0, \quad (155)$$

$$\sum_{\overline{AC}} M_{i/C} = 0 : \quad z_C \cdot A^h - x_C \cdot A^v + \sum_{i \in \overline{AC}} M_{i/C} = 0; \quad (156)$$

podizrazom  $\sum_{i \in \overline{AB}} M_{i/B}$  obuhvatili smo vrijednosti momenata svih zadanih koncentriranih sila i svih distribuiranih opterećenja u odnosu na točku B te vrijednosti svih zadanih koncentriranih momenata. Podizraz  $\sum_{i \in \overline{AC}} M_{i/C}$  obuhvaća vrijednosti momenata u odnosu na točku C zadanih koncentriranih i distribuiranih sila koje djeluju na lijevi disk, kao i vrijednosti koncentriranih momenata koji djeluju na nj.

Na sličan ćemo način izračunati i vrijednosti  $B^h$  i  $B^v$ : prva jednadžba bit će jednadžba ravnoteže momenata oko ležaja A za cijeli nosač (slika 87.b.), dok će druga jednadžba ponovo biti jednadžba ravnoteže momenata oko zgloba C, ali sada za desni disk (slika 87.e.):

$$\sum_{\overline{AB}} M_{i/A} = 0 : \quad z_B \cdot B^h + \ell \cdot B^v + \sum_{i \in \overline{AB}} M_{i/A} = 0, \quad (157)$$

$$\sum_{\overline{CB}} M_{i/C} = 0 : \quad -(z_C - z_B) \cdot B^h + (\ell - x_C) \cdot B^v + \sum_{i \in \overline{CB}} M_{i/C} = 0. \quad (158)$$

U oblikovanju jednadžbi (155)–(158) pretpostavili smo da su položajni odnosi kao na slici 87. — ležaj B je iznad ležaja A, pa smo predznake vrijednosti momenata reakcija odredili prema crtežu.

Za provjeru izračunanih vrijednosti možemo za nosač kao cjelinu zbrojiti projekcije sila na horizontalnu i vertikalnu os (slika 87.b.):

$$\sum_{\overline{AB}} F_x : \quad A^h - B^h + \sum_{i \in \overline{AB}} P_i^h = \dots, \quad (159)$$

$$\sum_{\overline{AB}} F_z : \quad -A^v - B^v + \sum_{i \in \overline{AB}} P_i^v = \dots; \quad (160)$$

pritom  $\sum_{i \in \overline{AB}} P_i^h$  i  $\sum_{i \in \overline{AB}} P_i^v$  obuhvaćaju vrijednosti horizontalnih i vertikalnih komponenata zadanih koncentriranih sila i vrijednosti komponenata rezultanata zadanih distribuiranih opterećenja.

Uz poznate vrijednosti reakcija, vrijednosti  $C^h$  i  $C^v$  sila  $\vec{C}^h$  i  $\vec{C}^v$  možemo izračunati iz dviju jednadžbi ravnoteže projekcija sila koje djeluju na lijevi ili na desni disk;

najpogodnije je uzeti projekcije na horizontalnu i vertikalnu os. Odaberemo li, primjerice, lijevi disk, bit će (slika 87.d.):

$$\sum_{\widehat{AC}} F_x = 0 : \quad A^h - C^h + \sum_{i \in \widehat{AC}} P_i^h = 0, \quad (161)$$

$$\sum_{\widehat{AC}} F_z = 0 : \quad -A^v + C^v + \sum_{i \in \widehat{AC}} P_i^v = 0; \quad (162)$$

kako u svaku jednadžbu ulazi po jedna nepoznanica, iz prve jednadžbe neposredno dobivamo  $C^h$ , a iz druge  $C^v$ . Zbrojeve projekcija sila koje djeluju na desni disk (slika 87.e.),

$$\sum_{\widehat{CB}} F_x : \quad C^h - B^h + \sum_{i \in \widehat{CB}} P_i^h = \dots, \quad (163)$$

$$\sum_{\widehat{CB}} F_z : \quad -B^v - C^v + \sum_{i \in \widehat{CB}} P_i^v = \dots, \quad (164)$$

možemo potom iskoristiti za provjeru ispravnosti prethodnih izračunavanja.

Navedeni „simetričan” slijed proračuna reakcija nije jedini mogući. Primjerice, u prvom koraku možemo, kao i prije, iz sustava jednadžbi (155) i (156) izračunati vrijednosti  $A^h$  i  $A^v$ , a vrijednosti  $B^h$  i  $B^v$  potom iz sada međusobno neovisnih jednadžbi ravnoteže projekcije sila na horizontalnu i vertikalnu os za cijeli nosač (lijeve strane izrazâ (159) i (160) izjednačene s nulom) i time izbjeći rješavanje sustava jednadžbi (157) i (158).

Štoviše, i rješavanje prvoga sustava možemo izbjeći rastavimo li reakcije, kao na slici 87.c., u vertikalne komponente i komponente koje djeluju na spojnici ležajeva:  $\vec{A}$  u  $\vec{A}^0$  i  $\vec{A}^{sl}$ , a  $\vec{B}$  u  $\vec{B}^0$  i  $\vec{B}^{sl}$ . Kako sada pravac djelovanja sile  $\vec{A}^{sl}$  prolazi točkom B, jedina je nepoznata vrijednost u jednadžbi ravnoteže momenata u odnosu na tu točku vrijednost sile  $\vec{A}^0$ :

$$\sum_{\widehat{AB}} M_{/B} = 0 : \quad -\ell \cdot A^0 + \sum_{i \in \widehat{AB}} M_{i/B} = 0. \quad (165)$$

Analogno, u jednadžbi ravnoteže momenata oko točke A jedina je nepoznata vrijednost  $B^0$ :

$$\sum_{\widehat{AB}} M_{/A} = 0 : \quad \ell \cdot B^0 + \sum_{i \in \widehat{AB}} M_{i/A} = 0. \quad (166)$$

Kad su vrijednosti  $A^0$  i  $B^0$  poznate, vrijednosti  $A^{sl}$  i  $B^{sl}$  sila  $\vec{A}^{sl}$  i  $\vec{B}^{sl}$  izravno slijede iz jednadžbi ravnoteže momenata oko točke C za lijevi i za desni disk (slike 87.f. i g.):

$$\sum_{\widehat{AC}} M_{/C} = 0 : \quad f_c \cdot A^{sl} - x_c \cdot A^0 + \sum_{i \in \widehat{AC}} M_{i/C} = 0, \quad (167)$$

$$\sum_{\widehat{CB}} M_{/C} = 0 : \quad -f_c \cdot B^{sl} + (\ell - x_c) \cdot B^0 + \sum_{i \in \widehat{CB}} M_{i/C} = 0; \quad (168)$$

ili, uvedemo li u proračun vrijednosti horizontalnih komponenata  $\vec{A}_{sl}^h$  i  $\vec{B}_{sl}^h$  sila  $\vec{A}^{sl}$  i  $\vec{B}^{sl}$ :

$$\sum_{\widehat{AC}} M_{/C} = 0 : \quad h_c \cdot A_{sl}^h - x_c \cdot A^0 + \sum_{i \in \widehat{AC}} M_{i/C} = 0, \quad (169)$$

$$\sum_{\widehat{CB}} M_{/C} = 0 : \quad -h_c \cdot B_{sl}^h + (\ell - x_c) \cdot B^0 + \sum_{i \in \widehat{CB}} M_{i/C} = 0; \quad (170)$$

udaljenost  $h_c$  između zgloba C i točke u kojoj vertikala kroz srednji zglob siječe spojnici ležajeva obično je lakše izračunati negoli udaljenost  $f_c$  zgloba od spojnice ležajeva.

Zbrojevi  $\sum_{\overline{AB}} F_x$  i  $\sum_{\overline{AB}} F_z$  ostaju nam ponovo za kontrolu proračuna.

Veze između vrijednosti  $A^v$ ,  $A^h$  i  $A^0$ ,  $A^{s\ell}$  te između vrijednosti  $B^v$ ,  $B^h$  i  $B^0$ ,  $B^{s\ell}$  možemo izvesti na temelju skica 88.a. i b.:

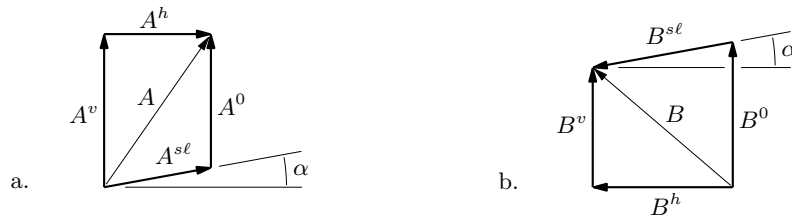
$$A^h = A_{s\ell}^h = A^{s\ell} \cdot \cos \alpha, \quad A^{s\ell} = \frac{A^h}{\cos \alpha}; \quad (171)$$

$$A^v = A^{s\ell} \cdot \sin \alpha + A^0 = A^h \cdot \operatorname{tg} \alpha + A^0, \quad A^0 = A^v - A^h \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad (172)$$

$$B^h = B_{s\ell}^h = B^{s\ell} \cdot \cos \alpha, \quad B^{s\ell} = \frac{B^h}{\cos \alpha}; \quad (173)$$

$$B^v = B^0 - B^{s\ell} \cdot \sin \alpha = B^0 - B^h \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad B^0 = B^v + B^h \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad (174)$$

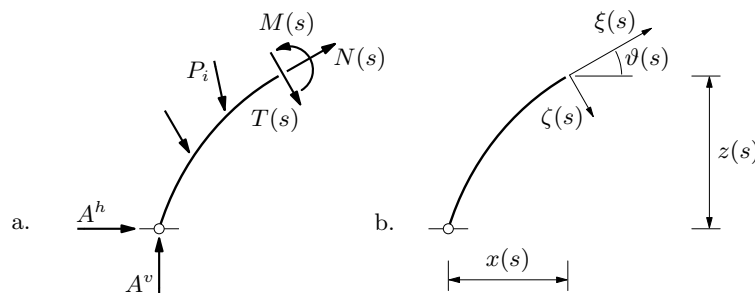
pritom pretpostavljamo da su sile orijentirane kao na skicama.



Slika 88.

### 7.3.2. Sile u poprečnim presjecima

Vrijednosti sila u odabranom poprečnom presjeku izračunavamo na uobičajeni način, poznat već iz odjeljka 4.2. o nosačima s jednim diskom — metodom jednostavnih presjeka. Nakon što smo na jedan od opisanih načina odredili reakcije, poznate su sve vanjske sile koje djeluju na nosač. Odvojimo li dio nosača s jedne strane odabranoga presjeka, recimo slijevâ (slika 89.a.), nepoznate će, prema tome, biti sâmo vrijednosti triju sila u sâmome presjeku.



Slika 89.

Kao i u proračunu nosačâ s jednim diskom, u težištu  $\vec{r}(s)$  odabranoga presjeka uvodimo lokalni koordinatni sustav  $(\xi\eta\zeta)(s)$  (slika 89.b.). Vrijednost uzdužne sile možemo

neposredno izračunati iz jednadžbe ravnoteže projekcija na os  $\xi(s)$  sila koje djeluju na promatrani dio nosača, između ležaja A i presjeka  $s$ :

$$\sum_{\widehat{As}} F_{\xi(s)} = 0 : \quad N(s) = -A^h \cdot \cos \vartheta(s) - A^v \cdot \sin \vartheta(s) - R_{\widehat{As}}^{\xi(s)}; \quad (175)$$

$R_{\widehat{As}}^{\xi(s)}$  je vrijednost projekcije na os  $\xi(s)$  rezultirajuće sile zadanih koncentriranih i distribuiranih sila koje djeluju na taj dio (pri izricanju uvjeta ravnoteže pretpostavili smo da je projekcija rezultirajuće sile pozitivno orijentirana).

Izraz za vrijednost poprečne sile možemo neposredno izvesti iz jednadžbe ravnoteže projekcija pripadnih sila na os  $\zeta(s)$ :

$$\sum_{\widehat{As}} F_{\zeta(s)} = 0 : \quad T(s) = -A^h \cdot \sin \vartheta(s) + A^v \cdot \cos \vartheta(s) - R_{\widehat{As}}^{\zeta(s)}; \quad (176)$$

$R_{\widehat{As}}^{\zeta(s)}$  vrijednost je projekcije na os  $\zeta(s)$  rezultirajuće sile zadanih koncentriranih i distribuiranih sila koje djeluju na dio između ležaja A i presjeka  $s$ .

Vrijednosti  $N(s)$  i  $T(s)$  mogu se izračunati i rješavajući sustav koji sadrži jednadžbe ravnoteže projekcija sila na osi  $x$  i  $z$ :

$$\sum_{\widehat{As}} F_x = 0 : \quad N(s) \cdot \cos \vartheta(s) + T(s) \cdot \sin \vartheta(s) + A^h + \sum_{i \in \widehat{As}} P_i^h = 0, \quad (177)$$

$$\sum_{\widehat{As}} F_z = 0 : \quad -N(s) \cdot \sin \vartheta(s) + T(s) \cdot \cos \vartheta(s) - A^v + \sum_{i \in \widehat{As}} P_i^v = 0. \quad (178)$$

Vrijednost momenta savijanja izračunavamo, kao i uvijek, iz jednadžbe ravnoteže momenata u odnosu na točku  $\vec{r}(s)$ :

$$\sum_{\widehat{As}} M_{/r(s)} = 0 : \quad M(s) = -A^h \cdot z(s) + A^v \cdot x(s) - \sum_{i \in \widehat{As}} M_{i/r(s)} - \sum_{j \in \widehat{As}} M_j; \quad (179)$$

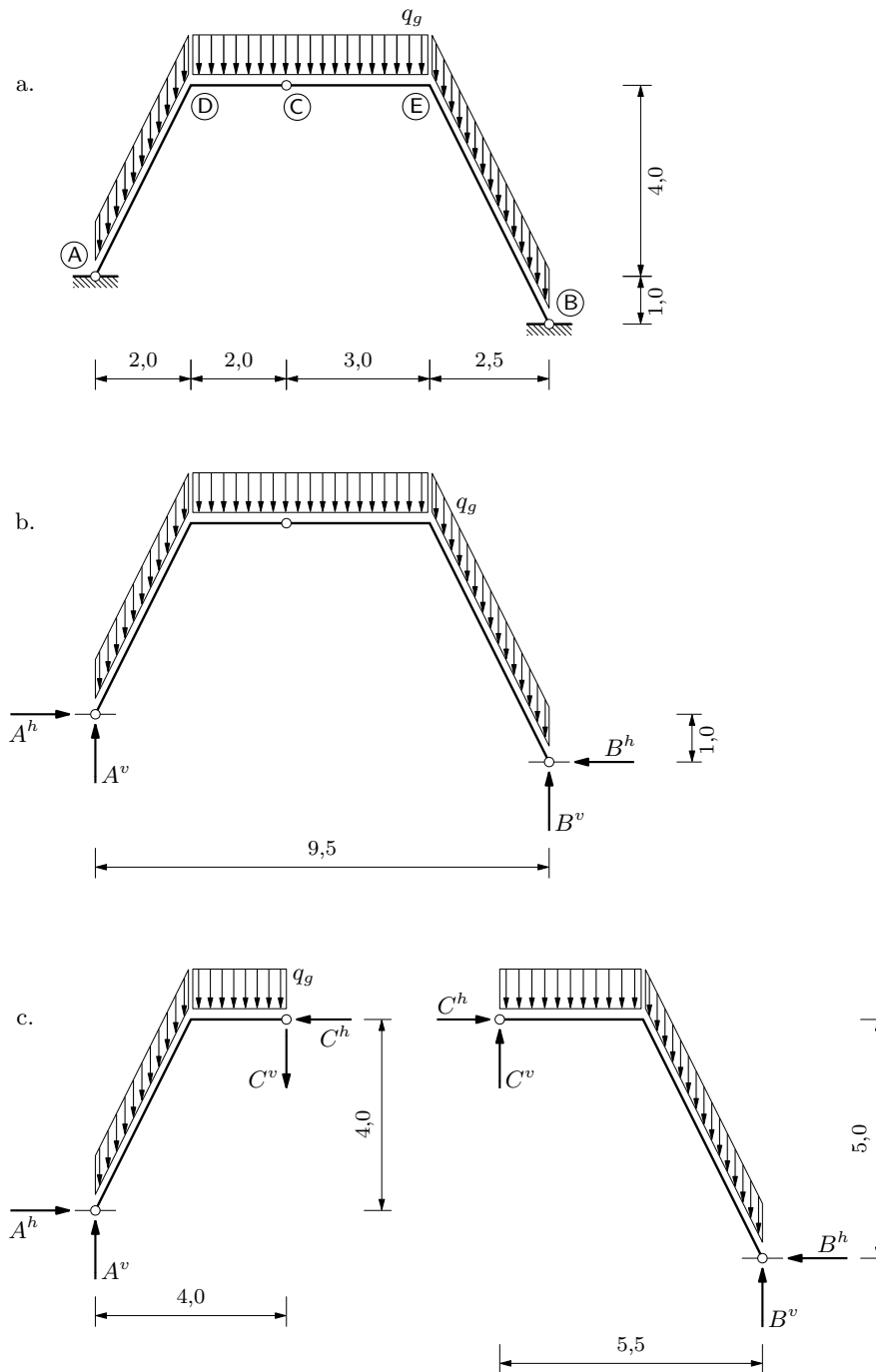
$M_j$  mogu biti vrijednosti zadanih koncentriranih momenata ili vrijednosti rezultirajućih momenata dijelova zadanih distribuiranih momenata na luku  $\widehat{As}$ , dok su  $M_{i/r(s)}$  vrijednosti momenata sila  $\vec{P}_i$  u odnosu na točku  $\vec{r}(s)$ , pri čemu neke sile  $\vec{P}_i$  mogu i sada biti rezultante pripadnih dijelova distribuiranih sila.

### 7.3.3. Primjer (s nekoliko dosad nespomenutih pojedinosti)

Na slici 90.a. prikazan je trozglojni okvir opterećen jednoliko distribuiranom silom  $\vec{q}(s) = q_g \vec{k}$ , gdje je  $q_g$  njezina vrijednost po jedinici duljine osi, dok je  $s$  prirodni parametar;  $\vec{q}$  može biti, recimo, vlastita težina. Neka je  $q_g = 25,0 \text{ kN/m}'$ . Treba izračunati vrijednosti reakcija i nacrtati dijagrame unutarnjih sila.

Reakcije ćemo prvo rastaviti u horizontalne i vertikalne komponente (slika 90.b.). Vrijednosti komponenata reakcije  $\vec{A}$  izračunat ćemo iz sustava koji čine jednadžba ravnoteže momenata oko ležaja B za cijeli nosač (slika b.) i jednadžba ravnoteže momenata oko zgloba C za lijevi dio nosača (lijevi crtež na slici c.):

$$\begin{aligned} -1,0 \cdot A^h - 9,5 \cdot A^v + 8,5 \cdot Q_{\overline{AD}} + 5,0 \cdot Q_{\overline{DE}} + 1,25 \cdot Q_{\overline{EB}} &= 0, \\ 4,0 \cdot A^h - 4,0 \cdot A^v + 3,0 \cdot Q_{\overline{AD}} + 1,0 \cdot Q_{\overline{DC}} &= 0; \end{aligned}$$



Slika 90.

$Q_{\overline{AD}}$ ,  $Q_{\overline{DE}}$ ,  $Q_{\overline{DC}}$  i  $Q_{\overline{EB}}$  vrijednosti su rezultanta distribuirane sile  $\vec{q}$  na dijelovima nosača između ležaja A i čvora D, čvorova D i E, čvora D i zgloba C te čvora E i ležaja B:

$$Q_{\overline{AD}} = q_g \cdot l_{\overline{AD}} = 25,0 \cdot \sqrt{2,0^2 + 4,0^2} = 111,80 \text{ kN},$$

$$Q_{\overline{DE}} = q_g \cdot l_{\overline{DE}} = 25,0 \cdot 5,0 = 125,0 \text{ kN},$$

$$Q_{\overline{DC}} = q_g \cdot l_{\overline{DC}} = 25,0 \cdot 2,0 = 50,0 \text{ kN},$$

$$Q_{\overline{EB}} = q_g \cdot l_{\overline{EB}} = 25,0 \cdot \sqrt{2,5^2 + 5,0^2} = 139,75 \text{ kN}.$$

U ovom je primjeru moment komponente  $\vec{A}^h$  (s pretpostavljenom orijentacijom) u odnosu na točku B negativan, jer je ta točka „ispod“ točke A. Rješavanjem sustava dobivamo

$$A^h = 79,49 \text{ kN} \quad \text{i} \quad A^v = 175,84 \text{ kN}.$$

Sustav za izračunavanje vrijednosti komponenata reakcije  $\vec{B}$  sadrži jednadžbu ravnoteže momenata oko ležaja A za cijeli nosač (slika 90.b.) i jednadžbu ravnoteže momenata oko zgloba C za desni dio nosača (desni crtež na slici c.),

$$\begin{aligned} -1,0 \cdot B^h + 9,5 \cdot B^v - 1,0 \cdot Q_{\overline{AD}} - 4,5 \cdot Q_{\overline{DE}} - 8,25 \cdot Q_{\overline{EB}} &= 0, \\ -5,0 \cdot B^h + 5,5 \cdot B^v - 1,5 \cdot Q_{\overline{CE}} - 4,25 \cdot Q_{\overline{EB}} &= 0, \end{aligned}$$

gdje je  $Q_{\overline{CE}}$  rezultanta distribuirane sile na dijelu između zgloba C i čvora E:

$$Q_{\overline{CE}} = q_g \cdot \ell_{\overline{CE}} = 25,0 \cdot 3,0 = 75,0 \text{ kN}.$$

Rješenje je sustava

$$B^h = 79,49 \text{ kN} \quad \text{i} \quad B^v = 200,71 \text{ kN}.$$

Vidimo da su sve sile orijentirane kao što smo na slici i pretpostavili.

Rješenja ćemo provjeriti zbrajanjem horizontalnih i vertikalnih projekcija sila za cijeli nosač:

$$A^h - B^h = 79,49 - 79,49 = 0,00,$$

$$-A^v - B^v + Q_{\overline{AD}} + Q_{\overline{DE}} + Q_{\overline{EB}} = -175,84 - 200,71 + 111,80 + 125,00 + 139,75 = 0,00.$$

Treba uočiti da su  $\vec{A}^h$  i  $\vec{B}^h$  jedine horizontalne sile pa moraju imati suprotne orijentacije i jednake intenzitete.

Komponente sile u zglobu C možemo izračunati iz jednadžbi ravnoteže projekcija sila koje djeluju na, recimo, lijevi dio nosača (lijevi crtež na slici 90.c.):

$$A^h - C^h = 0,$$

$$-A^v + Q_{\overline{AD}} + Q_{\overline{DC}} + C^v = 0;$$

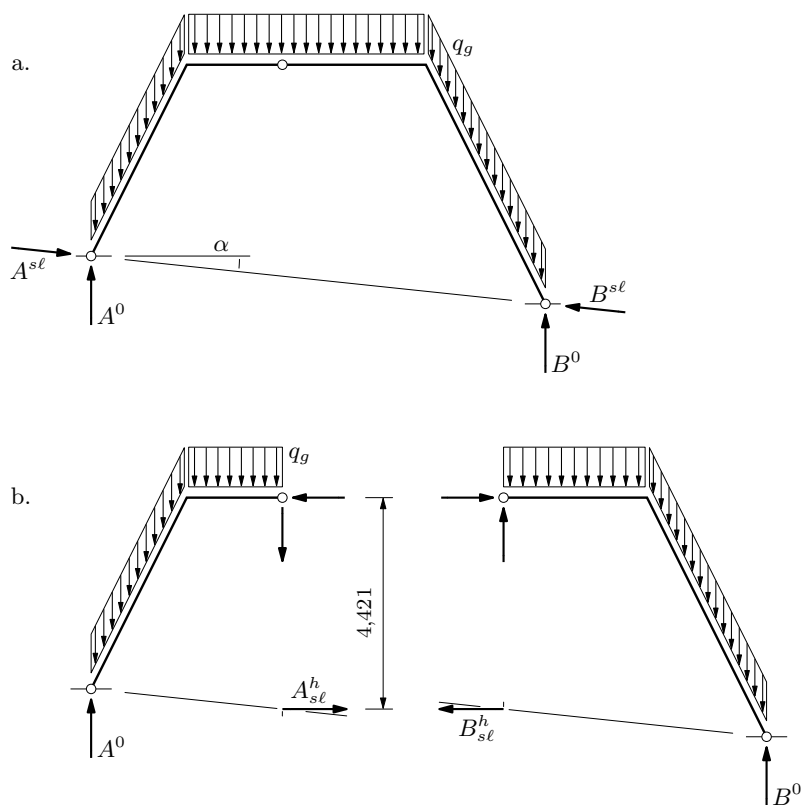
prva jednadžba daje  $C^h = 79,49 \text{ kN}$ , a druga  $C^v = 14,04 \text{ kN}$ . Naravno, jednake bismo vrijednosti dobili iz jednadžbi ravnoteže projekcija sila koje djeluju na desni dio (desni crtež na slici c.):

$$C^h - B^h = 0,$$

$$-C^v + Q_{\overline{CE}} + Q_{\overline{EB}} - B^v = 0.$$

Drugi način određivanja reakcija započinje rastavljanjem reakcija u vertikalne komponente i komponente na spojnici ležajeva (slika 91.a.). U jednadžbi ravnoteže momenata u odnosu na točku B za cijeli nosač,

$$-9,5 \cdot A^0 + 8,5 \cdot Q_{\overline{AD}} + 5,0 \cdot Q_{\overline{DE}} + 1,25 \cdot Q_{\overline{EB}} = 0,$$



Slika 91.

jedina je nepoznanica vrijednost  $A^0$  pa odmah dobivamo  $A^0 = 184,21$  kN. Isto je tako u jednadžbi ravnoteže momenata u odnosu na točku A,

$$9,5 \cdot B^0 - 1,0 \cdot Q_{\overline{AD}} - 4,5 \cdot Q_{\overline{DE}} - 8,25 \cdot Q_{\overline{EB}} = 0,$$

jedina nepoznanica  $B^0$  pa je, odmah,  $B^0 = 192,34$  kN. (Naravno,  $A^0 \neq A^v$  i  $B^0 \neq B^v$ .)

Vrijednosti komponenta na spojnici ležajeva izračunat ćemo tako da te komponente rastavimo u po dvije komponente — vertikalnu i horizontalnu — u točki ispod zgloba C (slika 91.b.). Kako vertikalne komponente prolaze kroz zglob, u jednadžbe ravnoteže momenata oko zgloba za lijevi i desni dio nosača ulaze samo vrijednosti horizontalnih komponenta:

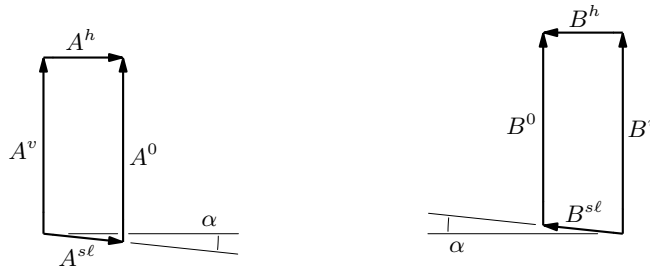
$$\begin{aligned} 4,421 \cdot A_{sl}^h - 4,0 \cdot A^0 + 3,0 \cdot Q_{\overline{AD}} + 1,0 \cdot Q_{\overline{DC}} &= 0, \\ -4,421 \cdot B_{sl}^h + 5,5 \cdot B^0 - 1,5 \cdot Q_{\overline{CE}} - 4,25 \cdot Q_{\overline{EB}} &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve je jednadžbe  $A_{sl}^h = 79,49$  kN, a iz druge  $B_{sl}^h = 79,49$  kN, pa su

$$A^{sl} = \frac{A_{sl}^h}{\cos \alpha} = 79,93 \text{ kN} \quad \text{i} \quad B^{sl} = \frac{B_{sl}^h}{\cos \alpha} = 79,93 \text{ kN}.$$

Kao što vidimo, sile  $\vec{A}^{sl}$  i  $\vec{B}^{sl}$  imaju jednake intenzitete, a suprotno su orijentirane. To smo mogli zaključiti i bez izračunavanja. Te su dvije sile, naime, jedine sile koje imaju horizontalne komponente, pa iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila slijedi da te horizontalne komponente moraju imati suprotan smisao djelovanja i isti intenzitet. A





Slika 92.

kako sile  $\vec{A}^{sl}$  i  $\vec{B}^{sl}$  djeluju na istom pravcu, i one će imati suprotne orijentacije i jednake intenzitete (dovoljno je da njihovi pravci imaju isti nagib).

Očito je i da su  $A_{sl}^h = A^h$  i  $B_{sl}^h = B^h$  (slika 92.), dok su vrijednosti  $A^v$  i  $A^0$  te  $B^v$  i  $B^0$  povezane izrazima

$$A^0 = A^v + A^h \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$B^0 = B^v - B^h \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

usporedite te izraze s izrazima (172) i (174) na stranici 151., a usporedite i slike 92. i 88. U posebnom slučaju, kada su ležajevi na istoj visini,  $A^0 = A^v$ ,  $A^{sl} = A^h$ ,  $B^0 = B^v$  i  $B^{sl} = B^h$ .

Ponovit ćemo još jednom (taj će nam zaključak uskoro zatrebati): ako su na trozglobnom luku ili okviru zadane samo vertikalne sile, horizontalne komponente reakcija imat će suprotne orijentacije i jednake intenzitete. Uvest ćemo oznaku  $H = A^h = B^h$ .

Za crtanje dijagrama unutarnjih sila nećemo izvoditi funkcijske izraze, nego ćemo izračunati njihove vrijednosti u karakterističnim točkama. Vrste krivulja između tih točaka određene su poznatim diferencijalnim odnosima.

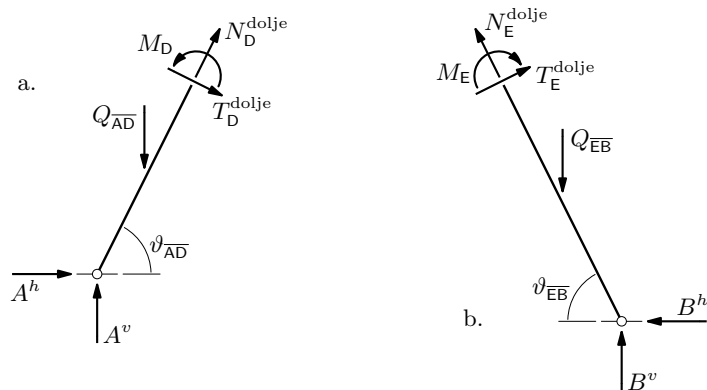
Karakteristične su točke za momentni dijagram točke D i E u kojima se lomi os nosača (slika 90.a. na stranici 153.). Vrijednosti momenata savijanja u tim točkama možemo neposredno izračunati iz jednadžbi ravnoteže momenata oko točke D za dio nosača između točaka A i D te oko točke E za dio između točaka B i E (slika 93.):

$$\sum_{\overline{AD}} M/D = 0 : \quad M_D = -4,0 \cdot A^h + 2,0 \cdot A^v - 1,0 \cdot Q_{\overline{AD}} = -78,08 \text{ kNm},$$

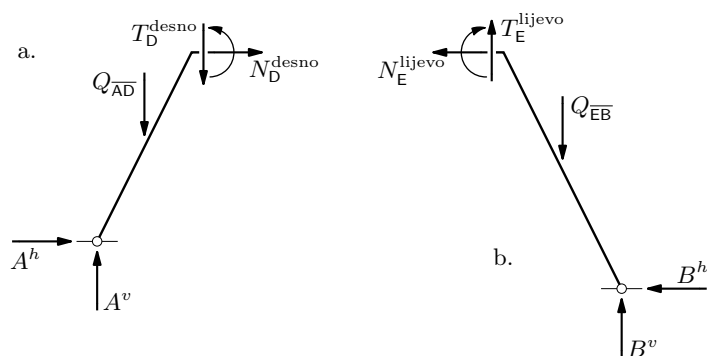
$$\sum_{\overline{BE}} M/E = 0 : \quad M_E = -5,0 \cdot B^h + 2,5 \cdot B^v - 1,25 \cdot Q_{\overline{EB}} = -70,36 \text{ kNm}.$$

Znamo osim toga da u ležajnim zglobovima i u srednjem zglobu momenti iščezavaju; pritom „kroz” zglob C krivulja dijagrama prolazi bez loma.

Znamo i da su između točaka A i D, između točaka D i E i između točaka E i B linije dijagrama dijelovi kvadratnih parabola. Za crtanje tih parabola treba na svakom dijelu izračunati još po jednu vrijednost. Odabrat ćemo vrijednosti u polovištu dijela  $\overline{AD}$  (točka F), polovištu dijela  $\overline{DE}$  (točka G) i polovištu dijela  $\overline{EB}$  (točka H); pomoću tih je vrijednosti vjerojatno najlakše konstruirati parabole. Postupak izračunavanja vrijednosti



Slika 93.



Slika 94.

i crtanje odgovarajućih dijelova parabola objasnili smo u odjeljku 5.3.4., na stranici 116.:

$$M_F = \frac{M_A + M_D}{2} + \frac{q_g^\perp \cdot \ell_{AD}^2}{8} = \frac{0 - 78,08}{2} + \frac{11,181 \cdot 4,472^2}{8} = -11,09 \text{ kNm},$$

$$M_G = \frac{M_D + M_E}{2} + \frac{q_g \cdot \ell_{DE}^2}{8} = \frac{-78,08 - 70,36}{2} + \frac{25,0 \cdot 5,0^2}{8} = 3,91 \text{ kNm},$$

$$M_H = \frac{M_E + M_B}{2} + \frac{q_g^\perp \cdot \ell_{EB}^2}{8} = \frac{-70,36 + 0}{2} + \frac{11,181 \cdot 5,59^2}{8} = 8,49 \text{ kNm};$$

$q_g^\perp$  u izrazima za  $M_F$  i  $M_H$  označava intenzitete komponenta distribuirane sile koje su okomite na osi dijelova  $\overline{AD}$  i  $\overline{EB}$ :

$$q_g^\perp = q_g \cdot \cos \vartheta_{\overline{AD}} = q_g \cdot |\cos \vartheta_{\overline{EB}}|$$

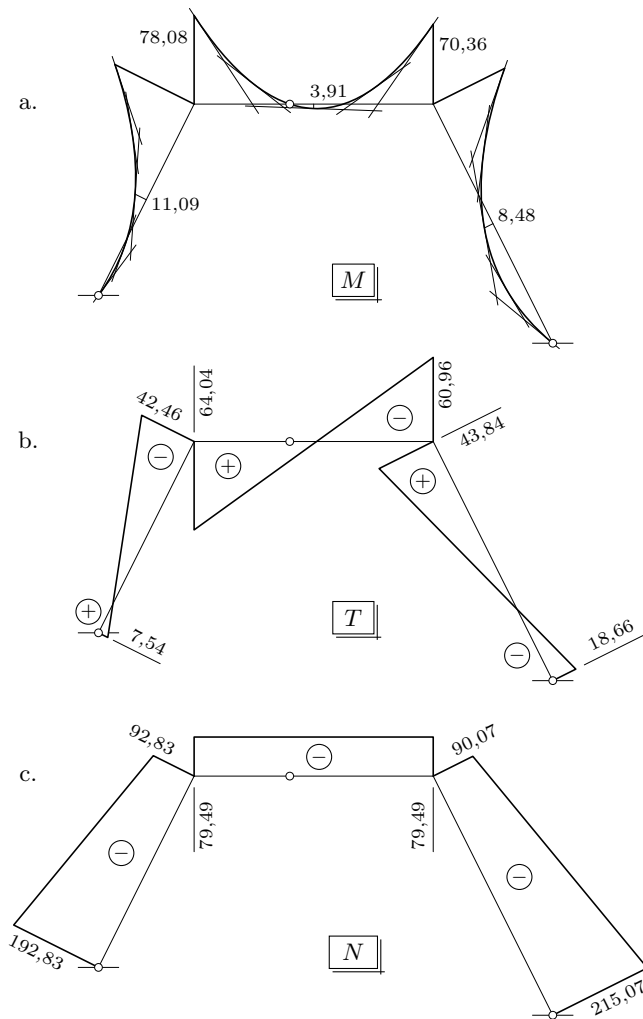
(jer je  $\vartheta_{\overline{EB}} = -\vartheta_{\overline{AD}}$ ).

Momentni je dijagram prikazan na slici 95.a.

Za dijagrame poprečnih i uzdužnih sila karakteristične su točke ležajne točke te ponovo točke D i E. No, budući da se u točkama D i E nagibi osi skokovito mijenjaju, u samim točkama sile nisu definirane. Stoga vrijednosti sila treba izračunati u točki koja je na dijelu  $\overline{AD}$  neposredno ispod točke D (slika 93.a.),

$$T_D^{\text{dolje}} = -A^h \cdot \sin \vartheta_{\overline{AD}} + A^v \cdot \cos \vartheta_{\overline{AD}} - Q_{AD} \cdot \cos \vartheta_{\overline{AD}} = -42,46 \text{ kN},$$

$$N_D^{\text{dolje}} = -A^h \cdot \cos \vartheta_{\overline{AD}} - A^v \cdot \sin \vartheta_{\overline{AD}} + Q_{AD} \cdot \sin \vartheta_{\overline{AD}} = -92,83 \text{ kN},$$



Slika 95.

u točkama koje su na dijelu  $\overline{DE}$  neposredno desno od točke D (slika 94.a.) i neposredno lijevo od točke E (slika 94.b.),

$$\begin{aligned}
 T_D^{\text{desno}} &= A^v - Q_{\overline{AD}} = 64,04 \text{ kN}, \\
 N_D^{\text{desno}} &= -A^h = -79,49 \text{ kN}, \\
 T_E^{\text{lijevo}} &= -B^v + Q_{\overline{EB}} = -60,96 \text{ kN}, \\
 N_E^{\text{lijevo}} &= -B^h = -79,49 \text{ kN},
 \end{aligned}$$

te u točki koja je na dijelu  $\overline{EB}$  neposredno ispod točke E (slika 93.b.),

$$\begin{aligned}
 T_E^{\text{dolje}} &= B^h \cdot \sin \vartheta_{\overline{EB}} - B^v \cdot \cos \vartheta_{\overline{EB}} + Q_{\overline{EB}} \cdot \cos \vartheta_{\overline{EB}} = -43,84 \text{ kN}, \\
 N_E^{\text{dolje}} &= -B^h \cdot \cos \vartheta_{\overline{EB}} - B^v \cdot \sin \vartheta_{\overline{EB}} + Q_{\overline{EB}} \cdot \sin \vartheta_{\overline{EB}} = -90,07 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

Isto tako, poprečne i uzdužne sile nisu definirane ni u samim točkama A i B— to su

hvatišta reakcija. Vrijednosti sila izračunat ćemo stoga u točkama neposredno iznad ležajnih:

$$\begin{aligned} T_A^{\text{gore}} &= -A^h \cdot \sin \vartheta_{\overline{AD}} + A^v \cdot \cos \vartheta_{\overline{AD}} = 7,54 \text{ kN}, \\ N_A^{\text{gore}} &= -A^h \cdot \cos \vartheta_{\overline{AD}} - A^v \cdot \sin \vartheta_{\overline{AD}} = -192,83 \text{ kN}, \\ T_B^{\text{gore}} &= B^h \cdot \sin \vartheta_{\overline{EB}} - B^v \cdot \cos \vartheta_{\overline{EB}} = -18,66 \text{ kN}, \\ N_B^{\text{gore}} &= -B^h \cdot \cos \vartheta_{\overline{EB}} - B^v \cdot \sin \vartheta_{\overline{EB}} = -215,07 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Između karakterističnih točaka vrijednosti uzdužnih i poprečnih sila mijenjaju se linearno ili se, kao uzdužna sila na dijelu  $\overline{DE}$ , ne mijenjaju. Komponente sile u zglobovima možemo poistovjetiti s uzdužnom i poprečnom silom, pa pravci dijagrama „nesmetano” prolaze kroz zglob. Dijagrami poprečnih i uzdužnih sila prikazani su na slikama 95.b. i c.

## 7.4. Superpozicijski postupak

Projektivna geometrija može se obrađivati sredstvima i analitičke i diferencijalne geometrije. Međutim najljepši, najjednostavniji i najpregledniji način je bez sumnje sintetički način...

V. Niče: *Uvod u sintetičku geometriju*

Na građevinske konstrukcije često djeluju vertikalna opterećenja (to su, recimo, sva gravitacijska opterećenja), pa vrijedi iscrpnije se pozabaviti proračunom trozglobnih nosača za takva djelovanja (slika 96.a.). Pokazat ćemo kako se u tom slučaju momentni dijagram može nacrtati uvođenjem „zamjenjujuće grede”. Postupak se odlikuje jednostavnošću i zornošću prikaza. Njegova je pedagoška vrijednost u novomu, dubljem uvidu koji pruža u ponašanje trozglobnih sistema. Za praktičnu je pak primjenu važno da se zamisao na kojoj je utemeljen može primijeniti pri optimizaciji oblika osi nosača. Nedostatak postupka može biti manja točnost, ali tako nacrtani dijagram može poslužiti za laku i brzu provjeru ispravnosti provedbe točnijega analitičkog proračuna.

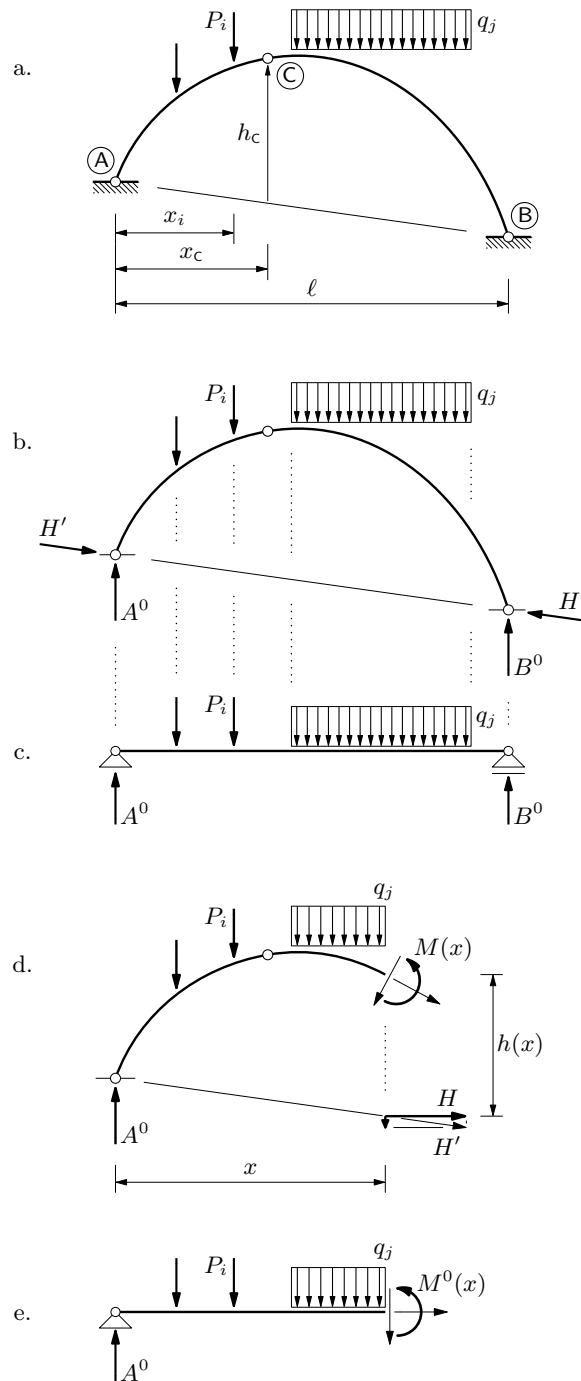
### 7.4.1. Zamisao

Započet ćemo rastavljenjem reakcija u vertikalne komponente  $\vec{A}^0$  i  $\vec{B}^0$  te komponente  $\vec{A}^{sl}$  i  $\vec{B}^{sl}$  koje djeluju na spojnicima ležajeva. U prošlom smo odjeljku zaključili da je pri vertikalnom opterećenju  $A^{sl} = B^{sl}$ , pa smo tu vrijednost na slici 96.b. označili jednostavno sa  $H'$ .

U prošlom smo odjeljku vrijednosti  $A^0$  i  $B^0$  izračunali iz jednadžbi ravnoteže momenata oko točaka B i A. Analizirat ćemo sada malo potanje prvu jednadžbu (jasno je da će sve rečeno vrijediti i za drugu).

Jednadžba je ravnoteže momenata u odnosu na točku B, uz orijentacije sila kao na slici 96.b.,

$$-\ell \cdot A^0 + \sum_{i \in \overline{AB}} (\ell - x_i) \cdot P_i + \sum_{j \in \overline{AB}} (\ell - x_j) \cdot Q_j = 0, \quad (180)$$



Slika 96.

gdje su  $Q_j$  vrijednosti rezultanata distribuiranih sila  $\vec{q}_j$ , a  $x_j$  apscise njihovih hvatišta (u našem je primjeru zadana samo jedna distribuirana sila, ali može ih, naravno, biti više). „Krkovi”  $l$ ,  $l - x_i$  i  $l - x_j$  udaljenosti su pravaca djelovanja sila od točke B. Kako sve sile djeluju na vertikalnim pravcima, te udaljenosti mjerimo po horizontali; drugim riječima, aplikate hvatištâ sila nisu bitne.

Opušetimo li jednostavno oslonjenu gredu istoga raspona istim silama u točkama s istim apscisama i označimo li vrijednost reakcije u njezinom lijevom ležaju s  $A^0$  (slika 96.c.),

jednadžba ravnoteže momenata oko desnoga ležaja bit će jednadžba (180). Uz vertikalne sile kao opterećenje mogu biti zadani i momenti — reakcije će i tada biti vertikalne. Prema tome, prvi je zaključak: ako je trozglobni nosač opterećen samo vertikalnim silama i, možda, momentima, vertikalne su komponente reakcija (u rastavu u vertikalne komponente i komponente na spojnici ležajeva) jednake reakcijama netom opisane jednostavno oslonjene grede koju ćemo nazvati *zamjenjujućom gredom*.

Izraz je za vrijednost momenta savijanja u presjeku trozglobnoga nosača s apscisom  $x$  (slika 96.d.):

$$M(x) = x \cdot A^0 - \sum_{i \in \widehat{Ax}} (x - x_i) \cdot P_i - \sum_{j \in \widehat{Ax}} (x - x_j(x)) \cdot Q_j(x) - h(x) \cdot H; \quad (181)$$

kako na dio nosača lijevo od presjeka može, kao u našem primjeru, djelovati samo dio distribuirane sila  $\vec{q}_j$ , funkcijskim zapisom  $Q_j(x)$  i  $x_j(x)$  istaknuli smo da vrijednost rezultante i apscisa njezina hvatišta mogu ovisiti o položaju presjeka. Usporedimo li taj izraz s izrazom za vrijednost momenta savijanja u presjeku zamjenjujuće grede s istom apscisom (slika 96.e),

$$M^0(x) = x \cdot A^0 - \sum_{i \in \widehat{Ax}} (x - x_i) \cdot P_i - \sum_{j \in \widehat{Ax}} (x - x_j(x)) \cdot Q_j(x), \quad (182)$$

vidjet ćemo da za vrijednost momenta savijanja trozglobnoga nosača vrijedi

$$M(x) = M^0(x) - h(x) \cdot H \quad (183)$$

ili

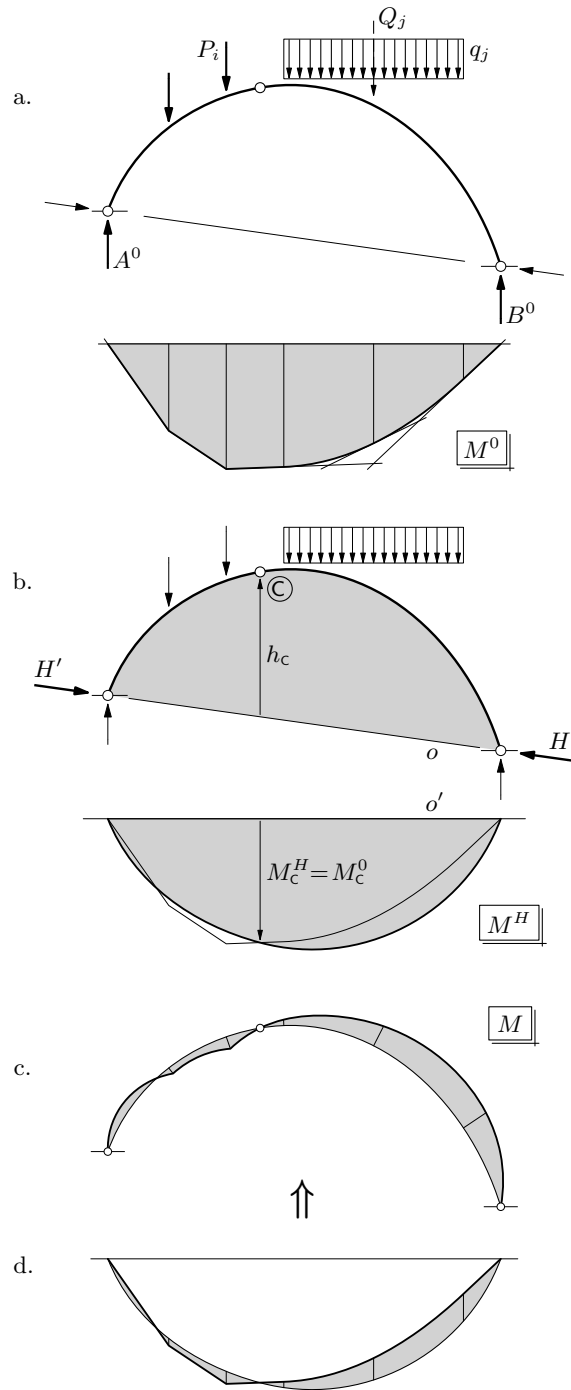
$$M(x) = M^0(x) - M^H(x). \quad (184)$$

Drugi je zaključak, dakle: vrijednost momenta savijanja u nekom presjeku trozglobnoga nosača, opterećena momentima i vertikalnim silama, možemo izračunati tako da od vrijednosti momenta savijanja u odgovarajućem presjeku zamjenjujuće grede oduzmemo vrijednost momenta komponente reakcije na spojnici ležajeva u odnosu na težište poprečnoga presjeka trozglobnog nosača.

Taj nam zaključak daje postupak crtanja momentnoga dijagrama: dijagram momenata savijanja na trozglobnom nosaču za zadano opterećenje može se nacrtati superponirajući momentni dijagram  $M^0$  na zamjenjujućoj gredi (slika 97.a.) i dijagram momenata na trozglobnom nosaču zbog komponente reakcija na spojnici ležajeva. Pritom ni taj drugi dijagram,  $M^H$ , ne crtamo na osi nosača, nego na njezinoj projekciji na horizontalnu os i to tako da ga „preklopimo” preko dijagrama  $M^0$  (slika 97.b.). Preklapanje dijagrama omogućava grafičko oduzimanje. Konačne vrijednosti momenata očitavamo po vertikalnim linijama od krivulje dijagrama  $M^H$  do krivulje dijagrama  $M^0$  (slika 97.d.); drugim riječima, krivulju dijagrama  $M^H$  smatramo nultom linijom konačnoga dijagrama. Na kraju možemo konačni dijagram nacrtati na osi nosača nanoseći vrijednosti momenata okomito na nju (slika 97.c.).

#### 7.4.2. Podsjetnik: perspektivna afinost

Postupci crtanja dijagrama  $M^0$  su, nadamo se, dobro poznati. Preostaje nam stoga samo još opisati postupak konstruiranja dijagrama  $M^H$ . Za to će nam trebati geometrijska



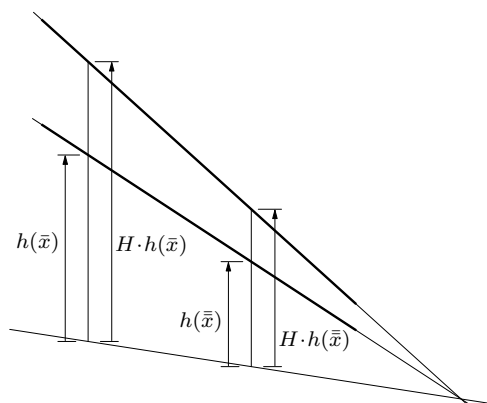
Slika 97.

interpretacija desne strane izraza

$$M^H(x) = H \cdot h(x). \quad (185)$$

Duljina  $h(x)$  udaljenost je točke osi s apscisom  $x$  od sjecišta spojnice ležajeva i vertikale kroz tu točku ili, općenitije, udaljenost neke točke od sjecišta odabranoga pravca i vertikale kroz nju. Množenje brojem  $H$  znači njezino produljivanje (ako je  $H > 1$ ) ili

skraćivanje (ako je  $0 < H < 1$ ) tako da točki s „koordinatama”  $(x, h(x))$  pridružujemo točku s „koordinatama”  $(x, H \cdot h(x))$ . (Navodnike smo upotrijebili jer visine ne mjerimo od osi  $x$  nego od odabranoga, ponajčešće kosog pravca.) Budući da je  $H$  konstantna vrijednost, sve će se udaljenosti proporcionalno produljiti ili skratiti. To znači, posebno, da će dijelu pravca biti pridružen dio drugoga nekog pravca (slika 98.). Uz to, kako je  $H \cdot 0 = 0$ , sjecištu pravca s pravcem od kojega mjerimo udaljenosti bit će pridruženo to isto sjecište. Primjer je to pridruživanja točaka ravnine koje se u projektivnoj geometriji naziva *perspektivnom afinošću (u ravnini)*.



Slika 98.

Prisjetit ćemo se nekoliko definicija i teorema *synetičke projektivne geometrije* [30, 31]. Sve točke i svi pravci ravnine nazivaju se *poljem*. Svi pravci i sve ravnine jedne točke (u prostoru) nazivaju se *svežnjem*. Presiječemo li neki svežanj dvjema ravninama i u nastalim presječnim poljima pridružimo par točaka na istom pravcu svežnja i par pravaca u istoj ravnini svežnja, dobiveno se pridruživanje tih polja naziva *perspektivnom kolineacijom*. (Općenitije, kažemo da su dva polja *kolinearna* ako je svakoj točki jednoga polja pridružena jedna točka drugog polja i ako je svakom pravcu jednog polja pridružen jedan pravac drugog polja tako da je točki na pravcu u jednom polju pridružena točka na pridruženom pravcu u drugom polju.)

Pravac u kojem se perspektivno kolinearna polja sijeku i svaka njegova točka očito su sami sebi pridruženi. Taj se pravac naziva *perspektivnom osi*, dok je vrh presječenoga svežnja *središte* perspektivne kolineacije. Kada se središte nalazi u neizmjernosti, nastaju *perspektivno afina* polja. (Potpunosti radi: ako je os perspektivnih polja u neizmjernosti, ona su *slična* (ravnine–nositeljice polja tada su usporedne), a ako su pak i os i središte u neizmjernosti, polja su *sukladna*.)

Crtež nosača i momentni dijagram leže u istoj ravnini, pa će nam trebati takav poseban slučaj pridruživanja: dva kolinearna polja u jednoj ravnini nazivaju se *kolokalnim* poljima.

U perspektivno kolinearnom pridruživanju dvaju kolokalnih polja, nazvanom *perspektivnom kolineacijom u ravnini*, središte je definirano, prema analogiji s perspektivnom kolineacijom općih polja u prostoru, kao točka kojom prolaze pravci na kojima leže parovi pridruženih točaka. Os je pak jedini pravac, pridružen sam sebi, na kojem su sve točke same sebi pridružene. I pravci na kojima leže parovi pridruženih točaka pridruženi su

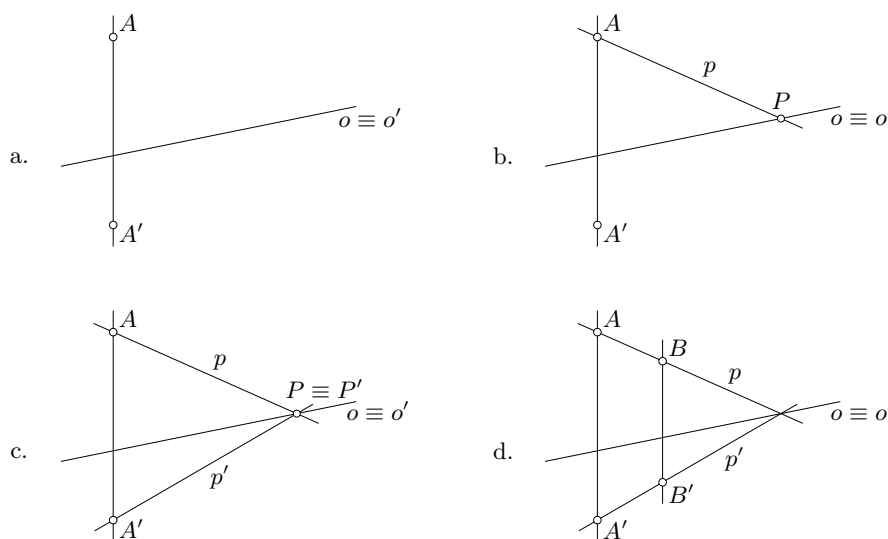


sami sebi, ali su na njima same sebi pridružene samo po dvije točke — središte i njihova sjecišta s osi.

Može se dokazati sljedeći teorem: da bi perspektivno kolinearni odnos u ravnini bio uspostavljen, mora se zadati središte, os i par pridruženih točaka (na pravcu kroz središte). (Uzet ćemo da središte ne leži na osi.) Perspektivno afini odnos u ravnini određen je pak zadamo li os i par pridruženih točaka (jer je središte neizmjereno daleko na spojnici pridruženih točaka). Budući da ćemo se u nastavku baviti samo perspektivnom afinošću u ravnini, nazivat ćemo je kratko *afinošću*.

Zadajmo, dakle, os  $o$  i par pridruženih točaka  $A$  i  $A'$  (slika 99.a.). U našim će primjenama afinoga pridruživanja spojnice pridruženih točaka uvijek biti vertikalne — točka koja u momentnom dijagramu određuje vrijednost momenta u nekoj točki osi nosača crta se ispod nje.

Pravac  $p'$ , afino pridružen nekom pravcu  $p$  koji prolazi točkom  $A$  (slika 99.b.), lako je naći (slika c.): taj pravac prolazi točkom  $A'$  (prema određujućem svojstvu kolinearnih polja) i točkom  $P$  u kojoj pravac  $p$  siječe os (jer su točke na osi pridružene same sebi). Točku  $A'$  nazivat ćemo i *slikom točke A*, a pravac  $p'$  *slikom pravca p* (afinost je obostrano jednoznačno pridruživanje, pa se može reći i da su točka  $A$  i pravac  $p$  slike točke  $A'$  i pravca  $p'$ ). Kako pravci na kojima leže parovi afino pridruženih točaka prolaze neizmjereno dalekim središtem, slika  $B'$  neke točke  $B$  s pravca  $p$  je sjecište pravca  $p'$  i pravca kroz točku  $B$  koji je usporedan sa spojnicom točaka  $A$  i  $A'$  (slika d.).



Slika 99.

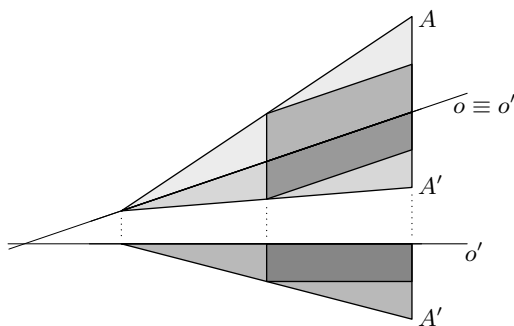
### 7.4.3. Primjena afinoga pridruživanja

Želimo li afino pridruživanje primijeniti u crtanju dijagrama  $M^H$ , moramo u tom statičkom problemu prepoznati os afinosti i par pridruženih točaka. Budući da je  $H$  vrijednost sile, duljini  $h(x)$  pridružujemo vrijednost momenta  $M^H(x) = H \cdot h(x)$  u točki čija je udaljenost od hvatišta sile  $h(x)$ . Zapišemo li to kao pridruživanje točaka,

$$(x, h(x)) \mapsto (x, M^H(x)), \quad (186)$$

vidimo da točki na osi nosača (i općenitije, svakoj točki polja koje ćemo nazvati poljem nosača) pridružujemo točku na dijagramu momenata (odnosno, općenitije, točku u polju momenata).

Rječnikom statike jednakost  $H \cdot 0 = 0$  kaže da na pravcu djelovanja sile nema momenta od te sile. U svakom je pojedinom primjeru  $H$  konstantna vrijednost, ali to može biti bilo koji broj; stoga je  $h(x) = 0$  jedini broj za koji vrijedi  $H \cdot h(x) = h(x)$ . Zaključujemo da je os afinosti pravac na kojem djeluje sila, dakle, spojnica ležajeva trozglobnoga nosača. To bi istodobno trebala biti i os (nulta linija) momentnoga dijagrama. Međutim, pri crtanju dijagrama vrijednosti momenata ne nanosimo od te spojnice nego od nekoga drugog, odmaknutog, najčešće horizontalnog pravca. Zbog toga ćemo postupak afinoga pridruživanja sa slike 99. morati prilagoditi crtežu na kojem su spojnica ležajeva i os dijagrama razdvojene. Formalno, riječ je o kompoziciji afinoga pridruživanja i „posmične deformacije” s pomoću koje odvajamo os momentnoga dijagrama i dovodimo je, u isti mah, u uobičajeni horizontalan položaj (slika 100.). Točke pri tom „posmiku” putuju po pravcima koji spajaju parove pridruženih točaka, dakle, po vertikalnim pravcima.



Slika 100.

Zadaјmo ponovo par pridruženih točaka  $A$  i  $A'$  i os, ali tako da je posebno nacrtamo u polju nosača ( $o$ ), a posebno, u konačnom položaju, u polju momenata ( $o'$ ); i točke  $A$  i  $A'$  već su na odgovarajući način razmaknute (slika 101.a.). Pravac  $p'$ , pridružen pravcu  $p$  kroz točku  $A$ , naći ćemo sada tako da sjecište  $P$  pravca  $p$  s osi afinosti u polju nosača (slika b.) usporedno sa spojnicom pridruženih točaka prenesemo na os u polju momenata, a tek potom dobivenu točku  $P'$  spojimo s točkom  $A'$  (slika c.). Sliku  $B'$  neke točke  $B$  s pravca  $p$  ponovo nalazimo kao sjecište pravca  $p'$  i pravca kroz  $B$  paralelna sa spojnicom točaka  $A$  i  $A'$  (slika d.).

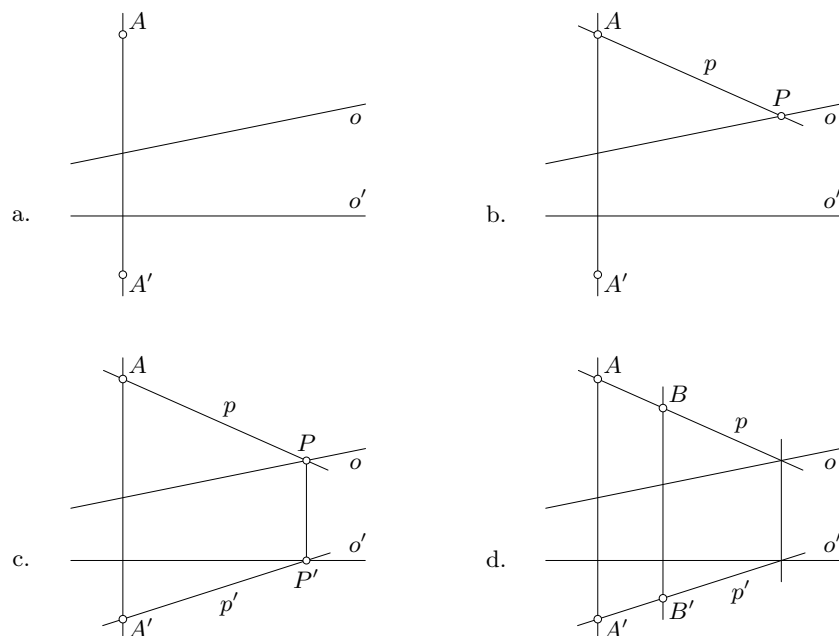
Par pridruženih točaka kojim je zadano afino preslikavanje (186) određen je zahtjevom da u zglobu C trozglobnoga nosača moment savijanja mora iščeznuti. To znači da se u toj točki momenti na zamjenjujućoj gredi i momenti zbog sile na spojnici ležajeva moraju poništiti:

$$M_c = M_c^0 - M_c^H = 0. \quad (187)$$

Slijedi

$$M_c^H = M_c^0, \quad (188)$$

pa su pridružene točke zglob C i točka  $(x_c, M_c^0)$  dijagrama  $M^0$  (slika 97.b. na stranici 162.). Uočite da vrijednost  $H$  horizontalne komponente reakcija na spojnici ležajeva



Slika 101.

nismo trebali računati — grafička konstrukcija neposredno daje vrijednost momenta  $M_C^H$ , umnožak  $H \cdot h_c$ .

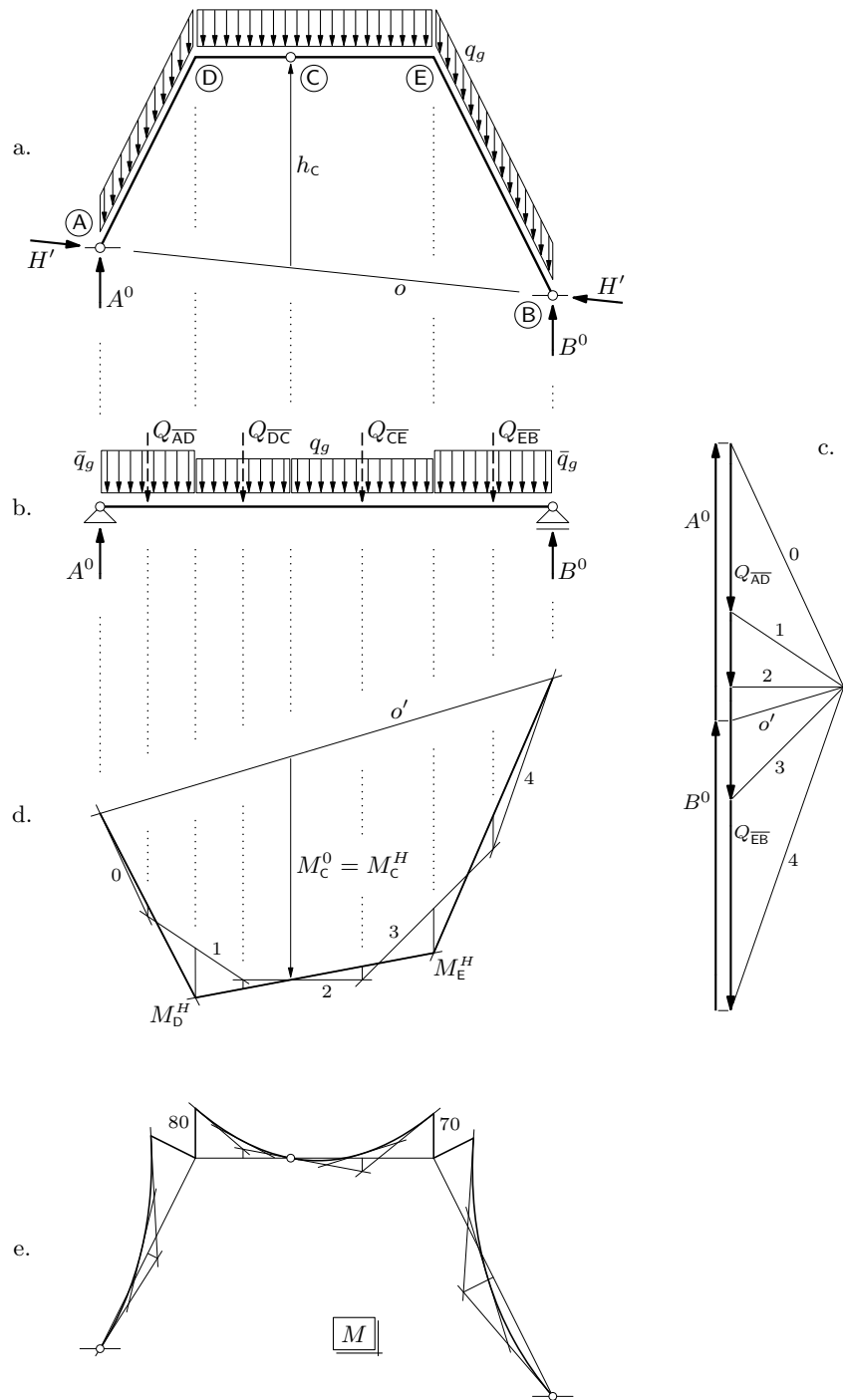
#### 7.4.4. Primjer

Superpozicijskim ćemo postupkom nacrtati momentni dijagram na trozglobnom okviru koji smo analitičkim postupkom rješavali u prethodnom odjeljku (početak je na stranici 152.). Na slici 102.a. ponovo je prikazan nosač sa zadanom distribuiranom silom i s reakcijama rastavljenima, primjereno superpozicijskom postupku, u vertikalne komponente i komponente na spojnici ležajeva.

Zamjenjujuća jednostavno oslonjena greda prikazana je na slici 102.b. Na dio grede koji odgovara vodoravnom dijelu  $\overline{DE}$  okvira djeluje zadanu distribuiranu silu  $\bar{q}$  intenziteta  $q_g = 25,0 \text{ kN/m}'$ . Međutim, na dijelovima grede koji odgovaraju kosim dijelovima  $\overline{AD}$  i  $\overline{EB}$  distribuirana se sila mijenja:  $q_g$  je intenzitet sile po jedinici duljine osi trozglobnoga okvira pa treba izračunati intenzitet sile po jedinici duljine projekcije na horizontalnu os. Najlakše je to učiniti „razmazivanjem” intenzitetâ rezultirajućih sila  $Q_{\overline{AD}}$  i  $Q_{\overline{EB}}$  po projekcijama dijelova  $\overline{AD}$  i  $\overline{EB}$ ; dobivamo

$$\bar{q}_{g,\overline{AD}} = \frac{111,80}{2,0} = 55,9 \text{ kN/m}' \quad \text{i} \quad \bar{q}_{g,\overline{EB}} = \frac{139,75}{2,5} = 55,9 \text{ kN/m}' = \bar{q}_{g,\overline{AD}} = \bar{q}_g.$$

Tangentni poligon dijagrama  $M^0$  nacrtat ćemo kao verižni poligon. Distribuirane sile stoga zamjenjujemo njihovim resultantama. Budući da će nam trebati vrijednost momenta u točki koja odgovara zglobu C, distribuiranu silu na dijelu grede koji odgovara dijelu  $\overline{DE}$  podijelili smo u dio lijevo i dio desno od te točke pa smo te dijelove zamijenili koncentriranim silama  $Q_{\overline{DC}}$  i  $Q_{\overline{CE}}$ ; stranica verižnoga poligona između tih dviju sila (stranica 2) tada je tangenta na pripadnu parabolu upravo u točki ispod zgloba C.



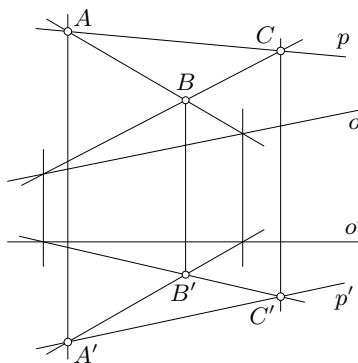
Slika 102.

Verižni/tangentni poligon dijagrama  $M^0$  nacrtan je na slici 102.d. tanjim linijama. (Iako dijagram  $M^0$  nećemo nacrtati, napominjemo da je sastavljen od dijelova triju parabola: stranica 1 verižnoga poligona zajednička je tangenta prve i druge parabole u točki ispod točke D, dok je stranica 3 tangenta druge i treće u točki ispod točke E.)

Zaključna linija verižnoga poligona nulta je linija dijagrama momenata pa je to ujedno i os afinosti  $o'$  u polju momenata. U polju nosača pak spojnica je ležajeva os  $o$ . Zglob C i točka ispod nje na stranici 2 verižnoga poligona — dakle, točka koja u dijagramu  $M^0$

daje vrijednost momenta u točki zamjenjujuće grede koja odgovara zglobu — par su pridruženih točaka kojima je afino pridruživanje određeno.

Dijagram  $M^H$  sastavljen je od dijelova pravaca afino pridruženih osima dijelova  $\overline{AD}$ ,  $\overline{DE}$  i  $\overline{EB}$  trozglobnoga okvira. Dio  $\overline{DE}$  prolazi zglobom C kojemu znamo pridruženu točku, pa ćemo prvo naći sliku tog dijela. Međutim, sjecište njegove osi i osi  $o$  leži izvan dijela ravnine obuhvaćene crtežom. Poslužit ćemo se stoga pomoćnom točkom. Postupak smo skicirali na slici 103. Točke  $A$  i  $A'$  par su pridruženih točaka. Tražimo pravac pridružen pravcu  $p$ . Odabrat ćemo pomoćnu točku  $B$  tako da sva potrebna sjecišta ostanu u okviru crteža. Sliku  $B'$  točke  $B$  nalazimo s pomoću pravca koji prolazi njome i točkom  $A$  te njemu pridružena pravca kroz točku  $A'$ . Sada s pomoću para pridruženih točaka  $B$  i  $B'$  možemo naći sliku neke točke  $C$  s pravca  $p$ , a time i sliku samoga pravca. Na taj smo način odredili sliku osi dijela  $\overline{DE}$  našega nosača. Dijagramu  $M^H$  pripada, naravno, samo dio te slike između slika točaka D i E koje smo na slici 102.d. označili s  $M_D^H$  i  $M_E^H$ .



Slika 103.

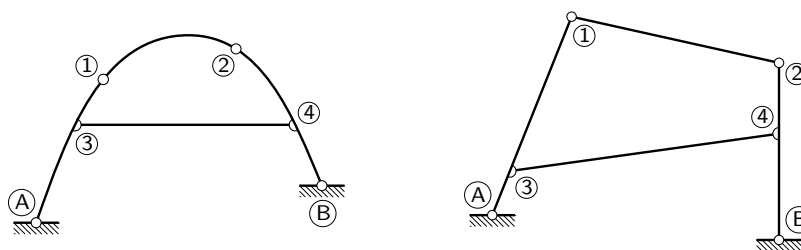
Pravce pridružene osima dijelova  $\overline{AD}$  i  $\overline{EB}$  sada je lako naći: točke  $A$  i  $B$  su na osi  $o$ , pa su njima pridružene točke na osi  $o'$ , a točke pridružene točkama  $D$  i  $E$  znamo. Naime, izdvojimo li infinitezimalni dio okvira oko točke  $D$  presjecima kroz dio  $\overline{AD}$  neposredno ispod točke  $D$  i kroz dio  $\overline{DE}$  neposredno desno odtočke  $D$ , iz uvjeta ravnoteže momenta u točki  $D$  slijedi da su vrijednosti momenta u ta dva presjeka jednaki, pa je točki  $D$  pridružena točka  $M_D^H$ . Slično tome, točki  $E$  pridružena je točka  $M_E^H$ . Time smo dovršili konstruiranje dijagrama  $M^H$  kao afine slike obrisa trozglobnoga okvira (slika 102.d., deblje linije).

Konačni dijagram momenata savijanja crtamo na osi nosača (slika 102.e.) prenošenjem vrijednosti koje su ostale između dijagrama  $M^H$  i  $M^0$ , pri čemu ih mjerimo od dijagrama  $M^H$  kao nove nulte linije. Iako imamo samo tangentni poligon dijagrama  $M^0$ , konačni dijagram možemo nacrtati, jer možemo očitati i prenijeti vrijednosti do sjecišta tangenata.

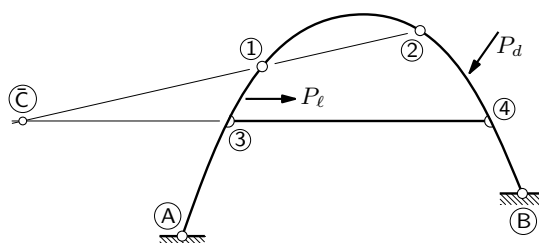
Vrijednosti potrebne za crtanje dijagrama poprečnih sila nalazimo kao nagibe tangenata na krivulje momentoga dijagrama. I na kraju, uz poznate vrijednosti poprečnih sila, jednadžbe ravnoteže sila u točkama  $A, B, D$  i  $E$  dat će i vrijednosti uzdužnih sila. (Za jednadžbe ravnoteže u točkama  $A$  i  $B$  trebat će nam ipak i vrijednost sile  $\vec{H}$  ili sile  $\vec{H}'$ .) [Nacrtajte dijagrame poprečnih i uzdužnih sila!]

## 7.5. Jedno poopćenje

U skupinu nosača koji se mogu analitičkim ili grafičkim postupcima djelomice rješavati „kao trozglobni” ubrajaju se nosači sastavljeni od četiri diska, pri čemu su dva diska zglobovima spojena s podlogom, a međusobno ih, umjesto zgloba, povezuju druga dva diska (slika 104.).



Slika 104.

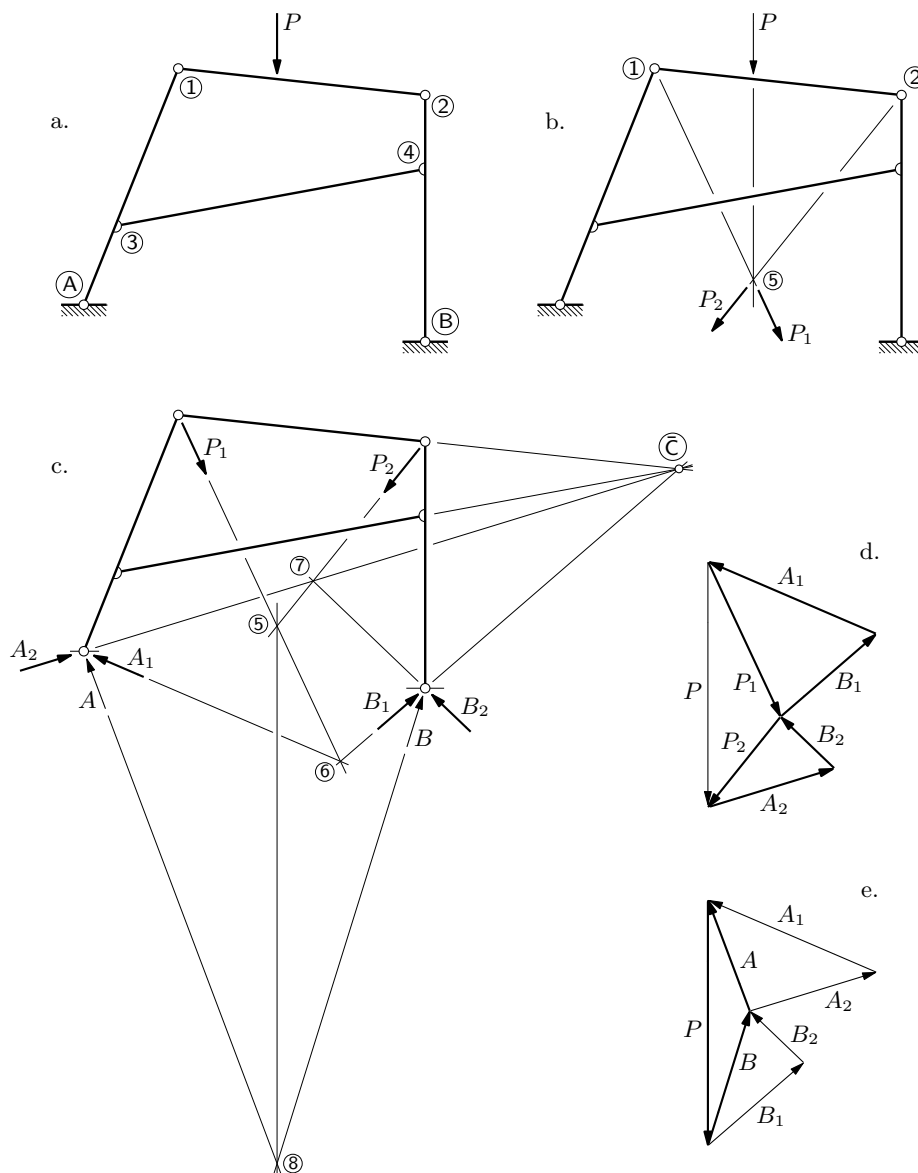


Slika 105.

Ako su opterećeni samo diskovi  $\widehat{A1}$  i  $\widehat{2B}$  (slika 105.), tada diskovi  $\widehat{12}$  i  $\widehat{34}$  igraju ulogu zglobnih štapnih veza, pa u sjecištu pravaca kroz točke 1 i 2 i kroz točke 3 i 4 možemo zamisliti zglob — nazvat ćemo ga *imaginarnim zglobom* i označiti sa  $\bar{C}$ . Lako je vidjeti da ćemo s tim zglobom kao „srednjim zglobom” dobiti izraze za komponente reakcija, neovisno o načinu rastava, istovjetne izrazima dobivenima na trozglobnom nosaču. Za unutarnje sile — sile u (stvarnim) zglobovima i sile u poprečnim presjecima svih diskova — trebat će, međutim, izvesti nove izraze. Ako su diskovi  $\widehat{12}$  i  $\widehat{34}$  ravni, u njima će postojati samo uzdužne sile.

Nosač sa četiri diska može se rješavati prevođenjem na trozglobni nosač i ako su opterećeni i diskovi  $\widehat{12}$  ili  $\widehat{34}$  ili oba. Staviti ćemo, kao primjer, silu  $\vec{P}$  na disk  $\widehat{12}$  (slika 106.a.). Zadatak ćemo riješiti grafički.

U disku  $\widehat{12}$  pojavit će se sada, osim uzdužne, i poprečna sila i moment savijanja, pa više nema ulogu zglobnoga štapa. Stoga za zadano opterećenje ne možemo naći imaginarni zglob. No, zamijenimo li silu  $\vec{P}$  bilo kojim dvjema komponentama  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$  čiji pravci djelovanja prolaze kroz zglobove 1 i 2 (slika 106.b.), disk  $\widehat{12}$  postaje zglobnim štapom. Treba naglasiti da komponente  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$  nisu stvarne sile kojima sila  $\vec{P}$  preko diska  $\widehat{12}$  djeluje na diskove  $\widehat{A1}$  i  $\widehat{2B}$ , ali za nalaženje reakcija to i nije bitno — zamjena silâ odražava se samo na unutarnje sile u disku  $\widehat{12}$ , dok je u odnosu na ostale dijelove nosača djelovanje odabranih komponenata ekvivalentno djelovanju sile  $\vec{P}$ .



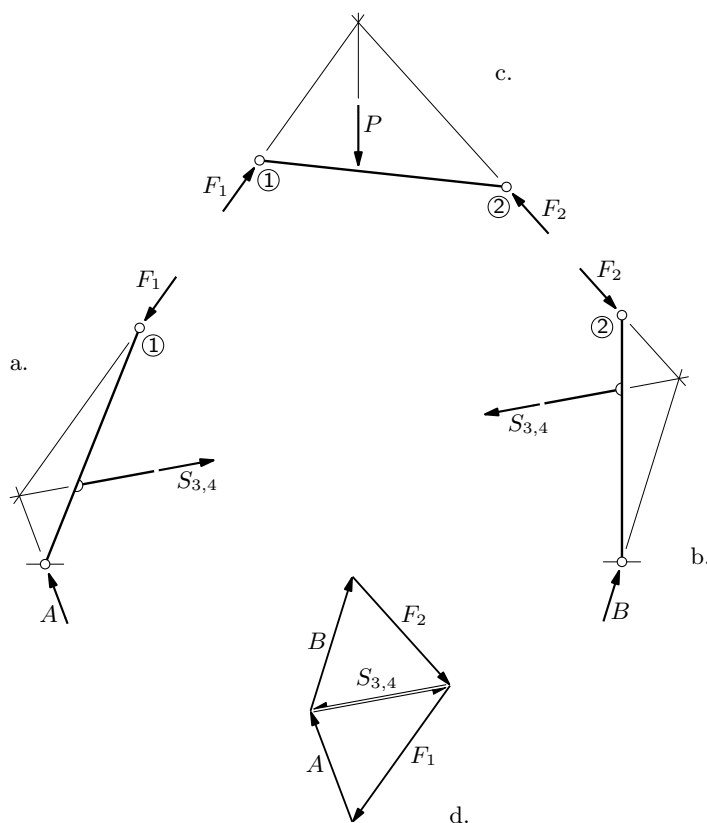
Slika 106.

Sa sistemom sada možemo postupati kao da su opterećeni samo diskovi  $\widehat{A1}$  i  $\widehat{2B}$  pa ćemo, prije svega, u sjecištu pravaca osi diskova  $\widehat{12}$  i  $\widehat{34}$  uvesti imaginarni zglob  $\bar{C}$  (slika 106.c.). Kao i pri grafičkom rješavanju „pravih“ trozglobnih sistema, zamislit ćemo prvo da djeluje samo sila  $\vec{P}_1$ . Kako je u tom slučaju disk  $\widehat{2B}$  neopterećen, pravac djelovanja reakcije  $\vec{B}_1$  prolazi imaginarnim zglobovima  $\bar{C}$ , dok će pravac djelovanja reakcije  $\vec{A}_1$  prolaziti sjecištem pravaca djelovanja sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{B}_1$  (točka 6 na slici 106.c.). Uravnoteženjem sile  $\vec{P}_1$  silama na pravcima usporednima s pravcima djelovanja tih reakcija dobivaju se u poligonu sila njihovi intenziteti i orijentacije (slika 106.d.).

U drugom ćemo koraku zamisliti da djeluje samo sila  $\vec{P}_2$ . Tada je neopterećen disk  $\widehat{A1}$ , pa pravac djelovanja reakcije u njegovu ležaju,  $\vec{A}_2$ , prolazi kroz imaginarni zglob (slika 106.c., ponovo). Pravac pak djelovanja reakcije  $\vec{B}_2$  prolazi točkom 7, sjecištem pravaca djelovanja sila  $\vec{P}_2$  i  $\vec{A}_2$ . Silu  $\vec{P}_2$  u poligonu sila uravnotežujemo silama na pravcima

usporednima s pravcima djelovanja reakcija  $\vec{A}_2$  i  $\vec{B}_2$  te tako određujemo intenzitete i orijentacije tih reakcija (slika 106.d.).

Kad smo našli „parcijalne” reakcije  $\vec{A}_1$  i  $\vec{A}_2$  te  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$ , ukupne reakcije dobivamo zbrajanjem: u poligonu sila na slici 106.e. određeni su smjerovi pravaca djelovanja, intenziteti i orijentacije reakcija  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Pravci djelovanja tih reakcija moraju se sjeći na pravcu djelovanja sile  $\vec{P}$ : točka 8 na slici 106.c.



Slika 107.

Napokon možemo odrediti i cjelokupan tók sila na nosaču. Na disk  $\widehat{A1}$ , izdvojen iz nosača, djeluju reakcija  $\vec{A}$ , sila  $\vec{S}_{3,4}$  koja djeluje na pravcu osi diska  $\widehat{34}$  (to je zglobni štap, pa u njemu postoji samo uzdužna sila) i sila  $\vec{F}_1$  u zglobu 1. Da bi disk bio u ravnoteži, rezultanta sila  $\vec{A}$  i  $\vec{S}_{3,4}$  mora djelovati na pravcu djelovanja sile  $\vec{F}_1$  (slika 107.a.). Slijedi da je taj pravac određen sjecištem pravaca djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{S}_{3,4}$  i točkom 1. Sila  $\vec{A}$  je poznata, a znamo i pravce djelovanja sila  $\vec{S}_{3,4}$  i  $\vec{F}_1$ , pa intenzitete i orijentacije tih dviju sila možemo odrediti u poligonu sila (donji trokut na slici d.).

Na disk  $\widehat{2B}$ , izdvojen iz nosača, djeluju sile  $\vec{B}$  i  $-\vec{S}_{3,4}$  te sila  $\vec{F}_2$  u zglobu 2 (slika 107.b.; primijenjen je tehnički način obilježavanja vektora sila, tako da su i sila  $\vec{S}_{3,4}$  na disku  $\widehat{A1}$  i sila  $-\vec{S}_{3,4}$  na disku  $\widehat{2B}$  označene sa  $S_{3,4}$ ). Nepoznata je sada samo sila  $\vec{F}_2$ , pa je možemo lako odrediti u poligonu sila (gornji trokut na slici d.). Tu silu, naravno, možemo naći i na način sličan određivanju sile  $\vec{F}_1$ : budući da sila  $\vec{F}_2$  i rezultanta sila  $\vec{B}$  i  $-\vec{S}_{3,4}$  moraju



djelovati na istomu pravcu, taj je pravac određen točkom 2 i sjecištem pravaca djelovanja sila  $\vec{B}$  i  $-\vec{S}_{3,4}$  (slika b.).

Sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  stvarne su sile kojima disk  $\widehat{12}$  prenosi zadanu silu  $\vec{P}$  na diskove  $\widehat{A1}$  i  $\widehat{2B}$ . Diskovi  $\widehat{A1}$  i  $\widehat{2B}$  djeluju na disk  $\widehat{12}$  silama istih intenziteta, a suprotnih orijentacija (slike 107.a., b. i c.). Na disk  $\widehat{12}$  djeluju, prema tome, sile  $\vec{P}$ ,  $-\vec{F}_1$  i  $-\vec{F}_2$  (na slikama smo obje sile  $\vec{F}_1$  i  $-\vec{F}_1$  tehničkim načinom obilježili s  $F_1$ , a obje sile  $\vec{F}_2$  i  $-\vec{F}_2$  s  $F_2$ ). Da bi disk  $\widehat{12}$  bio u ravnoteži, pravci djelovanja sila  $\vec{P}$ ,  $-\vec{F}_1$  i  $-\vec{F}_2$  moraju se sjeći u jednoj točki (slika c.); taj zahtjev možemo upotrijebiti za provjeru točnosti grafičke konstrukcije.

Odredili smo tako sile u svim vanjskim i unutarnjim vezama, pa u nastavku možemo na poznati način, metodom jednostavnih presjeka, naći i sile u odabranim poprečnim presjecima. Ponovit ćemo još jednom: pri djelovanju sile  $\vec{P}$  disk  $\widehat{12}$  nije zglobni štap — u njemu postoje uzdužna i poprečna sila i moment savijanja.

## 8. Geometrija pomakâ i deformacija

### 8.1. Štap u prostoru

Štap smo definirali kao (razmjerno vitko) tijelo koje u nedeformiranom stanju — prije vanjskih djelovanja poput nanošenja opterećenja, promjene temperature i vlage ili prisilnih pomaka — opisujemo s pomoću osi i niza poprečnih presjeka (slika 108.a.). U općem slučaju, os nedeformiranoga zakrivljenog štapa (slika b.) je krivulja  $\mathbf{r}_0$  koju smo zadali vektorskom funkcijom (14) na stranici 33.:

$$\bar{\mathbf{r}}_0 : s \mapsto \bar{\mathbf{r}}_0(s) = x_0(s) \bar{\mathbf{i}} + y_0(s) \bar{\mathbf{j}} + z_0(s) \bar{\mathbf{k}}, \quad s \in [0, \ell_0],$$

gdje je vrijednost parametra  $s$  duljina luka krivulje od njezine početne točke  $\mathbf{r}_0(0)$  do točke  $\mathbf{r}_0(s)$ .

Prema definiciji, poprečni presjeci nastaju presijecanjem štapa ravninama okomitima na os; poprečni su presjeci, prema tome, ravninski likovi (slike 108.a. i g.).

Štap se pod opterećenjem i pri nekim drugim djelovanjima pomiče i mijenja oblik. Pomaknutu i deformiranu os štapa (slika d.) opisali smo krivuljom  $\mathbf{r}$  definiranom vektorskom funkcijom (18) na stranici 36.:

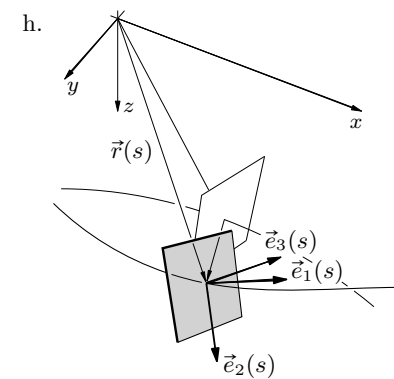
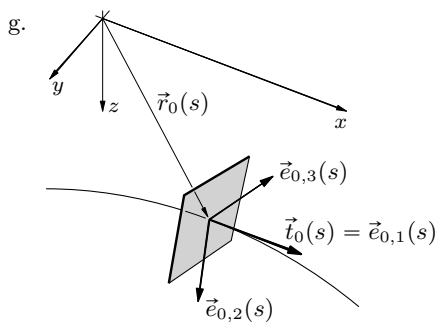
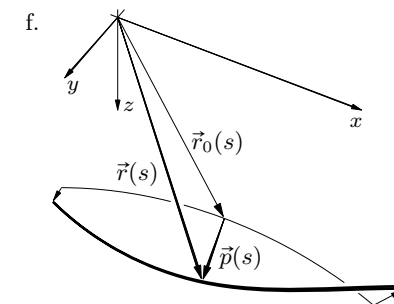
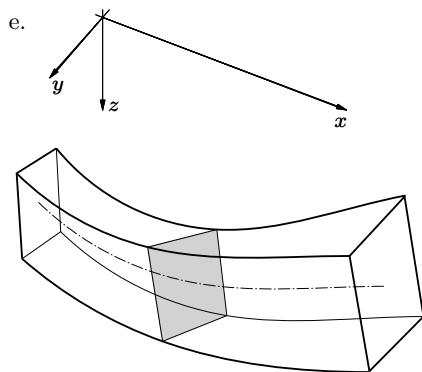
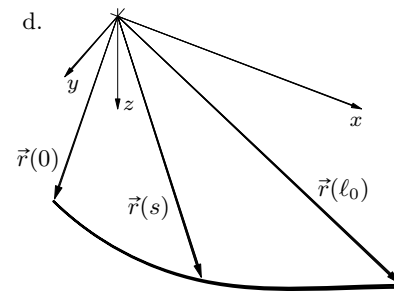
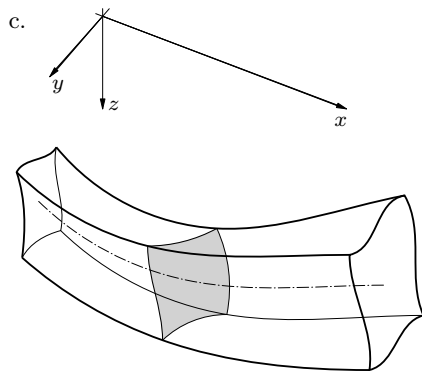
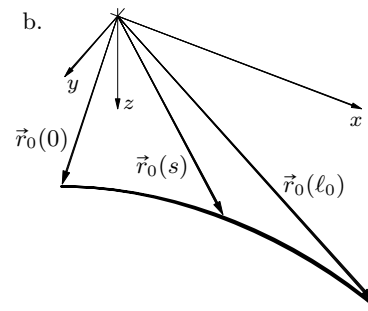
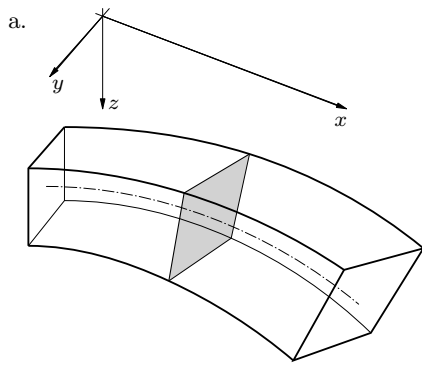
$$\bar{\mathbf{r}} : s \mapsto \bar{\mathbf{r}}(s) = x(s) \bar{\mathbf{i}} + y(s) \bar{\mathbf{j}} + z(s) \bar{\mathbf{k}}, \quad s \in [0, \ell_0].$$

Zbog mogućega rastezanja ili stezanja osi vrijednost parametra  $s$  može, ali ne mora biti duljina luka od točke  $\mathbf{r}(0)$  do točke  $\mathbf{r}(s)$ .

Vektor koji spaja početni i krajnji položaj neke točke tijela pri njegovu gibanju ili deformiranju nazvali smo pomakom te točke. Pomak točke osi štapa, određene parametrom  $s$ , je, prema tome (slika 108.f.)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}(s) &= \bar{\mathbf{r}}(s) - \bar{\mathbf{r}}_0(s) \\ &= [x(s) - x_0(s)] \bar{\mathbf{i}} + [y(s) - y_0(s)] \bar{\mathbf{j}} + [z(s) - z_0(s)] \bar{\mathbf{k}} \\ &= u(s) \bar{\mathbf{i}} + v(s) \bar{\mathbf{j}} + w(s) \bar{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{189}$$

I poprečni se presjeci deformiraju: ravninski se likovi „iskrivljuju” i „izlaze iz svojih ravnina” te postaju likovima na plohama (slika 108.c.). Trebalo bi stoga pratiti pomak svake točke nekoga poprečnog presjeka, pa potpuni matematički opis stanja pomakâ i deformacija štapa traži primjenu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. S druge je strane očito da zbog vitkosti štapa krivulja  $\mathbf{r}$  daje doduše pomalo grubu, ali ipak dovoljno točnu sliku njegova položaja i oblika (udaljimo li se dovoljno, ionako ćemo vidjeti samo tu crtu), te će uvođenje dodatnih pretpostavaka omogućiti primjenu funkcija jedne varijable — parametra  $s$ , recimo — i običnih diferencijalnih jednadžbi i time bitno pojednostaviti opis,



Slika 108.

a odstupanja od stvarnoga stanja, koja se time unose, za većinu praktičnih primjena neće biti značajna.

U svakoj točki  $\mathbf{r}_0(s)$  osi  $\mathbf{r}_0$  uvest ćemo lokalni koordinatni sustav. Prvu os tog sustava odabrat ćemo na pravcu tangente na os  $\mathbf{r}_0$  u promatranoj točki. Taj je pravac određen vektorom  $\vec{t}_0(s) = \vec{r}'_0(s)$ . Kako je  $s$  duljina luka krivulje  $\mathbf{r}_0$ ,  $\vec{r}'_0(s)$  je jedinični vektor<sup>20</sup>,  $\|\vec{r}'_0(s)\| = 1$ . Za pozitivni smisao osi  $\xi_0(s)$  uzet ćemo smisao vektora  $\vec{t}_0(s)$ , tako da je taj vektor prvi vektor ortonormirane baze lokalnoga koordinatnog sustava:  $\vec{e}_{0,1}(s) = \vec{r}'_0(s)$ .

Budući da je ravnina poprečnoga presjeka kroz točku  $\mathbf{r}_0(s)$  okomita na tangentu  $\vec{t}_0(s)$ , druge će dvije lokalne osi ležati u toj ravnini. Uzet ćemo da se te osi poklapaju s glavnim osima tromosti poprečnoga presjeka, a orijentirat ćemo ih tako da vektori  $\vec{e}_{0,1}(s)$ ,  $\vec{e}_{0,2}(s)$  na drugoj i  $\vec{e}_{0,3}(s)$  na trećoj osi tvore desnu ortonormiranu bazu (slika 108.g.).

Osnovna pretpostavka teorija štapova koje ćemo opisati pretpostavka je da poprečni presjeci i nakon pomicanja i deformiranja štapa ostaju ravni te da ni u svojoj ravnini ne mijenjaju oblik (slike 108.e. i h.). Pretpostavljamo, prema tome, da se poprečni presjeci tijekom pomicanja i deformiranja štapa ponašaju kao kruti diskovi; drugim riječima, deformacije tih presjeka, u njihovim ravninama i izvan njih, zanemarujemo. Ravninski likovi, u koje izvorni poprečni presjeci prelaze pomicanjem, mogu, ali ne moraju biti poprečni presjeci deformiranog štapa — mogu, naime, ali ne moraju biti okomiti na deformiranu os.

Vektori  $\vec{e}_{0,1}(s)$ ,  $\vec{e}_{0,2}(s)$ ,  $\vec{e}_{0,3}(s)$  pri pomicanju i deformiranju štapa prelaze u vektore  $\vec{e}_1(s)$ ,  $\vec{e}_2(s)$ ,  $\vec{e}_3(s)$  (slika 108.h.). Budući da se prema našoj pretpostavci ravnina poprečnoga presjeka ne deformira, i vektori  $\vec{e}_2(s)$  i  $\vec{e}_3(s)$  bit će jedinični i međusobno okomiti, a razapinjat će ravninu u koju je prenesen poprečni presjek.

Vektor  $\vec{e}_{0,1}(s)$  normala je ravnine poprečnoga presjeka, pa će i vektor  $\vec{e}_1(s)$  biti okomit na ravninu u koju je taj presjek prenesen i vrijedit će  $\vec{e}_1(s) = \vec{e}_2(s) \times \vec{e}_3(s)$ , ali, kao što smo rekli, ta ravnina ne mora biti okomita na os  $\mathbf{r}$ , tako da se  $\vec{e}_1(s)$  ne mora poklapati s jediničnim vektorom<sup>21</sup>  $\vec{t}(s) = \vec{r}'(s)/\|\vec{r}'(s)\|$  kojim je određena tangenta na krivulju  $\mathbf{r}$  u točki  $\mathbf{r}(s)$ .

Gibanje koje bazu  $(\vec{e}_{0,1}\vec{e}_{0,2}\vec{e}_{0,3})(s)$  prevodi u bazu  $(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)(s)$  možemo prikazati kao kompoziciju translacije i rotacije u prostoru. Translacija je, kao „paralelni” pomak, određena pomakom točke na osi štapa, dakle, vektorom  $\vec{p}(s)$ . Translacijom smo početke vektora  $\vec{e}_{0,1}(s)$ ,  $\vec{e}_{0,2}(s)$ ,  $\vec{e}_{0,3}(s)$  prenijeli iz točke  $\mathbf{r}_0(s)$  u točku  $\mathbf{r}(s)$ . Sada ćemo te vektore zarotirati oko točke  $\mathbf{r}(s)$  tako da se „poklope” s vektorima  $\vec{e}_1(s)$ ,  $\vec{e}_2(s)$ ,  $\vec{e}_3(s)$ ; označimo li rotaciju sa  $\mathcal{R}(s)$ , bit će, dakle,

$$\vec{e}_1(s) = \mathcal{R}(s) \vec{e}_{0,1}(s), \quad \vec{e}_2(s) = \mathcal{R}(s) \vec{e}_{0,2}(s), \quad \vec{e}_3(s) = \mathcal{R}(s) \vec{e}_{0,3}(s).$$

Komponente matrice  $\mathbf{R}(s)$ , kojom je rotacija  $\mathcal{R}(s)$  prikazana u bazi  $(\vec{e}_{0,1}\vec{e}_{0,2}\vec{e}_{0,3})(s)$  skalarne su komponente vektorâ  $\vec{e}_1(s)$ ,  $\vec{e}_2(s)$ ,  $\vec{e}_3(s)$  u toj bazi, koje su jednake kosinusima kutova što ih ti vektori zatvaraju s vektorima baze. No, od tih su devet komponenata samo tri međusobno neovisne, što odgovara činjenici, poznatoj iz kinematike [43], da

<sup>20</sup> Ta se tvrdnja dokazuje u diferencijalnoj geometriji.

<sup>21</sup> Kako vrijednost parametra  $s$  ne mora biti duljina luka do točke  $\mathbf{r}(s)$ ,  $\vec{r}'(s)$  ne mora biti jedinični vektor.

kruto tijelo ima tri rotacijska stupnja slobode, tako da se njegova rotacija može opisati s tri neovisna parametra.<sup>22</sup> Nećemo ulaziti u potpuniji opis rotacije u prostoru. Spomenut ćemo tek da se svaka rotacija može prikazati kao rotacija oko određene osi za određeni kut. Pritom točke (formalnije, vrhovi vektora s početkom u središtu rotacije) putuju po kružnicama okomitima na os. Os, koja prolazi središtem rotacije, može se zadati s dva kuta (nazvali smo ih  $\varphi$  i  $\psi$ , slika 6. na stranici 24.) ili jediničnim vektorom (kako je duljina jediničnoga vektora poznata, samo su dvije od tri njegove skalarne komponente neovisne). Ako su zadani os i kut rotacije, njezina se matrica može izračunati prema izrazu koji je u analitičkoj geometriji poznat kao Rodriguesov izraz. Obratno, ako je zadana matrica rotacije, kut rotacije može se izračunati iz njezina traga, a kako za vektore na osi rotacije vrijedi  $\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$ , ona je određena vlastitim vektorom matrice koji odgovara jediničnoj vlastitoj vrijednosti (druge dvije vlastite vrijednosti par su konjugirano kompleksnih brojeva).

U većini štapnih elemenata građevinskih konstrukcija kutovi zaokretâ poprečnih presjeka vrlo su mali, pa se rotacija može aproksimirati linearnim preslikavanjem  $\mathcal{T}(s)$  čije je djelovanje na neki vektor  $\vec{a}$  (s početkom u središtu rotacije  $\mathbf{r}(s)$ ) zadano izrazom

$$\mathcal{T}(s)\vec{a} = \vec{a} + \vec{\varphi}(s) \times \vec{a}. \quad (190)$$

Vektor

$$\vec{\varphi}(s) = \vartheta(s)\vec{e}_{0,1}(s) + \varphi_1(s)\vec{e}_{0,2}(s) + \varphi_2(s)\vec{e}_{0,3}(s), \quad (191)$$

koji nazivamo *vektorom zaokreta*, leži na osi rotacije, a njegove su skalarne komponente  $\vartheta(s)$ ,  $\varphi_1(s)$ ,  $\varphi_2(s)$  kutovi zaokreta oko osi koje određuju vektori  $\vec{e}_{0,1}(s)$ ,  $\vec{e}_{0,2}(s)$ ,  $\vec{e}_{0,3}(s)$  u novom položaju, u točki  $\mathbf{r}(s)$ . Vektor  $\vec{\varphi}(s) \times \vec{a}$  vektor je pomaka vrha vektora  $\vec{a}$ . Kao vektorski produkt, taj je vektor okomit na vektor  $\vec{\varphi}$ . Stavimo li njegov početak u vrh vektora  $\vec{a}$ , ležat će u ravnini koja prolazi tim vrhom, a okomita je na vektor  $\vec{\varphi}$ , a time i na os rotacije. U toj je ravnini, prema tome, krunica po kojoj vrh vektora  $\vec{a}$  stvarno putuje. Osim na  $\vec{\varphi}$ , vektor  $\vec{\varphi}(s) \times \vec{a}$  okomit je i na vektor  $\vec{a}$ , pa je okomit na ravninu koju ta dva vektora razapinju. Na njezinoj je presječnici s ravninom spomenute kružnice polumjer te kružnice. Slijedi da je vektor  $\vec{\varphi}(s) \times \vec{a}$  okomit na polumjer kružnice, a kako leži u njezinoj ravnini, na njezinoj je tangenti.

Na slici 109.a. prikazan je razmjerno jednostavan primjer rotacije  $\mathcal{R}$  oko osi  $\zeta$  za kut  $\varphi_2$ . U bazi  $(\vec{e}_{0,1}\vec{e}_{0,2}\vec{e}_{0,3})$  njezina je matrica

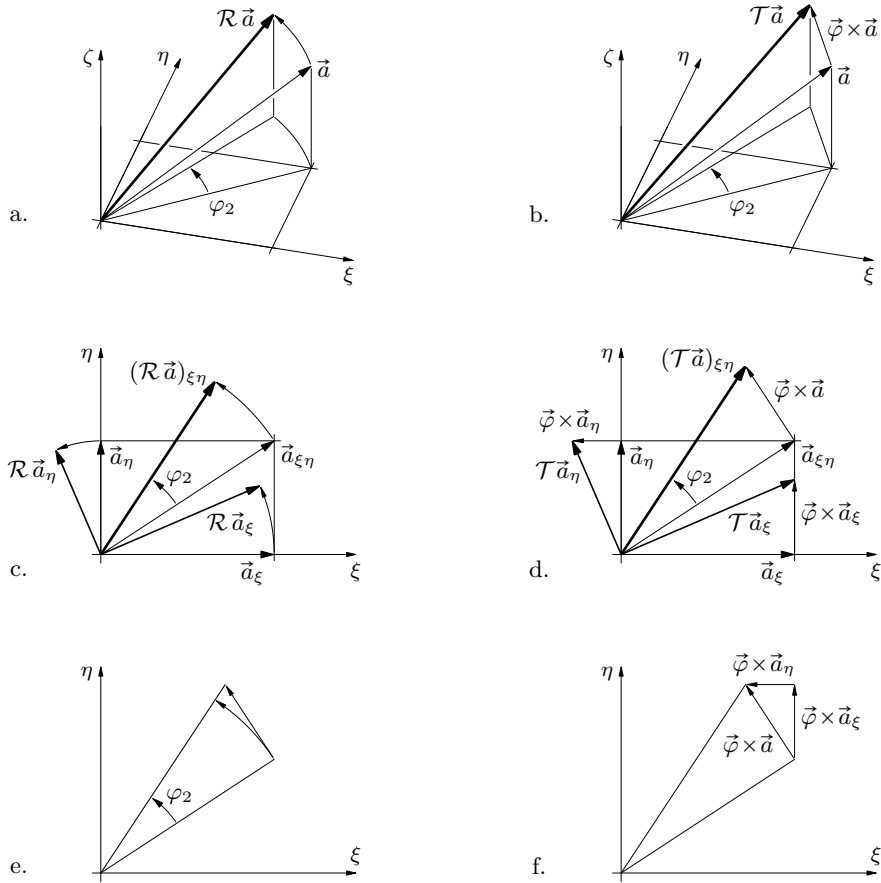
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \cos(\pi/2 + \varphi_2) & 0 \\ \cos(3\pi/2 + \varphi_2) & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako je  $\vec{a} = a_\xi \vec{e}_{0,1} + a_\eta \vec{e}_{0,2} + a_\zeta \vec{e}_{0,3}$ , tada je

$$\mathcal{R}\vec{a} = (a_\xi \cos \varphi_2 - a_\eta \sin \varphi_2) \vec{e}_{0,1} + (a_\xi \sin \varphi_2 + a_\eta \cos \varphi_2) \vec{e}_{0,2} + a_\zeta \vec{e}_{0,3}. \quad (\text{a})$$

Vrh vektora  $\vec{a}$  putuje po luku kružnice koja leži u ravnini okomitoj na os  $\zeta$ , odnosno, paralelnoj s ravninom  $\xi\eta$ .

<sup>22</sup> I za opis translacije potrebna su tri parametra—komponente vektora  $\vec{p}(s)$ . Prema tome, za opis pomaka neke točke promatranoga poprečnog presjeka treba poznavati šest vrijednosti.



Slika 109.

Aproksimacija rotacije  $\mathcal{R}$  transformacijom  $\mathcal{T}$  prikazana je na slici 109.b. Vektor zakreta je  $\vec{\varphi} = \varphi_2 \vec{e}_{0,3}$ , pa su

$$\vec{\varphi} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_{0,1} & \vec{e}_{0,2} & \vec{e}_{0,3} \\ 0 & 0 & \varphi_2 \\ a_\xi & a_\eta & a_\zeta \end{vmatrix} = -\varphi_2 a_\eta \vec{e}_{0,1} + \varphi_2 a_\xi \vec{e}_{0,2}$$

i

$$\mathcal{T} \vec{a} = (a_\xi - \varphi_2 a_\eta) \vec{e}_{0,1} + (\varphi_2 a_\xi + a_\eta) \vec{e}_{0,2} + a_\zeta \vec{e}_{0,3}. \quad (\text{b})$$

Kako je vektor  $\vec{\varphi} \times \vec{a}$  okomit na na os  $\zeta$ , vrh vektora  $\vec{a}$  i pri transformaciji  $\mathcal{T}$  ostaje u ravnini paralelnoj s ravninom  $\xi\eta$ . Slike 109.c. i d. prikazuju ortogonalne projekcije na koordinatnu ravninu  $\xi\eta$ . Kako je ta ravnina usporedna s ravninom u kojoj pri obje transformacije putuje vrh vektora  $\vec{a}$ , kružna putanja i vektor  $\vec{\varphi} \times \vec{a}$  projiciraju se u pravoj veličini. Na slici e. uspoređene su putanje i konačni položaji vrha vektora  $\vec{a}$  pri rotaciji  $\mathcal{R}$  i preslikavanju  $\mathcal{T}$ .

Za mali kut  $\varphi_2$  su, znamo,  $\cos \varphi_2 \approx 1$  i  $\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$ , pa i na taj način možemo iz izraza (a) dobiti izraz (b).

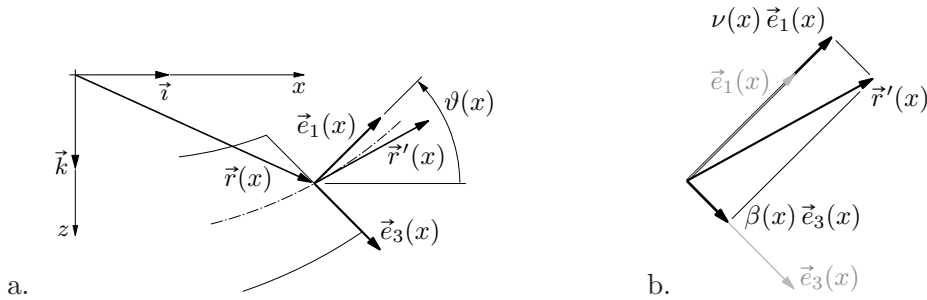
## 8.2. Ravni štap u ravnini

U nastavku ćemo se ograničiti na ravne štapove. Neopterećeni ravni štap duljine  $\ell_0$  možemo u koordinatni sustav smjestiti tako da se segment  $[0, \ell_0]$  na osi  $x$  poklapa s osi štapa te parametar  $s$  zamijeniti apscisom  $x$  (slika 23. na stranici 48). Tada su

$$\vec{r}_0(x) = x \vec{i} \quad \text{i} \quad \vec{r}(x) = x \vec{i} + \vec{p}(x). \quad (192)$$

Uzet ćemo k tomu još i da su glavne osi tromosti svih poprečnih presjeka međusobno usporodne, pa štap možemo postaviti tako da su te osi usporodne s osima  $y$  i  $z$ .

Ako su svi poprečni presjeci simetrični u odnosu na ravninu  $xz$  te ako su pravci djelovanja svih vanjskih sila u toj ravnini, a vektori svih vanjskih momenata okomiti na nju, onda će i unutarnje sile u poprečnim presjecima biti u toj ravnini, a vektori unutarnjih momenata okomiti na nju. Točke štapa koje su u ravnini  $xz$  pomicat će se u toj ravnini, a točke izvan nje u ravninama usporodnima s njom. Sve točke štapa koje leže na nekom pravcu okomitom na ravninu  $xz$  imat će jednake pomake. Stoga će ponašanje presjeka štapa s ravninom  $xz$  dati potpunu sliku ponašanja štapa pri pomicanju i deformiranju (slika 110.a.). Naravno, i deformirana os štapa ostaje u toj ravnini. Bit će, dakle, riječ o ravninskom problemu.



Slika 110.

Konfiguraciju štapa u ravnotežnom stanju možemo sada opisati dvjema vektorskim funkcijama varijable  $x$  (slika 110.a.):

$$\vec{r} : x \mapsto \vec{r}(x) = r_x(x) \vec{i} + r_z(x) \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{e}_1 : x \mapsto \vec{e}_1(x), \quad x \in [0, \ell] \quad (193)$$

Funkcija  $\vec{r}$  opisuje položaj i oblik osi štapa, a funkcija  $\vec{e}_1$  „nagibe” ravnina poprečnih presjeka. Vektor  $\vec{e}_1(x)$  vanjska je normala ravnine pomaknutoga (translatiranog i rotiranog) poprečnog presjeka u točki  $x$ . Vektorom  $\vec{e}_1(x)$  određen je i vektor  $\vec{e}_3(x)$  koji leži na pravcu u kojemu se sijeku ravnina pomaknutoga poprečnog presjeka i ravnina  $xz$ , jer oba leže u ravnini  $xz$  i međusobno su okomiti.

Ako je  $\vartheta(x)$  kut između osi  $x$  i vektora  $\vec{e}_1(x)$ , bit će

$$\vec{e}_1(x) = \cos \vartheta(x) \vec{i} - \sin \vartheta(x) \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{e}_3(x) = \sin \vartheta(x) \vec{i} + \cos \vartheta(x) \vec{k}, \quad (194)$$

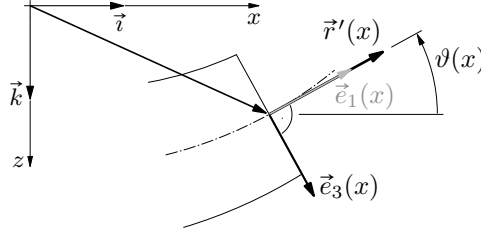
što znači da je ravnotežna konfiguracija štapa u ravnini određena trima skalarnim funkcijama: (skalarnim) komponentama  $r_x$  i  $r_z$  funkcije  $\vec{r}$  i funkcijom  $\vartheta$ .

Vektori  $\bar{e}_1(x)$  i  $\bar{e}_3(x)$  čine lokalnu bazu ravninskoga vektorskog prostora u točki  $\mathbf{r}(x)$ , pa se vektor  $\bar{r}'(x)$ , kojim je određena tangenta na deformiranu os  $\mathbf{r}$  u toj točki, može u komponente rastaviti i u toj bazi (slika 110.b.):

$$\bar{r}'(x) = \nu(x) \bar{e}_1(x) + \beta(x) \bar{e}_3(x). \quad (195)$$

Geometrijsko značenje funkcija  $\nu$  i  $\beta$  objasniti ćemo analizom dvaju posebnih slučajeva.

Ako je  $\beta(x) = 0$ , onda je  $\bar{r}'(x) = \nu(x) \bar{e}_1(x)$ , što znači da je vektor  $\bar{r}'(x)$  kolinearan s normalom  $\bar{e}_1(x)$  ravnine u koju je prešao poprečni presjek; drugim riječima, ta je ravnina okomita na tangentu na deformiranu os (slika 111.).



Slika 111.

Poznato je da je razlika duljina infinitezimalnoga lučnog odsječka  $\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)$  i diferencijala  $d\bar{\mathbf{r}}(x, dx)$  zanemariva,

$$\frac{\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\| - \|d\bar{\mathbf{r}}(x, dx)\|}{\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\|} \approx 0,$$

tako da možemo uzeti  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\| = \|d\bar{\mathbf{r}}(x, dx)\| = \|\bar{r}'(x)\| dx$ . Ako je  $\|\bar{r}'(x)\| = 1$ , onda je  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\| = dx$ . Kako je i  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}_0(x, dx)\| = dx$ , slijedi da se deformiranjem duljina infinitezimalnoga odsječka osi nije promijenila. Ako je pak  $\nu(x) \neq 1$ , onda je  $\|\bar{r}'(x)\| = |\nu(x)|$ , tako da je  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\| = |\nu(x)| dx$ .

Omjer  $\lambda(x)$  duljine  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\|$  lučnoga odsječka u ravnotežnoj konfiguraciji i njegove izvorne duljine  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}_0(x, dx)\| = dx$ ,

$$\lambda(x) = \frac{\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\|}{\|\Delta \hat{\mathbf{r}}_0(x, dx)\|}, \quad (196)$$

nazivamo *koeficijentom rastezanja*. Zamijenimo li odsječak diferencijalom, dobit ćemo

$$\lambda(x) = \frac{\|d\bar{\mathbf{r}}(x, dx)\|}{dx} = \frac{\|\bar{r}'(x)\| dx}{dx} = \|\bar{r}'(x)\| = |\nu(x)|.$$

Za  $\lambda(x) > 1$  je  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\| > \|\Delta \hat{\mathbf{r}}_0(x, dx)\|$ , što znači da se os štapa u (infinitezimalnom) okolišu točke  $x$  rasteže, a ako je  $\lambda(x) < 1$ , os se steže. Koeficijent rastezanja mora biti veći od nule: naime,  $\lambda(x) = 0$  ako je  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\| = 0$  ali  $\|\Delta \hat{\mathbf{r}}_0(x, dx)\| > 0$ , a to bi značilo da je odsječak iščeznuo.

Produljenje ili skraćenje odsječka razlika je njegovih duljina u ravnotežnoj i izvornoj, neopterećenoj konfiguraciji, a *uzdužna deformacija* odsječka definira se kao omjer njegova produljenja ili skraćanja i izvorne duljine:

$$\varepsilon(x) = \frac{\|\Delta \hat{\mathbf{r}}(x, dx)\| - \|\Delta \hat{\mathbf{r}}_0(x, dx)\|}{\|\Delta \hat{\mathbf{r}}_0(x, dx)\|}. \quad (197)$$



Lako je vidjeti, uz (196), da je

$$\varepsilon(x) = \lambda(x) - 1$$

i, obratno,

$$\lambda(x) = 1 + \varepsilon(x). \quad (198)$$

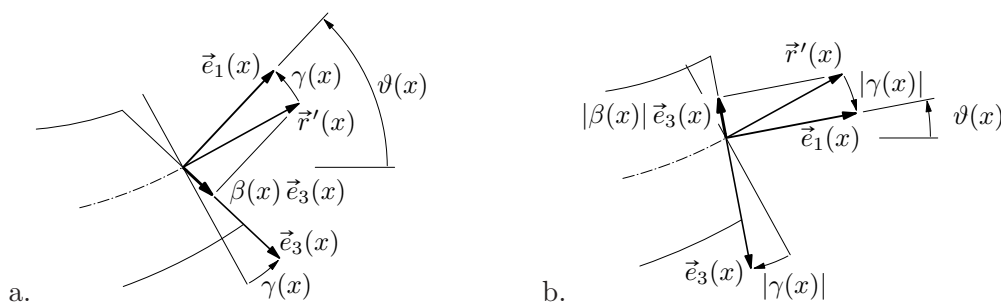
Vrijednost funkcije  $\nu$  u točki  $x$  možemo poistovjetiti s koeficijentom rastezanja  $\lambda(x)$  samo ako je  $\beta(x) = 0$ . Prema (195) je, za  $\beta(x) \neq 0$ ,

$$\lambda(x) = \|\vec{r}'(x)\| = \sqrt{\nu^2(x) + \beta^2(x)},$$

što znači da duljina deformiranoga odsječka ovisi i o  $\beta(x)$ .

Neka je, dakle, sada  $\beta(x) \neq 0$ . Ako je vrijednost  $\nu(x)$  takva da je  $\|\vec{r}'(x)\| = 1$ , može se reći (slika 112.) da je vektor  $\vec{e}_1(x)$  nastao zaokretanjem vektora  $\vec{r}'(x)$  oko osi određene vektorom  $\vec{e}_2(x)$  za kut  $\gamma(x)$  za koji je  $\sin \gamma(x) = \beta(x)$ , pa je  $\gamma(x) = \arcsin \beta(x)$ . Prema tome,  $\gamma(x)$  je kut za koji se promijenio pravi kut između ravnine u koju je prešao poprečni presjek i tangente na os štapa. Međutim, taj kut ne ovisi samo o  $\beta(x)$  nego i o  $\nu(x)$ , pa je opći izraz, primjenjiv i kada je  $\|\vec{r}'(x)\| \neq 1$ , malo složeniji:

$$\gamma(x) = \arcsin \frac{\beta(x)}{\|\vec{r}'(x)\|} = \arcsin \frac{\beta(x)}{\lambda(x)}. \quad (199)$$



Slika 112.

Kut između osi  $x$  i vektora  $\vec{r}'(x)$  označit ćemo sa  $\varphi(x)$ , pa je

$$\vartheta(x) = \varphi(x) + \gamma(x).$$

odnosno,

$$\varphi(x) = \vartheta(x) - \gamma(x), \quad (200)$$

Ako je  $\gamma = 0$  (što znači da je i  $\beta = 0$ ), onda je  $\varphi(x) = \vartheta(x)$  (slika 111.).

Vektor  $\vec{r}(x)$  možemo, prema slici 23. (stranica 48.), prikazati i s pomoću pomaka iz početnoga položaja  $\vec{r}_0(x) = x \vec{i}$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}(x) &= \vec{r}_0(x) + \vec{p}(x) \\ &= x \vec{i} + [u(x) \vec{i} + w(x) \vec{k}] \\ &= [x + u(x)] \vec{i} + w(x) \vec{k}. \end{aligned} \quad (201)$$

Slijedi

$$\vec{r}'(x) = [1 + u'(x)] \vec{i} + w'(x) \vec{k}, \quad (202)$$

te je

$$\lambda(x) = \|\vec{r}'(x)\| = \sqrt{[1 + u'(x)]^2 + [w'(x)]^2}. \quad (203)$$

Formalni je izraz pretpostavke o malim pomacima i malim deformacijama  $w(x) \ll \ell_0$  i  $w'(x) \ll 1$ . Ako je  $w'(x) \ll 1$ , onda je  $[w'(x)]^2 \approx 0$ , pa možemo uzeti da je

$$\lambda(x) = \sqrt{[1 + u'(x)]^2} = 1 + u'(x). \quad (204)$$

Usporedba s izrazom (198) daje da je tada uzdužna deformacija

$$\varepsilon(x) = u'(x). \quad (205)$$

*Konstitucijskim se funkcijama* unutarne sile izražavaju u ovisnosti o pripadnim deformacijskim veličinama. Najjednostavnija je funkcija za izraz ovisnosti uzdužne sile o uzdužnoj deformaciji linearni *Hookeov zakon*:

$$N(x) = EA(x) \varepsilon(x) = EA(x) u'(x) \quad (206)$$

ili

$$EA(x) u'(x) - N(x) = 0, \quad (207)$$

gdje su  $E$  Youngov modul elastičnosti i  $A(x)$  površina poprečnog presjeka u točki  $x$ . Izraz (207) možemo interpretirati kao diferencijalnu jednadžbu s nepoznatom funkcijom  $u$ , kojom su opisani uzdužni pomaci točaka osi štapa, i poznatom funkcijom  $N$  razdiobe unutarnjih uzdužnih sila.

Uvrštavanjem konstitucijske funkcije (206) u diferencijalnu jednadžbu ravnoteže u uzdužnom smjeru,

$$N'(x) + p(x) = 0,$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu koja neposredno povezuje funkciju  $u$  i funkciju  $p$  kojom je zadana vanjska uzdužna distribuirana sila:

$$[EA(x) u'(x)]' + p(x) = 0. \quad (208)$$

Ako je štap konstantnoga poprečnog presjeka, jednadžba se pojednostavljuje u

$$EA u''(x) + p(x) = 0. \quad (209)$$

Analiza savijanja ravnoga štapa pojednostavljuje se uvođenjem pretpostavke da je štap nerastezljiv. Drugim riječima, uzdužni se i poprečni pomaci analiziraju odvojeno, neovisno jedni o drugima.

Nerastezljivost se formalno izražava uvjetom  $\lambda(x) = 1$ . Kako je uz pretpostavku o malim pomacima prema (204)  $\lambda(x) = 1 + u'(x)$ , slijedi da mora biti  $u'(x) = 0$ . Stoga je

$$\vec{r}'(x) = \vec{i} + w'(x) \vec{k}. \quad (210)$$

Pretpostavka o malim pomacima obuhvaća i pretpostavku o malim kutovima. Uz mali kut  $\vartheta(x)$  između osi  $x$  i vektora  $\vec{e}_1(x)$  možemo, zbog  $\cos \vartheta(x) \approx 1$  i  $\sin \vartheta(x) \approx \vartheta(x)$ , za vektor  $\vec{e}_1(x)$  umjesto prvoga podizraza u izrazu (194) na stranici 178. pisati

$$\vec{e}_1(x) = \vec{i} - \vartheta(x) \vec{k}. \quad (211)$$

Vratit ćemo se sada na pretpostavku da je  $\gamma(x) = 0$ , tako da je ravnina, u koju se poprečni presjek pomaknuo iz točke  $x$ , okomita na tangentu na deformiranu os u točki u koju je došla točka  $x$  (slika 111. na stranici 179.). To znači da su vektori  $\vec{e}_1(x)$  i  $\vec{r}'(x)$  kolinearni, te je zbog (200)  $\varphi(x) = \vartheta(x)$ , a kako je  $\|\vec{r}'(x)\| = \lambda(x) = 1$ , ti se vektori poklapaju, pa iz prethodna dva izraza slijedi

$$\varphi(x) = \vartheta(x) = -w'(x). \quad (212)$$

Uzet ćemo da je moment savijanja proporcionalan zakrivljenosti osi štapa, pa je konstitucijska funkcija

$$M(x) = \frac{E I(x)}{\varrho(x)},$$

gdje je  $I(x)$  moment tromosti poprečnog presjeka u točki  $x$ . U diferencijalnoj se geometriji zakrivljenost krivulje definira izrazom

$$\frac{1}{\varrho(x)} = \kappa(x) = -\frac{w''(x)}{\sqrt{\left\{1 + [w'(x)]^2\right\}^3}}.$$

Kako je po pretpostavci  $w'(x) \ll 1$  i, stoga,  $[w'(x)]^2 \cong 0$ , bit će jednostavno

$$\kappa(x) = -w''(x), \quad (213)$$

pa je konstitucijska funkcija

$$M(x) = E I(x) \kappa(x) = -E I(x) w''(x) \quad (214)$$

ili

$$E I(x) w''(x) + M(x) = 0. \quad (215)$$

Izraz (215) diferencijalna je jednačba za funkciju  $w$ , koja opisuje poprečne pomake osi štapa, ako je poznata funkcija  $M$  razdiobe momenata savijanja.

Momente savijanja, opisane funkcijom  $M$ , i zadanu vanjsku distribuiranu silu okomitu na os, opisanu funkcijom  $q$ , povezuje diferencijalna jednačba ravnoteže

$$M''(x) + q(x) = 0. \quad (216)$$

Uvrstimo li u nju za  $M$  konstitucijsku funkciju (214), dobit ćemo diferencijalnu jednačbu kojom je izražena veza između funkcija  $w$  i  $q$ :

$$[E I(x) w''(x)]'' - q(x) = 0; \quad (217)$$

i ta se jednačba pojednostavnjuje ako je poprečni presjek konstantan uzduž štapa:

$$E I w^{IV}(x) - q(x) = 0. \quad (218)$$

Teorija savijanja iz koje su izvedene diferencijalne jednačbe (215), (217) i (218) naziva se *Bernoulli–Eulerovom teorijom savijanja*.

Ako je  $\gamma(x) \neq 0$ , ravnina u koju poprečni presjek prelazi pri savijanju nije okomita na deformiranu os (slika 110.a. na stranici 178.), pa vektori  $\bar{r}'(x)$  i  $\bar{e}_1(x)$  nisu kolinearni, a  $\vartheta(x) \neq \varphi(x)$ , nego je  $\vartheta(x) = \varphi(x) + \gamma(x)$ . Pravi kut između ravnine u koju je iz točke  $x$  prešao poprečni presjek i tangente na deformiranu os štapa promijenio se, prema tome, za kut

$$\gamma(x) = \vartheta(x) - \varphi(x) \quad (219)$$

koji nazivamo *posmičnim kutom* ili *kutom posmika*. Taj se kut konstitucijskom funkcijom povezuje s poprečnom silom:

$$kT(x) = GA(x)\gamma(x); \quad (220)$$

pritom je  $G$  modul posmika, dok se konstantom  $k$  uzima u obzir nejednolika razdioba posmičnoga naprezanja po ploštini poprečnog presjeka.

Savijanje se sada opisuje dvjema funkcijama,  $w$  i  $\vartheta$ , koje su s poprečnom silom i momentom savijanja povezane dvjema diferencijalnim jednačbama:

$$EI(x)\vartheta'(x) - M(x) = 0, \quad (221)$$

$$GA(x)[\vartheta(x) + w'(x)] - kT(x) = 0. \quad (222)$$

Ta se teorija naziva *Timošenkovom teorijom savijanja*.

### 8.3. Kinematičke jednačbe ravninskih rešetkastih sistema

Kinematičke jednačbe rešetkastih sistema povezuju promjene duljina štapova i pomake čvorova. Izvest ćemo ih u okviru teorije „malih“ pomaka.

Prikažemo li pomake čvorova  $i$  i  $j$  vektorima  $\bar{u}_i$  i  $\bar{u}_j$ , njihove će nove koordinate biti  $(x_i + u_i, y_i + v_i)$  i  $(x_j + u_j, y_j + v_j)$ .

Promjenu duljine štapa  $\{i, j\}$  označit ćemo sa  $d_{\{i,j\}}$ ; za  $d_{\{i,j\}} > 0$  riječ je o produljenju, a za  $d_{\{i,j\}} < 0$  o skraćanju štapa. Nova je duljina štapa  $\ell_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}}$ , a primjena Pitagorina poučka daje

$$(\ell_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}})^2 = [(x_j + u_j) - (x_i + u_i)]^2 + [(y_j + v_j) - (y_i + v_i)]^2$$

ili, drugačije grupirano,

$$(\ell_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}})^2 = [(x_j - x_i) + (u_j - u_i)]^2 + [(y_j - y_i) + (v_j - v_i)]^2.$$

Kvadriranjem podizrazâ te promjenom redoslijeda i grupiranjem pribrojnika na desnoj strani dobivamo

$$\begin{aligned} \ell_{\{i,j\}}^2 + 2\ell_{\{i,j\}}d_{\{i,j\}} + d_{\{i,j\}}^2 \\ = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2] \\ + 2[(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i)] \\ + [(u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2]. \end{aligned}$$

Prvi podizraz s desne strane znaka jednakosti, obuhvaćen uglatim zagradama, jednak je  $\ell_{\{i,j\}}^2$ , dok je podizraz u posljednjem retku jednak kvadratu duljine razlike pomakâ  $\bar{u}_j$  i  $\bar{u}_i$ . Budući da su pomaci mali, odnosno, budući da vrijedi  $d_{\{i,j\}} \ll \ell_{\{i,j\}}$ ,  $\|\bar{u}_i\| \ll \ell_{\{i,j\}}$  i  $\|\bar{u}_j\| \ll \ell_{\{i,j\}}$ , mogu se  $d_{\{i,j\}}^2$  i  $\|\bar{u}_j - \bar{u}_i\|^2$  zanemariti u odnosu na  $2\ell_{\{i,j\}}d_{\{i,j\}}$  (drugi pribrojnik slijêva) i na drugi podizraz zdësna, pa ostaje

$$2\ell_{\{i,j\}}d_{\{i,j\}} = 2[(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i)].$$

Slijedi

$$d_{\{i,j\}} = \frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}}(u_j - u_i) + \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}}(v_j - v_i),$$

odnosno

$$d_{\{i,j\}} = -\left(\frac{x_j - x_i}{\ell_{\{i,j\}}}u_i + \frac{y_j - y_i}{\ell_{\{i,j\}}}v_i + \frac{x_i - x_j}{\ell_{\{i,j\}}}u_j + \frac{y_i - y_j}{\ell_{\{i,j\}}}v_j\right)$$

ili, sažetije,

$$d_{\{i,j\}} = -(c_{i,j}u_i + s_{i,j}v_i + c_{j,i}u_j + s_{j,i}v_j). \quad (223)$$

Promjene duljina štapova poredat ćemo u vektor  $\mathbf{d}$  prema brojčanim oznakama štapova, dok ćemo orijentirane duljine komponenata pomakâ čvorova svrstati u vektor  $\mathbf{u}$  tako da su  $u_i$  i  $v_i$  na mjestima  $2(i-1)+1$  i  $2(i-1)+2$ . U odjeljku 6.1. izveli smo jednadžbe ravnoteže sila koje djeluju na pojedine čvorove rešetke. Poredak promjena duljina štapova u vektoru  $\mathbf{d}$  odgovara poretku vrijednostî uzdužnih sila u vektoru  $\mathbf{s}$ , a poredak skalarnih komponenata pomakâ čvorova u vektoru  $\mathbf{u}$  poretku skalarnih komponenata vanjskih sila u vektoru  $\mathbf{f}$ .

Izraze (223) za sve štapove možemo sažeto zapisati u obliku

$$\mathbf{d} = -\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (224)$$

gdje je  $\mathbf{B}$  matrica komponente koje su

$$\begin{aligned} b_{\kappa, 2(i-1)+1} &= c_{i,j}, & b_{\kappa, 2(i-1)+2} &= s_{i,j}, \\ b_{\kappa, 2(j-1)+1} &= c_{j,i}, & b_{\kappa, 2(j-1)+2} &= s_{j,i}. \end{aligned} \quad (225)$$

Vektori  $\mathbf{d}$  i  $\mathbf{u}$  sadrže  $b$  i  $2n$  komponenata, pa matrica  $\mathbf{B}$  ima  $b$  redaka i  $2n$  stupaca.

Usporedba izraza (225) s izrazima (151) i (152) u odjeljku 6.1. pokazuje da je

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T. \quad (226)$$

Matricu  $\mathbf{B}$  nazivamo *kinematičkom matricom*.

## 9. Virtualan rad

### 9.1. O pojmu mehaničkoga rada

„Ovo su viseći vrtovi, isti oni — ili gotovo isti — koje je Salomon de Caus bio zamislio za vrtove u Heidelbergu — hoću reći za dvorskog izbornog kneza Fridrika V, u velikom stoljeću Ružinog križa. [...] De Caus je znao da se preko oblika vrtova može utjecati na zvijezde, jer postoje znakovi koji svojim izgledom oponašaju sklad svemira. . .”

U. Eco: *Foucaultovo njihalo*

Pojam mehaničkoga rada formalizacija je svakodnevnoga iskustva svladavanja sila pri promjeni položaja stvari, pri njihovu pomicanju ili podizanju. U svojoj povijesti mehanike [12] R. Dugas navodi da se rad u tom značenju po prvi puta spominje godine 1615. u djelu *Smisao i svrha sila koje pokreću, uz različite naprave korisne i ugodne, čemu su dodani neki nacrti spilja i vrelâ* Salomona de Causa (1576.–1626.), vrtinoga arhitekta koji je proučavao i hidrauliku kako bi u vrtovima mogao graditi umjetne spilje, izvore i vodoskoke. No, ako su suvremenici mu taj spomen i zamijetili, odmah su ga zaboravili. U mehaniku se pojam rada, doduše s nazivom pokretačka snaga, vratio 1824. godine u *Razmišljanjima o pokretačkoj snazi vatre* Sadija Carnota: „Rabimo ovdje pokretačku snagu za izražavanje korisnoga učinka koji stroj može proizvesti. Učinak se uvijek može usporediti s podizanjem težine na određenu visinu. Mjera mu je, kao što znamo, umnožak težine i visine na koju je dignuta.”

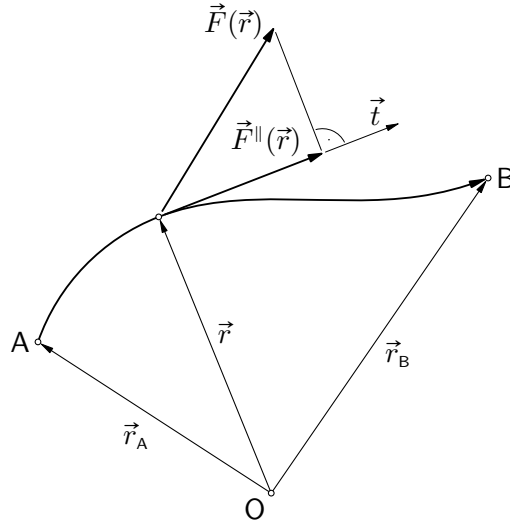
Za silu koja djeluje na nekom putu kažemo da radi. I sila i put bitne su odrednice pojma rada — nepomična sila, ma kako velika bila, ne radi; da bi radila, sila mora „putovati”. No, ni samo „putovanje” sile nije dovoljno: radi samo ona komponenta sile koja zaista pomiče tijelo ili se tom pomicanju odupire — rastavi li se sila u dvije međusobno okomite komponente, komponentu na pravcu puta i komponentu okomitu na nj, to je samo komponenta na pravcu puta. („Pravac” krivocrtnoga puta u nekoj njegovoj točki određuju ta i neka njoj neizmjereno bliza točka — to je, drugim riječima, tangenta na krivulju puta u toj točki.) Rad je razmjernan duljini puta i vrijednosti komponente sile na pravcu puta.

Sila duž puta može mijenjati i vrijednost i pravac djelovanja, pa ćemo je prikazati vektorskom funkcijom položaja

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{F} : (x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \vec{i} + F_y(x, y, z) \vec{j} + F_z(x, y, z) \vec{k},$$

ili, poistovjetimo li točku  $(x, y, z)$  s njezinim radijus-vektorom  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ , u kraćemu zapisu,

$$\vec{F} : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3, \quad \vec{F} : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r}) \vec{i} + F_y(\vec{r}) \vec{j} + F_z(\vec{r}) \vec{k}.$$



Slika 113.

Rad sile  $\vec{F}$  na putu  $\widetilde{AB}$ , od točke A do točke B, je, po definiciji, skalarna veličina čija je vrijednost jednaka vrijednosti krivuljnoga integrala (druge vrste)

$$\mathfrak{W}_{\widetilde{AB}} = \int_{\widetilde{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\widetilde{AB}} F_x(\vec{r}) dx + F_y(\vec{r}) dy + F_z(\vec{r}) dz. \quad (227)$$

Već smo, naime, rekli da u nekoj točki  $\vec{r}$  puta  $\widetilde{AB}$  radi samo komponenta  $\vec{F}^{\parallel}(\vec{r})$  sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na pravcu puta (slika 113.). U najjednostavnijemu je slučaju, kada je put pravocrtan, a sila konstantna po vrijednosti i po pravcu djelovanja koji se k tomu još i poklapa s pravcem puta, rad jednak umnošku intenziteta sile i duljine prevaljena puta, s odgovarajućim predznakom: orijentiramo li prevaljeni put, rad ćemo smatrati pozitivnim ako sila i put imaju isti smisao; slikovitije, za rad sile koja nešto pomiče kažemo da je pozitivan, a ako se pak sila tom pomicanju odupire, rad joj je negativan. Komponenta  $\vec{F}^{\parallel}(\vec{r})$  jednaka je ortogonalnoj projekciji sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na pravac puta, a vrijednost te projekcije jednaka je skalarnom produktu vektora sile i jediničnoga vektora  $\vec{t}$  tangente na krivulju  $\widetilde{AB}$  u točki  $\vec{r}$ , pa je infinitezimalan rad sile  $\vec{F}(\vec{r})$  pri neizmjerljivo malom pomaku  $d\vec{r}$  po tangenti na krivulju puta

$$\begin{aligned} d\mathfrak{W}(\vec{r}, d\vec{r}) &= [\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{t}] \|d\vec{r}\| \\ &= \left[ \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} \right] \|d\vec{r}\| = [\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}] \frac{\|d\vec{r}\|}{\|d\vec{r}\|} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Rad na putu  $\widetilde{AB}$  dobivamo integriranjem takvih infinitezimalnih radova uzduž cijeloga tog puta:

$$\mathfrak{W}_{\widetilde{AB}} = \int_{\widetilde{AB}} d\mathfrak{W}(\vec{r}, d\vec{r}) = \int_{\widetilde{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Put na kojem sila djeluje opisat ćemo parametarski zadanim lukom krivulje; u vektorskom je zapisu:

$$\vec{r} : s \mapsto \vec{r}(s) = x(s) \vec{i} + y(s) \vec{j} + z(s) \vec{k}, \quad s \in [s_A, s_B].$$

Vektori  $\vec{r}(s_A) = \vec{r}_A$  i  $\vec{r}(s_B) = \vec{r}_B$  određuju početnu i krajnju točku puta, A i B. Smisao u kome točka  $\vec{r}(s)$  prolazi lukom kada  $s$  raste od vrijednosti  $s_A$  do  $s_B$  određuje pozitivnu orijentaciju luka. Vektor

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = x'(s) \vec{i} + y'(s) \vec{j} + z'(s) \vec{k},$$

čija orijentacija odgovara orijentaciji luka, određuje tangentu na krivulju u točki  $\vec{r}(s)$ .

Za infinitezimalni rad sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na putu  $d\vec{r}$  sada dobivamo

$$d\mathfrak{W}(s, ds) = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot d\vec{r}(s) = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot [\vec{r}'(s) ds] = [\vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s)] ds,$$

pa rad sile  $\vec{F}$  na putu  $\widetilde{AB}$  možemo izračunati s pomoću „običnoga” integrala

$$\mathfrak{W}_{\widetilde{AB}} = \int_{s_A}^{s_B} [F_x(\vec{r}(s)) x'(s) + F_y(\vec{r}(s)) y'(s) + F_z(\vec{r}(s)) z'(s)] ds. \quad (228)$$

### 9.1.1. Konzervativne sile

Ako rad neke sile ne ovisi o putu kojim je prošla od početne do krajnje točke, nego samo o položajima tih točaka, sila se naziva *potencijalnom* ili *konzervativnom*. Primjeri su gravitacijska sila i unutarne sile pri elastičnim deformacijama, dok su sila trenja i unutarne sile pri plastičnim deformacijama nekonzervativne. U matematičkoj se analizi dokazuje da je nuždan i dovoljan uvjet neovisnosti krivuljnoga integrala o putu integracije taj da je njegov integrand potpuni diferencijal neke funkcije. Takva se funkcija u matematičkoj fizici naziva *potencijalnom funkcijom* ili *potencijalom* [40]. (Označivši infinitezimalni rad sa  $d\mathfrak{W}$  umjesto sa  $d\mathfrak{W}$  naznačili smo da ta funkcija može, ali i ne mora biti potpuni diferencijal.)

Pojam potencijala uveo je George Green, mlinar i, u to doba, samouki<sup>23</sup> matematičar i fizičar, u *Ogledu o primjeni matematičke analize u teorijama elektriciteta i magnetizma* iz 1828. godine: „Dobro je poznato da su gotovo sve privlačne i odbojne sile koje u prirodi postoje takve da će, promatramo li bilo koju materijalnu točku  $p$ , učinak, u danom smjeru, svih sila koje na tu točku djeluju, a potječu od bilo kojega sustava tijela  $S$ , biti izražen s pomoću diferencijala stanovite funkcije koordinata kojima je određen položaj točke u prostoru. [...] U nastavku ćemo često imati prilike govoriti o toj funkciji, te ćemo je stoga, kratkoće radi, zvati potencijalnom funkcijom proizašlom iz sustava  $S$ .”

Može se pokazati da je sila konzervativna ako (i samo ako) je njezin rad na bilo kojoj zatvorenoj krivulji  $C$  jednak nuli:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

Također se može pokazati da je sila konzervativna ako (i samo ako) je njezino polje bezvrtložno:

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x(\vec{r}) & F_y(\vec{r}) & F_z(\vec{r}) \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

<sup>23</sup> Na studij u Cambridgeu upisao se tek u četrdesetj, 1833. godine. U djetinjstvu je pak školu pohađao tek dvije godine. No, bio je član notingamske knjižnice u kojoj je iščitavao i proučavao suvremene matematičko-fizičke članke u *Transactions of the Royal Society of London* [9].



### 9.1.2. Rad vanjskih i unutarnjih sila

Pod utjecajem raznih djelovanja, poput vanjskih sila, temperaturnih promjena i slijeganja ležajeva, konstrukcija mijenja oblik. Vanjske sile pritom rade na pomacima točaka u kojima djeluju, a unutarnje, pokazat ćemo uskoro, na infinitezimalnim prirastima pridruženih polja pomakâ. (Pod pojmovima sila i pomakâ podrazumijevat ćemo poopćene sile i poopćene pomake, pa tako momenti rade na zaokretima poprečnih presjeka.) Rad općenito označavat ćemo s  $\mathfrak{W}$ , rad vanjskih sila s  $\mathfrak{V}$ , a rad unutarnjih s  $\mathfrak{U}$ .

## 9.2. O pojmu virtualnoga rada

U sjećanju, koraci odjekuju  
Niz stazu kojom nismo pošli  
Prema vratima koja nikad nismo otvorili  
U ružičnjak.

T. S. Eliot: *Burnt Norton*

Matematički je model idealizirana slika dijela stvarnosti. Dio stvarnosti ishodište je modela, ali model nije stvarnost. Štoviše, za neke elemente modela i za neke pojave i postupke u njemu ne moraju postojati stvarni predlošci.

Tako pomak na kojemu neka (stvarna) sila radi ne mora biti stvaran, možemo ga tek zamisliti. Nazvat ćemo ga tada *virtualnim*<sup>24</sup> *pomakom*, pa je i rad sile na takvu pomaku *virtualan rad*. Slično tome, zamišljena može biti sila, a pomak stvaran, izazvan zadanim stvarnim silama (koje su, razumije se, neovisne o našoj zamišljenoj sili), temperaturnim promjenama, slijeganjima ležajeva . . . I rad je *virtualne sile* na stvarnu pomaku, dakako, virtualan.

Sile ili pomake možemo zamisliti gotovo po volji i time ih potpuno prilagoditi određenoj zadaći ili zahtjevima jednostavn(ij)e matematičke obrade, a odabrati možemo i neke uvjete i međusobne odnose koje sile moraju zadovoljavati pri zamišljenim pomicanjima ili uvjete koje pomaci moraju ispunjavati pri djelovanju zamišljenih sila.

Posebice, pomake ćemo zamišljati tako da ne naruše geometrijske odnose u konstrukciji, a pretpostavljat ćemo još da se tijekom tih pomicanja vrijednosti stvarnih sila ne mijenjaju i da pravci na kojima te sile djeluju ostaju usporedni s pravcima na kojima su djelovale prije pomicanja.

Prikažemo li zamišljeni pomak hvatišta sile  $\vec{F}$  vektorom  $\delta\vec{u}$ , virtualan rad sile na tom pomaku bit će, kao posljedica uvedenih pretpostavaka, jednostavno

$$\delta\mathfrak{W} = \vec{F} \cdot \delta\vec{u} = F_x \delta u_x + F_y \delta u_y + F_z \delta u_z; \quad (229)$$

drugim riječima, uvedenim smo pretpostavkama izbjegli potrebu uvođenja i mukotrpnoga izračunavanja krivoljnoga integrala (227).

<sup>24</sup> I u svakodnevnu je govoru *virtualan* onaj „koji postoji u prividu ili proizlazi iz privida, a ne iz realnosti; nestvaran, izmišljen” [V. ANIĆ: *Veliki rječnik hrvatskoga jezika*, Novi Liber, Zagreb, 2003.].

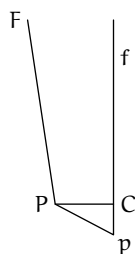
Iako pomake točkaca konstrukcije tek zamišljamo, prirodno je zahtijevati da u stano-  
vitom smislu odgovaraju stvarnim pomacima; ponajprije, da konstrukcija pritom ostane  
cjelovita — osim hvatištâ sila pomicat će se i susjedne točke, tako da promijenjeni oblik  
osî dijelova konstrukcije treba prikazati neprekinutim, dovoljno glatkim krivuljama, što  
znači da ćemo polja virtualnih pomaka opisivati, ovisno o matematičkom modelu, do-  
voljno puta diferencijabilnim vektorskim ili skalarnim funkcijama vektorske ili skalarne  
varijable, primjerice  $\delta\vec{u} : \vec{r} \mapsto \delta\vec{u}(\vec{r})$ ,  $\delta\vec{u} : s \mapsto \delta\vec{u}(s)$ ,  $\delta w : x \mapsto \delta w(x)$ .

Polje pomakâ koje zadovoljava uvjete neprekinutosti i geometrijske rubne uvjete na-  
zivamo *moćim* ili *dopustivim stanjem pomakâ sistema*. Za Bernoulli–Eulerovu gredu  
to znači da progibna linija ne smije imati ni lomove ni skokove i da mora prolaziti kroz  
ležajne točke (koje će, ako su zadani prisilni pomaci ležajeva, biti pomaknute). Analogno,  
*moćće stanje ravnoteže sistema* skup je reakcija i unutarnjih sila koje su u ravnoteži sa  
zadanim vanjskim aktivnim silama. Unutarnje sile i reakcije izračunane iz polja pomakâ  
po volji odabranoga mogućeg stanja pomakâ ne moraju i najčešće neće biti u ravnoteži  
s aktivnim silama. Isto tako, polje pomakâ izračunano iz unutarnjih sila i reakcija ne-  
koga mogućeg stanja ravnoteže ne mora i najčešće neće zadovoljiti uvjete neprekinutosti  
i geometrijske rubne uvjete. No, jedno je od mogućih stanja pomakâ i jedno od mogućih  
stanja ravnoteže *stvarno ravnotežno stanje sistema* — konfiguracija sistema u kojoj su  
vanjske i unutarnje sile u ravnoteži.

### 9.2.1. Iz povijesti

Princip virtualnih radova za materijalnu točku i za kruto tijelo u općem je obliku izrazio  
Johann Bernoulli u pismu koje je 26. siječnja 1717. uputio Pierreu Varignonu [12]:

„Zamislite nekoliko različitih sila koje djeluju u skladu s različitim težnjama ili u razli-  
čitim smjerovima kako bi održale točku, liniju, plohu ili tijelo u ravnoteži. Također,  
zamislite da je mali pomak dan cijelom sistemu tih sila. Neka je taj pomak usporedan  
samome sebi u bilo kojem smjeru ili neka je oko bilo koje čvrste točke. Bit će Vam lako  
shvatiti da će, pri tom pomaku, svaka sila napredovati ili uzmaknuti u njegovu smjeru;  
osim ako su težnje jedne ili nekoliko sila okomite na taj mali pomak, u kojem slučaju ta  
sila ili te sile neće ni napredovati ni uzmaknuti. Jer ta napredovanja ili uzmaci, nazivam ih  
*virtualnim brzinama*, nisu drugo do veličine za koje svaki pravac težnje poraste ili opadne  
zbog maloga pomaka. I ti se porasti ili opadanja mogu naći ako se položi okomica na  
pravac težnje bilo koje sile na njezinu kraju. Ta će okomica odrezati u okolišu maloga  
pomaka mali dio pravca težnje koji će biti mjera virtualne brzine te sile.



Neka je, primjerice,  $P$  bilo koja točka sistema koja se održava u rav-  
noteži. Neka je  $F$  jedna od sila koje guraju ili povlače točku  $P$  u smjeru  $FP$   
ili  $PF$ . Neka je  $Pp$  kratka ravna crta koju točka  $P$  opisuje pri malom po-  
maku kojim težnja  $FP$  zauzima položaj  $fp$ . Taj će biti ili potpuno uspo-  
redan sa  $FP$ , ako je mali pomak u svakoj točki usporedan s ravnom crtom  
čiji je položaj zadan, ili će tvoriti beskonačno mali kut sa  $FP$  ako je mali  
pomak sistema učinjen oko čvrste točke. Povucite stoga  $PC$  okomito na  $fp$   
i dobit ćete  $Cp$  kao *virtualnu brzinu* sile  $F$  tako da je  $F \times Cp$  ono što  
nazivam *energijom*.

Uočite da je  $Cp$  ili *pozitivna* ili *negativna*. Sila  $F$  gura točku  $P$ . Ona [virtualna brzi-  
na  $Cp$ ] je *pozitivna* ako je kut  $FPp$  tup i *negativna* ako je kut  $FPp$  oštar. I obratno,

ako je točka  $P$  vučena,  $Cp$  će biti *negativna* ako je kut  $FPp$  tup i *pozitivna* ako je oštar. Budući da smo to razjasnili, iznosim sljedeću opću tvrdnju.

U ravnoteži bilo kakvih sila, na koji god način primijenjenih i u kojemu god smjeru da djeluju — posredno ili neposredno — zbroj pozitivnih energija bit će jednak zbroju negativnih energija uzetom pozitivno.”

(Bernoullijeva definicija virtualnoga pomaka, koji on naziva „virtualnom brzinom”, općenitija je od naše — Bernoulli, kao što i slika pokazuje, dopušta „zaokret” pravca na kojemu djeluje sila. Da je nazivlje tek bilo u nastajanju, pokazuje i uvođenje naziva „energija” za današnji pojam rada.)

Poseban slučaj principa, skriven u „zakonu snaga”, spominje već Aristotel — ili, vjerojatnije, nepoznati autor apokrifa *Problemi mehanike* (*Μηχανικὰ προβλήματα*). U skolastičkom ga razdoblju naslućuju i primjenjuju predstavnici Jordanove škole, a potom Guido Ubaldo, Galileo Galilei, Evangelista Torricelli, Simon Stevin, René Descartes, John Wallis... Kao temeljno načelo i počelo iz kojega je zatim izveo cjelokupnu mehaniku, princip je u analitičkom obliku izrazio Joseph–Louis Lagrange u *Analitičkoj mehanici* (*Mécanique analytique*) 1788. godine.

Za povijest građevne statike posebno je važna rasprava *Mišljenje triju matematičara o oštećenjima koja su uočena u kupoli Sv. Petra krajem godine 1742.*, dano po nalogu našega gospodara pape Benedikta XIV.-tog (*Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella Cupola di S. Pietro sul fine dell Anno MDCCXLII, dato per ordine di nostro signore Papa Benedetto XIV*) koju su napisali Ruđer Josip Bošković<sup>25</sup>, Francois Jacquier i Thomas Le Seur.

Obično se navodi da je kupola bazilike Svetoga Petra u Rimu sagrađena prema Michelangelovim nacrtima. No, Michelangelo je zamislio sfernu kupolu (slika 114. lijevo). Arhitekti G. della

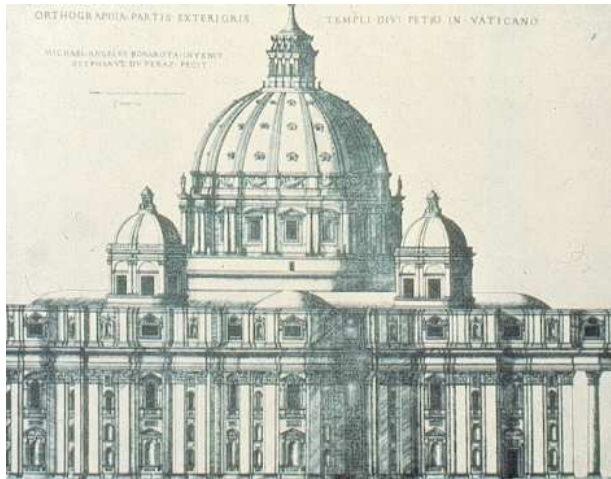
<sup>25</sup> Bošković je rođen u Dubrovniku 18. 5. 1711., a umro je u Milanu 13. 2. 1787. godine. Između godina 1727. i 1741. studirao je retoriku, filozofiju i teologiju u isusovačkim zavodima Collegium Ragusinum (u Dubrovniku) i Collegium Romanum (u Rimu), gdje je 1740. izabran za profesora matematike. Godine 1744. zaređio se za svećenika i preuzeo katedru matematike. Kasnije je matematiku predavao na Sveučilištu u Paviji, a istodobno je vodio katedru za optiku i astronomiju u Milanu, te zvjezdarnicu u Breri kraj Milana. Nakon ukidanja isusovačkoga reda godine 1773. preselio se u Pariz. Iako je nakon odlaska u Rim u rodnom Dubrovniku bio samo jedanput, cijeloga je života ostao vezan za Grad te za njega obavljao diplomatske poslove.

Među prvima je u kontinentalnoj Europi prihvatio Newtonovu teoriju, iako je prostor i vrijeme smatrao relativnima. Mjereći pomoću njihala veličinu gravitacije, utvrdio je da je različita na različitim mjestima na površini Zemlje. Prvi je, na temelju mjerenja meridijanskih stupnjeva između Rima i Riminija, odredio nepravilni oblik Zemlje (koji je J. Listing mnogo kasnije, 1873., nazvao geoidom).

U geometrijskim je radovima, kao i J. Poncelet (tvorac projektivne geometrije, oko 1820.), konačne i beskonačno daleke točke smatrao ravnopravnima. Baveći se pitanjima beskonačnosti i neprekinutosti uveo je pojam kontinuuma realnih brojeva.

Prema Boškovićevoj izvornoj teoriji strukture tvari, tvar je sastavljena od jednostavnih, nedjeljivih, neprotežnih, međusobno odvojenih točaka bez unutarnje strukture, ali sa svojstvom inercije. Tvarne točke ishodišta su sila koje djeluju na daljinu, a mogu se prikazati Boškovićevom krivuljom: na malim udaljenostima među točkama sila je odbojna, a s povećanjem udaljenosti smanjuje se do poništenja, prelazi u privlačnu, raste do najveće vrijednosti, ponovo opada, prelazi u odbojnu i tako dalje, više puta mijenjajući predznak. Opisana Boškovićeva teorija bila je podlogom Navierova izvoda diferencijalnih jednadžbi ravnoteže izotropnoga elastičnog tijela (tek je Cauchy uveo zamisao materijalnog kontinuuma) i Faradayeva uvođenja pojma polja sila.

Boškovićava pak zamisao da se sva stvarnost može protumačiti jednim zakonom, iskazana već naslovom knjige *Teorija prirodne filozofije svedena na jedan jedini zakon sila koje djeluju u prirodi* (*Theoria philosophiæ naturalis redacta ad unam legem virium in natura existentium*) iz 1758. godine, oživljena je u suvremenoj znanosti potragom za „ujedinjenom teorijom polja” koju su začeli A. Einstein i W. Heisenberg te još sveobuhvatnijom „teorijom o svemu”.



Slika 114.

Porta i D. Fontana, koji su nakon Michelangelove smrti godine 1590. zajedno dovršili gradnju, izmijenili su izvorni projekt „izduživši” kupolu (slika 114. desno). Promjer je kupole 42,6 m, tjemeni otvor na kojemu leži lanterna na visini je od 101 m iznad poda, dok je svod lanterne na visini 117,8 m. Kupola je na jednoj četvrtini visine masivna, a iznad toga se razdvajaju vanjska i unutrašnja ljuska (presjek na slici 115., preuzetaj iz *Parere di tre mattematicici*).

Godine 1686. uočene su prve pukotine. Provedeno je nekoliko analiza, a krajem 1740. godine papa je sastavio posebnu komisiju, te zatražio i mišljenje nekih matematičara „o postojećim oštećenjima koja se zapažaju na kupoli bazilike, a ponajviše o mjerama za njezinu obnovu”.

Prvi dio rasprave „trojice matematičara” sadrži opis konstrukcije, kronologiju razvoja pukotina te pregled nekih mogućih uzroka i njihovo odbacivanje. Drugi je dio statički proračun kojim autori *Mišljenja* dokazuju svoju pretpostavku da je uzrok oštećenjima popuštanje željeznih prstenova ugrađenih pri dnu kupole pod prevelikim horizontalnim potiscima.

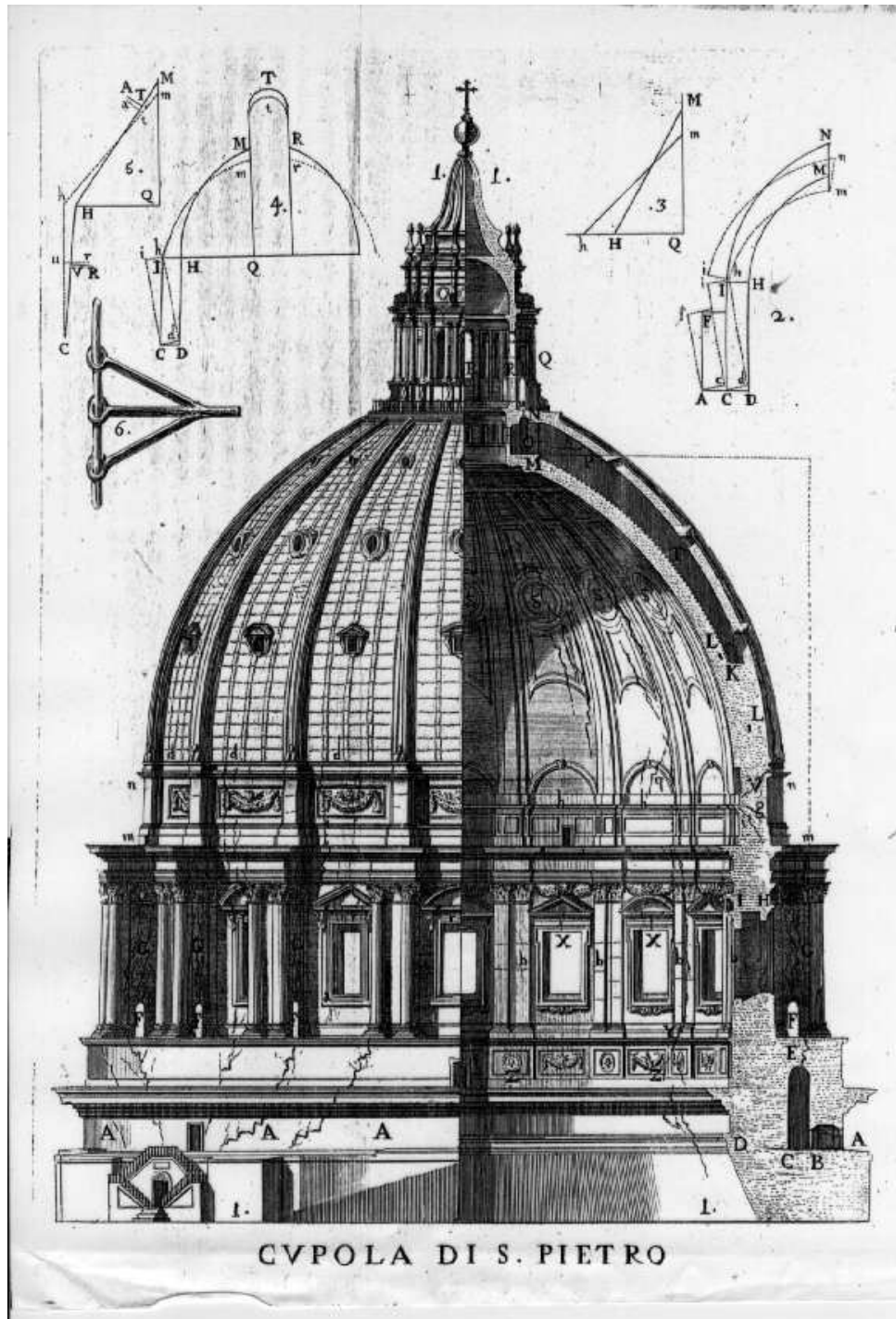
Pretpostavivši da su kontrafori i neoštećeni dijelovi kupole i tambura apsolutno kruta tijela (što je, treba reći, vrlo gruba aproksimacija) koja se zaokreću oko „koriženâ” pukotinâ, trojica matematičara crtaju sheme pomakâ tih dijelova (skice i crteži pri vrhu slike 115.), te s pomoću jednadžbi, za koje možemo reći da izražavaju virtualne radove težina dijelova kupole, kontrafora i dijelova tambura te unutarnjih sila u prstenovima koji se rastežu, izračunavaju neuravnotežene horizontalne potiske u osnovici kupole.

Treba spomenuti i to da je Bošković već tijekom studija u Collegiumu Romanum proučavao Newtonova djela, ali čini se da trojica matematičara nisu poznavala zakon „Ut tensio sic vis” („Koliko je produljenje, tolika je sila”), koji je Newtonov suvremenik Robert Hooke objavio u *Lectures de Potentia Restitutiva, or Of Springs* više od pola stoljeća prije njihove rasprave, godine 1678., tako da proračun provode kao da se sile u željeznim prstenovima pri njihovu rastezanju ne mijenjaju.

Ipak, tiskanje rasprave možemo smatrati rođenjem suvremene građevne statike. Umjesto do tada uvriježene primjene potpuno iskustvenih pravila, Bošković i ostali pokušavaju teorijskim putem objasniti raspucavanje, te provode statički proračun. Međutim, ne konstruiraju poligon sila, što bi prema tadašnjem stupnju razvoja mehanike trebalo očekivati, nego uvode potpuno novi analitički postupak. Prigovorima poput:

„Ako je kupola Sv. Petra mogla biti zamišljena, projektirana i sagrađena bez matematičara i, naročito, bez mehanike koja se danas posebno njeguje, moći će se i restaurirati bez suradnje





Slika 115.

matematičara i matematike. . . Buonarroti nije znao matematiku, a ipak je znao projektirati kupolu. . .”

odgovaraju:

„Možda ćemo biti i obvezani opravdavati se pred mnogima koji će, ne samo pretpostavljajući praksu teorijama, nego i misleći da je samo ona potrebna i korisna, a ove da su možda i štetne, osuditi našu odvažnost kao onih koji se miješaju u tuđe poslove; a moglo bi im se lako odgovoriti

pokazujući da su teorije, kad su dobro primijenjene, ne samo korisne, nego i potrebne, da sama praksa nije ni po čemu drugom korisna nego po teoriji što je sam od sebe stvara onaj koji, vidjevši u mnogo slučajeva što se događa, odatle zaključuje silom prirodne spoznaje što se nužno mora dogoditi u drugim malo ili nimalo različitim slučajevima.”

Naglašavaju uz to da ih je pozvao vladar koji je shvatio da se radi o građevini jedinstvenoj u svijetu i da se na tek nekoliko sličnih, ali manjih građevina nisu mogla steći iskustva na koja se praktičari pozivaju, tako da od matematičara traži da primjenjujući „općenitija načela mehanike” izvedu „najsloženije posljedice iz najjednostavnijih mogućih uzroka”.

U trećem dijelu rasprave trojica matematičara preporučuju mjere sanacije — ugradnju dodatnih željeznih prstenova i usidrenih lanaca, proračunanih uz koeficijent sigurnosti 2, jer „nije prikladno držati se jednostavne ravnoteže, nego treba udvostručiti otpore, tako da, otkáže li nekim slučajem na koji se nije mislilo jedan dio, postoji drugi. . .”

### 9.3. Teorem o virtualnim pomacima za deformabilno tijelo

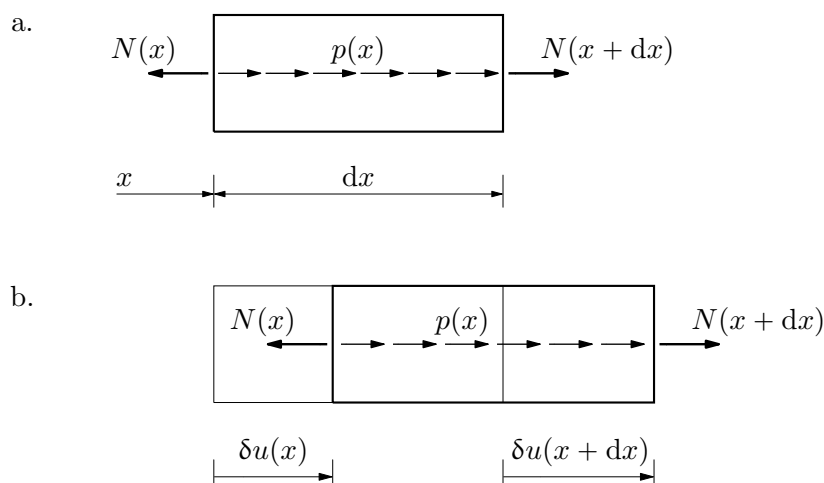
Znanost je igra — ali igra sa stvarnošću, igra s ostrim noževima . . .

E. Schrödinger

Ograničit ćemo se na analizu ravne grede u ravnini  $xz$ . Koordinatni sustav ćemo, kao i uvijek, odabrati tako da se os  $x$  poklapa s osi grede i da je jedan kraj grede u ishodištu, a drugi u točki s apscisom  $\ell$  (kako apscise jednoznačno određuju točke osi, možemo kratko reći: u točki  $\ell$ ; i općenitije: govorit ćemo o točki  $x$ ). Greda može biti statički neodređena, ali uzet ćemo da su joj ležajevi samo u krajnjim točkama, a kraj može biti i slobodan.

U okvirima linearne teorije sve su posljedice uzdužnih i poprečnih djelovanja na ravnu gredu, kao što znamo, međusobno neovisne, pa ćemo ih i sada analizirati razdvojeno.

Izdvojit ćemo infinitezimalan odsječak između poprečnih presjeka kroz točke  $x$  i  $x + dx$ . Na njega na pravcu osi grede djeluju distribuirana sila  $\vec{p}$ , uzdužna sila  $-\vec{N}(x)$  u presjeku  $x$  i uzdužna sila  $\vec{N}(x + dx)$  u presjeku  $x + dx$  (slika 116.a.).



Slika 116.

Neka je polje uzdužnih virtualnih pomaka grede zadano funkcijom

$$\delta\vec{u} : x \mapsto \delta\vec{u}(x) = \delta u(x) \vec{v}; \quad (230)$$

orijentirane su duljine pomakâ krajeva promatranoga odsječka tada  $\delta u(x)$  i  $\delta u(x + dx)$  (slika 116.b.).

Kao i pri izvodu diferencijalnih jednadžbi ravnoteže, uzet ćemo da se vrijednost distribuirane sile  $\vec{p}$  ne mijenja uzduž odsječka i da je jednaka vrijednosti  $p(x)$  u točki  $x$ ; vrijednost je rezultante pripadnoga dijela sile tada  $p(x) dx$ . Uzmemo li još da ta rezultanta djeluje u točki  $x$ , njezin je infinitezimalni virtualni rad

$$[p(x) dx] \delta u(x). \quad (231)$$

(Kad bismo pretpostavili da rezultanta djeluje u bilo kojoj drugoj točki između točaka  $x$  i  $x + dx$ , vrijednost njezina rada razlikovala bi se od navedene za zanemarivu vrijednost  $\alpha p(x) \delta u'(x) (dx)^2$ , uz  $0 \leq \alpha \leq 1$ . [Dokažite!])

Radovi su uzdužnih sila na virtualnim pomacima krajeva odsječka

$$-N(x) \delta u(x) \quad \text{i} \quad N(x + dx) \delta u(x + dx). \quad (232)$$

Izraz za rad na lijevome kraju ima predznak „–”, jer se, prema slici 116.b., pozitivno orijentirana sila „suprostavlja” pozitivnu pomaku. Na desnome će pak kraju prethodnoga odsječka, koji s lijevim krajem našeg odsječka dijeli ravninu poprečnog presjeka (slika 116.c.), rad biti  $N(x) \delta u(x)$ .

Aproksimiramo li infinitezimalne priraste  $\Delta N$  i  $\Delta \delta u$  funkcija  $N$  i  $\delta u$  diferencijalima  $dN$  i  $d\delta u$ , tako da su

$$\begin{aligned} N(x + dx) &= N(x) + \Delta N(x, dx) \cong N(x) + dN(x, dx) = N(x) + N'(x) dx, \\ \delta u(x + dx) &= \delta u(x) + \Delta \delta u(x, dx) \cong \delta u(x) + d\delta u(x, dx) = \delta u(x) + \delta u'(x) dx, \end{aligned}$$

za rad na desnomu kraju našega odsječka (slika 116.b.) možemo pisati

$$N(x + dx) \delta u(x + dx) \cong [N(x) + N'(x) dx] [\delta u(x) + \delta u'(x) dx],$$

odnosno, nakon množenja članova na desnoj strani i uz činjenicu da je  $N'(x) \delta u'(x) (dx)^2$  neizmjereno mala veličina čiji je red viši od reda ostalih pribrojnika,

$$N(x + dx) \delta u(x + dx) \cong N(x) \delta u(x) + N(x) [\delta u'(x) dx] + [N'(x) dx] \delta u(x),$$

što znači da se pri infinitezimalnom prirastu varijable  $x$  za  $dx$ , od desnog kraja prethodnoga do desnog kraja promatranog odsječka, virtualni rad uzdužne sile poveća (približno) za zbroj infinitezimalnoga rada sile, čija je vrijednost jednaka vrijednosti sile u presjeku  $x$ , na infinitezimalnom prirastu polja pomaka (pri čemu je taj prirast aproksimiran diferencijalom), i infinitezimalnog rada infinitezimalnog prirasta sile (također aproksimiranoga diferencijalom) na pomaku, čija je duljina jednaka duljini pomaka presjeka  $x$ . Naime, kako je funkcija  $N \delta u$ , kojom je definiran rad, umnožak dviju funkcija, njezin infinitezimalni prirast ovisi o prirastima i jedne i druge funkcije — o prirastu vrijednosti sile i o prirastu duljine pomaka.

Zbroj je radova uzdužnih sila na virtualnim pomacima krajeva našega odsječka (slika 116.b.), prema tome,

$$-N(x) \delta u(x) + N(x + dx) \delta u(x + dx) \cong N(x) [\delta u'(x) dx] + [N'(x) dx] \delta u(x). \quad (233)$$

Osim uzdužnih sila na odsječak na pravcu osi djeluje i sila  $\vec{p}$ , pa ćemo objema stranama pribrojiti izraz (231):

$$\begin{aligned} -N(x) \delta u(x) + N(x + dx) \delta u(x + dx) + [p(x) dx] \delta u(x) \\ \cong N(x) \delta u'(x) dx + N'(x) \delta u(x) dx + p(x) \delta u(x) dx, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} -N(x) \delta u(x) + N(x + dx) \delta u(x + dx) + [p(x) dx] \delta u(x) \\ \cong N(x) \delta u'(x) dx + [N'(x) + p(x)] dx \delta u(x). \end{aligned} \quad (234)$$

Ako je prije virtualnoga pomicanja odsječak bio u ravnoteži, sile koje djeluju na njega zadovoljavale su diferencijalnu jednadžbu ravnoteže

$$N'(x) + p(x) = 0.$$

Kako se, prema našim pretpostavkama, ni sile ni njihovi geometrijski odnosi pomicanjem nisu promijenili, sile ostaju u ravnoteži, pa podizraz u uglatim zagradaama na desnoj strani relacije (234) iščezava; ostaje, dakle, samo prvi pribrojnik:

$$-N(x) \delta u(x) + N(x + dx) \delta u(x + dx) + p(x) \delta u(x) dx \cong N(x) \delta u'(x) dx. \quad (235)$$

Podizrazom s desne strane znaka  $\cong$  definiran je *infinitesimalni rad uzdužne sile na infinitesimalnom prirastu polja uzdužnih virtualnih pomaka*:

$$d\delta\mathcal{U}_N(x, dx) = N(x) d\delta u(x, dx) = N(x) [\delta u'(x) dx] = N(x) [\delta \varepsilon(x) dx]; \quad (236)$$

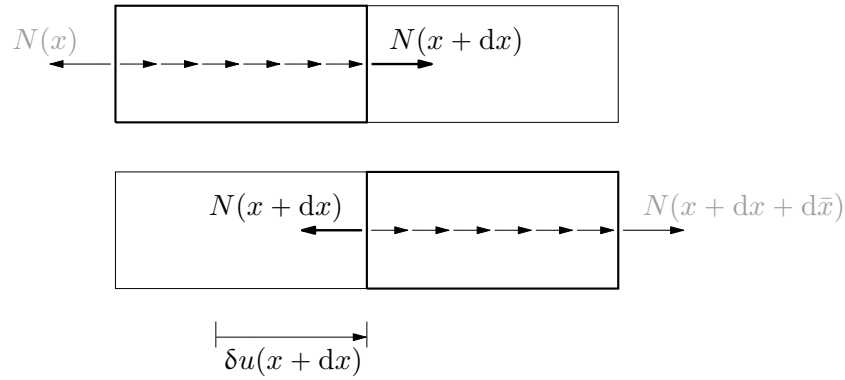
posljednju je pretvorbu u toj definiciji omogućila kinematička veza  $\delta u' = \delta \varepsilon$ , analogna vezi  $u' = \varepsilon$  između stvarnih polja pomakâ i deformacija. Rad  $d\delta\mathcal{U}_N(x, dx)$  „čisti” je rad koji preostaje kad zbrojimo radove svih sila koje djeluju na neki infinitesimalni odsječak.

Naša je greda sastavljena od bezbrojno mnogo infinitesimalnih odsječaka. Za svaki od njih možemo napisati relaciju (235). „Zbrojimo” li svih tih bezbrojno mnogo relacija, dobit ćemo

$$-N(0) \delta u(0) + N(\ell) \delta u(\ell) + \int_0^\ell p(x) \delta u(x) dx = \int_0^\ell N(x) \delta u'(x) dx. \quad (237)$$

Naime, podizrazi za rad uzdužnih sila na dodirnim ravninama susjednih odsječaka — drugi pribrojnik u relaciji (235) napisanoj za neki, bilo koji odsječak i prvi pribrojnik u relaciji za sljedeći odsječak — međusobno se poništavaju, jer je riječ o istom poprečnom presjeku, pa, dakle, i o istom pomaku te o silama istoga intenziteta, ali suprotne orijentacije (slike 117.), tako da u „zbroju” na lijevoj strani preostaju samo podizrazi za radove sila u ravninama krajnjih presjeka. No, u tim ravninama, na lijevom kraju prvoga i na desnom kraju posljednjeg odsječka djeluju vanjske sile; to mogu biti reakcije ili sile zadane





Slika 117.

kao opterećenje (primjerice, slika 118.a.). Uvedemo li za vanjske sile na krajevima opće oznake  $\vec{N}_0$  i  $\vec{N}_\ell$ , bit će

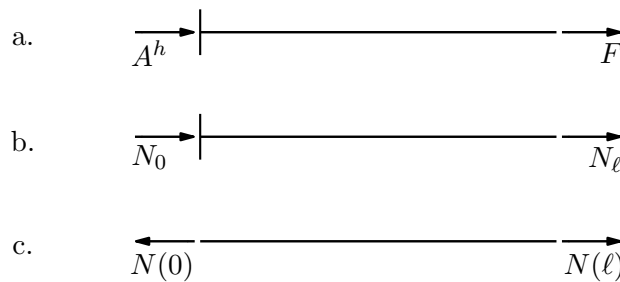
$$N(0) = -N_0 \quad \text{i} \quad N(\ell) = N_\ell;$$

na lijevom se kraju predznak promijenio zbog različitih „dogovorenih“ pozitivnih orijentacija vanjskih i unutarnjih sila (slike 118.b. i c.). Jednadžba (237) time postaje jednadžbom koja izriče jednakost virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila:

$$N_0 \delta u(0) + N_\ell \delta u(\ell) + \int_0^\ell p(x) \delta u(x) dx = \int_0^\ell N(x) \delta u'(x) dx; \quad (238)$$

svi pribrojnici s lijeve strane znaka jednakosti izražavaju radove vanjskih sila, a integralom na desnoj strani definiran je *rad uzdužnih sila na infinitesimalnim prirastima polja uzdužnih virtualnih pomaka* ili, sinonimno, kraće, *virtualan rad uzdužnih sila*:

$$\delta \mathfrak{U}_N = \int_0^\ell N(x) \delta u'(x) dx = \int_0^\ell N(x) \delta \varepsilon(x) dx. \quad (239)$$

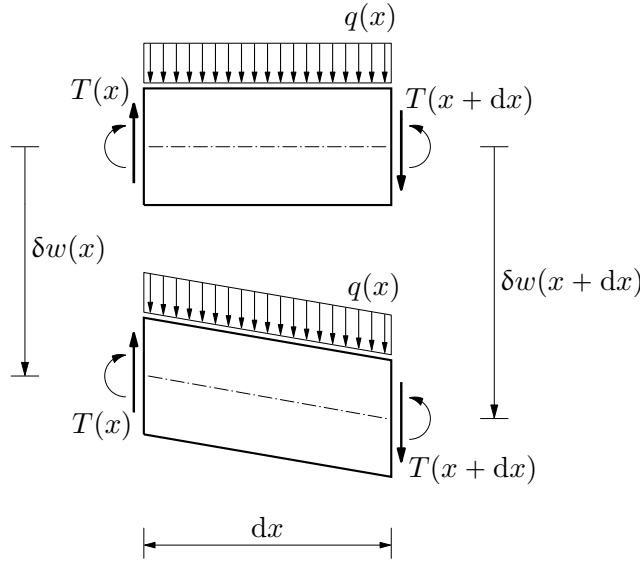


Slika 118.

Na sličan ćemo način izvesti izraze za rad na poprečnim virtualnim pomacima i za rad na virtualnim zaokretima ravnina poprečnih presjeka.

Pri djelovanju distribuirane sile okomito na os grede u poprečnim će se presjecima pojaviti i poprečne sile i momenti savijanja.<sup>26</sup>

<sup>26</sup> Pretpostavit ćemo da nema distribuiranih momenata. Uzmemo li i njih u obzir, razmjerno zapleteni izvod postao bi još zapletenijim, a ništa novo ne bismo naučili.



Slika 119.

Polje virtualnih pomaka okomitih na os opisali smo funkcijom

$$\delta\bar{w} : x \mapsto \delta\bar{w}(x) = \delta w(x) \vec{k}, \quad (240)$$

pa su orijentirane duljine pomakâ krajeva izdvojenoga infinitezimalnog odsječka  $\delta w(x)$  i  $\delta w(x + dx)$  (slika 119.). Na odsječak okomito na njegovu os djeluju distribuirana sila  $\vec{q}$  konstantne vrijednosti  $q(x)$  te poprečne sile  $-\vec{T}(x)$  i  $\vec{T}(x + dx)$  u presjecima  $x$  i  $x + dx$ . Za infinitezimalni virtualni rad tih sila možemo, nakon uvođenja diferencijalâ i sređivanja desne strane, pisati

$$\begin{aligned} -T(x) \delta w(x) + T(x + dx) \delta w(x + dx) + [q(x) dx] \delta w(x) \\ \cong T(x) \delta w'(x) dx + [T'(x) + q(x)] dx \delta w(x). \end{aligned}$$

Zadovoljavaju li sile diferencijalnu jednadžbu ravnoteže

$$T'(x) + q(x) = 0,$$

na desnoj strani preostaje samo prvi pribrojnik:

$$-T(x) \delta w(x) + T(x + dx) \delta w(x + dx) + q(x) \delta w(x) dx \cong T(x) \delta w'(x) dx. \quad (241)$$

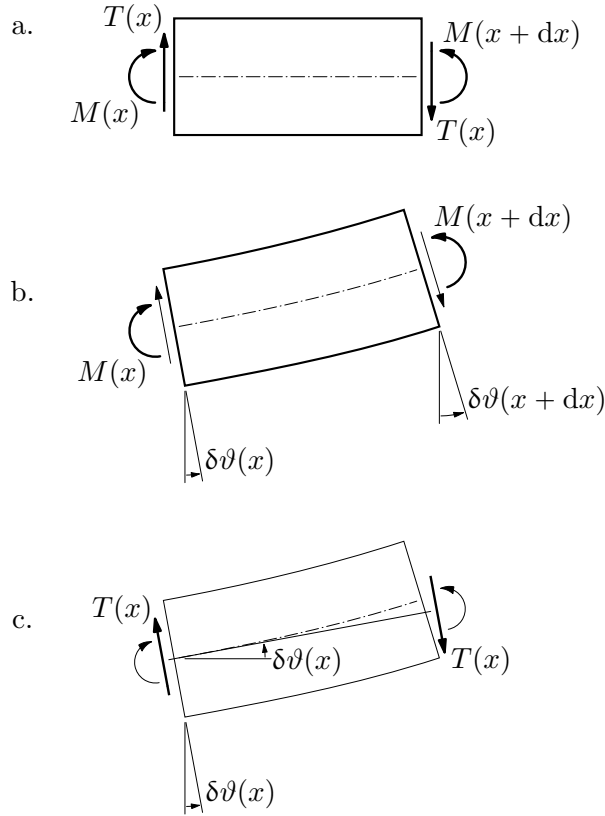
Napokon, neka je funkcijom

$$\delta\vartheta : x \mapsto \delta\vartheta(x) \quad (242)$$

zadano (skalarno) polje kutova virtualnih zaokreta ravnina poprečnih presjeka.

Već smo pri izvođenju diferencijalne jednadžbe  $M'(x) - T(x) = 0$  pokazali da su utjecaji distribuirane sile i prirasta poprečne sile na momentnu ravnotežu odsječka zanemarivi.<sup>27</sup> Stoga ćemo na naš odsječak sada nanijeti samo momente  $-\vec{M}(x)$  i  $\vec{M}(x + dx)$

<sup>27</sup> Lako je dokazati da je i utjecaj infinitezimalne promjene duljine odsječka (zbog mogućega istodobnog djelovanja uzdužne sile), kojim se mijenja krak sprega poprečnih sila, zanemariv. [Dokažite!]



Slika 120.

i, u oba presjeka, poprečne sile  $\pm \vec{T}(x)$  (slika 120.a.). Momenti  $-\vec{M}(x)$  i  $\vec{M}(x + dx)$  rade na zaokretima ravnina poprečnih presjeka u kojima djeluju (slika b.); kutovi tih zaokreta su  $\delta\vartheta(x)$  i  $\delta\vartheta(x + dx)$ . Par sila  $\pm \vec{T}(x)$  tvori spreg; njegov moment ima intenzitet  $|T(x)| dx$  i negativan smisao vrtnje. Moment sprega radi na zaokretu spojnice hvatišta sila sprega (slika c.), tako da će rad našega sprega poprečnih sila biti, zanemarimo li doprinos infinitezimalnoga prirasta  $\delta\vartheta(x + dx) - \delta\vartheta(x)$ ,

$$-[T(x) dx] \delta\vartheta(x) = -T(x) \delta\vartheta(x) dx.$$

Prema tome, uz već uobičajene pretvorbe i prerade na desnoj strani, za infinitezimalni virtualni rad momenata na promatranom odsječku možemo pisati

$$\begin{aligned} -M(x) \delta\vartheta(x) + M(x + dx) \delta\vartheta(x + dx) - T(x) \delta\vartheta(x) dx \\ \cong M(x) \delta\vartheta'(x) dx + [M'(x) - T(x)] dx \delta\vartheta(x). \end{aligned}$$

Zadovoljavaju li momenti i poprečne sile diferencijalnu jednadžbu ravnoteže

$$M'(x) - T(x) = 0$$

drugi pribrojnik s desne strane otpada, pa je

$$-M(x) \delta\vartheta(x) + M(x + dx) \delta\vartheta(x + dx) - T(x) \delta\vartheta(x) dx \cong M(x) \delta\vartheta'(x) dx. \quad (243)$$

Prebacimo li podizraz  $-T(x) \delta\vartheta(x) dx$  na desnu stranu znaka  $\cong$  i pribrojimo li dobivenoj relaciji relaciju (241), bit će

$$\begin{aligned} & -M(x) \delta\vartheta(x) + M(x + dx) \delta\vartheta(x + dx) \\ & - T(x) \delta w(x) + T(x + dx) \delta w(x + dx) + q(x) \delta w(x) dx \\ & \cong M(x) \delta\vartheta'(x) dx + T(x) [\delta\vartheta(x) + \delta w'(x)] dx. \end{aligned} \quad (244)$$

Prvi pribrojnik na desnoj strani *infinitesimalni je rad momenta savijanja na infinitesimalnom prirastu polja virtualnih zaokreta ravnina poprečnih presjeka*:

$$d\delta\mathfrak{U}_M(x, dx) = M(x) d\delta\vartheta(x, dx) = M(x) [\delta\vartheta'(x) dx]. \quad (245)$$

U Bernoulli–Eulerovoj teoriji savijanja kutovi zaokretâ ravnina poprečnih presjeka jednaki su kutovima koje tangente na (zakrivljenu) os grede zatvaraju s osi  $x$ ,  $\delta\vartheta = \delta\varphi$ , a kako je  $\delta\varphi = -\delta w'$ , bit će  $\delta\vartheta' = -\delta w'' = \delta\kappa$ , pa infinitesimalni rad momenta savijanja možemo zapisati i u obliku

$$d\delta\mathfrak{U}_M(x, dx) = M(x) d\delta\varphi(x, dx) = M(x) [\delta\kappa(x) dx]. \quad (246)$$

Uz to, iz  $\delta\vartheta = \delta\varphi = -\delta w'$  slijedi

$$T(x) [\delta\vartheta(x) + \delta w'(x)] dx = 0, \quad (247)$$

što je u skladu s (drugom) pretpostavkom na kojoj je Bernoulli–Eulerova teorija utemeljena: poprečne bi sile trebale raditi na „klizanjima” ravnina poprečnih presjeka, no njih, prema pretpostavci, nema.

U Timošenkovoj je pak teoriji kut zaokreta normale na ravninu poprečnoga presjeka (koji je jednak kutu njezina zaokreta) sastavljen od kuta zaokreta tangente na os grede i kuta zbog „klizanja” te ravnine,  $\delta\vartheta = \delta\varphi + \delta\gamma = -\delta w' + \delta\gamma$ , tako da je  $\delta\vartheta + \delta w' = \delta\gamma$ , te je stoga

$$d\delta\mathfrak{U}_T(x, dx) = T(x) [\delta\gamma(x) dx] \quad (248)$$

*infinitesimalni rad poprečne sile na infinitesimalnom prirastu polja virtualnih „klizanja” ravnina poprečnih presjeka.*

Prema tome, za virtualan rad na infinitesimalnom odsječku Bernoulli–Eulerove grede možemo napisati relaciju

$$\begin{aligned} & -M(x) \delta\varphi(x) + M(x + dx) \delta\varphi(x + dx) \\ & - T(x) \delta w(x) + T(x + dx) \delta w(x + dx) + q(x) \delta w(x) dx \\ & \cong M(x) \delta\kappa(x) dx, \end{aligned} \quad (249)$$

dok je odgovarajuća relacija za odsječak Timošenkove grede

$$\begin{aligned} & -M(x) \delta\vartheta(x) + M(x + dx) \delta\vartheta(x + dx) \\ & - T(x) \delta w(x) + T(x + dx) \delta w(x + dx) + q(x) \delta w(x) dx \\ & \cong M(x) \delta\vartheta'(x) dx + T(x) \delta\gamma(x) dx, \end{aligned} \quad (250)$$

Razložimo li gredu na neizmjereno mnogo infinitezimalnih odsječaka, za svaki od njih možemo napisati relaciju (249) ili relaciju (250), ovisno o teoriji u okvirima koje se krećemo. Ako zbrojimo relacije za dva susjedna elementa, poništiti će se, kao i u izvodu za rad na uzdužnim virtualnim pomacima, podizrazi za rad poprečnih sila u ravni zajedničkoga poprečnog presjeka, kao i podizrazi za rad momenata u toj ravni. Stoga ćemo „zbrajanjem” svih relacija dobiti

$$\begin{aligned} M_0 \delta\varphi(0) + M_\ell \delta\varphi(\ell) + T_0 \delta w(0) + T_\ell \delta w(\ell) + \int_0^\ell q(x) \delta w(x) dx \\ = \int_0^\ell M(x) \delta\kappa(x) dx \end{aligned} \quad (251)$$

za Bernoulli–Eulerovu i

$$\begin{aligned} M_0 \delta\vartheta(0) + M_\ell \delta\vartheta(\ell) + T_0 \delta w(0) + T_\ell \delta w(\ell) + \int_0^\ell q(x) \delta w(x) dx \\ = \int_0^\ell [M(x) \delta\vartheta'(x) + T(x) \delta\gamma(x)] dx \end{aligned} \quad (252)$$

za Timošenkovu gredu. Sa  $T_0$ ,  $M_0$ ,  $T_\ell$  i  $M_\ell$  označili smo vrijednosti vanjskih sila na lijevom kraju prvoga i na desnom kraju posljednjeg odsječka; za njihove predznake i promjene predznakâ vrijedi ono što smo rekli za  $N_0$  i  $N_\ell$ .

Integral

$$\delta\mathfrak{U}_M = \int_0^\ell M(x) \delta\vartheta'(x) dx \quad (253)$$

definicija je *rada momenata savijanja na infinitezimalnim prirastima polja virtualnih zao-kreta poprečnih presjeka* ili, kraće rečeno, *virtualnoga rada momenata savijanja*; za Bernoulli–Eulerovu gredu možemo pisati i

$$\delta\mathfrak{U}_M = \int_0^\ell M(x) \delta\kappa(x) dx. \quad (254)$$

*Virtualan rad poprečnih sila,*

$$\delta\mathfrak{U}_T = \int_0^\ell T(x) \delta\gamma(x) dx, \quad (255)$$

razumije se, definiran je samo u Timošenkovoj teoriji savijanja.

U općem slučaju, kada na gredu djeluju sile na pravcu njezine osi i okomito na os, za Bernoulli–Eulerovu je gredu

$$\begin{aligned} N_0 \delta u(0) + N_\ell \delta u(\ell) + T_0 \delta w(0) + T_\ell \delta w(\ell) \\ + M_0 \delta\varphi(0) + M_\ell \delta\varphi(\ell) + \int_0^\ell [p(x) \delta u(x) + q(x) \delta w(x)] dx \\ = \int_0^\ell [N(x) \delta\varepsilon(x) + M(x) \delta\kappa(x)] dx, \end{aligned} \quad (256)$$

dok je za Timošenkovu gredu

$$\begin{aligned}
& N_0 \delta u(0) + N_\ell \delta u(\ell) + T_0 \delta w(0) + T_\ell \delta w(\ell) \\
& + M_0 \delta \vartheta(0) + M_\ell \delta \vartheta(\ell) + \int_0^\ell [p(x) \delta u(x) + q(x) \delta w(x)] dx \\
& = \int_0^\ell [N(x) \delta \varepsilon(x) + T(x) \delta \gamma(x) + M(x) \delta \vartheta'(x)] dx.
\end{aligned} \tag{257}$$

Izvodom tih dviju jednadžbi dokazali smo *prvi dio teorema o virtualnim pomacima za deformabilne konstrukcije*: ako se konstrukcija pod zadanim opterećenjem nalazi u stanju ravnoteže, onda je rad stvarnih vanjskih sila na po volji odabranim poljima virtualnih pomaka (lijeve strane jednadžbi) jednak radu stvarnih unutarnjih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja (desne strane jednadžbi). U Timošenkovoj teoriji odabiremo polja virtualnih translacijskih pomaka  $\delta u$  i  $\delta w$  te polje virtualnih zaokreta poprečnih presjeka koje opisujemo poljem kutova zaokreta  $\delta \vartheta$ . U Bernoulli–Eulerovoj teoriji kutovi zaokreta poprečnih presjeka jednaki su kutovima nagiba tangenata na progibnu liniju,  $\delta \vartheta = \delta \varphi$ , a te pak kutove određuje polje vrijednosti poprečnih pomaka izrazom  $\delta \varphi = -\delta w'$ , tako da sada možemo odabrati jedino polja virtualnih translacijskih pomaka  $\delta u$  i  $\delta w$ .

Jednakosti (256) i (257) možemo sažeto zapisati kao

$$\delta \mathfrak{W} = \delta \mathfrak{U}. \tag{258}$$

Može se reći da smo tijekom dokaza prvoga dijela teorema o virtualnim pomacima diferencijalne jednadžbe ravnoteže preveli u integralnu jednadžbu rada.

U našem smo dokazu koracima tog prijevoda pokušali dati zorne statičke ili kinematičke interpretacije. Koraci pak „klasičnog”, u udžbenicima (poput [2, 49]) najčešće iznošenoga dokaza najvećim su dijelom formalne transformacije matematičkih izraza koje je teško slikovito protumačiti. Ovako:

Ako je infinitezimalni element grede u ravnoteži, vanjske i unutarnje sile zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned}
N'(x) + p(x) &= 0, \\
T'(x) + q(x) &= 0, \\
M'(x) - T(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Prvu ćemo jednadžbu pomnožiti sa  $\delta u(x) dx$ , drugu sa  $\delta w(x) dx$ , a treću sa  $\delta \vartheta(x) dx$ :

$$\begin{aligned}
N'(x) \delta u(x) dx + p(x) \delta u(x) dx &= 0, \\
T'(x) \delta w(x) dx + q(x) \delta w(x) dx &= 0, \\
M'(x) \delta \vartheta(x) dx - T(x) \delta \vartheta(x) dx &= 0.
\end{aligned}$$

Potom ćemo dobivene izraze integrirati po duljini grede i zbrojiti (i malo presložiti):

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell N'(x) \delta u(x) dx + \int_0^\ell T'(x) \delta w(x) dx + \int_0^\ell M'(x) \delta \vartheta(x) dx \\
- \int_0^\ell T(x) \delta \vartheta(x) dx + \int_0^\ell [p(x) \delta u(x) + q(x) \delta w(x)] dx = 0.
\end{aligned} \tag{259}$$

Parcijalna integracija<sup>28</sup> prvoga, drugog i trećeg pribrojnika daje, uz primjenu osnovnoga teorema integralnog računa<sup>29</sup>:

$$\begin{aligned}\int_0^\ell N'(x) \delta u(x) dx &= N(\ell) \delta u(\ell) - N(0) \delta u(0) - \int_0^\ell N(x) \delta u'(x) dx, \\ \int_0^\ell T'(x) \delta w(x) dx &= T(\ell) \delta w(\ell) - T(0) \delta w(0) - \int_0^\ell T(x) \delta w'(x) dx, \\ \int_0^\ell M'(x) \delta \vartheta(x) dx &= M(\ell) \delta \vartheta(\ell) - M(0) \delta \vartheta(0) - \int_0^\ell M(x) \delta \vartheta'(x) dx.\end{aligned}\quad (260)$$

(Primjene osnovnoga teorema integralnog računa i izraza za parcijalnu integraciju skrivaju se i u našem zornom dokazu. Podizraz s lijeve strane znaka  $\cong$  u relaciji (233) na stranici 195. infinitezimalni je prirast funkcije  $N \delta u$  pri prirastu varijable  $x$  za  $dx$ . Budući da i njega možemo aproksimirati diferencijalom,

$$-N(x) \delta u(x) + N(x + dx) \delta u(x + dx) \cong [N(x) \delta u(x)]' dx, \quad (261)$$

„zbrajanjem” dobivamo

$$-N(0) \delta u(0) + N(\ell) \delta u(\ell) = \int_0^\ell [N(x) \delta u(x)]' dx. \quad (262)$$

Usporedba pak relacija (261) i (233) pokazuje da je

$$[N(x) \delta u(x)]' dx \cong N(x) [\delta u'(x) dx] + [N'(x) dx] \delta u(x),$$

tako da je

$$\int_0^\ell [N(x) \delta u(x)]' dx = \int_0^\ell N(x) \delta u'(x) dx + \int_0^\ell N'(x) \delta u(x) dx,$$

a iz te jednadžbe neposredno slijedi izraz za parcijalnu integraciju.)

Uvrštavanjem desnih strana izrazâ (260) u jednadžbu (259), uz  $N(\ell) = N_\ell$ ,  $N(0) = -N_0$ ,  $\dots$ , dobivamo nakon sređivanja

$$\begin{aligned}N_0 \delta u(0) + N_\ell \delta u(\ell) + T_0 \delta w(0) + T_\ell \delta w(\ell) \\ + M_0 \delta \vartheta(0) + M_\ell \delta \vartheta(\ell) + \int_0^\ell [p(x) \delta u(x) + q(x) \delta w(x)] dx \\ = \int_0^\ell \{N(x) \delta u'(x) + T(x) [\delta \vartheta(x) + \delta w'(x)] + M(x) \delta \vartheta'(x)\} dx.\end{aligned}\quad (263)$$

Ta jednadžba uz  $\delta u' = \delta \varepsilon$  i  $\delta \vartheta + \delta w' = \delta \gamma$  daje jednadžbu (257), a uz  $\delta u' = \delta \varepsilon$ ,  $\delta \vartheta = -\delta w' = \delta \varphi$  i  $\delta \vartheta' = \delta \kappa$  jednadžbu (256).

*QED*

<sup>28</sup> Prisjetite se:  $\int_a^b f'(x) g(x) dx = \int_a^b [f(x) g(x)]' dx - \int_a^b f(x) g'(x) dx$ .

<sup>29</sup> Ako je  $f'$  neprekidna funkcija, onda je  $\int_a^b f'(x) dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$ .

Ograničimo li se na savijanje Bernoulli–Eulerove grede, klasični formalni dokaz prvog dijela teorema možemo započeti i diferencijalnom jednačbom

$$M''(x) + q(x) = 0.$$

Pomnožit ćemo je sa  $\delta w(x) dx$  i integrirati po duljini grede:

$$\int_0^\ell M''(x) \delta w(x) dx + \int_0^\ell q(x) \delta w(x) dx = 0.$$

Parcijalnom integracijom prvoga pribrojnika dobivamo:

$$\int_0^\ell M''(x) \delta w(x) dx = M'(x) \delta w(x) \Big|_0^\ell - \int_0^\ell M'(x) \delta w'(x) dx.$$

Drugi pribrojnik na desnoj strani još ćemo jednom parcijalno integrirati:

$$\int_0^\ell M'(x) \delta w'(x) dx = M(x) \delta w'(x) \Big|_0^\ell - \int_0^\ell M(x) \delta w''(x) dx.$$

Kako su  $M'(x) = T(x)$ ,  $\delta w'(x) = -\delta\varphi(x)$  i  $\delta w''(x) = -\delta\kappa(x)$ , bit će

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell M''(x) \delta w(x) dx \\ &= T(\ell) \delta w(\ell) - T(0) \delta w(0) + M(\ell) \delta\varphi(\ell) - M(0) \delta\varphi(0) - \int_0^\ell M(x) \delta\kappa(x) dx \end{aligned}$$

[pazite na promjene predznakâ!] te, napokon,

$$\begin{aligned} T(\ell) \delta w(\ell) - T(0) \delta w(0) + M(\ell) \delta\varphi(\ell) - M(0) \delta\varphi(0) + \int_0^\ell q(x) \delta w(x) dx \\ = \int_0^\ell M(x) \delta\kappa(x) dx. \end{aligned} \tag{264}$$

*QED*

Iako smo podosta pozornosti posvetili načinima njegova dokazivanja, prvi dio teorema o virtualnim pomacima sa stajališta provedbe proračuna nije pretjerano koristan — ne daje nam neki novi, lakši, brži ili šire primjenjiv proračunski postupak. Uvjetna postavka toga dijela ravnotežno je stanje, a posljedična jednakost virtualnih radova: ako znamo reakcije i unutarnje sile koje uravnotežuju zadano opterećenje i ako nàsumicē odaberemo polja virtualnih pomaka, pokazat će se da te sile i ta polja zadovoljavaju jednačbu (258). No, ako je ravnotežno stanje poznato, znači da smo već na neki način riješili jednačbe ravnoteže.

Obrat prvoga dijela teorema mnogo je zanimljiviji i svrsishodniji — to je teorijski temelj niza metoda, ponajviše numeričkih, poput klasične Galerkinove metode i metode konačnih elemenata u Galerkinovoj formulaciji, koje su primjenjive na znatno veći skup zadaća negoli analitičko rješavanje jednačbi građevne statike i, općenitije, jednačbi teorije elastičnosti.



*Drugi dio ili obrat prvoga dijela teorema o virtualnim pomacima* glasi: ako je rad stvarnih vanjskih sila na svim poljima virtualnih pomaka jednak radu stvarnih unutarnjih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja, onda su vanjske i unutarnje sile u ravnoteži.

Kao što smo već rekli, dokaz prvoga dijela teorema bio je „prijevod” diferencijalnih jednadžbi ravnoteže u integralnu jednadžbu rada. U dokazu obrata treba stoga iz integralne jednadžbe rada „izvući” diferencijalne jednadžbe ravnoteže, a to znači da ćemo se morati „vratiti” kroz dokaz prvoga dijela.

„Zbrajanjem” relacija (233) sa stranice 195. za sve infinitezimalne odsječke dobivamo

$$-N(0) \delta u(0) + N(\ell) \delta u(\ell) = \int_0^\ell N(x) \delta u'(x) dx + \int_0^\ell N'(x) \delta u(x) dx,$$

pa je

$$\int_0^\ell N(x) \delta u'(x) dx = -N(0) \delta u(0) + N(\ell) \delta u(\ell) - \int_0^\ell N'(x) \delta u(x) dx.$$

(Naš dokaz drugoga dijela teorema nije, na žalost, mnogo zorniji od klasičnoga. Tek, „zbrajajući” bezbrojno mnogo infinitezimalnih prirasta radova, koji su podizrazima lijevo i desno od znaka  $\cong$  u relaciji (233) prikazani na dva načina, pokušali smo prikriti još jednu parcijalnu integraciju i, potom, primjenu osnovnoga teorema integralnog računa u formalnom prevođenju lijeve strane jednadžbe u desnu. Koraci pak koji slijede jednaki su i u klasičnom dokazu.)

Integralom na lijevoj strani prethodnoga izraza definirali smo virtualni rad uzdužnih sila. Stoga podizrazom zděsna možemo zamijeniti rad uzdužnih sila na desnoj strani jednadžbe (238) na stranici 196:

$$\begin{aligned} N_0 \delta u(0) + N_\ell \delta u(\ell) + \int_0^\ell p(x) \delta u(x) dx \\ = -N(0) \delta u(0) + N(\ell) \delta u(\ell) - \int_0^\ell N'(x) \delta u(x) dx. \end{aligned}$$

Sređivanje daje

$$[N(0) + N_0] \delta u(0) + [-N(\ell) + N_\ell] \delta u(\ell) + \int_0^\ell [N'(x) + p(x)] \delta u(x) dx = 0. \quad (265)$$

Jednakost radova (238) vrijedi, prema uvjetnoj postavci drugoga dijela teorema, za sva polja virtualnih pomaka. Jasno je da za sve njih mora vrijediti i iz (238) izvedena jednakost (265).

Vrijednosti pojedinih pribrojnika u (265) mogu se neovisno mijenjati, tako da nuli mora biti jednak svaki od njih:

$$\begin{aligned} [N(0) + N_0] \delta u(0) &= 0 & \forall \delta u(0), \\ [-N(\ell) + N_\ell] \delta u(\ell) &= 0 & \forall \delta u(\ell), \\ \int_0^\ell [N'(x) + p(x)] \delta u(x) dx &= 0 & \forall \delta u. \end{aligned}$$

Budući da su  $N(0)$ ,  $N(\ell)$ ,  $N_0$ ,  $N_\ell$ ,  $\delta u(0)$  i  $\delta u(\ell)$  skalari, prva su dva uvjeta oblika

$$ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

a to je moguće samo ako je  $a = 0$ . Slijedi da su

$$N(0) + N_0 = 0 \quad \text{i} \quad -N(\ell) + N_\ell = 0.$$

Ostaje nam još da dokažemo da iz

$$\int_0^\ell [N'(x) + p(x)] \delta u(x) dx = 0 \quad \forall \delta u \quad (266)$$

slijedi

$$N'(x) + p(x) = 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle 0, \ell \rangle. \quad (267)$$

Umjesto podintegralne funkcije  $[N'(x) + p(x)] \delta u(x)$  uvest ćemo u uvjet (266) nešto općenitiju funkciju  $f(x) \delta(x)$  i pretpostaviti da je uvjet

$$\int_0^\ell f(x) \delta(x) dx = 0 \quad (268)$$

zadovoljen za sve funkcije  $\delta$ . Tada mora biti zadovoljen i za posebno odabranu funkciju  $\delta(x) = f(x)$ . U tom je slučaju

$$\int_0^\ell f^2(x) dx = 0.$$

Kako je uvijek  $f^2(x) \geq 0$  i kako je vrijednost određenoga integrala jednaka ploštini površine „ispod” grafa funkcije, ta će vrijednost biti jednaka nuli samo ako je  $f = 0$ . Time smo dokazali *temeljnu lemu varijacijskoga računa*: ako neprekidna funkcija  $f$  zadovoljava jednadžbu (268) za sve funkcije  $\delta$ , tada je  $f = 0$ .

U našem su slučaju  $f = N' + p$  i  $\delta = \delta u$ , pa nam temeljna lema neposredno pruža dokaz tvrdnje (266)  $\Rightarrow$  (267). Slijedimo li cijeli lanac zaključivanja, vidjet ćemo da sistem sila koji na svim poljima virtualnih pomaka zadovoljava jednakost virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila, izraženu jednadžbom (238), zadovoljava i diferencijalnu jednadžbu ravnoteže (267). K tomu još, pokazali smo da taj sistem zadovoljava i *prirodne rubne uvjete*

$$N(0) = -N_0 \quad \text{i} \quad N(\ell) = N_\ell.$$

Kako bismo dokazali drugi dio teorema za savijanje Timošenkove grede, integral zbroja na desnoj strani jednadžbe (252) na stranici 200. prikazat ćemo, nakon što uvrstimo  $\delta\gamma = \delta\vartheta + \delta w'$ , kao zbroj integrala:

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \{T(x) [\delta\vartheta(x) + \delta w'(x)] + M(x) \delta\vartheta'(x)\} dx \\ &= \int_0^\ell T(x) \delta\vartheta(x) dx + \int_0^\ell T(x) \delta w'(x) dx + \int_0^\ell M(x) \delta\vartheta'(x) dx. \end{aligned}$$

Za Bernoulli–Eulerovu je pak gredu  $\delta\vartheta + \delta w' = 0$ , tako da je

$$\int_0^\ell T(x) [\delta\vartheta(x) + \delta w'(x)] dx = 0,$$

pa taj integral možemo formalno pribrojiti desnoj strani jednadžbe (251), te i nju, uz  $\delta\kappa = \delta\vartheta'$ , prikazati na isti način.

Sada ćemo integrale koji sadrže derivacije polja virtualnih pomaka prevesti, slično kao integral kojim je izražen virtualni rad uzdužne sile, u

$$\begin{aligned} \int_0^\ell T(x) \delta w'(x) dx &= T(\ell) \delta w(\ell) - T(0) \delta w(0) - \int_0^\ell T'(x) \delta w(x) dx, \\ \int_0^\ell M(x) \delta\vartheta'(x) dx &= M(\ell) \delta\vartheta(\ell) - M(0) \delta\vartheta(0) - \int_0^\ell M'(x) \delta\vartheta(x) dx. \end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja dobivenih izraza na desnu stranu jednadžbe (252) ili jednadžbe (251), prebacivanja na lijevu stranu i sređivanja dobivamo

$$\begin{aligned} [T(0) + T_0] \delta w(0) + [-T(\ell) + T_\ell] \delta w(\ell) \\ + [M(0) + M_0] \delta\vartheta(0) + [-M(\ell) + M_\ell] \delta\vartheta(\ell) \\ + \int_0^\ell [T'(x) + q(x)] \delta w(x) dx + \int_0^\ell [M'(x) - T(x)] \delta\vartheta(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Kako polja  $\delta w$  i  $\delta\vartheta$  možemo birati neovisno jedno o drugom, da bi zbroj bio jednak nuli, svaki pribrojnik mora zasebice iščeznuti:

$$\begin{aligned} [T(0) + T_0] \delta w(0) &= 0 & \forall \delta w(0), \\ [-T(\ell) + T_\ell] \delta w(\ell) &= 0 & \forall \delta w(\ell), \\ [M(0) + M_0] \delta\vartheta(0) &= 0 & \forall \delta\vartheta(0), \\ [-M(\ell) + M_\ell] \delta\vartheta(\ell) &= 0 & \forall \delta\vartheta(\ell), \\ \int_0^\ell [T'(x) + q(x)] \delta w(x) dx &= 0 & \forall \delta w, \\ \int_0^\ell [M'(x) - T(x)] \delta\vartheta(x) dx &= 0 & \forall \delta\vartheta. \end{aligned}$$

Prema temeljnoj lemi varijacijskoga računa iz posljednje dvije jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} T'(x) + q(x) &= 0, \\ M'(x) - T(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dobili smo, dakle, diferencijalne jednadžbe ravnoteže. Prve pak četiri jednadžbe daju prirodne rubne uvjete:

$$\begin{aligned} T(0) &= -T_0, & T(\ell) &= T_\ell, \\ M(0) &= -M_0, & M(\ell) &= M_\ell. \end{aligned}$$

*QED*

Klasični dokaz obrata prvoga dijela teorema, ograničenog na savijanje Bernoulli–Eulerove grede, provodi se na sličan način: integral s desne strane jednakosti (264) dvjema parcijalnim integracijama prevodimo u

$$\begin{aligned} \int_0^\ell M(x) \delta\kappa(x) dx &= - \int_0^\ell M(x) \delta w''(x) dx \\ &= M(\ell) \varphi(\ell) - M(0) \varphi(0) + T(\ell) \delta w(\ell) - T(0) \delta w(0) - \int_0^\ell M''(x) \delta w(x) dx, \end{aligned}$$

pa jednačba (264) sa stranice 203. daje uvjet

$$\int_0^\ell [M''(x) + q(x)] \delta w(x) dx = 0 \quad \forall \delta w,$$

tako da primjenom temeljne leme varijacijskoga računa možemo izdvojiti diferencijalnu jednačbu ravnoteže

$$M''(x) + q(x) = 0.$$

*QED*

## 9.4. Teorem o virtualnim silama

Na sličan način kao što smo u prethodnom odjeljku dokazali teorem o virtualnim pomacima, može se dokazati i *teorem o virtualnim silama*: ako polja pomakâ i deformacija konstrukcije zadovoljavaju sve kinematičke uvjete, onda je rad po volji odabranih vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomakâ jednak radu unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima (ili: na diferencijalima) tih polja; i obratno, naravno. Dakle, kao što je zadovoljenje uvjeta ravnoteže ekvivalentno jednakosti radova stvarnih sila na virtualnim pomacima, tako je zadovoljenje kinematičkih uvjeta ekvivalentno jednakosti radova virtualnih sila na stvarnim pomacima.

Kinematički se uvjeti svrstavaju u dvije skupine: diferencijalne odnose pomakâ i deformacija, koji vrijede „unutar” nosača, te geometrijske rubne uvjete (nazvane i kinematičkim rubnim uvjetima), koje propisuju ležajevi. Za Bernoulli–Eulerovu gredu kinematički su uvjeti:

- odnosi pomakâ i deformacija:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = u'(x) & \quad \text{ili} \quad \varepsilon(x) - u'(x) = 0, \\ \kappa(x) = -w''(x) & \quad \text{ili} \quad \kappa(x) + w''(x) = 0; \end{aligned}$$

- geometrijski rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} u(0) = \bar{u}_0, \quad u(\ell) = \bar{u}_\ell; \\ w(0) = \bar{w}_0, \quad w'(0) = -\bar{\varphi}_0, \quad w(\ell) = \bar{w}_\ell, \quad w'(\ell) = -\bar{\varphi}_\ell. \end{aligned}$$

U uzdužnom smjeru ( $u$ ) pritom mora biti zadan barem jedan uvjet; u poprečnom pak smjeru ( $w$  i  $w'$ ) moraju biti zadana barem dva uvjeta, od kojih barem jedan mora biti za  $w$ .

Za Bernoulli–Eulerovu je gredu iskaz jednakosti radova virtualnih sila

$$\begin{aligned} & \delta N_0 u(0) + \delta N_\ell u(\ell) + \delta T_0 w(0) + \delta T_\ell w(\ell) + \delta M_0 \varphi(0) + \delta M_\ell \varphi(\ell) \\ & + \sum_i \delta P_i u(x_i) + \sum_j \delta Q_j w(x_j) + \sum_k \delta M_k \varphi(x_k) \\ & + \int_0^\ell [\delta p(x) u(x) + \delta q(x) w(x)] dx \\ & = \int_0^\ell [\delta N(x) \varepsilon(x) + \delta M(x) \kappa(x)] dx. \end{aligned}$$

Neki od pomaka i zaokreta krajeva štapa pomaci su po pravcima ležajnih veza ili zaokreti oko njihovih osi, pa su ili spriječeni ili zadani kao prisilni pomaci i zaokreti ležajeva — riječ je o geometrijskim rubnim uvjetima. Virtualne sile na tim pravcima ili momenti oko njih uravnotežujuće su virtualne reakcije. Na pravcima pak slobodnih pomaka krajeva i oko osi slobodnih zaokreta kao prirodni se rubni uvjeti zadaju virtualne sile ili momenti; njihove vrijednosti mogu, dakako, biti i nula.

Podizrazima u drugome retku u izraz smo uključili i rad koncentriranih sila i momenata zadanih unutar raspona grede (u točkama  $x_{\{i,j,k\}} \in \langle 0, \ell \rangle$ ). Kako diferencijalni izrazi traže dovoljno glatke funkcije, ta se djelovanja u prikazanu dokazu teorema nisu pojavila.<sup>30</sup>

Uzet ćemo da podizrazi u drugome retku obuhvaćaju i sile i momente koji djeluju na krajevima — prirodne rubne uvjete, pa su  $x_{\{i,j,k\}} \in [0, \ell]$ . U prvome retku tada ostaju samo pribrojnici koji sadrže virtualne reakcije. Rad svih virtualnih reakcija, i sila i momenata, na prisilnim pomacima i zaokretima ležajeva obuhvatit ćemo podizrazom  $\sum_\gamma \delta R_\gamma \bar{v}_\gamma$ .

## 9.5. Metoda jedinične sile

Neka je zadana samo jedna od sila  $\delta P_i$  ili  $\delta Q_j$  ili, općenitije, sila na nekom kosom pravcu i neka su svi  $\delta M_k = 0$ ,  $\delta p = 0$  i  $\delta q = 0$ . Neka je uz to zadana sila jediničnoga intenziteta. Iz jednakosti radova virtualnih sila tada slijedi

$$1 \cdot d^\parallel = \int_0^\ell [n(x) \varepsilon(x) + m(x) \kappa(x)] dx - \sum_\gamma r_\gamma \bar{v}_\gamma,$$

gdje je  $d^\parallel$  orijentirana duljina projekcije pomaka hvatišta virtualne jedinične sile na pravac njezina djelovanja. Funkcijama  $m = \delta M$  i  $n = \delta N$  izražene su vrijednosti virtualnih unutarnjih sila koje uravnotežuju odabranu jedničnu silu, dok su  $r_\gamma$  vrijednosti uravnotežujućih virtualnih reakcija.

Neka je sada neki  $\delta M_k = 1$  i neka su ponovo sva ostala virtualna djelovanja jednaka nuli. Slijedi

$$1 \cdot \varphi = \int_0^\ell [n(x) \varepsilon(x) + m(x) \kappa(x)] dx - \sum_\gamma r_\gamma \bar{v}_\gamma,$$

pri čemu je  $\varphi$  kut zaokreta osi grede u hvatištu odabranoga virtualnog momenta.

<sup>30</sup> Dokaz teorema koji uključuje koncentrirana djelovanja unutar raspona provodi se u proširenoj teoriji primjenom složenijega/naprednijega matematičkog aparata. Naš dokaz ne obuhvaća ni skokovite promjene distribuiranih sila koje primjena teorema dopušta.

Ako na desnoj strani prethodnih jednakosti deformacijske veličine izrazimo kao funkcije vrijednosti unutarnjih sila izazvanih stvarnim opterećenjem,

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} \quad \text{i} \quad \kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)},$$

i ako u obzir uzmemo i utjecaj temperaturnih promjena na deformacijske veličine,

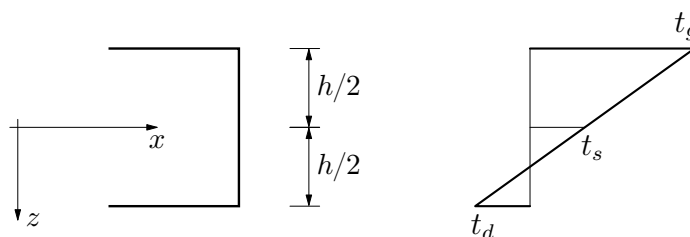
$$\varepsilon_t(x) = \alpha_t t_s \quad \text{i} \quad \kappa_t(x) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h},$$

pri čemu su prema slici 121.

$$t_s = \frac{t_d + t_g}{2} \quad \text{i} \quad \Delta t = t_d - t_g,$$

dobit ćemo izraz za izračunavanje orijentirane duljine projekcije pomaka odabrane točke na odabrani pravac ili izračunavanje kuta zaokreta osi grede u odabranoj točki:

$$\left. \begin{array}{l} d^{\parallel} \\ \varphi \end{array} \right\} = \int_0^{\ell} n(x) \left[ \frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx + \int_0^{\ell} m(x) \left[ \frac{M(x)}{EI(x)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \right] dx - \sum_{\gamma} r_{\gamma} \bar{v}_{\gamma}. \quad (269)$$



Slika 121.

### 9.5.1. Vereščaginov teorem

U izrazu (269) pojavljuju se integrali u kojima je podintegralna funkcija umnožak dviju funkcija, od koji je barem jedna, recimo  $g_2$ , linearna:

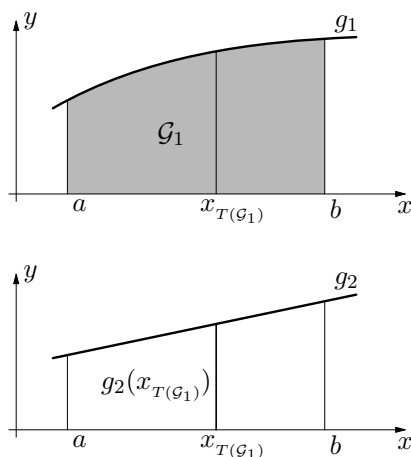
$$\mathcal{J}_{1,2} = \int_a^b g_1(x) g_2(x) dx.$$

Pokazat ćemo da je

$$\mathcal{J}_{1,2} = \mathcal{G}_1 \cdot g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)}),$$

gdje su, prema slici 122.,

$\mathcal{G}_1$  lik „ispod” grafa (linearne ili nelinearne) funkcije  $g_1$  i, kao broj, ploština tog lika,  $x_{T(\mathcal{G}_1)}$  apscisa težišta lika  $\mathcal{G}_1$ ,  $g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)})$  vrijednost linearne funkcije  $g_2$  u  $x_{T(\mathcal{G}_1)}$ .



Slika 122.

Budući da je  $g_2$  linearna funkcija, možemo pisati  $g_2 = kx + m$ , pa je

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{1,2} &= \int_a^b g_2(x) g_1(x) dx = \int_a^b (kx + m) g_1(x) dx \\ &= k \int_a^b x g_1(x) dx + m \int_a^b g_1(x) dx. \end{aligned}$$

Vrijednost integrala  $\int_a^b g_1(x) dx$  u drugome pribrojniku drugoga retka ploština je lika „ispod” grafa funkcije  $g_1$ ; označili smo je s  $\mathcal{G}_1$ . Vrijednost pak integrala  $\int_a^b x g_1(x) dx$  u prvome pribrojniku statički je moment te ploštine u odnosu na os  $y$ . Poznato je iz *Mehanike 1.*, iz poglavlje o težištima likova, da je

$$\int_a^b x g_1(x) dx = x_{T(\mathcal{G}_1)} \mathcal{G}_1.$$

Slijedi

$$\mathcal{J}_{1,2} = k x_{T(\mathcal{G}_1)} \mathcal{G}_1 + m \mathcal{G}_1 = (k x_{T(\mathcal{G}_1)} + m) \cdot \mathcal{G}_1 = g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)}) \cdot \mathcal{G}_1. \quad \text{QED}$$

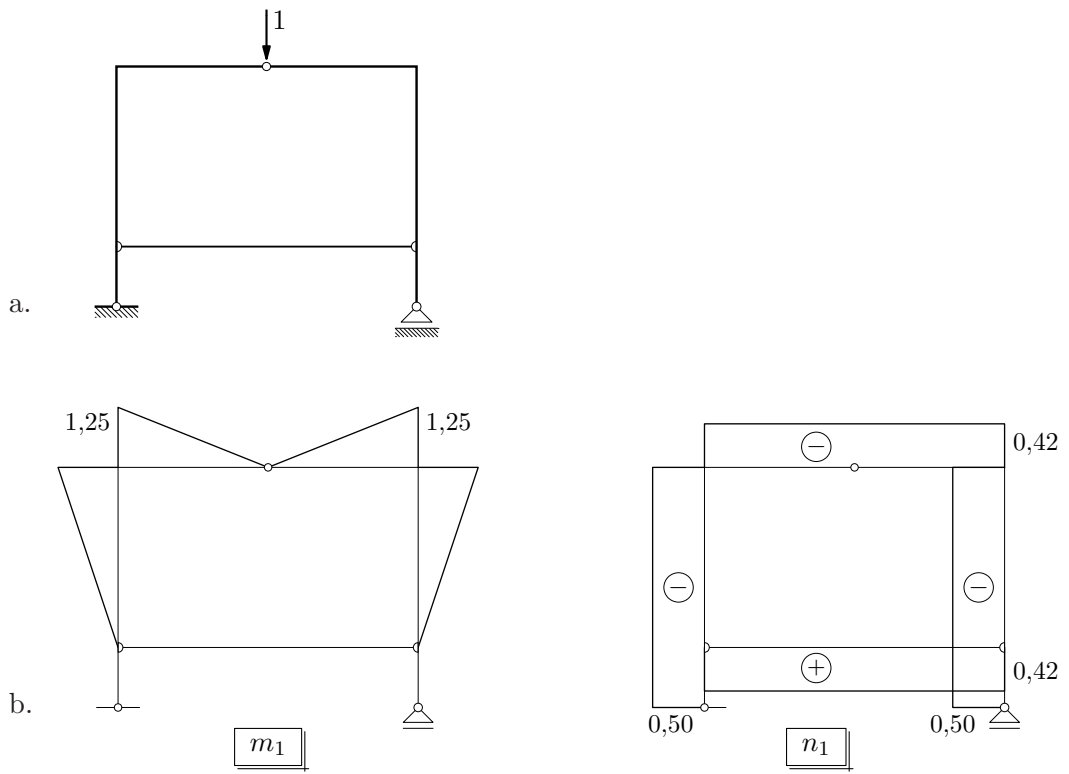
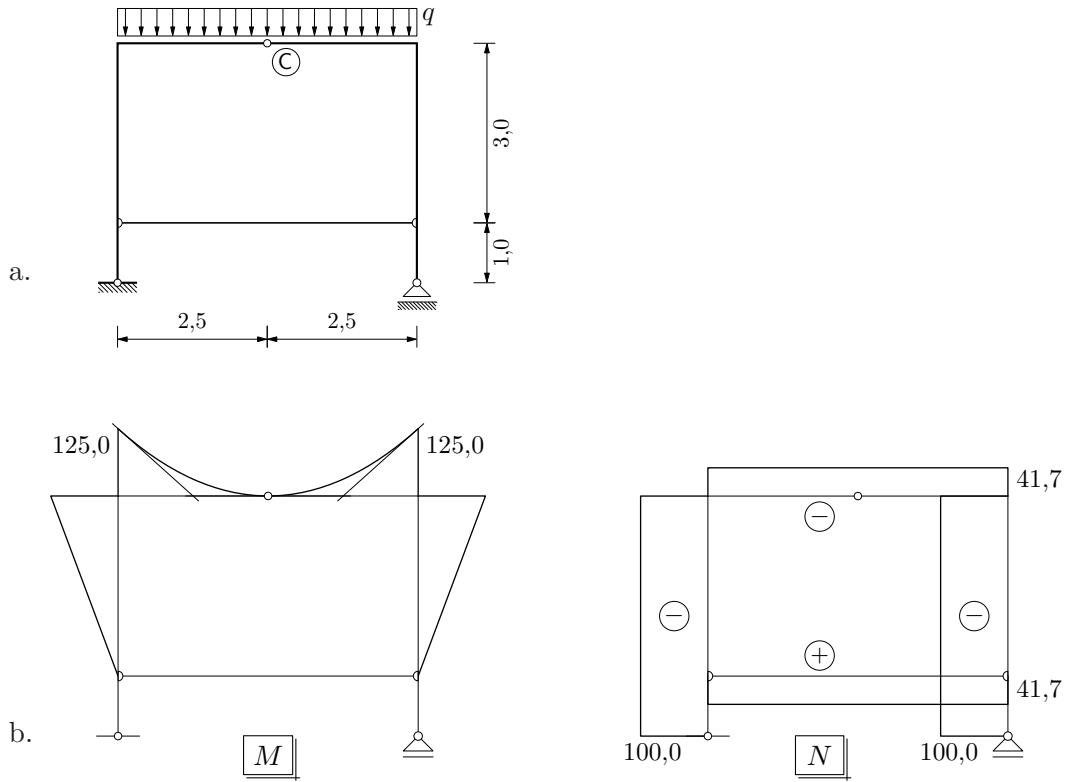
### 9.5.2. Primjer

Sistem sa zadanim opterećenjem  $q = 40 \text{ kN/m'}$  prikazan je na slici 123.a. Izračunat ćemo duljinu pomaka točke C i kut „loma” osi grede u toj točki.

Modul je elastičnosti stupova i grede  $E_s = E_g = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ . Stupovi i greda pravokutnih su poprečnih presjeka; za stupove je  $b_s/h_s = 30/30 \text{ [cm]}$ , dok je za greda  $b_g/h_g = 30/60 \text{ [cm]}$ . Modul je elastičnosti zatege  $E_z = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ . Ona je kružnoga poprečnog presjeka polumjera  $r_z = 1 \text{ cm}$ .

Na temelju zadanih geometrijskih podataka izračunat ćemo momente tromosti i površine pojedinih elemenata:

$$I_s = \frac{b_s h_s^3}{12} = \frac{0,3^4}{12} = 0,000675 \text{ m}^4, \quad A_s = b_s h_s = 0,3^2 = 0,09 \text{ m}^2;$$





$$I_g = \frac{b_g h_g^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 0,0054 \text{ m}^4, \quad A_g = b_g h_g = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \text{ m}^2;$$

$$A_z = r_z^2 \pi = 0,01^2 \pi = 0,0003 \text{ m}^2.$$

Orijentiranu duljinu projekcije pomaka točke C na vertikalni pravac izračunavamo prema formalnom izrazu

$$w_c = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[ \frac{m_1(x_e) M(x_e)}{E_e I(x_e)} + \frac{n_1(x_e) N(x_e)}{E_e A(x_e)} \right] dx_e,$$

gdje su  $M$  i  $N$  vrijednosti momenata i uzdužnih sila izazvanih zadanim opterećenjem, dok su  $m_1$  i  $n_1$  vrijednosti momenata i uzdužnih sila izazvanih jediničnom virtualnom silom koja u točki C djeluje na vertikalnom pravcu (slika 124.a.). Dijagrami  $M$  i  $N$  prikazani su na slici 123.b., a dijagrami  $m_1$  i  $n_1$  na slici 124.b. Primjenom Vereščaginova teorema dobivamo

$$\begin{aligned} w_c &= 2 \left[ \frac{1}{E_g I_g} \left( \frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left( \frac{3}{4} \cdot 1,25 \right) + \frac{1}{E_s I_s} \left( \frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1,25 \right) \right] \\ &+ \left[ \frac{1}{E_g A_g} (41,7 \cdot 5,0) (0,42) + 2 \frac{1}{E_s A_s} (100,0 \cdot 4,0) (0,50) \right] \\ &+ \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,42) \\ &= 0,01664 + 0,00016 + 0,00146 = 0,01826 \text{ m} \approx 1,8 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Uzmemo li u obzir samo utjecaj momenata savijanja, bit će

$$w_c = 0,01664 \text{ m} \approx 1,7 \text{ cm},$$

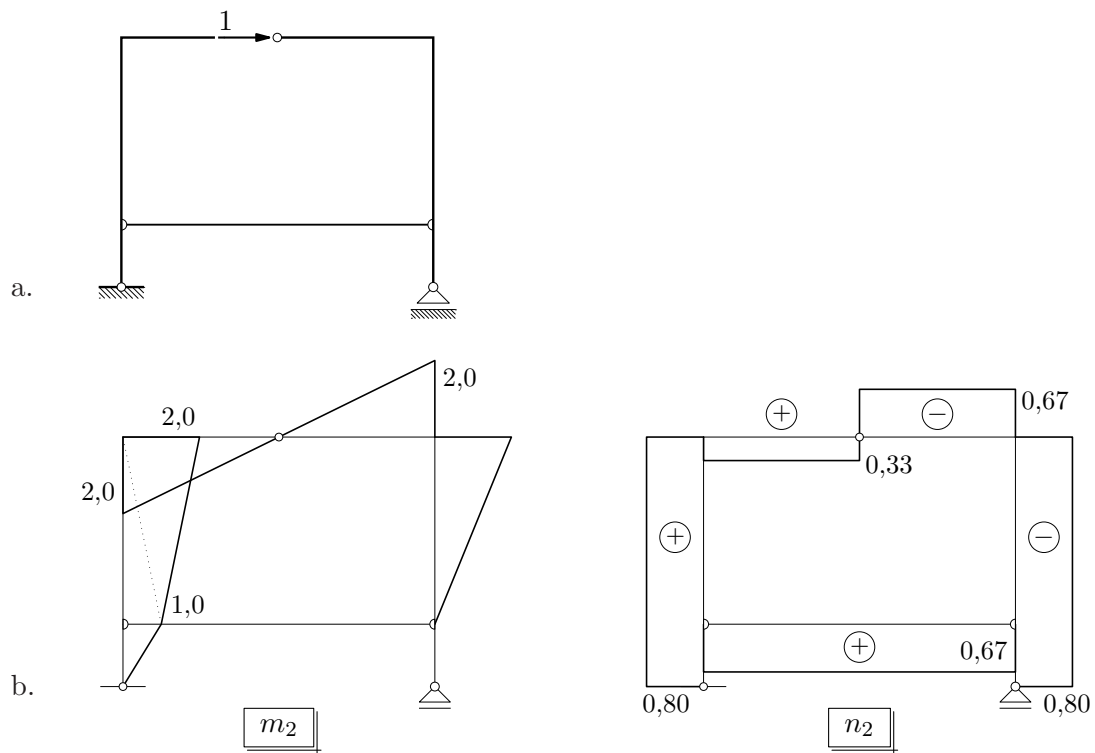
a ako uzmemo u obzir utjecaj momenata i uzdužne sile u zategi, tada je

$$w_c = 0,01664 + 0,00146 = 0,01810 \text{ m} \approx 1,8 \text{ cm}.$$

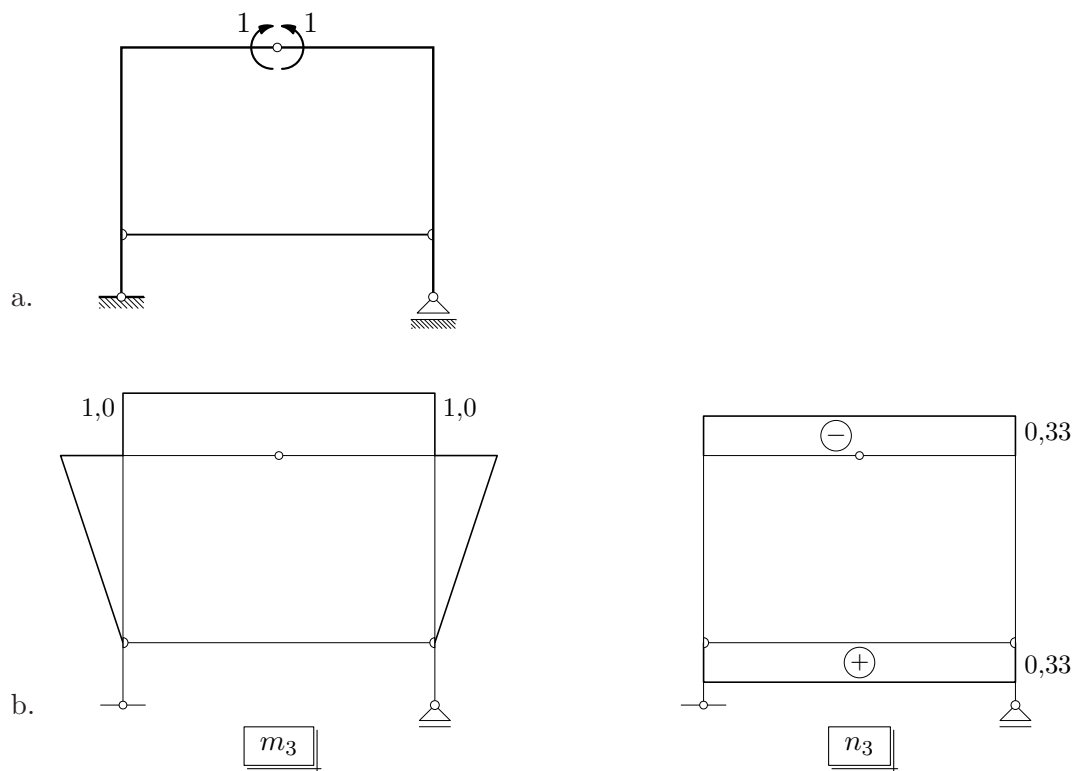
Možemo zaključiti da je utjecaj uzdužnih sila u stupovima i gredi zanemariv u odnosu na ostale utjecaje.

Ako su  $m_2$  i  $n_2$  vrijednosti momenata i uzdužnih sila izazvanih jediničnom virtualnom silom koja u točki C djeluje na horizontalnom pravcu (slika 125.a.; dijagrami na slici b.), orijentirana je duljina projekciju pomaka točke C na horizontalni pravac

$$\begin{aligned} u_c &= \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[ \frac{m_2(x_e) M(x_e)}{E_e I(x_e)} + \frac{n_2(x_e) N(x_e)}{E_e A(x_e)} \right] dx_e \\ &= \frac{1}{E_g I_g} \left[ \underbrace{\left( \frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left( -\frac{3}{4} \cdot 2,0 \right) + \left( \frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) \left( \frac{3}{4} \cdot 2,0 \right)}_{= 0 \text{ (simetrija} \times \text{antimetrija)}} \right] \\ &+ \frac{1}{E_s I_s} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left( -\frac{1}{3} \cdot 1,0 - \frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 2,0 \right) \right] \end{aligned}$$



Slika 125.



Slika 126.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{E_g A_g} \left[ (41,7 \cdot 2,5) (-0,33) + (41,7 \cdot 2,5) (0,67) \right] \\
& + \frac{1}{E_s A_s} \underbrace{\left[ (100,0 \cdot 4,0) (-0,80) + (100,0 \cdot 4,0) (0,80) \right]}_{= 0 \text{ (simetrija} \times \text{antimetrija)}} + \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,67) \\
& = \underbrace{-0,00309}_{M_s} + \underbrace{0,00001}_{N_g} + \underbrace{0,00233}_{N_z} = -0,00075 \text{ m.}
\end{aligned}$$

Negativna vrijednost znači da je pomak suprotnoga smisla od onog koji smo pretpostavili odabirom smisla virtualne sile.

I na kraju, za izračunavanje kuta između tangenata na deformiranu os grede neposredno lijevo i neposredno desno od točke C sistem opterećujemo parom suprotno orijentiranih jediničnih virtualnih momenata tako da jedan od njih djeluje neposredno lijevo, a drugi neposredno desno od te točke (slika 126.a.; dijagrami  $m_3$  i  $n_3$  na slici b.). Kut je tada

$$\begin{aligned}
\varphi_c^r & = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[ \frac{m_3(x_e) M(x_e)}{E_e I(x_e)} + \frac{n_3(x_e) N(x_e)}{E_e A(x_e)} \right] dx_e \\
& = 2 \left[ \frac{1}{E_g I_g} \left( \frac{1}{3} \cdot 125,0 \cdot 2,5 \right) (1,0) + \frac{1}{E_s I_s} \left( \frac{1}{2} \cdot 125,0 \cdot 3,0 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1,0 \right) \right] \\
& \quad + \frac{1}{E_g A_g} (41,7 \cdot 5,0) (0,33) + \frac{1}{E_z A_z} (41,7 \cdot 5,0) (0,33) \\
& = \underbrace{0,01363}_{M_{g\&s}} + \underbrace{0,00001}_{N_g} + \underbrace{0,00115}_{N_z} = 0,01479.
\end{aligned}$$

Usporedba utjecajâ pokazuje da se utjecaj uzdužne sile u gredi i stupovima može zanemariti i pri izračunavanju duljine  $u_c$  i pri izračunavanju kuta  $\varphi_c^r$ .

## 10. O statički neodređenim nosačima

*Statički neodređeni sistem* je spojeni sistem koji može ostati u stanju ravnoteže pri bilo kakvom opterećenju, ali je broj nepoznatih vrijednosti sila u vezama, vanjskim ili unutarnjim ili i vanjskim i unutarnjim, veći od broja neovisnih jednadžbi koje izražavaju uvjete ravnoteže, pa te uvjete zadovoljava beskonačno mnogo vrijednosti silâ.

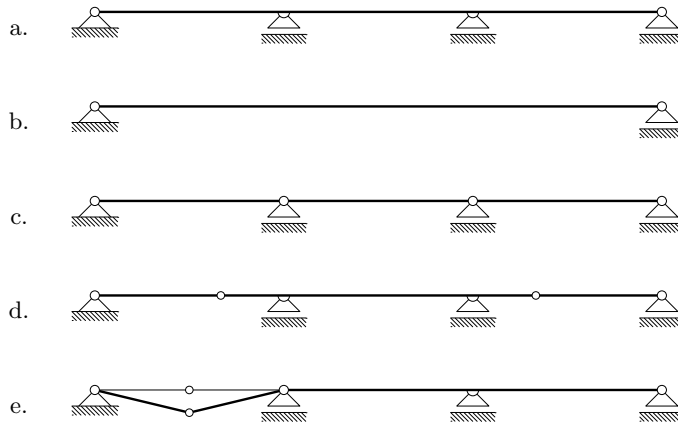
Prethodnu definiciju nazivamo statičkom. S kinematičkoga je pak gledišta statički neodređeni sistem geometrijski nepromjenjivi sistem u kojem je broj veza, vanjskih ili unutarnjih ili jednih i drugih, veći od najmanjega broja nužnog za njegovu geometrijsku nepromjenjivost.<sup>31</sup> Često ćemo statički neodređene sisteme kraće nazivati samo *neodređenim sistemima*.

*Stupanj statičke neodređenosti* jednak je, sa statičkoga stajališta, razlici broja nepoznatih vrijednosti sila i broja neovisnih uvjeta ravnoteže koje možemo postaviti za konstrukciju kao cjelinu i za pojedine njezine izdvojene dijelove. Ako je  $n$  stupanj statičke neodređenosti nekog nosača, kazat ćemo i da je taj nosač  $n$  puta statički neodređen. Kinematički, stupanj statičke neodređenosti jednak je razlici ukupnog broja veza i najmanjega broja potrebnog za geometrijsku nepromjenjivost sistema. Možemo reći i da je taj stupanj jednak broju „prekobrojnih” veza. Pritom pojam „prekobrojne veze” ne treba shvatiti u značenju „suvišne” ili „nepotrebne veze”; te su veze prekobrojne samo pri zadovoljenju uvjetâ geometrijske nepromjenjivosti. Upravo su zbog tog „viška” veza neodređeni nosači s gledišta geometrijske stabilnosti povoljniji od određenih — kod njih ne mora doći do rušenja ako se neka veza raskine.

Na slici 127.a. prikazan je kontinuirani nosač preko tri polja/četiri ležaja. Taj je nosač (kao ravninska konstrukcija) dva puta statički neodređen — pet je nepoznatih reakcija, a u ravnini se mogu postaviti samo tri neovisne jednadžbe ravnoteže. Lako je vidjeti i da, s kinematičkoga stajališta, nosač ima dvije prekobrojne veze — uklonimo li drugi i treći ležaj, dobit ćemo jednostavno oslonjenu gredu (slika b.). Prekobrojnima možemo smatrati i unutarnje veze: umetnemo li u presjeke nad drugim i trećem ležajem zglobove — pretvorimo li, drugim riječima, krute veza, koje prenose sve tri unutarnje sile, u zglobne, koje ne prenose momente savijanja — nastat će niz jednostavno oslonjenih greda (slika c.). Ili: umetanjem zglobova u dva presjeka  $u$ , primjerice, prvom i trećem polju nastaje Gerberov nosač (slika d.).

Znamo da su spojeni sistemi, nastali opisanim „otvaranjem” zglobova ili uklanjanjem ležajeva, geometrijski nepromjenjivi — izvorni kontinuirani nosač može, dakle, bez rušenja „preživjeti” (do) dva pogodno raspoređena sloma vezâ. Ističemo izraz „pogodno raspoređena”: otvore li se oba zgloba u prvom ili u trećem polju, dio sistema pretvara se u

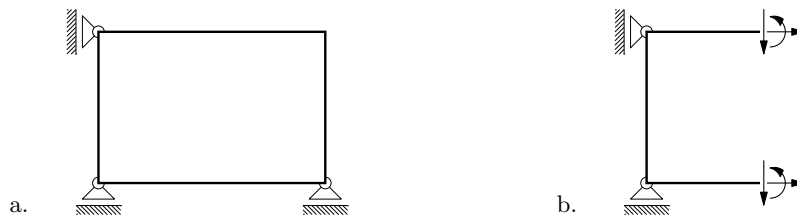
<sup>31</sup> U kinematičkoj se klasifikaciji geometrijski nepromjenjivi sistemi s „viškom” veza nazivaju i *kinematički predodređenima*. Potpuna, pomalo nekonvencionalna klasifikacija spojenih sistema provedena je u prvom dijelu rada [42].



Slika 127.

mehanizam pa na tom dijelu dolazi do rušenja (slika 127.e.), dok je preostali dio i dalje statički neodređen — još uvijek ima jednu prekobrojnu vezu.

Ravninski nosač sa slike 128.a. ima tri vanjske veze, pa su za izračunavanje vrijednosti reakcija jednadžbe ravnoteže dovoljne. No, pri izdvajanju dijela nosača za izračunavanje vrijednosti sila u nekom presjeku raskinuti treba šest veza, slika 128.b., pa će se u jednadžbama ravnoteže tog dijela pojaviti šest nepoznanica — nosač je tri puta statički neodređen.



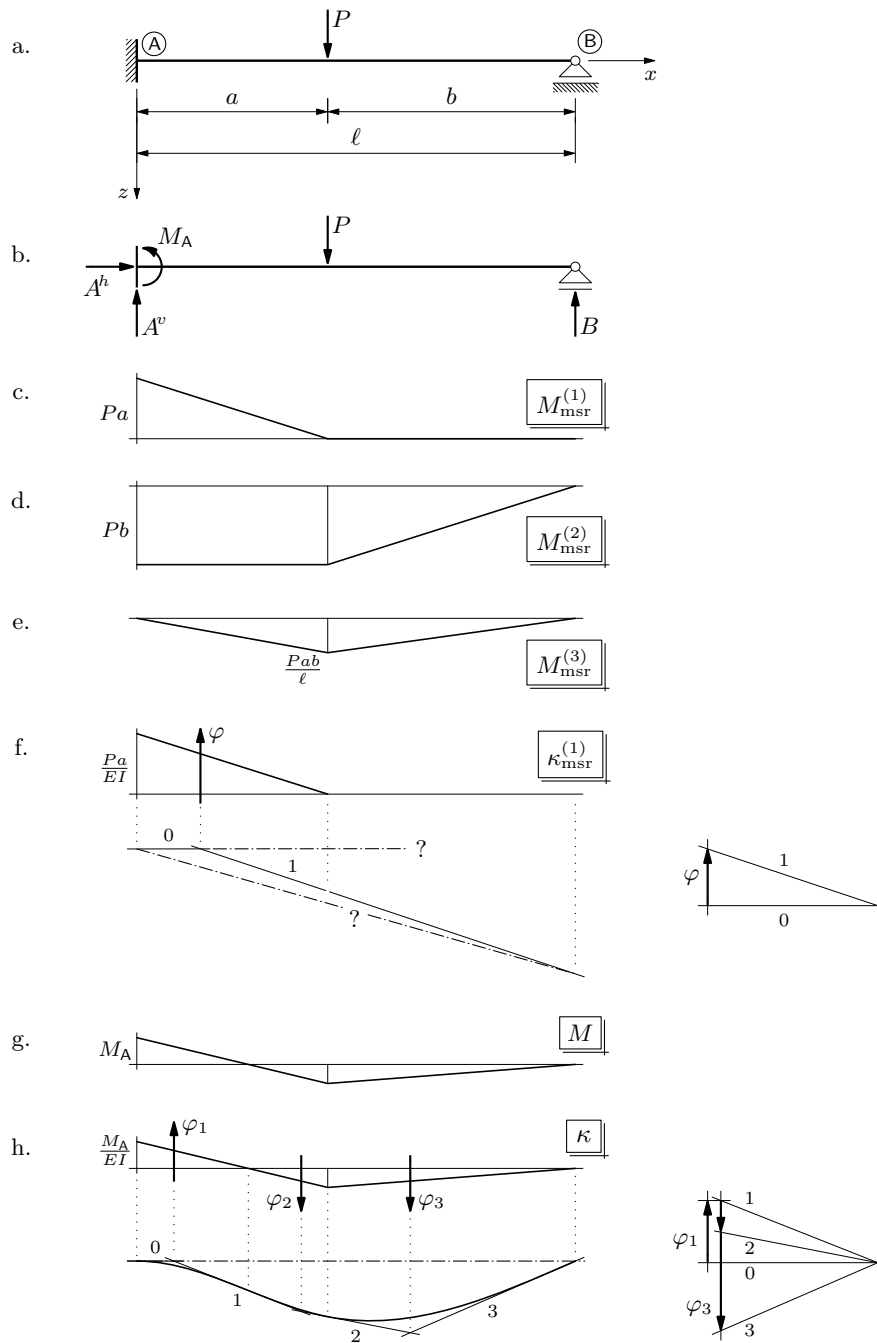
Slika 128.

Opisat ćemo sada osnovne značajke po kojima se statički neodređeni sistemi razlikuju od statički određenih.

**1.** Prema definiciji statički neodređenih konstrukcija, postoje beskonačni skupovi vrijednosti sila u vanjskim i u unutarnjim vezama koji zadovoljavaju sustav neovisnih jednadžbi ravnoteže cijele konstrukcije i njezinih dijelova. Za izdvajanje stvarnih vrijednosti potrebne su stoga dodatne jednadžbe. Pokazat ćemo da su te jednadžbe izraz kinematičkih uvjeta.

Jednostrano upeta greda prikazana na slici 129.a. jedanput je statički neodređena: nepoznate su vrijednosti reaktivnoga momenta i vertikalne i horizontalne komponente reakcije u ležaju A te vertikalne reakcije u ležaju B (slika b.). Tri su neovisne jednadžbe ravnoteže, primjerice:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & : & A^h = 0, \\ \sum F_z = 0 & : & -A^v - B + P = 0, \\ \sum M_A = 0 & : & M_A + B\ell - Pa = 0. \end{aligned}$$



Slika 129.

Prva jednađzba neposredno daje vrijednost horizontalne komponente reakcije  $\vec{A}$ . Ostaju dvije jednađzbe s tri nepoznanice. Budući da je broj nepoznanica veći od broja neovisnih jednađzbi ravnoteže, rješenje sustava jednađzbi nije jedinstveno.

Prvo ćemo pokazati da dodavanje još jedne jednađzbe ravnoteže neće omogućiti nalaženje jedinstvenoga rješenja. Neka je dodatna jednađzba

$$\sum M_{/B} = 0 : \quad M_A - A^v \ell + Pb = 0.$$

Oduzmemo li od nje jednadžbu  $\sum M_{/A} = 0$ , dobivamo

$$-A^v \ell - B\ell + P(a + b) = 0,$$

a dijeljenje te jednadžbe sa  $\ell$  daje jednadžbu  $\sum F_z = 0$ . Jedna je jednadžba, dakle, linearna kombinacija drugih dviju.

U  $n$  puta statički neodređenoj konstrukciji možemo po volji odabrati vrijednosti  $n$  nepoznatih sila u gotovo po volji odabranim vezama, a potom preostale nepoznanice izračunati rješavanjem sustava jednadžbi dobivenih uvrštavanjem odabranih vrijednosti u jednadžbe ravnoteže. Rekosmo „u gotovo po volji odabranim vezama” — preostale veze moraju biti tako raspoređene da sistem, kojem ili u kojem su to jedine veze, bude geometrijski nepromjenjiv.

Skup reakcija i unutarnjih sila koje su u ravnoteži sa zadanim vanjskim aktivnim silama nazivamo *moogućim stanjem ravnoteže sistema*. Kako se svakoj nepoznanici može pridružiti beskonačno mnogo različitih vrijednosti, za  $n$  puta statički neodređeni sistem postoji  $\infty^n$  mogućih stanja ravnoteže. Za statički određeni sistem jedino je moguće ravnotežno stanje stvarno stanje — sustav jednadžbi ravnoteže, znamo, ima jedinstveno rješenje.

U našem primjeru, pretpostavimo li  $B = 0$ , možemo izračunati  $A^v$  i  $M_A$ :

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 : \quad & -A^v + P = 0 & \implies & A^v = P, \\ \sum M_{/A} = 0 : \quad & M_A - Pa = 0 & \implies & M_A = Pa. \end{aligned}$$

Uz poznate vrijednosti reakcija mogu se izračunati i vrijednosti sila u presjecima; slika 129.c. prikazuje dijagram momenata savijanja. Ako pretpostavimo  $B = P$ , bit će  $A^v = 0$  i  $M_A = -Pb$  uz momentni dijagram kao na slici d. Umjesto vrijednosti reakcije  $B$  pretpostaviti možemo i vrijednost momenta  $M_A$ , primjerice  $M_A = 0$ :

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 : \quad & -A^v - B + P = 0, \\ \sum M_{/A} = 0 : \quad & B\ell - Pa = 0; \end{aligned}$$

iz druge je jednadžbe sada  $B = Pa/\ell$ , pa uvrštavanje u prvu daje  $A^v = Pb/\ell$ ; momentni je dijagram dan na slici e. U svakom slučaju, kako je sistem jedanput statički neodređen, odabrati možemo vrijednost jedne (i samo jedne) nepoznate sile; vrijednosti ostalih sila tada su jednoznačno određene jednadžbama ravnoteže.

Ni jedno od tih mogućih stanja nije, međutim, stvarno stanje ravnoteže. Pokušamo li za bilo koje od njih skicirati progibnu liniju, vidjet ćemo da ne možemo zadovoljiti uvjete pomaka ležajnih točaka. Primjerice, slika 129.f. prikazuje pokušaj konstruiranja tangentsnoga poligona za stanje ravnoteže čiji je momenti dijagram prikazan na slici c. (Uzeli smo  $EI = \text{const.}$ ) Kako oba ležaja sprečavaju vertikalne pomake, zaključna linija mora sjeći stranice 0 i 1 tangentsnoga poligona ispod njih. S druge strane, u upetom je ležaju spriječen zaokret osi grede, pa se zaključna linija mora poklapati sa stranicom 0. Na crtežu vidimo da jedan pravac ne može zadovoljiti sva tri uvjeta.

Claude Louis Marie Henri Navier (1785.–1836.) prvi je, u knjizi o otpornosti materijala (prvo izdanje 1826. god.), a vjerojatno i prije toga, u predavanjima u l'École des Ponts et Chaussées<sup>32</sup> u Parizu, iznio zamisao da pri proračunu statički neodređenih konstrukcija treba u obzir uzeti upravo uvjete *kompatibilnosti*<sup>33</sup> *pomakâ*. Ti uvjeti daju dodatne jednadžbe tako da zadaci postaju „određeni”. Zadani je problem Navier riješio na sljedeći način [38]:

Vrijednosti momenata savijanja u gredi mogu se (iz jednadžbe ravnoteže dijela desno od presjeka  $x$ ,  $[x, \ell]$ ; skicirajte!) izraziti s pomoću (zasad nepoznate) vrijednosti  $B$  reakcije  $\vec{B}$ :

$$M(x) = \begin{cases} -P(a-x) + B(\ell-x) & \text{za } 0 \leq x \leq a, \\ B(\ell-x) & \text{za } a < x \leq \ell. \end{cases}$$

Uvrštavanje u opću diferencijalnu jednadžbu progibne linije Bernoulli–Eulerove grede,  $EI w''(x) = -M(x)$ , daje za dio  $[0, a]$  diferencijalnu jednadžbu

$$EI w''(x) = P(a-x) - B(\ell-x).$$

Uzastopnim integriranjem, uz rubne uvjete  $w'(0) = 0$  i  $w(0) = 0$  koji za konstante integracije daju  $C_1 = C_2 = 0$ , dobivamo

$$\begin{aligned} EI w'(x) &= P \left( ax - \frac{1}{2} x^2 \right) - B \left( \ell x - \frac{1}{2} x^2 \right), \\ EI w(x) &= P \left( \frac{a}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) - B \left( \frac{\ell}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right). \end{aligned}$$

Za dio  $\langle a, \ell \rangle$  diferencijalna je jednadžba:

$$EI w''(x) = -B(\ell-x).$$

Slijedi:

$$EI w'(x) = -B \left( \ell x - \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{Pa^2}{2};$$

konstanta integracije  $C_3 = Pa^2/2$  određena je iz uvjeta  $w'(a^-) = w'(a^+)$ . I napokon, jednadžba je progibne linije na dijelu  $\langle a, \ell \rangle$ :

$$EI w(x) = -B \left( \frac{\ell}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) + P \left( \frac{a^2}{2} x - \frac{a^3}{6} \right),$$

pri čemu je konstanta  $C_4 = -Pa^3/6$  određena iz uvjeta  $w(a^-) = w(a^+)$ .

Rubni uvjet u ležaju B,  $w(\ell) = 0$ , daje sada jednadžbu kojom možemo upotpuniti sustav za izračunavanje nepoznanica  $A^v$ ,  $M_A$  i  $B$ :

$$\begin{aligned} -A^v - B + P &= 0, \\ M_A + B\ell - Pa &= 0, \\ -B \frac{\ell^3}{3} + P \left( \frac{a^2 \ell}{2} - \frac{a^3}{6} \right) &= 0. \end{aligned}$$

<sup>32</sup> L'École des Ponts et Chaussées (Škola za mostove i putove) već je tada bio jedan od najcjeljenijih francuskih građevinskih fakulteta.

<sup>33</sup> Kompatibilnost je „sposobnost da se tko ili što slaže s kim ili čim drugim; mogućnost sklada, spojivost, uskladivost” [V. ANIĆ: *Veliki rječnik hrvatskoga jezika*, Novi Liber, Zagreb, 2003.].



Iz treće jednadžbe možemo neposredno izračunati

$$B = P \frac{3a^2\ell - a^3}{2\ell^3},$$

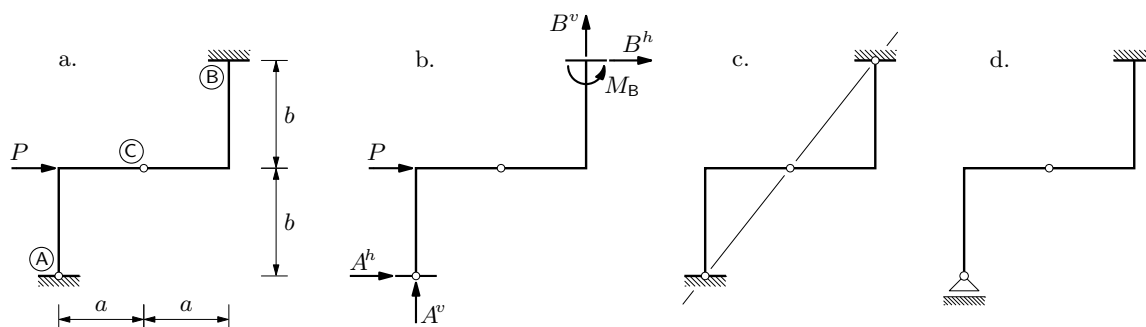
a potom iz prve i druge

$$A^v = P \frac{2\ell^3 - 3a^2\ell + a^3}{2\ell^3} \quad \text{i} \quad M_A = P \frac{2a\ell^2 - 3a^2\ell + a^3}{2\ell^2}.$$

Odgovarajući momentni dijagram dan je na slici 129.g. na stranici 217., a skica progibne linije na donjem dijelu slike h. Vidimo da progibna linija nacrtana na temelju stvarnoga momentnog dijagrama zadovoljava sve rubne uvjete.

[Nacrtajte momentni dijagram i progibnu liniju ako je umjesto sile  $P$  zadano jednoliko distribuirano opterećenje  $q$  po cijeloj duljini grede!]

Razjasnimo još primjerom malo potanje izraz „u gotovo po volji odabranim vezama”. Nosač na slici 130.a. jedanput je statički neodređen: nepoznanice su  $A^h$ ,  $A^v$ ,  $B^h$ ,  $B^v$  i  $M_B$  (slika b.), a nosač je sastavljen od dva zglobno spojena diska.



Slika 130.

Neovisne su jednadžbe ravnoteže cijeloga sistema, primjerice:

$$\begin{aligned} \sum_{\widehat{AB}} F_x = 0 & : & A^h + B^h + P & = 0, \\ \sum_{\widehat{AB}} M_B = 0 & : & A^h(2b) - A^v(2a) + M_B + Pb & = 0, \\ \sum_{\widehat{AB}} M_A = 0 & : & -B^h(2b) + B^v(2a) + M_B - Pb & = 0. \end{aligned}$$

Tom sustavu možemo dodati i jednu jednadžbu ravnoteže dijela  $\widehat{AC}$ :

$$\sum_{\widehat{AC}} M_C = 0 : \quad A^hb - A^va = 0.$$

(Druge dvije jednadžbe ravnoteže tog dijela uvode dvije dodatne nepoznanice — vrijednosti komponenta sile u zglobo C.) Dobili smo sustav od četiri jednadžbe s pet nepoznanica.

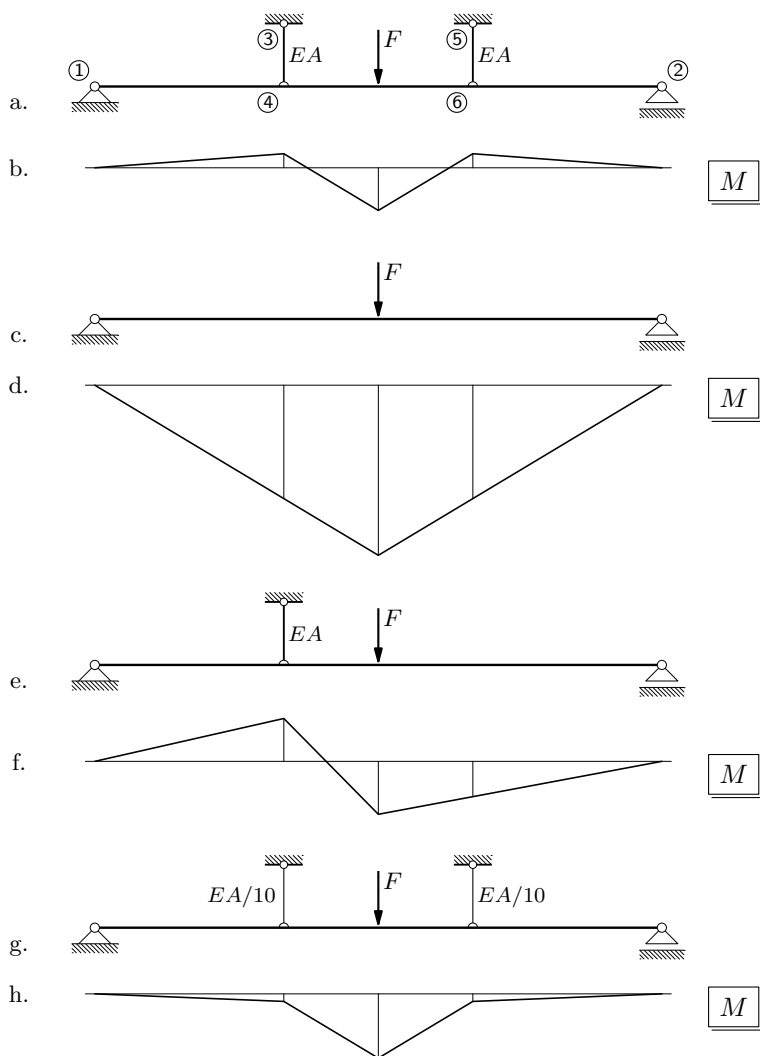
Pretpostavimo li sada  $M_B = 0$ , druga jednadžba nakon dijeljenja sa 2 prelazi u

$$A^hb - A^va = -\frac{Pb}{2}.$$

Očito je da su ta i četvrta jednađžba međusobno proturječne, pa je sustav nerješiv. (Pretpostavimo li pak  $M_B = -Pb$ , druga i četvrta jednađžba postaju jednake pa, u stvari, gubimo jednu jednađžbu.) Bilo koja pretpostavljena vrijednost  $M_B$  sa statičkoga je gledišta istoznačna uklanjanju veze koja prenosi  $\vec{M}_B$  (i zadavanju koncentriranoga momenta), a to za našu konstrukciju znači da će postati geometrijski promjenjiva — tri zgloba leže na istom pravcu, slika 130.c. Uvjet postavljen odabiru veza u kojima smijemo pretpostaviti sile (str. 218.), dakle, nije zadovoljen.

Pretpostavimo li, međutim, vrijednost  $A^h$  horizontalne komponente reakcije  $\vec{A}$ , dobivamo rješivi sustav jednađžbi; konstrukcija koji nastaje raskidanjem odgovarajuće veze prikazana je na slici 130.d. [Izračunajte  $A^v$ ,  $B^h$ ,  $B^v$ ,  $M_B$  i skicirajte dijagram momenata ako je  $A^h = 0$ . Mogu li se izračunati ostale sile ako pretpostavimo vrijednost vertikalne komponente sile  $\vec{A}$ ? A vrijednost jedne od komponenata reakcije  $\vec{B}$ ?]

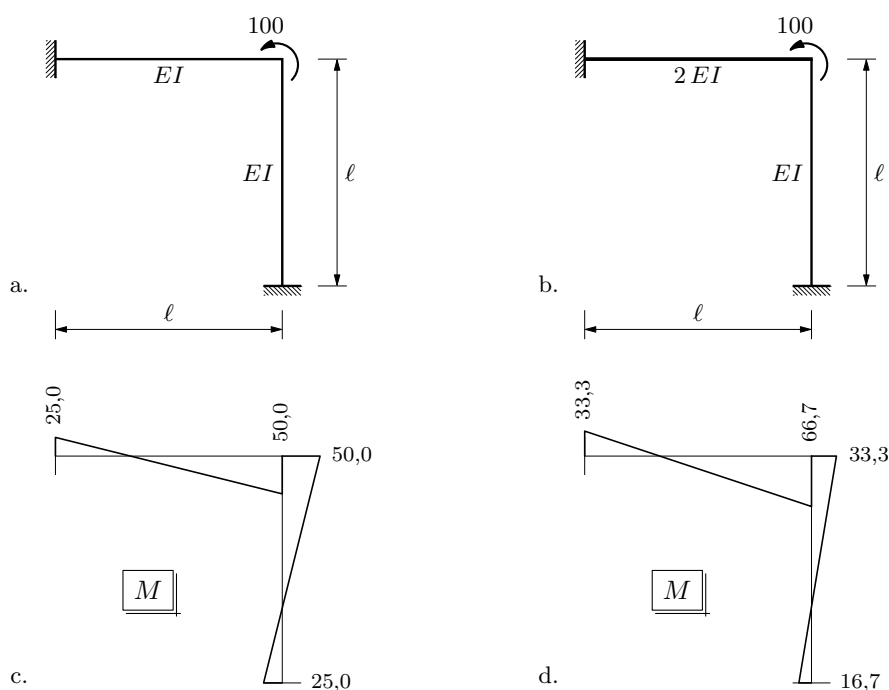
2. Sile u statički neodređenu sistemu ovise o broju i o vrsti veza te o omjeru krutosti njegovih dijelova.



Slika 131.

Kvalitativni oblik dijagrama momenata savijanja u dvaput statički neodređenu sistemu sa slike 131.a. skiciran je na slici b. Jasno je da bi reakcije i sile u presjecima bile bitno drugačije da nema štapova 3–4 i 5–6 (slike c. i d.) ili da nema jednog od njih (slike e. i f.). No, sile u sistemu ovisit će i o aksijalnim krutostima tih štapova — osjećaj nam govori da je sistem, što su ti štapovi „mekši”, ponašanjem bliži jednostavno oslonjenoj gredi (slike g. i h.).

Kao drugi primjer ovisnosti vrijednosti unutarnjih sila o omjeru krutosti dijelova, na slikama 132.c. i d. prikazani su dijagrami momenata savijanja za nosač sa slike a., u kojemu stup i greda imaju jednake poprečne presjeke, i za nosač sa slike b., u kojemu greda ima dvostruko veći moment tromosti od stupa.<sup>34</sup>

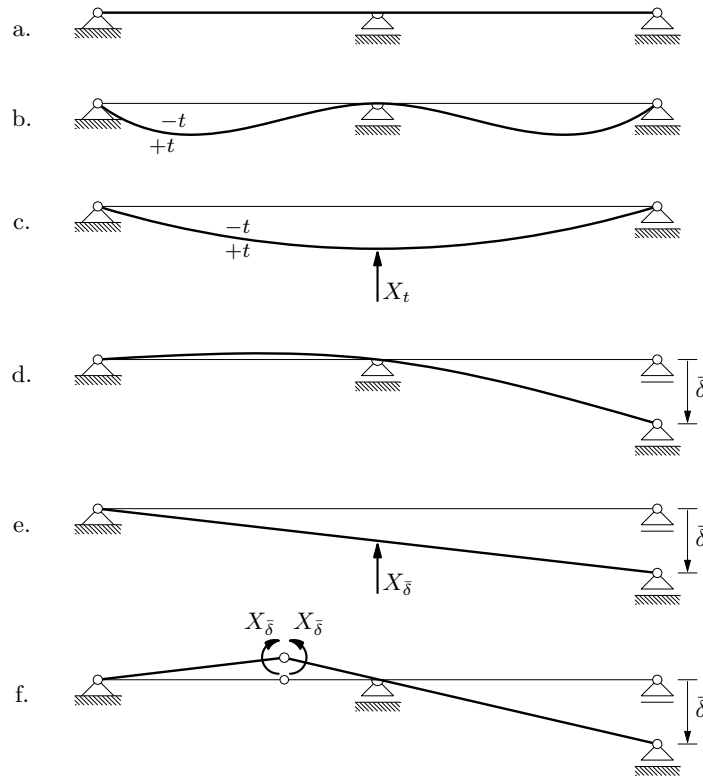


Slika 132.

**3.** U statički neodređenu sistemu pri promjenama temperature uglavnom se pojavljuju reakcije i unutarnje sile. Nadalje, sile u vezama i u presjecima mogu se pojaviti zbog prisilnih pomaka poput popuštanja ležajeva i ugradnje netočno izvedenih dijelova.

Pretpostavimo da se donji pojas kontinuiranoga nosača sa slike 133.a. zagrijava jače no gornji. Progibna je linija skicirana na slici b. Uklonimo li srednji ležaj, progibna će linija biti nalik onoj na slici c. (Progibi na tim slikama nisu crtani u istome mjerilu.) Očito je da se u srednjem ležaju mora pojaviti sila koja sprečava prikazani pomak, a to znači da se pri opisanu toplinskom djelovanju pojavljuju reakcije i sile u presjecima. (Jednolika promjena temperature po visini poprečnog presjeka u ovom slučaju neće izazvati pojavu sila, jer veze ne sprečavaju produljenje nosača.) Velike razlike između temperatura prostorâ unutar konstrukcija i izvan njih (primjerice: silosi klinkera) mogu izazvati osjetne unutarnje sile i reakcije, znatno veće od sila zbog opterećenja, pa i zbog potresa.

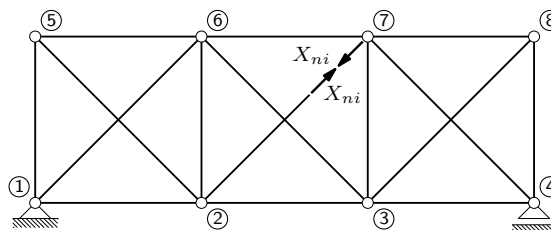
<sup>34</sup> U proračunu su zanemarene uzdužne deformacije — može se reći i da smo uzeli  $EA = \infty$ .



Slika 133.

Pretpostavimo sada da se desni ležaj spustio za neki dovoljno mali  $\bar{\delta}$ , slika 133.d. Kad ne bi bilo srednjega ležaja, greda bi se kao kruto tijelo zaokrenula oko lijevog ležaja (slika e.), pa bi se i točka koja odgovara srednjem ležaju spustila. Da bi srednji ležaj mogao ostati nepomičan (po vertikalnom pravcu), mora se u njemu pojaviti sila. Ili: da je u prvom polju zglob, dijelovi lijevo i desno od njega mogli bi se bez deformiranja zaokrenuti oko ležajeva (slika f.); pritom bi se u zglobu os nosača „sломila”. U kontinuiranu se nosaču takvu lomu odupire unutarnji moment savijanja. Mogućnost pojave reakcija i unutarnjih sila zbog popuštanja ležajeva katkada je nepovoljna, primjerice kod mostova građenih na lošem tlu.

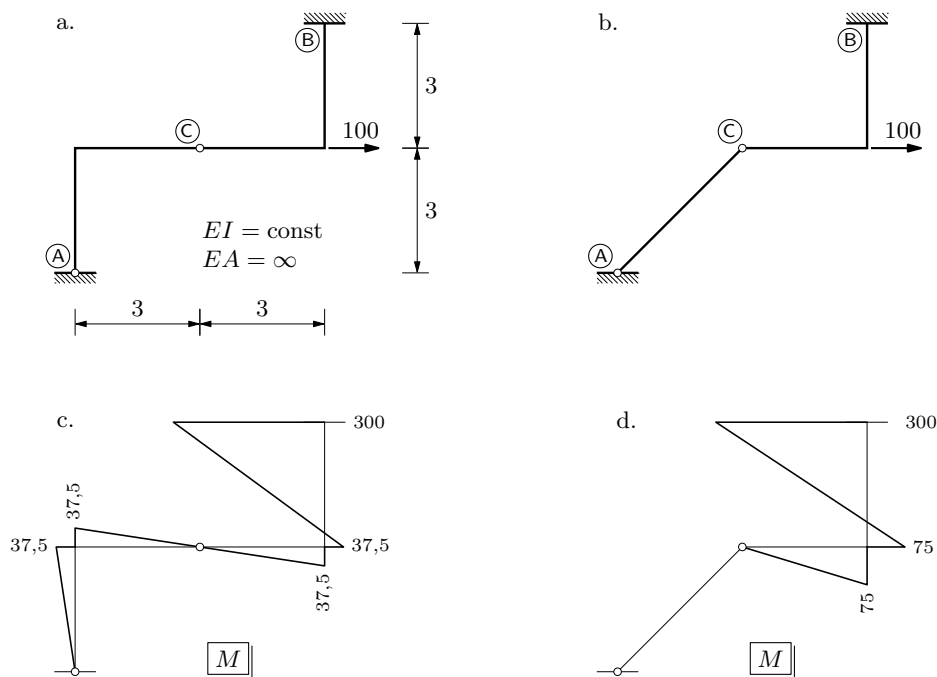
Statički neodređene konstrukcije osjetljive su i na netočnosti izvedbe. Napravi li se štap 2–7 u rešetki prikazanoj na slici 134. kraćim no što je predviđeno, treba ga nategnuti da bi se mogao spojiti s ostalim štapovima u čvoru 7 (ili u čvoru 2), a to će izazvati sile ne samo u tom, nego i u drugim štapovima. [Što će se dogoditi ako je taj štap dulji od predviđenoga? Usput: koji je stupanj statičke neodređenosti te rešetke?]



Slika 134.

4. Promjena oblika osi dijela statički neodređena nosača izazvat će promjenu sila i u drugim njegovim dijelovima.

Primjerice, dijagram momenata savijanja za nosač sa slike 135.a. prikazan je na slici c. Promijenimo li oblik osi dijela  $\widehat{AC}$  kao na slici b., momentni se dijagram mijenja u dijagram sa slike d.; uočite razliku na dijelu  $\widehat{CB}$ . Osim unutarnjih sila, promijenit će se, naravno, i reakcije.



Slika 135.

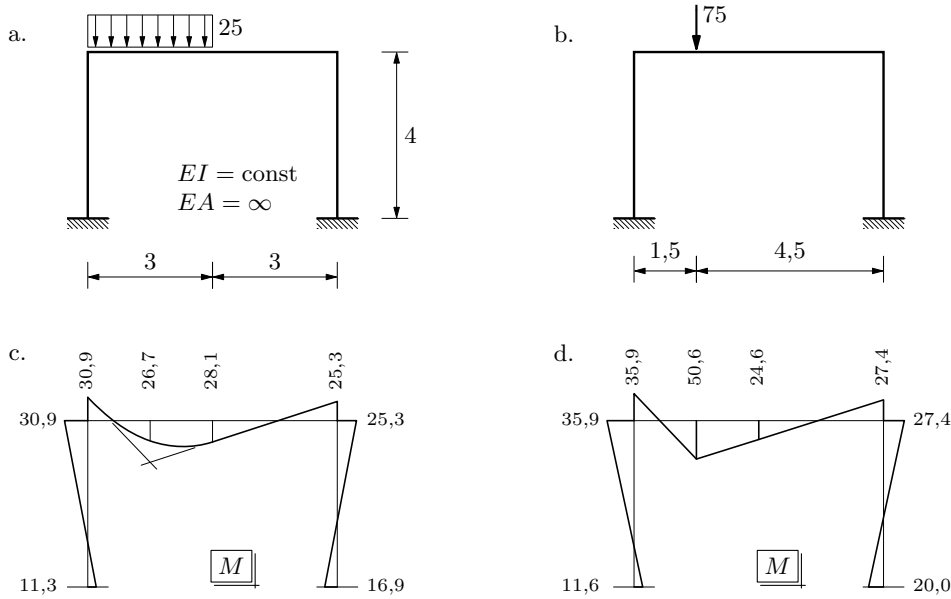
5. Zamjena zadanoga opterećenja statički ekvivalentnim dovodi do promjene sila na cijelom nosaču, a ne samo na području djelovanja opterećenja.

Slike 136.c. i d. prikazuju dijagrame momenata savijanja za okvir na koji djeluju jednoliko distribuirano opterećenje, slika a., i statički ekvivalentna koncentrirana sila, slika b.

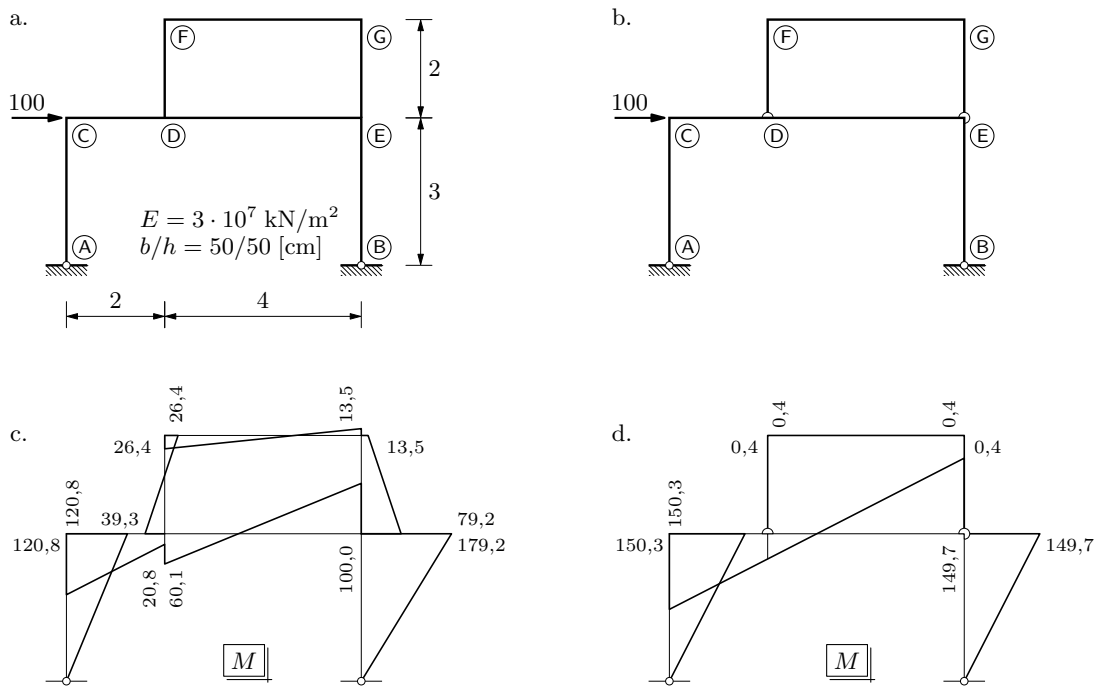
6. Opterećenja koja u složenom sistemu djeluju na dio koji možemo smatrati „nosačem za sebe” uzrokuju unutarnje sile i u statički neodređenim dijelovima koji se oslanjaju na njega.

Jedan smo primjer već vidjeli na slici 135. Dio  $\widehat{BC}$  je „slomljena” konzola na koju se jednom stranom oslanja dvozglojni okvir odnosno greda/zglobni štap  $\widehat{AC}$ . Iako konzola  $\widehat{BC}$  može stajati sama za sebe, sila, koja na nju djeluje, izaziva sile i u dijelu  $\widehat{AC}$ ; u zglobnom štapu samo uzdužnu silu, u dvozglobnom okviru sve tri sile.

Još jedan primjer i njegova varijacija prikazani su na slici 137. Za konstrukciju na slici a. možemo reći da je sastavljena od dvije (pod)konstrukcije: upeti okvir  $\widehat{DFGE}$  oslanja se na dvozglojni okvir  $\widehat{ACEB}$ . Slika c. prikazuje momentni dijagram za zadano opterećenje — iako je opterećen samo dio  $\widehat{ACEB}$ , unutarnje sile pojavljuju se i u dijelu  $\widehat{DFGE}$ .



Slika 136.



Slika 137.

Dio  $\widehat{ACEB}$  se pod opterećenjem deformira pa se može reći da su sile u dijelu  $\widehat{DFGE}$  izazvane prisilnim rotacijskim i translacijskim pomacima njegovih „ležajeva” kojima je u točkama D i E vezan za dio  $\widehat{ACEB}$  (karakteristika 3.). S druge strane, dio  $\widehat{DFGE}$  odupire se nametnutim pomacima, pa time utječe na vrijednosti i raspodjelu unutarnjih sila u dijelu  $\widehat{ACEB}$ ; konstrukciju stoga moramo proračunavati kao cjelinu.

Na slici 137.b. okvir  $\overline{DFGE}$  zglobno je vezan na okvir  $\overline{ACEB}$ . Prema momentnom dijagramu na slici d. čini se, barem na prvi pogled, da u dijelu  $\overline{DFGE}$ , iako je neodređen, nema unutarnjih sila. Te sile, međutim, postoje, ali su njihove vrijednosti zanemarivo male — vrijednosti momenata na krajevima grede  $\overline{FG}$  gotovo su 400 puta manje od vrijednosti momenata na krajevima grede  $\overline{CE}$ , dok je vrijednost uzdužne sile približno 250 puta manja. Pseudoležajevi dijela  $\overline{DFGE}$  sada su zglobni, pa sile uzrokuju samo njihovi translacijski pomaci, i to samo promjena njihova razmaka. Ta promjena razmaka, koja nastaje zbog uzdužnih deformacija grede  $\overline{CE}$  između točaka D i E, vrlo je mala, pa su i vrijednosti izazvanih unutarnjih sila male. I u nosaču na slici 137.a. zaokreti točaka D i E doprinose veličinama vrijednosti unutarnjih sila znatno više no njihovi translacijski pomaci. Zbog toga se u nekim metodama proračuna statički neodređenih sistema — u inženjerskoj metodi pomaka i, često, u metodi sila — uzdužne deformacije ne uzimaju u obzir. U nekim se slučajevima uzdužne deformacije ipak ne smiju zanemariti. Na primjer, veliko povećanje temperature grede  $\overline{CE}$ , jednoliko raspodijeljeno po visini poprečnog presjeka, prouzročit će osjetno produljenje te grede, a time i osjetno povećanje razmaka točaka D i E zbog kojega će se pojaviti značajnije unutarnje sile.

[PS. Koji su stupnjevi statičke neodređenosti sistemâ na slikama 137.a. i b.??]

## 11. Metoda sila

### 11.1. Temeljna zamisao

Rješavajući zadatak izračunavanja sila u jednostrano upetoj gredi Navier je dodatnu jednadžbu izveo iz uvjeta kompatibilnosti pomakâ u desnom ležaju (prethodno poglavlje). Ključni je korak pritom bilo analitičko rješavanje diferencijalne jednadžbe progibne linije grede. Znamo, međutim, da je u složenijim slučajevima nalaženje tog rješenja dugotrajno i mukotrпно.

U Navierovu postupku valja uočiti dvije pojedinosti:

- analitički izraz za progibnu liniju potreban je samo za uvrštavanje rubnoga uvjeta na mjestu i po pravcu djelovanja odabrane prekobrojne sile, reakcije  $\vec{B}$ ;
- u tom se izrazu od nepoznanica pojavljuje samo vrijednost  $B$  sile  $\vec{B}$ , pa se ona može iz njega neposredno izračunati.

Umjesto zadane jednostrano upete grede  $\overline{AB}$  promatrat ćemo sada konzolu  $\overline{A\bar{B}}$  istoga raspona  $\ell$  i istih geometrijskih i materijalnih karakteristika  $EI$ , opterećenu silom  $\vec{P}$  u istom položaju te silom  $\vec{X}_1$ , zasad nepoznate vrijednosti  $X_1$ , na pravcu koji odgovara pravcu djelovanja reakcije  $\vec{B}$  (slika 138.b.). Sila  $\vec{X}_1$  zamjenjuje reakciju  $\vec{B}$ , a time i ležaj B jednostrano upete grede. (U  $n$  puta statički neodređenu nosaču pojavit će se  $n$  sila čije su vrijednosti na početku proračuna nepoznate; označavat ćemo ih sa  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ .)

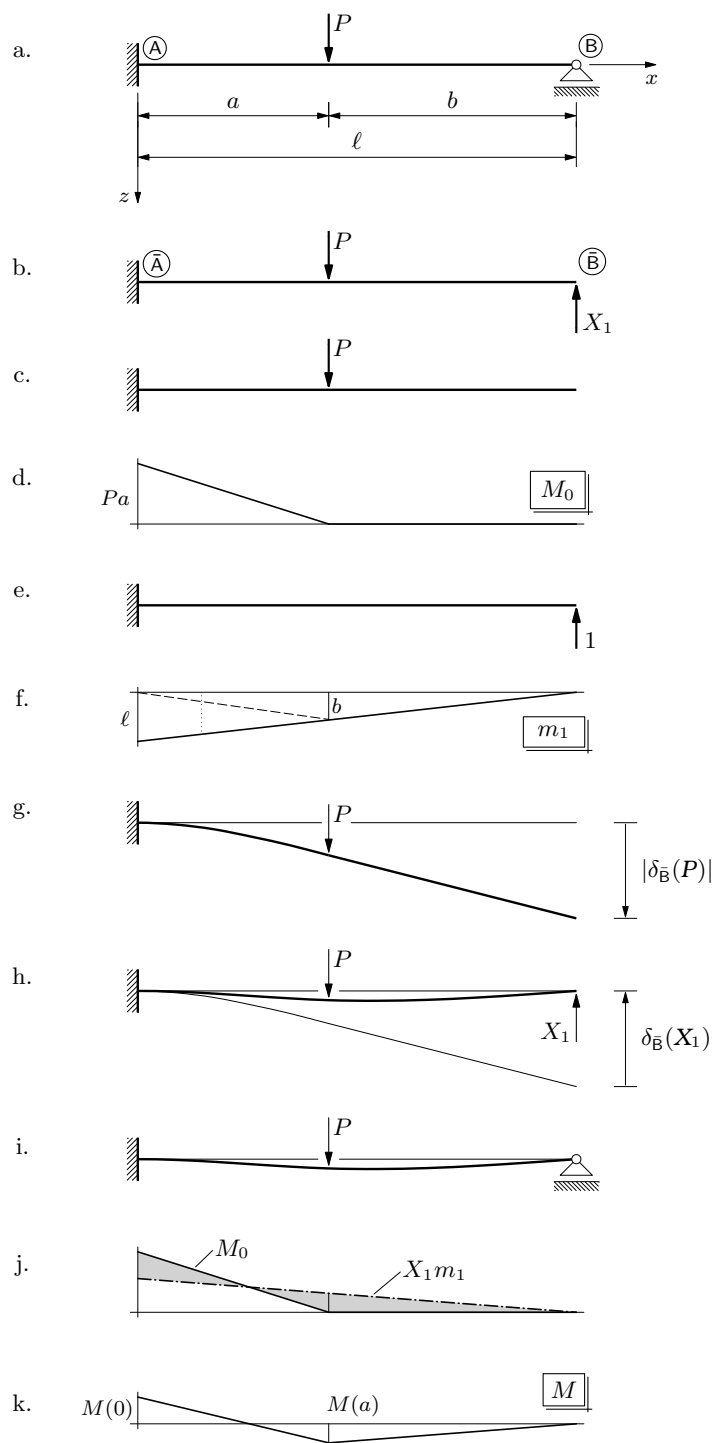
Zamislit ćemo da na konzolu u početku djeluje samo sila  $\vec{P}$  (slika 138.c.). Reakcije i unutarnje sile jednake su tada reakcijama i unutarnjim silama u mogućem ravnotežnom stanju grede  $\overline{A\bar{B}}$  uz pretpostavku  $B = 0$ ; usporedite, primjerice, momentni dijagram prikazan na slici 138.d. s dijagramom na slici 129.c. na stranici 217. No, vidjeli smo da to moguće stanje ravnoteže nije stvarno stanje. Sada možemo dati još jedno tumačenje te tvrdnje: kako je reakcija  $\vec{B}$  izraz otpora ležaja B vertikalnom pomaku, pretpostavka  $B = 0$  znači da se ležaj tom pomaku ne odupire. Orijentirana duljina vertikalnoga pomaka ležajne točke stoga bi bila jednaka orijentiranoj duljini vertikalnog pomaka slobodnoga kraja konzole:

$$\delta_{\bar{B}}(\vec{P}) = \int_0^\ell \frac{m_1(x) M_0(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} Pa^2 \right) \left( -\frac{2}{3} \ell - \frac{1}{3} b \right) = -P \frac{a^2 (2\ell + b)}{6EI}.$$

Orijentiranu duljinu pomaka izračunali smo primjenom metode jedinične sile.<sup>35</sup> Momentni dijagram za jediničnu silu u točki  $\bar{B}$ , orijentiranu kao  $\vec{X}_1$  (slika e.), prikazan je na slici 138.f.

<sup>35</sup> Ostajemo u okviru Bernoulli–Eulerove teorije savijanja. Pretpostavljat ćemo uvijek da je po pojedinim dijelovima sistema  $E = \text{const}$  (iako različiti dijelovi mogu imati različiti modul elastičnosti; mogu, primjerice, biti izvedeni od različitih gradiva: betona, čelika, drva...). A kao što zapis  $I(x)$  u općem izrazu za pomak pokazuje, poprečni se presjeci mogu i duž pojedinih dijelova mijenjati.





Slika 138.

Sada ćemo zamisliti da je, nakon što se konzola prognula pod silom  $\vec{P}$  (slika 138.g.), počela djelovati i sila  $\vec{X}_1$ . Na temelju principa superpozicije ukupni je vertikalni pomak točke  $\bar{B}$  zbroj pomakâ zbog neovisnih djelovanja sila  $\vec{P}$  i  $\vec{X}_1$ , pa je njegova orijentirana duljina:

$$\delta_{\bar{B}} = \delta_{\bar{B}}(\vec{P}) + \delta_{\bar{B}}(\vec{X}_1).$$

S pogledom unaprijed, na proračun  $n$  puta statički neodređenih sistema, uvest ćemo sustavan način označavanja orijentiranih duljina pomaka:  $\delta_{i,j}$ . Prvi indeks,  $i \in [1, n]$ , označava da je riječ o projekciji pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_i$  na pravac njezina djelovanja:  $\vec{\delta}_{i,j} = \delta_{i,j} \vec{e}_i$ , pri čemu je  $\vec{e}_i$  jedinični vektor na pravcu djelovanja sile  $\vec{X}_i$ , orijentiran kao ta sila:  $\vec{X}_i = X_i \vec{e}_i$  uz  $X_i > 0$ . Očito je da predznak vrijednosti  $\delta_{i,j}$  daje smisao pomaka u odnosu na smisao djelovanja sile  $\vec{X}_i$ . Drugi indeks,  $j$ , oznaka je uzroka pomaka:  $j=0$  označava sva zadana djelovanja, a  $j \in [1, n]$  jediničnu silu u hvatištu, na pravcu i u smislu djelovanja sile  $\vec{X}_j$ .

Prema tom su načinu označavanja  $\delta_{\bar{B}}(\vec{P}) = \delta_{1,0}$  i  $\delta_{\bar{B}}(\vec{X}_1) = X_1 \delta_{1,1}$ . Dakle:  $\delta_{1,0}$  orijentirana je duljina projekcije pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_1$  na pravac njezina djelovanja (dakle, na vertikalni pravac kroz točku  $\bar{B}$ ), izazvanoga zadanim opterećenjem (u našem primjeru silom  $\vec{P}$ ), dok je  $\delta_{1,1}$  orijentirana duljina projekcije pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_1$  na pravac njezina djelovanja zbog jedinične sile, orijentirane kao  $\vec{X}_1$ , u toj točki i na tom pravcu. Za  $\delta_{1,0}$  dobili smo negativnu vrijednost — sila  $\vec{X}_1$  djeluje „prema gore”, dok je  $\vec{\delta}_{1,0}$  pomak „prema dolje”.

Desna strana izraza  $\delta_{\bar{B}}(\vec{X}_1) = X_1 \delta_{1,1}$  pokazuje da i u izračunavanju te vrijednosti primjenjujemo princip superpozicije: uzrokuje li jedinična sila pomak čija je orijentirana duljina  $\delta_{1,1}$ , sila vrijednosti  $X_1$  prouzročit će pomak čija je orijentirana duljina  $X_1 \delta_{1,1}$ . Pritom je, primjenom metode jedinične sile,

$$\delta_{1,1} = \int_0^\ell \frac{m_1^2(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \ell^2 \right) \left( \frac{2}{3} \ell \right) = \frac{\ell^3}{3EI};$$

$\delta_{1,1}$  ima isti smisao kao i sila koja ga je izazvala.

Budući da sila  $\vec{X}_1$  zamjenjuje ležaj B jednostrano upete grede, njezinu ćemo vrijednost odabrati tako da točku  $\bar{B}$  „vrati” u početni položaj (slika 138.h.):

$$\delta_{\bar{B}} = \delta_{\bar{B}}(\vec{P}) + \delta_{\bar{B}}(\vec{X}_1) = 0.$$

Iz tog uvjeta, koji ćemo, dosljednije, napisati u obliku

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,0} = 0, \quad (270)$$

možemo izračunati potrebnu vrijednost  $X_1$  sile  $\vec{X}_1$ :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = -\frac{-P \frac{a^2(2\ell+b)}{6EI}}{\frac{\ell^3}{3EI}} = P \frac{a^2(2\ell+b)}{2\ell^3};$$

uvrstimo li još  $b = \ell - a$ , dobit ćemo

$$X_1 = P \frac{3a^2\ell - a^3}{2\ell^3}.$$

Usporedba dobivenoga izraza s izrazom za vrijednost  $B$  reakcije  $\vec{B}$ , koji smo izveli Navier-ovim postupkom (stranica 220.), pokazuje da je, zaista,  $X_1 = B$ .

Ukratko, zamjena jednostrano upete grede konzolom — općenitije: statički neodređena sistema određenim — omogućila je izračunavanje orijentirane duljine pomaka odabrane

točke metodom jedinične sile, čime smo izbjegli potrebu za rješavanjem diferencijalne jednačbe progibne linije.

I k tomu još, primjena principa superpozicije bitno je pojednostavila postupak učinivši ga pritom zornijim i preglednijim: izrazi za orijentirane duljine pomaka izazvanih neovisnim djelovanjima zadane i jedinične sile znatno su kraći i stoga manje podložni greškama no što je to izraz za orijentiranu duljinu pomaka pri istodobnom djelovanju sila  $\vec{P}$  i  $\vec{X}_1$ .

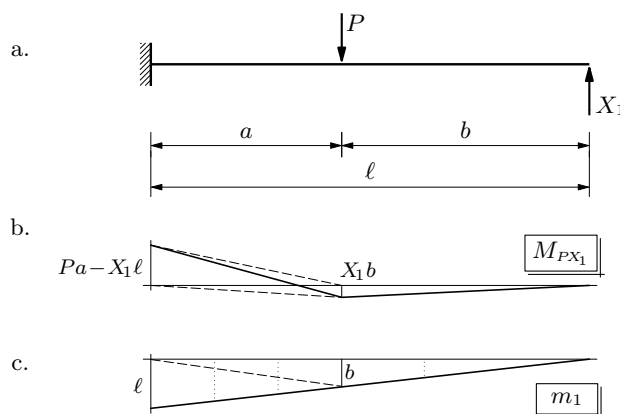
Izvest ćemo, poredbe radi, i taj izraz. Momentni dijagram pri zajedničkom djelovanju sila  $\vec{P}$  i  $\vec{X}_1$  (slika 139.a.; vrijednost  $X_1$  zasad je neodređena) skiciran je na slici 139.b., pa je

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{B}} &= \int_0^\ell \frac{m_1(x) M_{PX_1}(x)}{EI(x)} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} (Pa - X_1 \ell) a \right) \left( -\frac{2}{3} \ell - \frac{1}{3} b \right) + \left( \frac{1}{2} X_1 b a \right) \left( \frac{1}{3} \ell + \frac{2}{3} b \right) + \left( \frac{1}{2} X_1 b^2 \right) \left( \frac{2}{3} b \right) \right] \\ &= \frac{1}{6EI} [-Pa^2(2\ell + b) + 2X_1(al^2 + abl + ab^2 + b^3)]. \end{aligned}$$

Iz uvjeta  $\delta_{\bar{B}} = 0$  slijedi

$$X_1 = P \frac{a^2(2\ell + b)}{2(al^2 + abl + ab^2 + b^3)},$$

a uvrštavanje  $b = \ell - a$  daje već poznati izraz za  $X_1$ .



Slika 139.

Kao što je orijentirana duljina konačnoga pomaka točke  $\bar{B}$  zbroj orijentiranih duljina pomaka zbog sile  $\vec{P}$  i zbog sile  $\vec{X}_1$ , tako se i vrijednosti drugih kinematičkih i statičkih veličina mogu izračunati zbrajanjem utjecaja jedne i druge sile. Time nismo rekli ništa novo — riječ je tek, ponovo, o neposrednoj primjeni principa superpozicije. No, tim postupkom, a to je za rješavanje statički neodređenih zadataka svakako vrlo važna spoznaja, dobivamo ujedno i vrijednosti odgovarajućih veličina u jednostrano upetoj gredi. Ako, naime, s pomoću sile  $\vec{X}_1$  zadovoljimo na konzoli  $\bar{A}\bar{B}$  uvjet  $\delta_{\bar{B}} = 0$ , tada su konzola i jednostrano upeta greda  $\bar{A}\bar{B}$  u istom *mehaničkom stanju*: ponajprije, sila  $\vec{X}_1$  mora biti jednaka reakciji  $\vec{B}$ ; potom, iz uvjeta je ravnoteže očito da su i ostale reakcije i unutarnje sile u konzoli i gredi međusobno jednake. A jasno je da su jednake i njihove progibne linije: slike 138.h. i 138.i.

Prema tome, vrijednost momenta savijanja  $M(x)$  u presjeku  $x$  jednostrano upete grede možemo izračunati prema izrazu

$$M(x) = M_0(x) + X_1 m_1(x), \quad (271)$$

gdje su

$$M_0(x) = \begin{cases} -P(a-x) & \text{za } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{za } a < x \leq \ell \end{cases}$$

i

$$X_1 m_1(x) = X_1 (\ell - x)$$

vrijednosti momenata u presjeku  $x$  od neovisnih djelovanja sila  $\vec{P}$  i  $\vec{X}_1$  na konzolu. Napose,

$$M(a) = M_0(a) + X_1 m_1(a) = 0 + X_1 (\ell - a) = P \frac{3a^2\ell^2 - 4a^3\ell + a^4}{2\ell^3}.$$

Primjena principa superpozicije u duhu je prethodnih koraka, pa se takav postupak obično smatra kanonskim. Crtanje dijagrama  $M$  na temelju poznatih dijagrama  $M_0$  i  $m_1$  (slike 138.d. i f.) prikazano je na slikama 138.j. i k.

No, za crtanje momentnog dijagrama na jednostrano upetoj gredi (slika 138.k.) potrebne su nam samo vrijednosti  $M(0) = -M_A$ ,  $M(a)$  i  $M(\ell) = M_B$ . Budući da je  $B = X_1$ , iz ravnoteže momenata oko točke  $x = 0$  za dio  $\langle 0, \ell \rangle$  jednostrano upete grede dobivamo

$$M(0) = -Pa + B\ell = -Pa + X_1\ell = -P \frac{2a\ell^2 - 3a^2\ell + a^3}{2\ell^2},$$

a iz ravnoteže momenata oko  $x = a$  za dio  $\langle a, \ell \rangle$

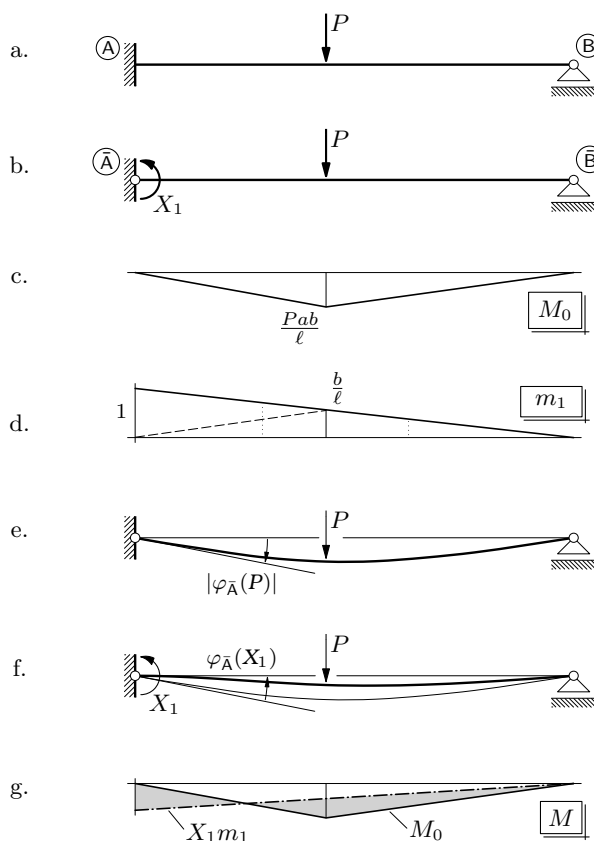
$$M(a) = Bb = X_1 b = X_1 (\ell - a) = P \frac{3a^2\ell^2 - 4a^3\ell + a^4}{2\ell^3};$$

znamo da je  $M_B = 0$ . Dakle, kad je vrijednost odabrane prekobrojne sile poznata, vrijednosti ostalih reakcija i unutarnjih sila možemo izračunati iz jednadžbi ravnoteže; taj postupak može biti kraći od primjene principa superpozicije. (Dijagram poprečnih sila možemo, ako je poznat momentni dijagram, nacrtati i na temelju diferencijalnoga odnosa  $T = M'$ . [Nacrtajte taj dijagram na sva tri načina!])

U obrađenom su primjeru sadržani svi bitni koraci proračuna statički neodređenih sistema metodom sila. Zamišljenim raskidanjem veza zadani se sistem pretvara u statički određeni, koji nazivamo *osnovnim sistemom*, a raskinute se veze nadomještaju silama koje odgovaraju silama koje su te veze prenosile. Vrijednosti tih sila potom izračunavamo iz uvjetâ kompatibilnosti pomakâ na mjestima raskinutih veza — sile moraju povratiti narušenu neprekinutost polja pomakâ ili osigurati podudaranje pomakâ na mjestima uklonjenih ležajeva sa stvarnim ležajnim uvjetima. Vrijednosti pomakâ koji se pojavljuju u uvjetima kompatibilnosti izračunavamo metodom jedinične sile; na temelju principa superpozicije možemo to uraditi za zasebna djelovanja zadanoga opterećenja i pojedinih jediničnih sila u raskinutim vezama.

Iako smo dõsad, govoreći o pomacima, mislili samo na translacijske, sve što je rečeno može se primijeniti i na rotacijske pomake. Umetanjem zgloba umjesto krute veze omogućavamo zaokret osi grede; raskinuta je veza prenosila moment savijanja.

Tako upeti ležaj A naše jednostrano upete grede (slika 140.a.) sprečava pomak te točke i zaokret osi u njoj — tangenta na progibnu liniju mora se u toj točki poklapati s osi nedeformirane grede. Ubacivanjem zgloba nastaje jednostavno oslonjena greda  $\bar{A}\bar{B}$  u kojoj se os u ležaju može slobodno zaokretati. Reaktivni moment  $\vec{M}_A$ , a time i upetu vezu jednostrano upete grede, nadomjestit ćemo u osnovnom sistemu momentom  $\vec{X}_1$  (slika 140.b.); njegovu ćemo vrijednost odabrati tako da poništi zaokret zbog zadanoga opterećenja, sile  $\vec{P}$ .



Slika 140.

Kut je zaokreta osi u ležaju  $\bar{A}$  jednostavno oslonjene grede zbog djelovanja sile  $\vec{P}$  (slika 140.e.)

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\bar{A}}(\vec{P}) &= \int_0^\ell \frac{m_1(x) M_0(x)}{EI(x)} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{Pab}{\ell} a \right) \left( -\frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \frac{b}{\ell} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{Pab}{\ell} b \right) \left( -\frac{2}{3} \frac{b}{\ell} \right) \right] \\
 &= -P \frac{2a\ell^2 - 3a^2\ell + a^3}{6EI\ell}.
 \end{aligned}$$

Dijagrami  $M_0$  i  $m_1$  na osnovnom sistemu za silu  $\vec{P}$  i za jedinični moment u  $\bar{A}$ , istoga smisla kao  $\vec{X}_1$ , prikazani su na slikama 140.c. i d. Dijagram  $M_0$  podudara se, naravno,

s dijagramom za moguće ravnotežno stanje zadane grede uz pretpostavku  $M_A = 0$ , slika 129.e. na stranici 217.

Uvjet kompatibilnosti pomakâ nalaže iščezavanje zaokreta osi pri istodobnu djelovanju sila  $\vec{P}$  i  $\vec{X}_1$  (slika 140.f.):

$$\varphi_{\bar{A}} = \varphi_{\bar{A}}(\vec{P}) + \varphi_{\bar{A}}(\vec{X}_1) = 0.$$

Pritom je kut zaokret samo od momenta  $\vec{X}_1$

$$\varphi_{\bar{A}}(\vec{X}_1) = X_1 \delta_{1,1},$$

pri čemu je

$$\delta_{1,1} = \int_0^\ell \frac{m_1^2(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\ell}{3EI}.$$

Uz  $\varphi_{\bar{A}}(\vec{P}) = \delta_{1,0}$  uvjet kompatibilnosti pomakâ imat će formalno isti zapis kao jednačba (270) na stranici 229.:

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,0} = 0.$$

Iz njega slijedi

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = P \frac{2a\ell^2 - 3a^2\ell + a^3}{2\ell^2}.$$

Superpozicija dijagramâ  $M_0$  i  $X_1 m_1$ , kojom dobivamo konačni momentni dijagram na jednostrano upetogj gredi, prikazana je slici 140.g. Funkcijski izraz za vrijednost momenta savijanja formalno je ponovo

$$M(x) = M_0(x) + X_1 m_1(x),$$

no sada su

$$M_0(x) = \begin{cases} \frac{P(\ell - a)}{\ell} x & \text{za } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{Pa}{\ell} (\ell - x) & \text{za } a < x \leq \ell; \end{cases}$$

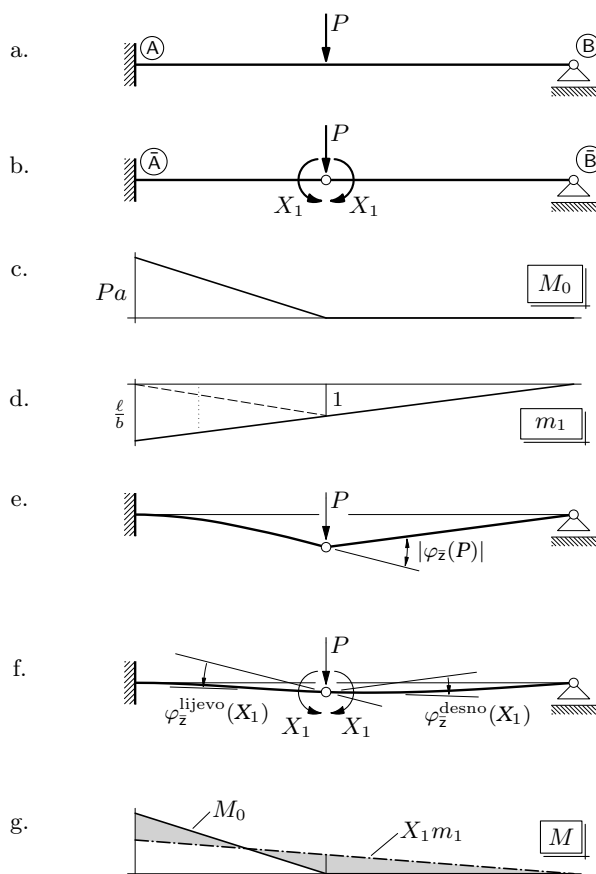
$$m_1(x) = -1 + \frac{x}{\ell}.$$

Posebno, za  $x = 0$  dobivamo

$$M(0) = X_1 \cdot (-1) = -X_1 = -P \frac{2a\ell^2 - 3a^2\ell + a^3}{2\ell^2}.$$

Dok smo umetanjem zgloba na mjestu upetoga ležaja omogućili apsolutni zaokret osi u ležaju, zglobom unutar raspona grede (slika 141.b.) omogućavamo relativni zaokret osi neposredno lijevo u odnosu na os neposredno desno, pa se progibna linija „lomi”: slika e. Da „zagladimo” nastali šiljak, dodati moramo par momenata jednakih intenziteta, ali suprotna smisla vrtnje: slika f.

Dijagrami momenata savijanja na osnovnom sistemu, koji je sada jednostavni Gerberov nosač (slika 141.b.), pri djelovanju sile  $\vec{P}$  te pri djelovanju para jediničnih momenata oko zgloba prikazani su na slikama c. i d. (Umetanjem zgloba upravo u hvatište sile  $\vec{P}$  olakšali smo izračunavanje kuta zaokreta metodom jedinične sile. Smjestimo li zglob u



Slika 141.

neki presjek lijevo od tog hvatišta, dijagram  $M_0$  bit će složenijega oblika [nacrtajte ga!]. Za sve položaje zgloba desno od hvatišta taj dijagram ostaje kao na slici c. [dokažite!]. No, ako je zglob u hvatištu, vrijednosti u dijagramu  $m_1$  izražene su samo s pomoću već poznatih geometrijskih veličina, dok bi se pri drugim položajima pojavile još neke veličine [provjerite!].)

Pri prijelazu preko umetnutoga zgloba kut je relativnog zaokreta prognete osi Gerberova nosača zbog djelovanja sile  $\vec{P}$

$$\varphi_z(\vec{P}) = \delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} Pa^2 \right) \left( -\frac{2}{3} \frac{\ell}{b} - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -P \frac{a^2 (3\ell - a)}{6EI(\ell - a)};$$

to je kut između tangenata na progibnu liniju u točkama neposredno lijevo i neposredno desno od zgloba (slika 141.e.). Kako su u zadanoj jednostrano upetoj gredi u točki koja odgovara položaju umetnutoga zgloba lijevi i desni dio međusobno kruto spojeni, progibna se linija ne smije „slomiti” — možemo reći (možda uz stanoviti nedostatak matematičke strogosti) da u toj točki dijelovi imaju zajedničku tangentu. Dodani momenti  $\pm \vec{X}_1$  moraju stoga dovesti tangente na silom  $\vec{P}$  slomljenu progibnu liniju do poklapanja. Svaki moment „zatvara” dio kuta na svojoj strani (slika 141.f.):

$$\varphi_z^{\text{lijevo}}(\vec{X}_1) + \varphi_z^{\text{desno}}(\vec{X}_1) = \varphi_z(\vec{X}_1).$$

Kako je

$$\varphi_z(\vec{X}_1) = X_1 \delta_{1,1},$$

gdje je

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \frac{\ell}{b} \ell \right) \left( \frac{2}{3} \frac{\ell}{b} \right) = \frac{\ell^3}{3 EI (\ell - a)^2},$$

uvjet kompatibilnosti pomaka  $\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,0} = 0$  (taj ste izraz već vidjeli, zar ne?) daje

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = P \frac{a^2 (3\ell - a)(\ell - a)}{2\ell^3} = P \frac{3a^2\ell^2 - 4a^3\ell + a^4}{2\ell^3}.$$

Kao i prije, s drugim osnovnim sistemima, uz poznatu vrijednost  $X_1$  momenata  $\pm \vec{X}_1$ , vrijednosti reakcija i unutarnjih sila u odabranim presjecima jednostrano upete grede možemo izračunati primjenom principa superpozicije ili iz jednadžbi ravnoteže njezinih pogodno odabranih dijelova. Na isti način možemo izvesti i funkcijske izraze za vrijednosti unutarnjih sila duž cijelog raspona. Primjerice, prema principu superpozicije funkcijski je izraz za vrijednost momenta savijanja i sada formalno

$$M(x) = M_0(x) + X_1 m_1(x),$$

ali se u nj uvrštavaju izrazi

$$M_0(x) = \begin{cases} -P(a-x) & \text{za } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{za } a < x \leq \ell; \end{cases}$$

$$m_1(x) = \frac{\ell - x}{\ell - a}.$$

Posebno je

$$M(a) = X_1 \cdot 1 = P \frac{3a^2\ell^2 - 4a^3\ell + a^4}{2\ell^3}.$$

Crtanje momentnog dijagrama superpozicijom dijagrama  $M_0$  i  $X_1 m_1$  prikazano je na slici 141.g.

[(1) Izvedite funkcijske izraze i nacrtajte dijagrame momenata savijanja i poprečnih sila ako je zadano jednoliko distribuirano opterećenje po cijeloj duljini grede! Za osnovni sistem uzmite jednostavno oslonjenu gredu. (2) Izvedite funkcijske izraze za momente i poprečne sile i nacrtajte dijagrame ako jednoliko distribuirano opterećenje djeluje samo na dijelu  $[0, a]$ ! Za osnovni sistem uzmite sada Gerberov nosač sa zglibom u  $x = a$ .]

## 11.2. Osnovni sistem i statički neodređene veličine

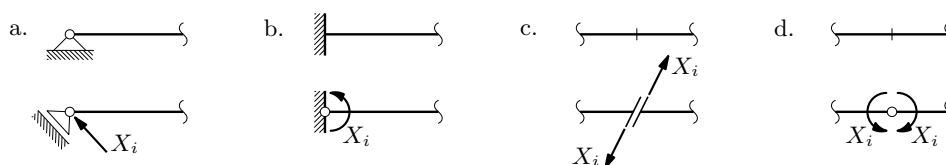
Kao što smo primjerima u prethodnom odjeljku pokazali, u proračunu metodom sila zadani se statički neodređeni sistem zamjenjuje osnovnim sistemom. *Osnovni sistem* nastaje tako da se u zadanom sistemu raskine određeni broj vanjskih ili unutarnjih veza. Umjesto njih na sistem se nanose poopćene sile koje su te veze prenosile. Broj raskinutih veza ne smije biti veći od stupnja statičke neodređenosti, ali može biti manji, što znači da osnovni sistem ne mora biti statički određen, iako se takav najčešće odabire. Bitno



je, međutim, da osnovni sistem bude geometrijski nepromjenjiv — prisjetite se primjera sa slike 130. na stranici 220.

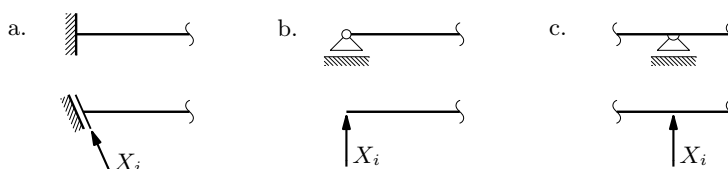
Sile, momente, parove uravnoteženih sila i parove uravnoteženih momenata, uvedene umjesto raskinutih veza, nazivamo (*statički*) neodređenim silama i momentima ili (*statički*) neodređenim veličinama. Njihove su vrijednosti na početku proračuna nepoznate. Te ćemo nepoznanice označavati sa  $X_i, i = 1, \dots, n$ , gdje je  $n$  broj raskinutih veza. Kako su vrijednosti poopćenih sila osnovne nepoznanice, proračunski je postupak nazvan *metodom sila*.

Na slici 142. prikazane su četiri osnovne mogućnosti raskidanja veza uz odgovarajuće statički neodređene veličine. Ti slučajevi omogućuju izbor osnovnog sistema za sve vrste statički neodređenih štapnih sistema.



Slika 142.

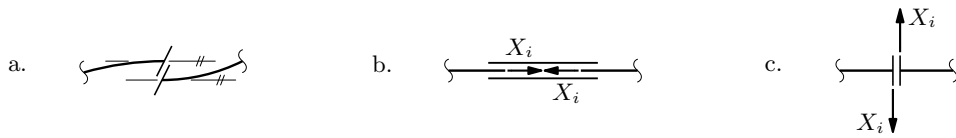
Slika 142.a. prikazuje zamjenu nepomičnog zglobnog ležaja pomičnim po odabranom pravcu, čime je omogućen pomak po tom pravcu. Statički neodređena veličina je sila koja djeluje na tom pravcu, s hvatištem u ležaju. Dvije su srodne mogućnosti prikazane na slikama 143.a. i b.: zamjena upetoga ležaja kliznim i uklanjanje pomičnog zglobnog ležaja. Ležaj, naravno, ne mora biti „na kraju” nosača (primjer pomičnog ležaja na slici 143.c.).



Slika 143.

Umetanjem zgloba upeti ležaj pretvaramo u nepomični zglobni ležaj (slika 142.b.). U ležaju je time omogućeno okretanje, pa je odgovarajuća neodređena veličina, koja to okretanje može i mora spriječiti, moment.

Na slici 142.c. prikazana je zamjena unutarnje krute veze u nekom presjeku vezom koja omogućava relativni translacijski pomak jednoga dijela u odnosu na drugi po pravcu koji možemo po volji odabrati. Naglašavamo, omogućen je samo translacijski pomak, ne i zaokret — i nakon pomaka tangente na progibnu liniju lijevo i desno od reza ostaju paralelna (slika 144.a.). Statički neodređena veličina sada je par sila koje djeluju na istom pravcu (iako ih obično crtamo na lagano razmaknutim usporednim pravcima). To su komponente unutarnjih sila koje po pravcu reza djeluju na razdvojene dijelove. Te

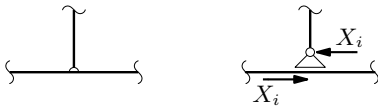


Slika 144.

dvije sile imaju jednake intenzitete, ali suprotan smisao djelovanja. Riječ je stoga o samo jednoj statički neodređenoj veličini, ne o dvije.

Dva posebna, najčešće primjenjivana slučaja prikazana su na slikama 144.b. i c.: raskinemo li vezu koja sprečava pomak po pravcu tangente na os grede, neodređena je veličina uzdužna sila, a ako pak raskinemo vezu koja sprečava pomak po okomici na os, neodređena je poprečna sila u tom presjeku.

Relativni translacijski pomak katkad je pogodno omogućiti i u zglobnom spoju (slika 145.).



Slika 145.



Slika 146.

Napokon, slika 142.d. prikazuje umetanje zgloba u neki presjek, čime je omogućeno relativno zaokretanje dijelova lijevo i desno od tog zgloba. Statički neodređena veličina par je momenata, po intenzitetu jednakih, međusobno suprotna smisla vrtnje.

Na prvi se pogled čini da postoji razlika između statički neodređenih veličina koje zamjenjuju djelovanje vanjskih i onih koje zamjenjuju djelovanje unutarnjih veza — prve se uvode kao pojedinačne sile ili momenti, dok se druge uvijek uvode u parovima. U stvari, i pri raskidanju vanjske veze postoje uvijek i druga sila ili drugi moment (primjerice, slika 146.), ali kako ta sila ili taj moment djeluju na podlogu, ne ulaze u proračun, pa ih stoga najčešće na crtežu ni ne označavamo. (Pretpostavljamo da je podloga nepopustljiva.)

Izbor osnovnoga sistema bitno utječe na složenost i trajanje proračuna metodom sila. Usporedimo li izraze za geometrijsku integraciju (primjena Vereščaginova teorema) u izračunavanju orijentiranih duljina pomakâ i kutova zaokretâ izazvanih silom  $\vec{P}$  na tri osnovna sistema za jednostrano upetu gredu u prethodnom odjeljku:  $\delta_{\vec{B}}(\vec{P})$  na stranici 227.,  $\varphi_{\vec{A}}(\vec{P})$  na str. 232. i  $\varphi_{\vec{z}}(\vec{P})$  na str. 234., vidjet ćemo da je na jednostavno oslonjenoj gredi, za  $\varphi_{\vec{A}}(\vec{P})$ , taj izraz najdulji i najsloženiji. (Još bi složeniji bio izraz na Gerberovu nosaču sa zglobovom između lijevoga ležaja i hvatišta sile  $\vec{P}$ .) Budući da je izračunavanje orijentiranih duljina pomakâ i kutova zaokretâ gotovo uvijek najdugotrajniji i greškama svakako najpodložniji korak, osnovni sistem treba odabrati tako da integracijski izrazi budu što kraći i jednostavniji. Nažalost, teško je, pa i nemoguće sastaviti kuharicu i dati opći, uvijek primjenjivi recept. No, svakako će pomoći ako momenti savijanja na većem dijelu sistema iščezavaju; pogodno je također i da se položaji lomova i skokova u dijagramima  $M_0$  i  $m_i$  podudaraju; treba, nadalje, pokušati iskoristiti simetriju ili djelomičnu simetriju sistema...

U sljedećem je primjeru razlika u duljini proračuna orijentiranih duljina pomakâ i kutova zaokreta, apsolutnih i relativnih, na dva različita osnovna sistema još izraženija. Kontinuirani nosač preko tri polja (slika 147.a.) dva je puta statički neodređen.

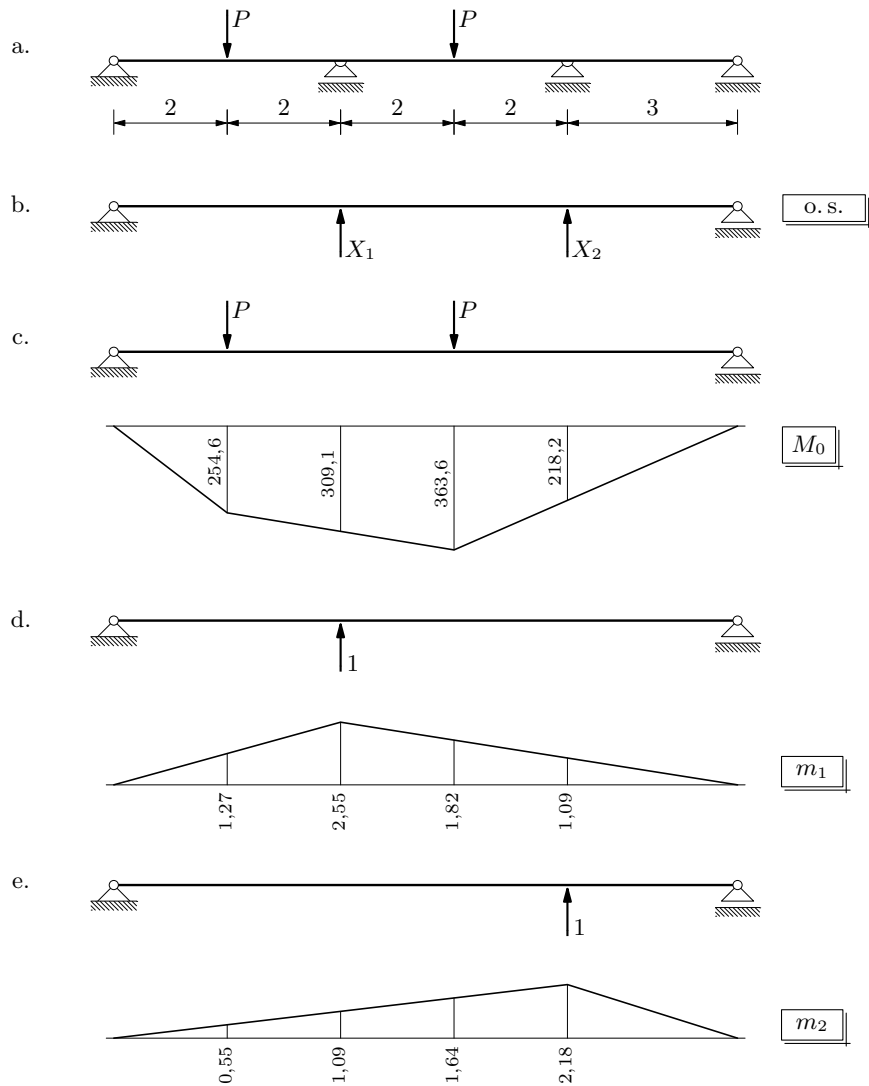
Jedan je mogući osnovni sistem jednostavno oslonjena greda koja nastaje uklanjanjem drugoga i trećeg ležaja uz uvođenje neodređenih sila  $\vec{X}_1$  i  $\vec{X}_2$  (slika 147.b.; osnovni ćemo sistem odsad crtati samo sa statički neodređenim veličinama, bez zadanoga opterećenja). Orijetirane duljine projekcija pomaka hvatišta tih sila na pravce njihova djelovanja zbog sila  $\vec{P}$  vrijednosti  $P = 100 \text{ kN}$  su, uz  $EI = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= \int_0^{\ell} \frac{m_1(x) M_0(x)}{EI(x)} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 254,6 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 1,27 \right) \right. \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \cdot 254,6 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 1,27 - \frac{1}{3} \cdot 2,55 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 309,1 \cdot 2 \right) \left( -\frac{1}{3} \cdot 1,27 - \frac{2}{3} \cdot 2,55 \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \cdot 309,1 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 2,55 - \frac{1}{3} \cdot 1,82 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 363,6 \cdot 2 \right) \left( -\frac{1}{3} \cdot 2,55 - \frac{2}{3} \cdot 1,82 \right) \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 363,6 \cdot 5 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 1,82 \right) \right] \\ &= -\frac{3870,0}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2,0} &= \int_0^{\ell} \frac{m_2(x) M_0(x)}{EI(x)} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 254,6 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 0,55 \right) \right. \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \cdot 254,6 \cdot 4 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 0,55 - \frac{1}{3} \cdot 1,64 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 363,6 \cdot 4 \right) \left( -\frac{1}{3} \cdot 0,55 - \frac{2}{3} \cdot 1,64 \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \cdot 363,6 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 1,64 - \frac{1}{3} \cdot 2,18 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 218,2 \cdot 2 \right) \left( -\frac{1}{3} \cdot 1,64 - \frac{2}{3} \cdot 2,18 \right) \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 218,2 \cdot 3 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot 2,18 \right) \right] \\ &= -\frac{3060,6}{EI}. \end{aligned}$$

Za izražavanje uvjetâ kompatibilnosti trebat će nam i odgovarajuće orijentiranih duljina pomakâ tih točaka zbog pojedinačnih djelovanja jediničnih sila:

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \int_0^{\ell} \frac{m_1^2(x)}{EI(x)} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2,55 \cdot 4 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 2,55 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2,55 \cdot 7 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 2,55 \right) \right] = \frac{23,84}{EI}; \end{aligned}$$



Slika 147.

$$\begin{aligned}
 \delta_{1,2} &= \int_0^{\ell} \frac{m_1(x) m_2(x)}{E I(x)} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2,55 \cdot 4 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1,09 \right) \right. \\
 &\quad + \left( \frac{1}{2} \cdot 2,55 \cdot 4 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1,09 + \frac{1}{3} \cdot 2,18 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1,09 \cdot 4 \right) \left( \frac{1}{3} \cdot 1,09 + \frac{2}{3} \cdot 2,18 \right) \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 1,09 \cdot 3 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 2,18 \right) \right] \\
 &= \frac{17,45}{EI}; \\
 \delta_{2,1} &= \int_0^{\ell} \frac{m_2(x) m_1(x)}{E I(x)} dx = \int_0^{\ell} \frac{m_1(x) m_2(x)}{E I(x)} dx = \delta_{1,2} = \frac{17,45}{EI};
 \end{aligned}$$

$$\delta_{2,2} = \int_0^{\ell} \frac{m_2^2(x)}{EI(x)} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2,18 \cdot 8 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 2,18 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2,18 \cdot 3 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 2,18 \right) \right] = \frac{17,43}{EI}.$$

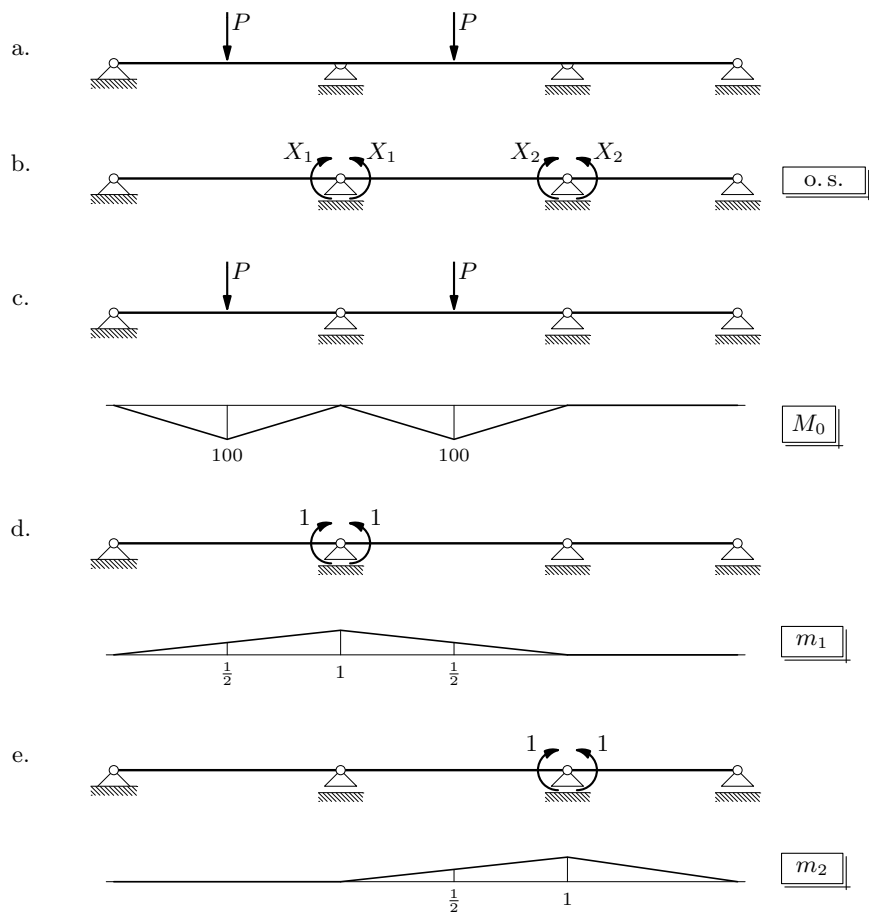
[Izrazite riječima kinematičko značenje veličina  $\delta_{1,0}$ ,  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$ ,  $\delta_{2,0}$ ,  $\delta_{2,1}$ ,  $\delta_{2,2}$ !]

Osnovni sistem sa slike 148.b. znatno je povoljniji ne samo za izračunavanje potrebnih kutova zaokreta, već i za izračunavanje vrijednosti u karakterističnim točkama momentnih dijagrama (usporedite dijagrame  $M_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  na slikama 148.c., d. i e. s dijagramima na slikama 147.c., d. i e.):

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left[ 2 \left( \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + 2 \left( \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = -\frac{200}{EI};$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2 \right) \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = -\frac{100}{EI};$$

$$\delta_{1,1} = \frac{2}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{8}{3EI};$$



Slika 148.

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{2}{3EI};$$

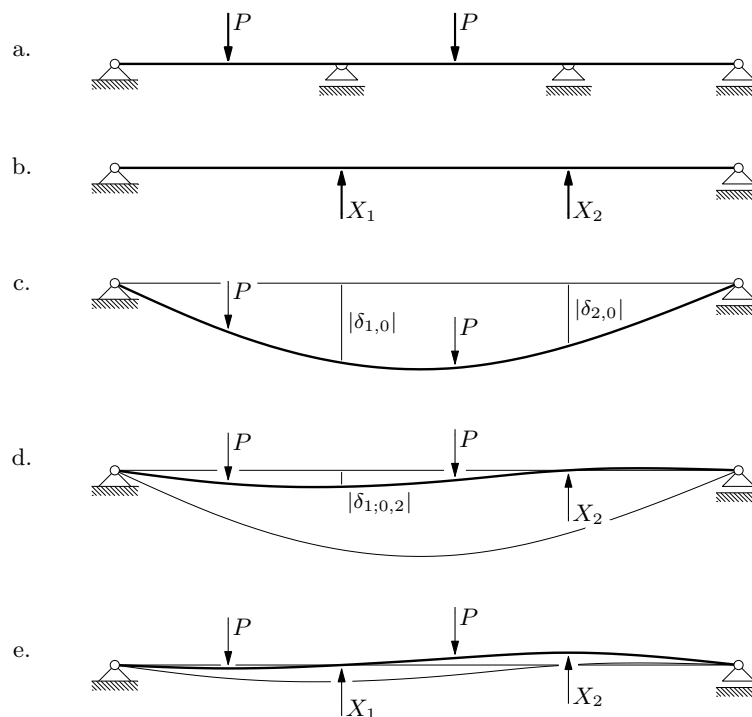
$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{7}{3EI}.$$

[Što su sada, kinematički,  $\delta_{1,0}$ ,  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$ ,  $\delta_{2,0}$ ,  $\delta_{2,1}$ ,  $\delta_{2,2}$ ? Skicirajte ih!]

### 11.3. Jednadžbe metode sila

Jednadžbe za određivanje vrijednosti  $X_i$  statički neodređenih veličina  $\vec{X}_i$  ili  $\pm \vec{X}_i$  formalni su zapis uvjetâ kompatibilnosti pomakâ. U kontekstu metode sila *uvjetima kompatibilnosti pomakâ* izražavamo zahtjev za podudaranjem progibnih linija izvornoga sistema i osnovnog sistema na koji djeluju i „statički neodređene” sile pravih vrijednosti. Ti uvjeti ponajčešće na osnovnom sistemu traže iščezavanje apsolutnih translacijskih pomaka na mjestima raskinutih vanjskih veza po pravcima po kojima te veze sprečavaju pomake ili iščezavanje relativnih translacijskih pomaka na mjestima raskinutih unutarnjih veza po pravcima po kojima te veze sprečavaju pomake ili, ako veze sprečavaju zaokretanja, iščezavanje apsolutnih ili relativnih rotacijskih pomaka. Izuzetak su točke u kojima su zadani prisilni pomaci ili zaokreti; o tome će još biti riječi u odjeljku 11.6.

Iako smo u prethodnom odjeljku pokazali da osnovni sistem sa slike 147.b., ponovljen na slici 149.b., nije najprikladniji za rješavanje kontinuiranoga nosača (slika 149.a.), zadržat ćemo se na njemu, jer će s translacijskim pomacima prikaz biti zorniji no što bi to bio prikaz sa zaokretima na osnovnom sistemu sa slike 148.b.



Slika 149.

Pod djelovanjem sila  $\vec{P}$  osnovni sistem — jednostavno oslonjena greda — progiba se kao na slici 149.c. Vidimo da su na mjestima „uklonjenih” ležajeva uvjeti kompatibilnosti narušeni: na zadanom se sistemu te točke ne mogu pomicati po vertikalnim pravcima.

Oba uvjeta moramo zadovoljiti istodobno. Dodamo li, naime, silu  $\vec{X}_2$  čija vrijednost zadovoljava jednadžbu

$$\delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,0} = 0,$$

njezino će se hvatište vratiti u početni položaj (slika 149.d.). No, pritom će se dodatno pomaknuti i hvatište sile  $\vec{X}_1$ , pa njezinu vrijednost, potrebnu za zadovoljenje uvjeta kompatibilnosti u toj točki, ne možemo više izračunati iz

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,0} = 0.$$

Ukupna je orijentirana duljina projekcije pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_1$  na pravac njezina djelovanja zbog sila  $\vec{P}$  i  $\vec{X}_2$

$$\delta_{1;0,2} = \delta_{1,0} + X_2 \delta_{1,2}.$$

Na žalost, ni uvjet

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1;0,2} = 0$$

neće nam dati traženo rješenje. Dodamo li tako određenu silu  $\vec{X}_1$ , njezino će se hvatište, doduše, vratiti u početni položaj, ali će se pritom pomaknuti i hvatište sile  $\vec{X}_2$ , pa će uvjet kompatibilnosti u toj točki ponovo biti narušen (slika 149.e.). Možemo stoga zaključiti da se uvjeti kompatibilnosti ne mogu zadovoljiti neovisno jedan o drugom.

Na pomak hvatišta sile  $\vec{X}_2$  utječe, osim sila  $\vec{P}$  i  $\vec{X}_2$ , i sila  $\vec{X}_1$ , pa je ukupna orijentirana duljina projekcije pomaka te točke na pravac djelovanja sile  $\vec{X}_2$

$$\delta_2 = \delta_{2,0} + X_1 \delta_{2,1} + X_2 \delta_{2,2};$$

isto tako, ukupna je orijentirana duljina projekcije pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_1$  na pravac njezina djelovanja zbroj orijentiranih duljina projekcija pomaka zbog sila  $\vec{P}$ ,  $\vec{X}_1$  i  $\vec{X}_2$ :

$$\delta_1 = \delta_{1,0} + X_1 \delta_{1,1} + X_2 \delta_{1,2}.$$

Uvjeti kompatibilnosti  $\delta_1 = 0$  i  $\delta_2 = 0$  daju stoga *sustav jednadžbi*

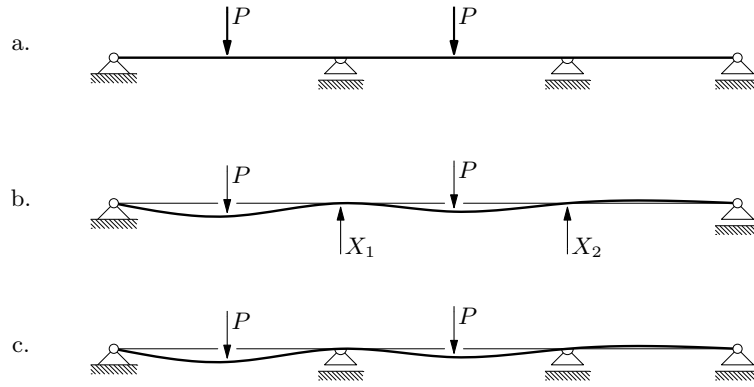
$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \delta_{1,0} = 0,$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,0} = 0.$$

Riješimo li taj sustav (sljedeći odjeljak), dobit ćemo vrijednosti  $X_1$  i  $X_2$  za koje će se progibna linija osnovnoga „poklopiti” s progibnom linijom zadanog sistema (slike 150.b. i c.).

Općenitije, orijentirana duljina projekcije pomaka hvatišta neodređene sile  $\vec{X}_i$  na pravac njezina djelovanja ili kut zaokreta osi u hvatištu neodređenoga momenta  $\vec{X}_i$  ili orijentirana duljina relativnoga pomaka hvatištâ para neodređenih sila  $\pm \vec{X}_i$  ili kut relativnog zaokreta osi u hvatištima para neodređenih momenata  $\pm \vec{X}_i$  zbog zajedničkoga djelovanja svih neodređenih sila  $\vec{X}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , i svih zadanih vanjskih utjecaja u  $n$  puta statički neodređenu sistemu uz primjenu je principa superpozicije

$$\delta_I = \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j + \delta_{i,0}.$$



Slika 150.

Uvjeti kompatibilnosti pomaka traže istodobno iščezavanje svih  $n$  vrijednosti  $\delta_i$ :

$$\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j + \delta_{i,0} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (272)$$

(osim ako je upravo na mjestu  $i$  po pravcu neke raskinute veze zadan prisilni pomak, na što ćemo se još vratiti). To su osnovne jednačbe metode sila; nazivamo ih *jednačbama kompatibilnosti*, *jednačbama kontinuiteta* ili *jednačbama neprekinutosti*.

Sustav jednačbi kompatibilnosti možemo napisati i u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \cdots & \delta_{1,n} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \cdots & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n,1} & \delta_{n,2} & \cdots & \delta_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,0} \\ \delta_{2,0} \\ \vdots \\ \delta_{n,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (273)$$

ili, sažeto, matricnom stenografijom,

$$\mathbf{DX} + \mathbf{\Delta} = \mathbf{0}. \quad (274)$$

Matricu

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \cdots & \delta_{1,n} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \cdots & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n,1} & \delta_{n,2} & \cdots & \delta_{n,n} \end{bmatrix}$$

nazivamo *matricom popustljivosti* ili *matricom fleksibilnosti*, a njezine pak komponente *koeficijentima popustljivosti* ili *koeficijentima fleksibilnosti*. Koeficijent popustljivosti  $\delta_{i,j}$  je, gledano kinematički, ovisno o raskinutoj vezi i pripadnoj statički neodređenoj veličini, orijentirana duljina projekcije pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_i$  na pravac njezina djelovanja, orijentirana duljina relativnoga pomaka hvatištâ para sila  $\pm \vec{X}_i$ , kut zaokreta osi u hvatištu momenta  $\vec{X}_i$  ili kut relativnog zaokreta osi u hvatištima para momenata  $\pm \vec{X}_i$ , pri čemu su taj pomak ili taj zaokret izazvani djelovanjem jedinične sile ili para jediničnih sila u hvatištu ili u hvatištima, na pravcu  $i$  u smislu djelovanja sile  $\vec{X}_j$  ili para  $\pm \vec{X}_j$ , ili pak djelovanjem jediničnoga momenta ili para jediničnih momenata istoga smisla vrtnje kao moment  $\vec{X}_j$  ili para momenata  $\pm \vec{X}_j$  u njegovu hvatištu ili njihovim hvatištima.



U nastavku ćemo sažetosti radi sile (u užem smislu), momente, parove uravnoteženih sila i parove uravnoteženih momenata često obuhvatiti pojmom sile; pritom je „pravac djelovanja” momenta njegova os. Fraza pak „pomak po pravcu djelovanja sile” značit će ortogonalnu projekciju vektora translacijskoga pomaka na taj pravac, ali i zaokret oko momentne osi koji je ortogonalna projekcija vektora zaokreta na tu os<sup>36</sup>. K tomu još, orijentirane duljine pomakâ i kutove zaokretâ sažetije ćemo nazvati vrijednostima pomakâ. Možemo, dakle, reći da je koeficijent popustljivosti  $\delta_{i,j}$  vrijednost pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_i$  po pravcu njezina djelovanja zbog djelovanja jedinične sile u hvatištu, na pravcu i u smislu djelovanja sile  $\vec{X}_j$ .

U okviru Bernoulli–Eulerove teorije koeficijente popustljivosti izračunavamo prema poznatu izrazu

$$\delta_{i,j} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} [m_i(\xi_e) \kappa_j(\xi_e) + n_i(\xi_e) \varepsilon_j(\xi_e)] d\xi_e, \quad (275)$$

odnosno, uvrstimo li izraze za  $\kappa_j$  i  $\varepsilon_j$ ,

$$\delta_{i,j} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[ \frac{m_i(\xi_e) m_j(\xi_e)}{E I(\xi_e)} + \frac{n_i(\xi_e) n_j(\xi_e)}{E A(\xi_e)} \right] d\xi_e; \quad (276)$$

zbroj se pritom proteže po svim štapnim elementima sistema, a  $\xi_e$  označava lokalne koordinatne osi pojedinih elemenata.

Za  $i \neq j$  može biti  $\delta_{i,j} \geq 0$ ; negativna vrijednost znači da su pomak i sila, po pravcu koje se taj pomak odvija, suprotno orijentirani. Uvijek je, međutim,  $\delta_{i,i} > 0$ , jer su u

$$\delta_{i,i} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left[ \frac{m_i^2(\xi_e)}{E I(\xi_e)} + \frac{n_i^2(\xi_e)}{E A(\xi_e)} \right] d\xi_e$$

podintegralne funkcije pozitivne.

Budući da je

$$\delta_{i,j} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left( \frac{m_i m_j}{E I} + \frac{n_i n_j}{E A} \right) dx = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} \left( \frac{m_j m_i}{E I} + \frac{n_j n_i}{E A} \right) dx = \delta_{j,i},$$

matrica  $\mathbf{D}$  je *simetrična*.<sup>37</sup> Može se pokazati da je ta matrica i pozitivno definitna. Prisetit ćemo se definicije iz linearne algebre: matrica  $\mathbf{A}$  je *pozitivno definitna* ako (i samo ako) je  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$  za svaki vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  i  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$  za  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Komponente  $\delta_{i,0}$  vektora  $\Delta$  vrijednosti su pomakâ hvatištâ sila  $\vec{X}_i$  po pravcima njihova djelovanja, izazvanih zadanim vanjskim utjecajima:

$$\delta_{i,0} = \sum_{(e)} \int_0^{\ell_e} [m_i(\xi_e) \kappa_0(\xi_e) + n_i(\xi_e) \varepsilon_0(\xi_e)] d\xi_e + \bar{\delta}_{i,0}, \quad (277)$$

<sup>36</sup> Kako u ravninskom slučaju i vektori zaokretâ i vektori momenata leže na pravcima koji su okomiti na tu ravninu, projekcije vektorâ zaokretâ na pravce određene vektorima momenata jednake su samim vektorima zaokretâ, pa ćemo jednostavno govoriti o zaokretima i o kutovima zaokreta.

<sup>37</sup> Riječ je o poznatu nam Maxwellovu teoremu o uzajamnosti pomakâ: vrijednost pomaka hvatišta prve jedinične sile po pravcu njezina djelovanja, izazvana drugom jediničnom silom, jednaka je vrijednosti pomaka hvatišta druge sile po pravcu njezina djelovanja, izazvana prvom jediničnom silom.

pri čemu su

$$\kappa_0(\xi_e) = \frac{M_0(\xi_e)}{E I(\xi_e)} + \alpha_t \frac{\Delta t(\xi_e)}{h(\xi_e)}, \quad (278)$$

$$\varepsilon_0(\xi_e) = \frac{N_0(\xi_e)}{E A(\xi_e)} + \alpha_t t_s(\xi_e). \quad (279)$$

Članovi koji sadrže  $\Delta t$  i  $t_s$  izražavaju utjecaj temperaturnih promjena na pomake;  $\Delta t$  je razlika temperatura na „donjem” i „gornjem” rubu poprečnog presjeka visine  $h$ , dok je  $t_s$  srednja temperatura u presjeku. Pribrojnikom  $\bar{\delta}_{i,0}$  u izrazu (277) u nekim ćemo slučajevima obuhvatiti utjecaj prisilnih pomaka (podrobnije o tome u odjeljku 11.6.).

Nejednakost  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{DX} > 0$ , koja izražava pozitivnu definitnost matrice  $\mathbf{D}$ , ima i mehaničku interpretaciju. Komponente  $X_i$  vektora  $\mathbf{X}$  vrijednosti su neodređenih sila. Umnožak  $\mathbf{DX}$  matrice  $\mathbf{D}$  i vektora  $\mathbf{X}$  također je vektor. Njegova  $i$ -ta komponenta  $\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j$  vrijednost je pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_i$  po pravcu njezina djelovanja zbog zajedničkoga djelovanja svih sila  $\vec{X}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Skalarnim produktom

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{DX} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j \right)$$

izražen je stoga ukupan rad skupa sila  $\{\vec{X}_j\}_{j=1}^n$  na pomacima koje su zajedničkim djelovanjem izazvale — svaki je pribrojnik u tom zbroju izraz rada jedne od sila  $\vec{X}_i$  na pomaku njezina hvatišta, izazvanom djelovanjem svih  $n$  sila. Iz jednadžbe (274) je  $\mathbf{DX} = -\Delta$ ; iskazana po komponentama, ta vektorska jednakost prelazi u niz jednadžbi

$$\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j = -\delta_{i,0}, \quad i = 1, \dots, n;$$

dakle, ukupan je pomak hvatišta sile  $\vec{X}_i$  po pravcu njezina djelovanja zbog zajedničkog djelovanja svih  $n$  neodređenih sila po duljini ili kao kut jednak, a po smislu suprotan pomaku izazvanom zadanim djelovanjima. Sada je

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{DX} = \mathbf{X} \cdot (-\Delta) = -\mathbf{X} \cdot \Delta,$$

pa iz  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{DX} > 0$  slijedi  $\mathbf{X} \cdot \Delta < 0$ ; prema tome, ukupan je rad skupa sila  $\{\vec{X}_j\}_{j=1}^n$  na pomacima zbog zadanih djelovanja negativan. Drugim riječima, neodređene se sile odupiru pomacima koje izazivaju zadana djelovanja. Pođemo li sada od te očite činjenice (očite jer su neodređene sile u stvari reakcije ili unutarne sile u izvornome statički neodređenu nosaču) unazad kroz prethodni izvod, možemo ga smatrati intuitivnim, „mehaničkim” dokazom tvrđnje da je matrica popustljivosti pozitivno definitna.

## 11.4. Rješavanje sustava jednadžbi kompatibilnosti

Iz linearne je algebre poznato da za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  postoji niz postupaka koji se mogu razvrstati u direktne i iteracijske. *Direktni postupci* daju točno rješenje sustava u konačnom broju koraka, uz pretpostavku da nema

grešaka zaokruživanja. U *iteracijskim postupcima* izračunavamo niz približnih rješenja  $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots$  koja se sve više približavaju točnu rješenju. Za točno bi rješenje trebalo beskonačno mnogo koraka, ali postupak prekidamo kad ocijenimo da je greška aproksimacije dovoljno mala. Važna podskupina iteracijskih postupaka, posebice u tehničkim primjenama, relaksacijski su postupci: dok se u „običnim” iteracijskim postupcima u svakom koraku izračunavaju cjelovite vrijednosti nepoznanica, pri *relaksaciji* se izračunavaju samo njihovi prirasti.

### 11.4.1. Gaussov postupak

Za razmjerno male sustave jednadžbi direktni su postupci učinkovitiji. Ti su postupci većinom<sup>38</sup> različite varijacije *Gaussova eliminacijskog postupka* čiji je sažeto iskazani algoritam: višekratnici svake jednadžbe redom oduzimaju se od svih jednadžbi iza nje tako da se u tim jednadžbama ponište članovi ispod glavne dijagonale. Početni se sustav jednadžbi time prevodi u gornji trokutasti sustav. Potom se *uvrštavanjem unazad* izračunavaju vrijednosti nepoznanica. Neki od tih postupaka uzimaju u obzir i specifičnu strukturu ili algebarska svojstva matrice sustava; tako je *postupak Choleskoga* primjenjiv samo na simetrične pozitivno definitne sustave.

U prethodnome smo odjeljku pokazali da je opći oblik jednadžbi kompatibilnosti za odabrani osnovni sistem dva puta statički neodređena sistema

$$\begin{aligned}\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 &= -\delta_{1,0}, \\ \delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 &= -\delta_{2,0}.\end{aligned}$$

Rješit ćemo ga Gausovim eliminacijskim postupkom s uvrštavanjem unazad:

Da „eliminiramo” prvi član druge jednadžbe, prvu ćemo jednadžbu pomnožiti s  $\delta_{2,1}/\delta_{1,1}$  i oduzeti je od druge. Sustav time prelazi u

$$\begin{aligned}\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 &= -\delta_{1,0}, \\ \delta_{2,2}^{(1)} X_2 &= -\delta_{2,0}^{(1)},\end{aligned}$$

gdje su

$$\delta_{2,2}^{(1)} = \delta_{2,2} - \frac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}} \delta_{1,2} \quad \text{i} \quad \delta_{2,0}^{(1)} = \delta_{2,0} - \frac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}} \delta_{1,0}.$$

Iz druge jednadžbe možemo sada neposredno izračunati vrijednost nepoznanice  $X_2$ . Uvrstimo li dobivenu vrijednost u prvu jednadžbu, u njoj kao jedina nepoznanica ostaje  $X_1$ , pa možemo izračunati i njezinu vrijednost.

U odjeljku 11.2. izračunali smo koeficijente fleksibilnosti i slobodne članove za osnovni sistem sa slike 147.b. za kontinuirani nosač prikazan na slici 147.a., pa je sustav jednadžbi kompatibilnosti, nakon množenja s  $EI$ ,

$$\begin{aligned}23,84 X_1 + 17,45 X_2 &= 3870,0, \\ 17,45 X_1 + 17,43 X_2 &= 3060,6.\end{aligned}$$

<sup>38</sup> Vrlo mali sustavi, s dvije ili tri jednadžbe, mogu se razmjerno brzo i jednostavno direktno riješiti i s pomoću determinanata.

Pomnožimo li prvu jednadžbu s  $\frac{17,45}{23,84}$  i oduzmemo li je od druge, druga jednadžba prelazi u

$$4,66 X_2 = 227,9.$$

Ta jednadžba daje  $X_2 = 48,91$ ; uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo  $X_1 = 126,53$ .

[Izračunajte vrijednosti statički neodređenih veličina za osnovni sistem prikazan na slici 148.b.]

### 11.4.2. Mehanička interpretacija

Jednadžbama dobivenima u pojedinim koracima Gaussova eliminacijskog postupka možemo dati i mehaničku interpretaciju [21].

Jednostavnosti radi, ograničit ćemo se zasad na dva puta statički neodređeni sistem; ponovo, primjerice, na kontinuirani nosač prikazan na slici 147.a. na stranici 239. Za osnovni ćemo sistem uzeti i sada jednostavno oslonjenu gredu sa slike 147.b.

Djeluju li na osnovni sistem samo sila  $\vec{X}_1$  i jedinična sila u hvatištu, na pravcu i u smislu djelovanja sile  $\vec{X}_2$ , orijentirana duljina pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_1$  po pravcu njezina djelovanja bit će  $X_1 \delta_{1,1} + \delta_{1,2}$ ; želimo li da taj pomak iščezne,  $X_1 \delta_{1,1} + \delta_{1,2} = 0$ , vrijednost sile  $\vec{X}_1$  mora biti  $X_1 = -\delta_{1,2}/\delta_{1,1}$ . Uz tu je vrijednost orijentirana duljina pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_2$  po pravcu njezina djelovanja

$$X_1 \delta_{2,1} + \delta_{2,2} = -\frac{\delta_{1,2}}{\delta_{1,1}} \delta_{2,1} + \delta_{2,2} = \delta_{2,2} - \frac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}} \delta_{1,2} = \delta_{2,2}^{(1)},$$

a to je koeficijent uz  $X_2$  u drugoj jednadžbi dobivenoj u prvom koraku eliminacije. Pri djelovanju sile  $\vec{X}_1$  i  $\vec{X}_2$  vrijednost sile  $\vec{X}_1$  potrebna za iščezavanje pomaka njezina hvatišta bit će  $X_1 = -X_2 \delta_{1,2}/\delta_{1,1}$ , pa će orijentirana duljina pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_2$  biti  $X_2 \delta_{2,2}^{(1)}$ .

Na sličan način možemo izvesti izraz za slobodni član  $\delta_{2,0}^{(1)}$  spomenute jednadžbe. Djeluju li na osnovni sistem sila  $\vec{X}_1$  i zadano opterećenje, ali ne i sila  $\vec{X}_2$ , orijentirana pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_1$  jest  $X_1 \delta_{1,1} + \delta_{1,0}$ , pa za njegovo iščezavanje mora biti  $X_1 = -\delta_{1,0}/\delta_{1,1}$ . Orijetirana je duljina pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_2$  sada

$$\delta_{2,0} + X_1 \delta_{2,1} = \delta_{2,0} - \frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} \delta_{2,1} = \delta_{2,0}^{(1)}.$$

Ukupna je vrijednost sile  $\vec{X}_1$ , potrebna za iščezavanje pomaka njezina hvatišta pri istodobnu djelovanju sila  $\vec{X}_1$ ,  $\vec{X}_2$  i zadana opterećenja

$$X_1 = -X_2 \frac{\delta_{1,2}}{\delta_{1,1}} - \frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}};$$

to je, naravno, upravo ona vrijednost koja zadovoljava prvu jednadžbu kompatibilnosti. Pritom je orijentirana duljina pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_2$

$$X_1 \delta_{2,1} + X_2 \delta_{2,2} + \delta_{2,0} = X_2 \delta_{2,2}^{(1)} + \delta_{2,0}^{(1)}.$$

Prema tome, druga jednadžba dobivena u prvom koraku eliminacije izražava uvjet kompatibilnosti pomaka u hvatištu sile  $\vec{X}_2$  ako je prvi uvjet, izražen prvom jednadžbom, zadovoljen. Kako zadovoljenje prvoga uvjeta znači da je hvatište sile  $\vec{X}_1$  po pravcu njezina djelovanja nepomično, možemo reći i da druga jednadžba dobivena u prvom koraku eliminacije izražava uvjet

kompatibilnosti za osnovni sistem koji iz zadanoga sistema nastaje raskidanjem veze koja je zamijenjena neodređenom silom  $\vec{X}_2$ ; prvu vezu ne raskidamo, pa je taj osnovni sistem jedanput statički neodređen.

Rečeno se može poopćiti na višestruko statički neodređene sisteme: jednačbe dobivene u prvom koraku eliminacije jednačbe su kompatibilnosti za jedanput statički neodređeni osnovni sistem u kojem nije raskinuta veza koju na statički određenu osnovnom sistemu zamjenjuje prva neodređena veličina. Jednačbe dobivene u drugom koraku jednačbe su kompatibilnosti za dva puta statički neodređeni osnovni sistem u kojem nisu raskinute prva i druga veza. I tako dalje.

### 11.4.3. Iteracijski postupak

U prvom smo dijelu prethodnoga odjeljka pokazali da uvjete kompatibilnosti pomakâ ne možemo zadovoljavati pojedinačno, jedan neovisno o ostalima, jer svaka neodređena sila utječe i na pomake hvatišta svih drugih neodređenih sila. Formalni je izraz tih uvjeta stoga sustav jednačbi. Zamisao neovisnoga zadovoljavanja uvjetâ može se, međutim, preoblikovati u iteracijski postupak rješavanja tog sustava.

Pokazat ćemo to ponovo najprije na sustavu dviju jednačbi (primjerice, za dobro nam već poznati nosač sa slike 149.a., uz osnovni sistem sa slike 149.b.), a zatim poopćiti na sustav  $n$  jednačbi.

Vrijednost sile  $\vec{X}_2$  koju smo izračunali iz uvjeta

$$\delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,0} = 0$$

možemo smatrati početnom približnom vrijednošću; označit ćemo je sa  $X_2^{(0)}$ . Djeluju li na nosač zadano opterećenje i sila  $\vec{X}_2$  s vrijednošću  $X_2^{(0)}$ , u njezinu će hvatištu uvjet kompatibilnosti biti zadovoljen (slika 149.d.). Pritom je orijentirana duljina pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_1$  po pravcu njezina djelovanja

$$\delta_1^{(1)} = \delta_{1,0} + \delta_{1,2} X_2^{(0)}.$$

Taj pomak poništava sila  $\vec{X}_1$  čija je vrijednost

$$X_1^{(1)} = -\frac{\delta_1^{(1)}}{\delta_{1,1}} = -\frac{1}{\delta_{1,1}} (\delta_{1,0} + \delta_{1,2} X_2^{(0)}).$$

No, nanesimo li na nosač i tu silu, hvatište sile  $\vec{X}_2$  ponovo će se pomaknuti (slika 149.e.); orijentirana je duljina ukupnoga pomaka te točke

$$\delta_2^{(1)} = \delta_{2,0} + \delta_{2,1} X_1^{(1)} + \delta_{2,2} X_2^{(0)}.$$

Da ga poništimo, sili  $\vec{X}_2$  moramo pribrojiti silu na istom pravcu čija je vrijednost

$$\Delta X_2^{(1)} = -\frac{\delta_2^{(1)}}{\delta_{2,2}} = -\frac{1}{\delta_{2,2}} (\delta_{2,0} + \delta_{2,1} X_1^{(1)} + \delta_{2,2} X_2^{(0)});$$

ukupna će vrijednost sile  $\vec{X}_2$  tada biti  $X_2^{(1)} = X_2^{(0)} + \Delta X_2^{(1)}$ . Naravno, zbog promjene vrijednosti sile  $\vec{X}_2$  ponovo će se pomaknuti i hvatište sile  $\vec{X}_1$ . Sili  $\vec{X}_1$  moramo stoga pribrojiti silu s vrijednošću

$$\Delta X_1^{(2)} = -\frac{1}{\delta_{1,1}} (\delta_{1,0} + \delta_{1,1} X_1^{(1)} + \delta_{1,2} X_2^{(1)}),$$

pa će njezina nova vrijednost biti  $X_1^{(2)} = X_1^{(1)} + \Delta X_1^{(2)}$ . I tako dalje: u nizu koraka naizmjenice „popravljamo” vrijednosti sila  $\vec{X}_1$  i  $\vec{X}_2$  kako bismo zadovoljili uvjete kompatibilnosti narušene promjenom tih vrijednosti u prethodnome koraku. Ako su  $X_1^{(k)}$  i  $X_2^{(k)}$  vrijednosti sila izračunane u  $k$ -tom koraku, potrebni „popravci” su

$$\begin{aligned}\Delta X_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{\delta_{1,1}} \left( \delta_{1,0} + \delta_{1,1} X_1^{(k)} + \delta_{1,2} X_2^{(k)} \right), \\ \Delta X_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{\delta_{2,2}} \left( \delta_{2,0} + \delta_{2,1} X_1^{(k+1)} + \delta_{2,2} X_2^{(k)} \right),\end{aligned}$$

pa su vrijednosti sila u  $(k+1)$ -om koraku  $X_1^{(k+1)} = X_1^{(k)} + \Delta X_1^{(k+1)}$  i  $X_2^{(k+1)} = X_2^{(k)} + \Delta X_2^{(k+1)}$ .

Budući da u svakom koraku izračunavamo *priraste* vrijednosti sila, opisani je postupak relaksacijski, ali ga prebacivanjem veličina  $X_1^{(k)}$  i  $X_2^{(k)}$  na lijeve strane izrazâ možemo lako preoblikovati u „običnu” iteraciju:

$$\begin{aligned}X_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{\delta_{1,1}} \left( \delta_{1,0} + \delta_{1,2} X_2^{(k)} \right), \\ X_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{\delta_{2,2}} \left( \delta_{2,0} + \delta_{2,1} X_1^{(k+1)} \right).\end{aligned}$$

Te izraze možemo neposredno izvesti i iz jednadžbi kompatibilnosti: ako je  $X_2^{(k)}$  vrijednost sile  $\vec{X}_2$ , vrijednost  $X_1^{(k+1)}$  sile  $\vec{X}_1$  mora zadovoljiti jednadžbu

$$\delta_{1,1} X_1^{(k+1)} + \delta_{1,2} X_2^{(k)} + \delta_{1,0} = 0;$$

potom, uz tu, novu, vrijednost sile  $\vec{X}_1$ , popravljena vrijednost  $X_2^{(k+1)}$  mora zadovoljiti jednadžbu

$$\delta_{2,1} X_1^{(k+1)} + \delta_{2,2} X_2^{(k+1)} + \delta_{2,0} = 0.$$

Izraz za izračunavanje vrijednosti sile u  $(k+1)$ -om koraku može se poopćiti za sustav  $n$  jednadžbi:

$$X_i^{(k+1)} = -\frac{1}{\delta_{i,i}} \left( \delta_{i,0} + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{i,j} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n \delta_{i,j} X_j^{(k)} \right).$$

Taj izraz prepoznamo kao zapis jednoga „malog” koraka Gauss–Seidelova iteracijskog postupka; „malim” korakom nazivamo izračunavanje približne vrijednosti  $i$ -te nepoznanice u  $k$ -tom „velikom” koraku koji obuhvaća izračunavanje približnih vrijednosti svih  $n$  nepoznanica. Kao vrijednosti za početak iteracije možemo, primjerice, uzeti  $X_i^{(0)} = \delta_{i,0}/\delta_{i,i}$ , ali i, jednostavno,  $X_i^{(0)} = 0$ .

Gauss–Seidelovim iteracijskim postupkom riješit ćemo sustav koji smo već riješili Gaussovim eliminacijskim postupkom. Prvo ćemo sustav izraziti u obliku pogodnom za iteracijsko rješavanje:

$$\begin{aligned}X_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{23,84} \left( 3870,0 + 17,45 X_2^{(k)} \right), \\ X_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{17,43} \left( 3060,6 + 17,45 X_1^{(k+1)} \right).\end{aligned}$$

(U općem slučaju sustava sa  $n$  jednadžbi, u  $i$ -toj jednadžbi lijevo od znaka jednakosti ostavljamo samo  $i$ -tu nepoznanicu, a sve ostalo prebacujemo na desnu stranu.)

Za početak iteriranja odabrat ćemo vrijednost  $X_2^{(0)} = 3060,6/17,43 = 175,56$ . Dio uzastopnih približnih vrijednosti dan je u tablici:

$k$	0	1	2	3	4	...	22	23	24	25
$X_1$		33,83	58,69	76,74	90,04		126,38	126,41	126,44	126,46
$X_2$	175,56	141,73	116,93	98,76	85,45		49,07	49,03	49,01	48,90

Postupak razmjerno sporo konvergira, pa nije prikladan za „ručni” proračun. Konvergencija se može ubrzati uvođenjem relaksacijskoga parametra  $\omega$ ; ako je  $\omega > 1$ , postupak se naziva *uzastopnim prekoračenjem* (engl. *successive overrelaxation*), a ako je  $\omega < 1$ , *uzastopnim potkoračenjem* (engl. *successive underrelaxation*). U načine odabira prikladnih vrijednosti parametra  $\omega$  ovdje nećemo ulaziti, pa nećemo čak ni navesti opći oblik jednadžbe u koju je parametar uključen. No, zamisao je ... recimo ... jednostavna: budući da znamo da ćemo u sljedećem koraku pokvariti ono što smo u ovom koraku napravili, štetu možemo pokušati ublažiti tako da u ovom koraku odemo predaleko ili nedovoljno daleko.

Treba još napomenuti i to da se kod iteracijskih/relaksacijskih postupaka uvijek postavlja pitanje konvergiraju li uopće ili pod kojim uvjetima konvergiraju. Ni u to nećemo ulaziti; zadovoljit ćemo se slutnjom, utemeljenom na fizičkoj interpretaciji — postojanju stvarnoga stanja ravnoteže, da će opisani postupak konvergirati primijenimo li ga u rješavanju sustava jednadžbi kompatibilnosti.

## 11.5. Sile u statički neodređenim nosačima

Osnovni sistem, koji je uz zadana djelovanja opterećen i neodređenim silama i momentima vrijednosti kojih su rješenja jednadžbi kompatibilnosti<sup>39</sup>, nalazi se u istom mehaničkom stanju kao i zadani statički neodređeni sistem pod zadanim djelovanjima — vrijednosti neodređenih veličina u osnovnom sistemu jednake su vrijednostima reakcija ili unutarnjih sila u zadanu sistemu na mjestima zamišljenih prekida. Iz uvjeta ravnoteže neposredno slijedi da su i vrijednosti ostalih statičkih veličina jednake, pa će se poklapati i njihove progibne linije.

Neka  $\mathfrak{F}$  označava vrijednost neke statičke ili kinematičke veličine zbog zadanih djelovanja na zadanom statički neodređenu sistemu; to može biti reakcija, unutarnja sila u odabranu presjeku, pomak odabrane točke ... Na temelju jednakosti mehaničkih stanja zadanoga i osnovnog sistema možemo primjenom principa superpozicije pisati

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \sum_{i=1}^n \mathfrak{F}_i,$$

gdje  $\mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , označava vrijednost odgovarajuće statičke ili kinematičke veličine u osnovnom sistemu zbog sile  $\vec{X}_i$ , a  $\mathfrak{F}_0$  vrijednost odgovarajuće veličine, također u osnovnom sistemu, od zadanih djelovanja. Dakle, vrijednost bilo koje veličine u statički neodređenu sistemu možemo izračunati kao algebarski zbroj vrijednosti te veličine u osnovnom sistemu zbog zadanih djelovanja i zbog statički neodređenih veličina.

Označimo li s  $f_i$  odgovarajuću statičku ili kinematičku veličinu na osnovnom sistemu zbog jedinične sile koja djeluje u hvatištu, na pravcu  $i$  u smislu sile  $\vec{X}_i$ , dobivamo

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \sum_{i=1}^n X_i f_i. \quad (280)$$

<sup>39</sup> Iako su im nakon rješavanja jednadžbi kompatibilnosti vrijednosti određene, zadržat ćemo oksimoronski naziv neodređene sile i momenti.

Formalno isti zapis možemo upotrijebiti i za funkcijske izraze za vrijednosti unutarnjih sila u statički neodređenu nosaču,

$$M(x) = M_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i m_i(x), \quad (281)$$

$$T(x) = T_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i t_i(x), \quad (282)$$

$$N(x) = N_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i n_i(x), \quad (283)$$

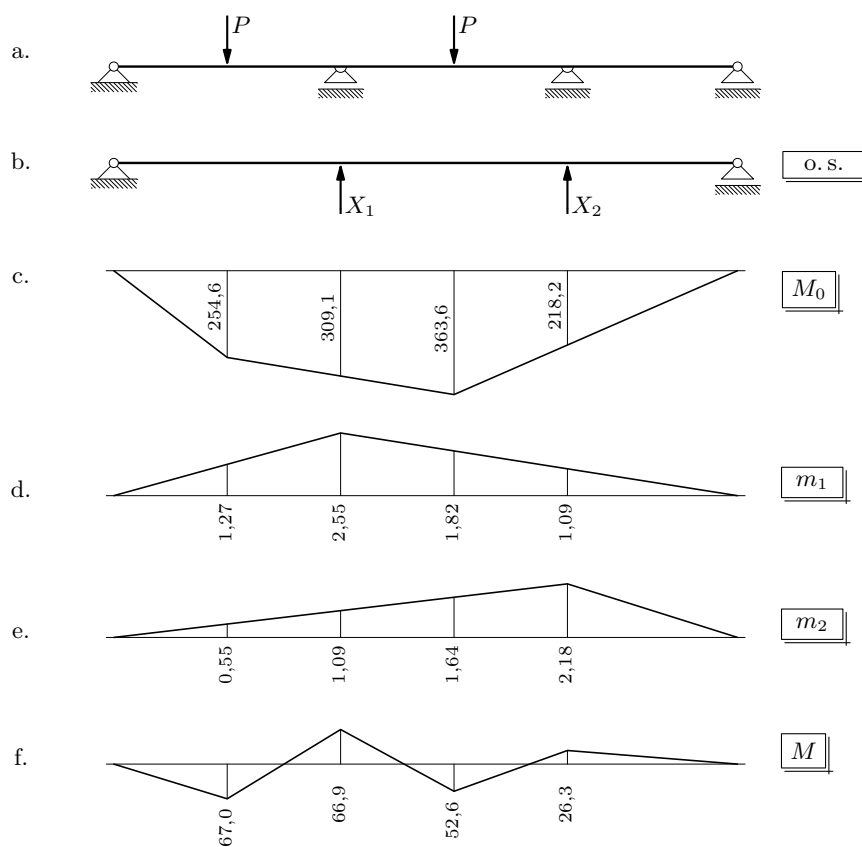
i za njegovu progibnu liniju,

$$w(x) = w_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i w_i(x).$$

Nacrtat ćemo dijagram momenata savijanja u našem kontinuiranom nosaču, ponovo prikazanu na slici 151.a. U prethodnom smo odjeljku izračunali vrijednosti prekobrojnih sila u osnovnom sistemu sa slike 151.b.:

$$X_1 = 126,53 \text{ kN},$$

$$X_2 = 48,91 \text{ kN}.$$



Slika 151.



Vrijednosti momenata u karakterističnim točkama — u hvatištima zadanih sila ( $x_1 = 2$ ;  $x_3 = 6$ ) i iznad drugoga i trećeg ležaja ( $x_2 = 4$ ;  $x_4 = 8$ ) — izračunat ćemo prema izrazu (281):

$$\begin{aligned}
 M(x_1) &= M_0(x_1) + X_1 m_1(x_1) + X_2 m_2(x_1) \\
 &= 254,6 + 126,53 \cdot (-1,27) + 48,91 \cdot (-0,55) = 67,0 \text{ kNm}, \\
 M(x_2) &= M_0(x_2) + X_1 m_1(x_2) + X_2 m_2(x_2) \\
 &= 309,1 + 126,53 \cdot (-2,55) + 48,91 \cdot (-1,09) = -66,9 \text{ kNm}, \\
 M(x_3) &= M_0(x_3) + X_1 m_1(x_3) + X_2 m_2(x_3) \\
 &= 363,6 + 126,53 \cdot (-1,82) + 48,91 \cdot (-1,64) = 52,6 \text{ kNm}, \\
 M(x_4) &= M_0(x_4) + X_1 m_1(x_4) + X_2 m_2(x_4) \\
 &= 218,2 + 126,53 \cdot (-1,09) + 48,91 \cdot (-2,18) = -26,3 \text{ kNm}.
 \end{aligned}$$

Dijagrami  $M_0$ ,  $m_1$  i  $m_2$  prikazani su na slikama 151.c., d. i e., a konačni momentni dijagram na slici 151.f.

[Nacrtajte dijagram poprečnih sila primjenom izraza (282) ili primjenom diferencijalnih odnosa! Nacrtajte dijagrame momenata savijanja i poprečnih sila na zadanom kontinuiranom nosaču uz proračun s osnovnim sistemom sa slike 148.b. na stranici 240!]

## 11.6. Prisilni pomaci ležajeva

Jedna od karakteristika statički neodređenih sistema pojava je reakcija i unutarnjih sila ne samo pod djelovanjem opterećenja već i zbog prisilnih pomaka te pri promjenama temperature (karakteristika 3. na stranici 222.). Utjecaj temperaturnih promjena na savijanje i na produljenje/skraćenje dijelova sistema lako je obuhvatiti dodatnim pribrojnicima u izrazu za slobodne članove  $\delta_{i,0}$  — izrazi (277), (278) i (279) na stranici 244. Uvažavanje prisilnih pomaka nešto je složenije: oblik jednadžbi kompatibilnosti ovisi o izboru osnovnoga sistema, pa treba razlikovati dva slučaja.

U ovom ćemo odjeljku obraditi prisilne pomake ležajeva. To mogu biti translacijski pomaci pomičnih ili nepomičnih ležajeva po pravcima po kojima ti ležajevi sprečavaju slobodne pomake te zaokreti nepomično ili pomično upetih ležajeva. Osim pomaka ležajeva, u prisilne se pomake ubrajaju i pomaci prouzročeni netočnošću izvedbe.

Jednostavnosti radi, pretpostavimo da je zadan samo jedan prisilni pomak. Osnovni sistem oblikovat ćemo tako da u ležaju sa zadanim pomakom raskinemo vezu koja takav pomak sprečava. Statički neodređenu veličinu, koju uvodimo umjesto raskinute veze, označit ćemo s  $\vec{X}_\ell$ . Njezino je hvatište, prema tome, u točki čiji je pomak zadan, a pravac djelovanja poklapa se s pravcem tog pomaka.

Prema pripadnome uvjetu kompatibilnosti, zbroj pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_\ell$  po pravcu njezina djelovanja, izazvanih zadanim opterećenjima, promjenama temperature i svim neodređenim silama, mora biti jednak pomaku odgovarajuće točke izvornoga neodređenog sistema po odgovarajućem pravcu. Kako je na izvornom sistemu u toj točki i po tom

pravcu zadan prisilni pomak, ukupni pomak hvatišta sile  $\vec{X}_\ell$  mora biti jednak zadanom prisilnom pomaku, pa je  $\ell$ -ta jednadžba kompatibilnosti

$$\sum_{j=1}^n \delta_{\ell,j} X_j + \delta_{\ell,0} = \bar{\delta}_\ell; \quad (284)$$

s  $\bar{\delta}_\ell$  smo označili vrijednost zadanoga prisilnog pomaka. Predznak te vrijednosti određuje orijentacija pomaka: ako su pomak i sila  $\vec{X}_\ell$  jednako orijentirani, vrijednost je pozitivna, a ako su orijentirani suprotno, vrijednost je negativna.

Naglašavamo: vrijednost prisilnoga pomaka  $\bar{\delta}$  dolazi na desnu stranu jednadžbe — konačni pomak osnovnog sistema, čija je vrijednost jednaka zbroju s lijeve strane znaka jednakosti, ne iščezava, nego mora biti jednak prisilnom pomaku.

No, relativni ili apsolutni pomaci hvatišta ostalih sila  $\vec{X}_i$ ,  $i \neq \ell$ , po pravcima njihova djelovanja moraju i sada iščeznuti, pa su ostale jednadžbe kompatibilnosti kao i prije

$$\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j + \delta_{i,0} = 0 \quad \text{za } i \neq \ell.$$

Slobodni članovi  $\delta_{i,0}$  u svim jednadžbama,  $i \in [1, n]$ , obuhvaćaju utjecaje zadanih opterećenja i promjena temperature.

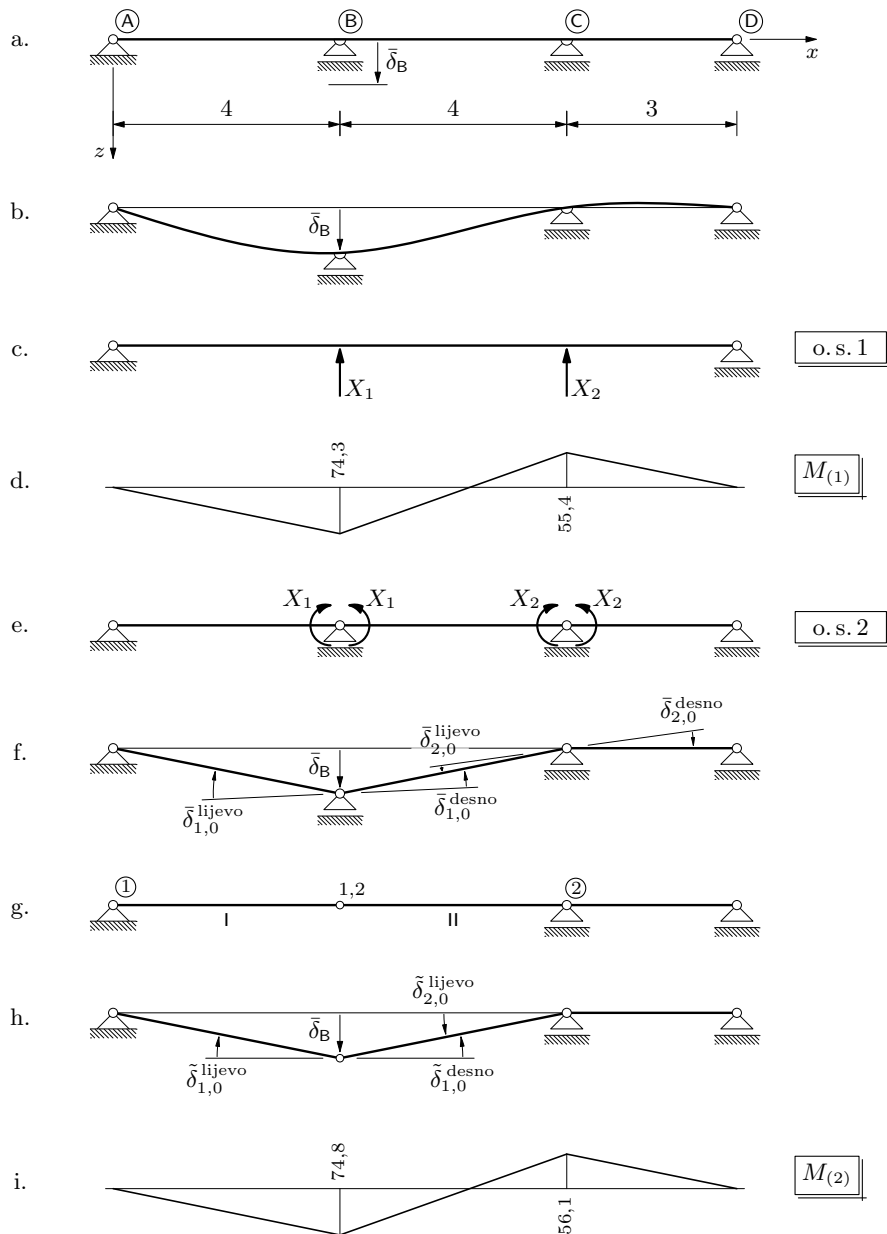
Druga je mogućnost da osnovni sistem odaberemo tako da ni jedna neodređena sila ne djeluje na pravcu prisilnoga pomaka u točki čiji je pomak zadan. (Ako je njezino hvatište u toj točki, tada sila ne djeluje na pravcu pomaka; ako se pak pravci sile i pomaka poklapaju, hvatište sile nije točka sa zadanim pomakom.)

Na takvom osnovnom sistemu svi pomaci, i apsolutni i relativni, po pravcima raskinutih veza, moraju iščeznuti. Uvjete kompatibilnosti pomakâ izražava, prema tome, sustav jednadžbi (272) na stranici 243., s ništicama na desnim stranama svih jednadžbi. Mogući utjecaji prisilnoga pomaka ulaze sada u slobodne članove  $\delta_{i,0}$ . Da ih odredimo, raskidanjem pripadne veze osnovni sistem pretvaramo u mehanizam, crtamo dijagrame projekcija pomakâ za zadani pomak i iz njih očitavamo vrijednosti  $\bar{\delta}_{i,0}$  odgovarajućih pomaka hvatišta sile  $\vec{X}_i$  koje pribrajamo ostalim vrijednostima  $\delta_{i,0}$ , izračunanim za utjecaje opterećenjâ i temperaturnih promjena.

Obje ćemo mogućnosti i oba postupka podrobnije razjasniti primjerom poznatoga nam već kontinuirana nosača sa četiri ležaja. Neka je zadano slijeganje drugoga ležaja,  $\bar{\delta}_B = 2 \text{ mm}$  (slika 152.a.). Progibna je linija skicirana na slici 152.b.— to je glatka krivulja koja prolazi točkama  $(x_A, 0)$ ,  $(x_B, \bar{\delta}_B)$ ,  $(x_C, 0)$  i  $(x_D, 0)$ .

Za osnovni ćemo sistem prvo odabrati prostu gredu koja nastaje uklanjanjem drugoga i trećeg ležaja (slika 152.c.). (Znamo, nije to najpovoljniji osnovni sistem, ali razjašnjenja radi...) Pomak  $\bar{\delta}_B$  zadan je u točki koja odgovara hvatištu neodređene sile  $\vec{X}_1$ , a pravac po kojemu se odvija poklapa se s pravcem djelovanja te sile. Stoga je prvi uvjet kompatibilnosti, koji opisuje pomak hvatišta sile  $\vec{X}_1$  po pravcu njezina djelovanja, izražen jednadžbom

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \delta_{1,0} = -\bar{\delta}_B;$$



Slika 152.

na desnoj je strani uz  $\bar{\delta}_B$  negativan predznak, jer zadani pomak i sila  $\bar{X}_1$  imaju suprotan smisao. Prema drugom se uvjetu kompatibilnosti hvatište sile  $\bar{X}_2$  ne smije pomaknuti po pravcu njezina djelovanja, pa je druga jednadžba kompatibilnosti

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,0} = 0.$$

Kako u zadatku osim prisilnoga pomaka nema drugih djelovanja, bit će  $\delta_{1,0} = 0$  i  $\delta_{2,0} = 0$ , pa je konačni oblik jednadžbi kompatibilnosti

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 = -\bar{\delta}_B,$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 = 0.$$

Uvrštavanjem koeficijenata fleksibilnosti  $\delta_{i,j}$  koje smo za odabrani osnovni sistem izračunali na stranicama 238.–240., sustav jednadžbi nakon množenja sa  $EI$  postaje

$$\begin{aligned} 23,84 X_1 + 17,45 X_2 &= -0,002 EI, \\ 17,45 X_1 + 17,43 X_2 &= 0; \end{aligned}$$

njegovo je rješenje:  $X_1 = -0,000314 EI$  i  $X_2 = 0,000314 EI$ .

Ako je poprečni presjek grede  $b/h = 30/60$  [cm] i ako je modul elastičnosti gradiva  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>, tada su  $X_1 = -50,87$  i  $X_2 = 50,87$ . Momentni je dijagram prikazan na slici 152.d. Vrijednosti momenata u karakterističnim točkama, iznad ležajeva B i C, izračunali smo prema izrazu

$$M(x) = M_0(x) + X_1 m_1(x) + X_2 m_2(x) = X_1 m_1(x) + X_2 m_2(x);$$

dijagrame  $m_1$  i  $m_2$  možete pronaći na slici 147. na stranici 239. ili na slici 151. na stranici 251. Kako na statički određenim nosačima prisilni pomaci ležajeva ne izazivaju unutarnje sile,  $M_0(x) \equiv 0$ . Zapravo je besmisleno govoriti o utjecaju prisilnoga pomaka na odabrani osnovni sistem — u točki, koja odgovara ležaju kontinuiranoga nosača sa zadanim pomakom, osnovni sistem nema ležaja; raskinuli smo upravo tu ležajnu vezu. Tek nanošenjem sila  $\vec{X}_1$  i  $\vec{X}_2$ , i to s „pravim” vrijednostima, možemo progibnu liniju „protjerati” kroz zadane točke.

Povećamo li poprečni presjek grede na  $b/h = 30/90$  [cm], promijenit će se vrijednosti neodređenih sila:  $X_1 = -171,68$  i  $X_2 = 171,68$ , a time i vrijednosti reakcija i unutarnjih sila, posebice:  $M_B = 250,7$  kNm i  $M_C = -187,1$  kNm. Djeluju li na sistem samo različita opterećenja (koncentrirane sile i momenti, distribuirana opterećenja), vrijednosti unutarnjih sila i reakcija ovise o omjerima krutosti dijelova sistema (karakteristika 2. u prethodnome poglavlju, str. 222.), ali ne i o konkretnim vrijednostima tih krutosti. Međutim, kao što primjer pokazuje, vrijednosti sila izazvanih prisilnim pomacima promijenit će se i pri promjeni krutosti.

Isti ćemo zadatak riješiti i s pomoću osnovnoga sistema sa slike 152.e.— niza prostih greda nad pojedinim poljima kontinuiranog nosača. Sada ni  $\pm\vec{X}_1$  ni  $\pm\vec{X}_2$  ne djeluju na pravcu zadanoga pomaka. Par momenata  $\pm\vec{X}_1$ , doduše, djeluje u točki B, čiji je pomak zadan, ali paru momenata odgovara relativni zaokret, a ne translacijski pomak.

Takav osnovni sistem može zadovoljiti sve ležajne uvjete, uključujući slijeganje drugog ležaja (slika 152.f.). No, kao što na slici 152.b. vidimo, progibna linija kontinuiranog nosača glatka je i u točkama u koje smo pri oblikovanju osnovnog sistema umetnuli zglobove. Parovi momenata  $\pm\vec{X}_1$  i  $\pm\vec{X}_2$  moraju stoga poništiti relativne zaokrete za kutove  $\bar{\delta}_{1,0} = \bar{\delta}_{1,0}^{\text{lijevo}} + \bar{\delta}_{1,0}^{\text{desno}}$  i  $\bar{\delta}_{2,0} = \bar{\delta}_{2,0}^{\text{lijevo}} + \bar{\delta}_{2,0}^{\text{desno}}$ , pa su jednadžbe kompatibilnosti

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \bar{\delta}_{1,0} &= 0, \\ \delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 - \bar{\delta}_{2,0} &= 0. \end{aligned}$$

Obratite pozornost na predznake vrijednosti slobodnih članova — zaokreti  $\bar{\delta}_{1,0}^{\text{lijevo}}$  i  $\bar{\delta}_{1,0}^{\text{desno}}$  imaju isti smisao kao i momenti para  $\pm\vec{X}_1$ , dok je smisao zaokreta  $\bar{\delta}_{2,0}^{\text{lijevo}}$  i  $\bar{\delta}_{2,0}^{\text{desno}}$  suprotan od vrtnje momenata para  $\pm\vec{X}_2$ . (Kako nema drugih djelovanja,  $\delta_{1,0} = \bar{\delta}_{1,0}$  i  $\delta_{2,0} = -\bar{\delta}_{2,0}$ .)

Prema slici 152.f.,  $\bar{\delta}_{1,0}^{\text{lijevo}}$  i  $\bar{\delta}_{1,0}^{\text{desno}}$  kutovi su između tangente na progibnu liniju kontinuiranoga nosača u drugom ležaju i osi prostih greda nad prvim i drugim poljem nakon pomaka, dok su  $\bar{\delta}_{2,0}^{\text{lijevo}}$  i  $\bar{\delta}_{2,0}^{\text{desno}}$  kutovi između tangente na progibnu liniju u trećem ležaju i osi greda nad drugim i trećim poljem. Ali, kako nam nisu poznate ni progibna linija ni tangente u pojedinim njezinim točkama, na temelju slike (zapravo skice) 152.f. ne možemo odrediti kutove relativnih zaokreta  $\bar{\delta}_{1,0}$  i  $\bar{\delta}_{2,0}$ .

Progibna linija osnovnog sistema, prikazana na toj slici, može se nacrtati kao dijagram vertikalnih pomakâ mehanizma s jednim stupnjem slobode, koji nastaje iz osnovnoga sistema raskidanjem veze koja sprečava zadani pomak: slike 152.g. i h. Usporedbom slika 152.f. i h. lako je vidjeti da su

$$\bar{\delta}_{1,0} = \tilde{\delta}_{1,0}^{\text{lijevo}} + \tilde{\delta}_{1,0}^{\text{desno}} \quad \text{i} \quad \bar{\delta}_{2,0} = \tilde{\delta}_{2,0}^{\text{lijevo}},$$

gdje su

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{1,0}^{\text{lijevo}} &= \bar{\delta}_B / \ell_{AB} = 0,002/4 = 5,0 \cdot 10^{-4}, \\ \tilde{\delta}_{1,0}^{\text{desno}} &= \bar{\delta}_B / \ell_{BC} = 0,002/4 = 5,0 \cdot 10^{-4}, \\ \tilde{\delta}_{2,0}^{\text{lijevo}} &= \bar{\delta}_B / \ell_{BC} = 0,002/4 = 5,0 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Prema tome:

$$\bar{\delta}_{1,0} = 1,0 \cdot 10^{-3} \quad \text{i} \quad \bar{\delta}_{2,0} = 5,0 \cdot 10^{-4}.$$

Te vrijednosti i vrijednosti koeficijenata fleksibilnosti koje smo izračunali na stranicama 240. i 241. možemo sada uvrstiti u jednadžbe kompatibilnosti; nakon množenja sa  $EI$  dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} X_1 + \frac{2}{3} X_2 + 0,001 EI &= 0, \\ \frac{2}{3} X_1 + \frac{7}{3} X_2 - 0,0005 EI &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbi su  $X_1 = -0,000462 EI$  i  $X_2 = 0,000346 EI$ . To su ujedno konačne vrijednosti momenata nad ležajevima kontinuiranoga nosača — i sada možemo te vrijednosti izračunati prema izrazu

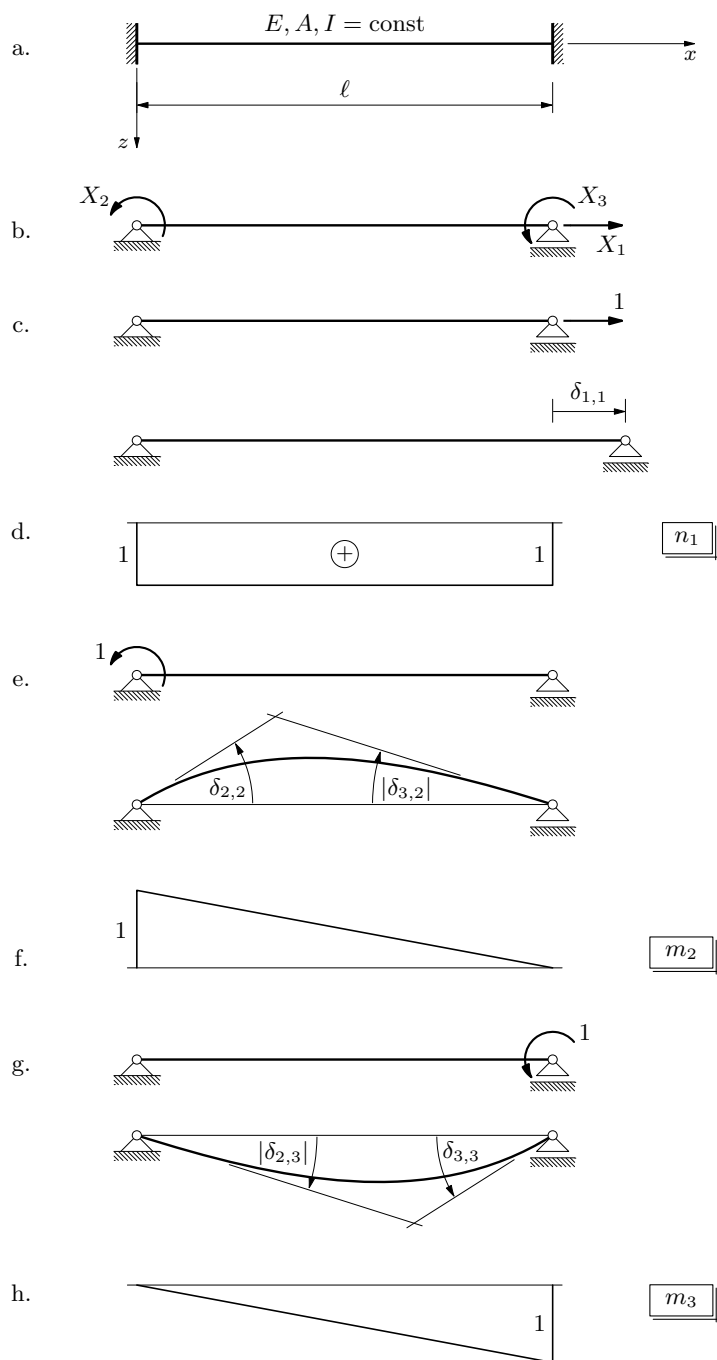
$$M(x) = M_0(x) + X_1 m_1(x) + X_2 m_2(x) = X_1 m_1(x) + X_2 m_2(x);$$

dijagrami  $m_1$  i  $m_2$  na odabranom osnovnom sistemu prikazani su na slikama 148.d. i e. na stranici 240.

Ako su  $b/h = 30/60$  [cm] i  $E = 3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>, tada su  $X_1 = -74,84$  i  $X_2 = 56,05$ ; konačni je momentni dijagram na kontinuiranu nosaču prikazan na slici 152.i. Ako je pak  $b/h = 30/90$  [cm], tada su  $X_1 = -252,60$  i  $X_2 = 189,16$ . U oba se slučaja vrijednosti ponešto razlikuju od vrijednosti dobivenih proračunom na osnovnom sistemu sa slike 152.c.; razlike su posljedice pogrešaka zaokruživanja u raznim koracima proračuna — izračunavanja vrijednosti momenata na osnovnom sistemu, izračunavanja vrijednosti pomakâ, rješavanja sustava jednadžbi kompatibilnosti, izračunavanja konačnih vrijednosti momenata.

## 11.7. Matrice popustljivosti ravnoga štapa

U poglavljima koja slijede više ćemo puta naići na obostrano upetu gredu (slika 153.a.), pa ćemo je stoga sada iscrpnije obraditi. Gredu ćemo položiti tako da se njezina os poklopi s osi  $x$  koordinatnoga sustava. Uzet ćemo, kao i obično, da se poprečni presjeci uzduž grede ne mijenjaju,  $A(x) = A$  i  $I(x) = I$ , te da se ne mijenja ni modul elastičnosti materijala,  $E(x) = E$ .



Slika 153.

Koeficijent popustljivosti  $\delta_{i,j}$  definirali smo kao vrijednost pomakâ hvatištâ sile  $\vec{X}_i$  po pravcu njezina djelovanja ako na nosač djeluje jedinična sila u hvatištu, na pravcu i u smislu djelovanja sile  $\vec{X}_j$ . Ti koeficijenti, prema tome, ne ovise o zadanim vanjskim djelovanjima, nego samo o izboru neodređenih sila, tako da ih možemo izračunati „jednom zànavijèk”.

Obostrano upeta greda tri je puta statički neodređeni nosač. Za osnovni ćemo sistem odabrati jednostavno oslonjenu gredu prikazanu na slici 153.b. Na slikama c., e. i g. skicirane su kinematičke interpretacije onih koeficijenata popustljivosti koji su različiti od nule.

Sila  $\vec{X}_1$  djeluje na pravcu osi grede. Koeficijent  $\delta_{1,1}$  je, prema tome, orijentirana duljina projekcije odgovarajućom jediničnom silom izazvanoga pomaka njezina hvatišta na tu os (slika 153.c.). Pri djelovanju sile na pravcu osi ravnoga štapa u njemu se javljaju samo uzdužne sile, pa je prema poznatom izrazu, uz dijagram  $n_1$  sa slike d.,

$$\delta_{1,1} = \int_0^\ell \frac{n_1^2(x)}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot (1 \cdot \ell) \cdot 1 = \frac{\ell}{EA}.$$

Ležaj u hvatištu sile  $\vec{X}_1$  omogućava pomicanje te točke samo po pravcu osi, pa je  $\delta_{1,1}$  i orijentirana duljina pomaka, a ne tek duljina njegove projekcije. Točka se, dakako, pomiče u smislu djelovanja sile  $\vec{X}_1$ , slijèva nàdesno, pa je  $\delta_{1,1}$  pozitivna vrijednost (to je osigurano činjenicom da je u izrazu za  $\delta_{1,1}$  podintegralna funkcija kvadratna, što je pak posljedica dvostruke uloge jedinične sile: stvarna je i virtualna).

Budući da su  $\vec{X}_2$  i  $\vec{X}_3$  momenti, koeficijenti  $\delta_{2,1}$  i  $\delta_{3,1}$  kutovi su našom jediničnom silom prouzročenih zaokreta osi grede neposredno uz zglobove lijevoga i desnog ležaja. Pri djelovanju momenata, poput virtualnih jediničnih momenata koji odgovaraju momentima  $\vec{X}_2$  i  $\vec{X}_3$ , ne javljaju se uzdužne sile, te su  $\delta_{2,1} = 0$  i  $\delta_{3,1} = 0$ .

Moment  $\vec{X}_2$  djeluje neposredno desno od zgloba u lijevu ležaju, pa je koeficijent  $\delta_{2,2}$  kut zaokreta osi grede u toj točki, do kojega dolazi zbog odgovarajućega jediničnog momenta (slika 153.e.). Kako pri djelovanju momenata nema uzdužnih sila, bit će, uz dijagram  $m_2$  sa slike f.,

$$\delta_{2,2} = \int_0^\ell \frac{m_2^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\ell}{3EI}.$$

Kut je, naravno, pozitivan: fizikalno, zato što zaokret ima isti smisao vrtnje kao i moment  $\vec{X}_2$  koji ga je izazvao, suprotan smislu vrtnje kazaljke na satu; matematički, zato što je podintegralna funkcija kvadratna.

U kinematičkoj interpretaciji koeficijenta  $\delta_{1,2}$  pomak hvatišta sile  $\vec{X}_1$ , izazivan jediničnim momentom koji odgovara momentu  $\vec{X}_2$ , projiciramo na pravac djelovanja sile  $\vec{X}_1$ . Sada su  $n_1$  vrijednosti virtualnih uzdužnih sila, ali kako je, rekosmo,  $n_2 = 0$ , bit će  $\delta_{1,2} = 0$ .

Koeficijent  $\delta_{3,2}$  kut je zaokreta osi grede neposredno lijevo od zgloba u desnu ležaju, u hvatištu momenta  $\vec{X}_3$ , zbog djelovanja jediničnoga momenta koji odgovara momentu  $\vec{X}_2$  (još jednom slika 153.e.):

$$\delta_{3,2} = \int_0^\ell \frac{m_3(x) m_2(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell \right) \cdot \left( -\frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{\ell}{6EI};$$

pritom su  $m_3$  (slika h.) vrijednosti virtualnih momenata savijanja zbog virtualnoga jediničnog momenta koji odgovara momentu  $\vec{X}_3$  (gornji crtež na slici g.). Izračunana je vrijednost negativna, pa slijedi da zaokret ima smisao suprotan smislu vrtnje momenta  $\vec{X}_3$ .

Djeluje li pak na gredu stvarni jedinični moment koji odgovara momentu  $\vec{X}_3$ , kut zaokreta osi grede u toj točki bit će koeficijent  $\delta_{3,3}$  (slika g.):

$$\delta_{3,3} = \int_0^\ell \frac{m_3^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\ell}{3EI};$$

zaokret i moment imaju isti smisao vrtnje.

Iako su koeficijenti  $\delta_{2,3}$  i  $\delta_{3,2}$  kao brojevi međusobno jednaki,

$$\delta_{2,3} = \int_0^\ell \frac{m_2(x) m_3(x)}{EI} dx = \int_0^\ell \frac{m_3(x) m_2(x)}{EI} dx = \delta_{3,2},$$

njihovo je kinematičko značenje različito. Koeficijent  $\delta_{2,3}$  kut je zaokreta osi grede uz lijevi ležaj, u hvatištu momenta  $\vec{X}_2$ , izazvan jediničnim momentom koji djeluje na desnom kraju grede, u hvatištu momenta  $\vec{X}_3$ , i ima smisao vrtnje kao  $\vec{X}_3$  (slika 153.g.), dok je  $\delta_{3,2}$  kut zaokreta osi grede u hvatištu momenta  $\vec{X}_3$ , uz desni ležaj, zbog djelovanja jediničnoga momenta u hvatištu i u smislu vrtnje momenta  $\vec{X}_2$  (slika e.). U izrazu za izračunavanje koeficijenta  $\delta_{2,3}$  momenti savijanja  $m_3$  su stvarni, a momenti  $m_2$  virtualni; u izrazu pak za izračunavanje koeficijenta  $\delta_{3,2}$  njihove su uloge zamijenjene.

I na kraju, lako je vidjeti da je  $\delta_{1,3} = 0$ . [Kako? Što je  $\delta_{1,3}$  kinematički?].

Izračunane ćemo koeficijente složiti u matricu

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} \\ 0 & -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{bmatrix} \quad (285)$$

koju nazivamo *matricom fleksibilnosti* ili *matricom popustljivosti ravnoga štapa (u ravni)*.



### 11.7.1. Utjecaj djelovanjâ

Za opći je slučaj djelovanjâ na obostrano upetu gredu, uz odabrani osnovni sistem, sustav jednažbi kompatibilnosti

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,0} &= \bar{\delta}_1, \\ \delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,3} X_3 + \delta_{2,0} &= \bar{\delta}_2, \\ \delta_{3,2} X_2 + \delta_{3,3} X_3 + \delta_{3,0} &= \bar{\delta}_3. \end{aligned} \quad (286)$$

Vrijednosti  $\delta_{i,0}$  i  $\bar{\delta}_i$  izražavaju utjecaj zadanih djelovanja:

$\bar{\delta}_1$  vrijednost je projekcije prisilnoga pomaka desnog ležaja obostrano upete grede na njezinu os,

$\bar{\delta}_2$  i  $\bar{\delta}_3$  kutovi su prisilnih zaokreta lijevoga i desnog ležaja obostrano upete grede,

$\delta_{1,0}$  vrijednost je (horizontalnoga) pomaka desnog ležaja jednostavno oslonjene grede zbog svih ostalih djelovanja,

$\delta_{2,0}$  i  $\delta_{3,0}$  kutovi su svim ostalim djelovanjima izazvanih zaokreta osi jednostavno oslonjene grede uz njezine ležajeve.

Sažetiji je zapis sustava (286), primjenom matrične stenografije,

$$\mathbf{D}\mathbf{X} + \mathbf{\Delta}_0 = \bar{\mathbf{\Delta}},$$

pri čemu su  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{\Delta}_0$  i  $\bar{\mathbf{\Delta}}$  jednostupčane matrice. Uvedemo li još matricu

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{\Delta}} - \mathbf{\Delta}_0,$$

prethodni izraz prelazi u

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{d}.$$

Kao što smo već i samim oblikom zapisa sustava (286) nagovijestili, on je sastavljen od dva neovisna (pod)sustava: iz prve se jednažbe može neposredno izračunati vrijednost nepoznanice  $X_1$ , a preostale dvije jednažbe tvore sustav s nepoznanicama  $X_2$  i  $X_3$ . Posljedica je to međusobne neovisnosti uzdužnih i poprečnih djelovanja na ravnome štapu i toj neovisnosti prilagođenoga izbora neodređenih sila.

Budući da se sustav jednažbi „raspada” na podsustave, matrica popustljivosti se može rastaviti u četiri podmatrice:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\parallel} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\perp} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{\ell}{EA} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} \\ 0 & -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{array} \right]. \quad (287)$$

Podmatrica  $\mathbf{D}_{\parallel}$ , tipa  $1 \times 1$ , vezana je uz djelovanja na pravcu osi grede, a podmatrica  $\mathbf{D}_{\perp}$ , tipa  $2 \times 2$ , uz djelovanja koja su okomita na os. Rastavimo li na odgovarajući način matrice  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{d}$ , podsustave možemo formalno zapisati matričnim izrazima

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\parallel} \mathbf{X}_{\parallel} &= \mathbf{d}_{\parallel} & \text{i} & & \mathbf{D}_{\perp} \mathbf{X}_{\perp} &= \mathbf{d}_{\perp}, \\ \text{pa su njihova rješenja} & & & & & \\ \mathbf{X}_{\parallel} &= \mathbf{D}_{\parallel}^{-1} \mathbf{d}_{\parallel} & \text{i} & & \mathbf{X}_{\perp} &= \mathbf{D}_{\perp}^{-1} \mathbf{d}_{\perp}. \end{aligned} \quad (288)$$

Iz tih je izraza lako zaključiti da se na analogan način u podmatrice može rastaviti i inverzna matrica matrice popustljivosti:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\parallel}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\perp}^{-1} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ 0 & \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{array} \right]. \quad (289)$$

Prvi je izraz u (288) samo formalno matrični; jasno je da ga možemo zamijeniti skalarnim izrazom

$$X_1 = \frac{1}{\delta_{1,1}} (\bar{\delta}_1 - \delta_{1,0}).$$

### 11.7.2. Distribuirana sila

Djeluje li, primjerice, na našu gredu, okomito na njezinu os, jednoliko raspodijeljena sila  $\vec{q}_z$  (slike 154.a. i b.), slobodni su članovi:

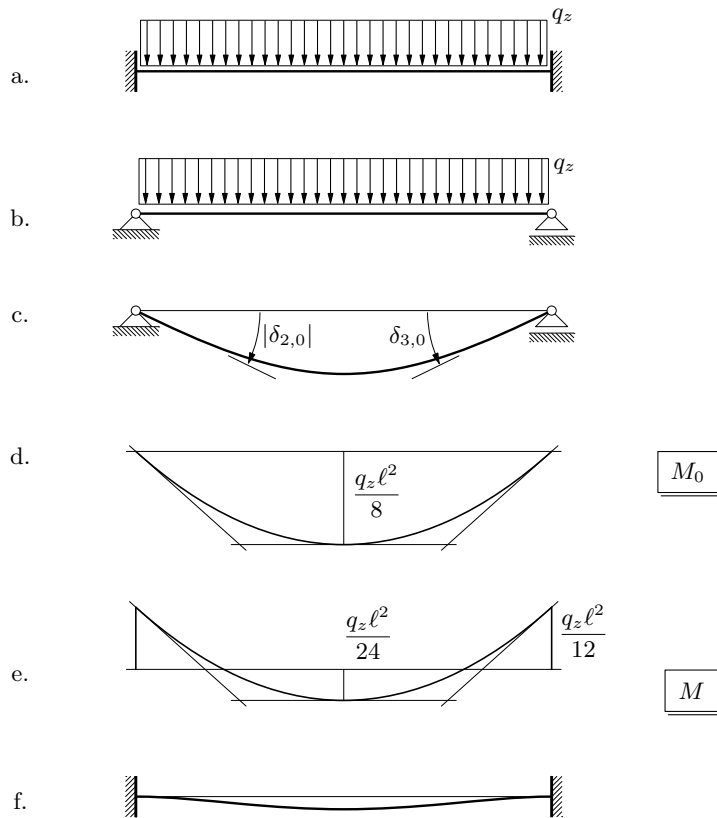
$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= \int_0^{\ell} \frac{n_1(x) N_0(x)}{EA} dx = 0, \\ \delta_{2,0} &= \int_0^{\ell} \frac{m_2(x) M_0(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{q_z \ell^2}{8} \cdot \ell \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{q_z \ell^3}{24 EI}, \\ \delta_{3,0} &= \int_0^{\ell} \frac{m_3(x) M_0(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{q_z \ell^2}{8} \cdot \ell \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{q_z \ell^3}{24 EI}. \end{aligned}$$

Slika c. skica je kinematičke interpretacije vrijednosti  $\delta_{2,0}$  i  $\delta_{3,0}$ , dok je dijagram  $M_0$ , potreban za njihovo izračunavanje, prikazan na slici d.

Prema izrazima (288), uz vrijednosti komponenata matrice  $\mathbf{D}^{-1}$  u izrazu (289), odmah možemo izračunati:

$$\begin{aligned} X_1 &= k_{1,1} \cdot (-\delta_{1,0}) = 0, \\ X_2 &= k_{2,2} \cdot (-\delta_{2,0}) + k_{2,3} \cdot (-\delta_{3,0}) = \frac{4EI}{\ell} \cdot \frac{q_z \ell^3}{24 EI} + \frac{2EI}{\ell} \cdot \left( -\frac{q_z \ell^3}{24 EI} \right) = \frac{q_z \ell^2}{12}, \\ X_3 &= k_{3,2} \cdot (-\delta_{2,0}) + k_{3,3} \cdot (-\delta_{3,0}) = \frac{2EI}{\ell} \cdot \frac{q_z \ell^3}{24 EI} + \frac{4EI}{\ell} \cdot \left( -\frac{q_z \ell^3}{24 EI} \right) = -\frac{q_z \ell^2}{12}. \end{aligned}$$

(Komponente matrice  $\mathbf{D}^{-1}$  označili smo s  $k_{i,j}$ .)



Slika 154.

Kako je  $X_1 = 0$ , uzdužnih sila nema, što potvrđuje neovisnost učinaka poprečnih i uzdužnih djelovanja. Konačni je pak momentni dijagram na slici 154.e. konstruiran na temelju poznatoga izraza

$$M(x) = M_0(x) + X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x),$$

uz dijagrame  $M_0$ ,  $m_2$  i  $m_3$  sa slika 154.d., 153.f. i 153.h. U karakterističnim su točkama vrijednosti momenata:

$$M(0) = 0 + \frac{q_z \ell^2}{12} \cdot (-1) + 0 = -\frac{q_z \ell^2}{12},$$

$$M(\ell/2) = \frac{q_z \ell^2}{8} + \frac{q_z \ell^2}{12} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{q_z \ell^2}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{q_z \ell^2}{24},$$

$$M(\ell) = 0 + 0 + \left(-\frac{q_z \ell^2}{12}\right) \cdot 1 = -\frac{q_z \ell^2}{12}.$$

Progibna linija obostrano upete grede skicirana je na slici 154.f. (progibi na slikama c. i f. nacrtani su u istom mjerilu).

### 11.7.3. Prisilni pomaci

Neka je, kao drugi primjer, zadan zaokret lijevoga ležaja obostrano upete grede za kut  $\bar{\varphi}_\ell$  (slika 155.a.). „Slobodni” su članovi tada

$$\bar{\delta}_1 = 0, \quad \bar{\delta}_2 = \bar{\varphi}_\ell \quad \text{i} \quad \bar{\delta}_3 = 0,$$

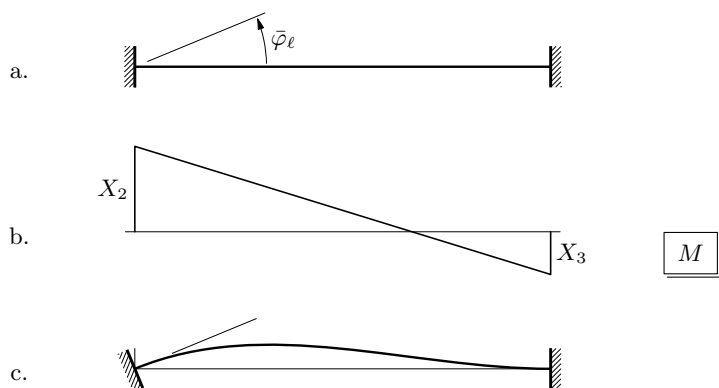
pa su prema (288) i uz vrijednosti iz (289)

$$\begin{aligned} X_1 &= k_{1,1} \cdot \bar{\delta}_1 = 0, \\ X_2 &= k_{2,2} \cdot \bar{\delta}_2 + k_{2,3} \cdot \bar{\delta}_3 = \frac{4EI}{\ell} \bar{\varphi}_\ell \\ X_3 &= k_{3,2} \cdot \bar{\delta}_2 + k_{3,3} \cdot \bar{\delta}_3 = \frac{2EI}{\ell} \bar{\varphi}_\ell = \frac{1}{2} X_2. \end{aligned}$$

Momentni dijagram (slika 155.b.) crtamo sada prema izrazu

$$M(x) = X_2 \cdot m_2(x) + X_3 \cdot m_3(x).$$

Slika c. skica je progibne linije.



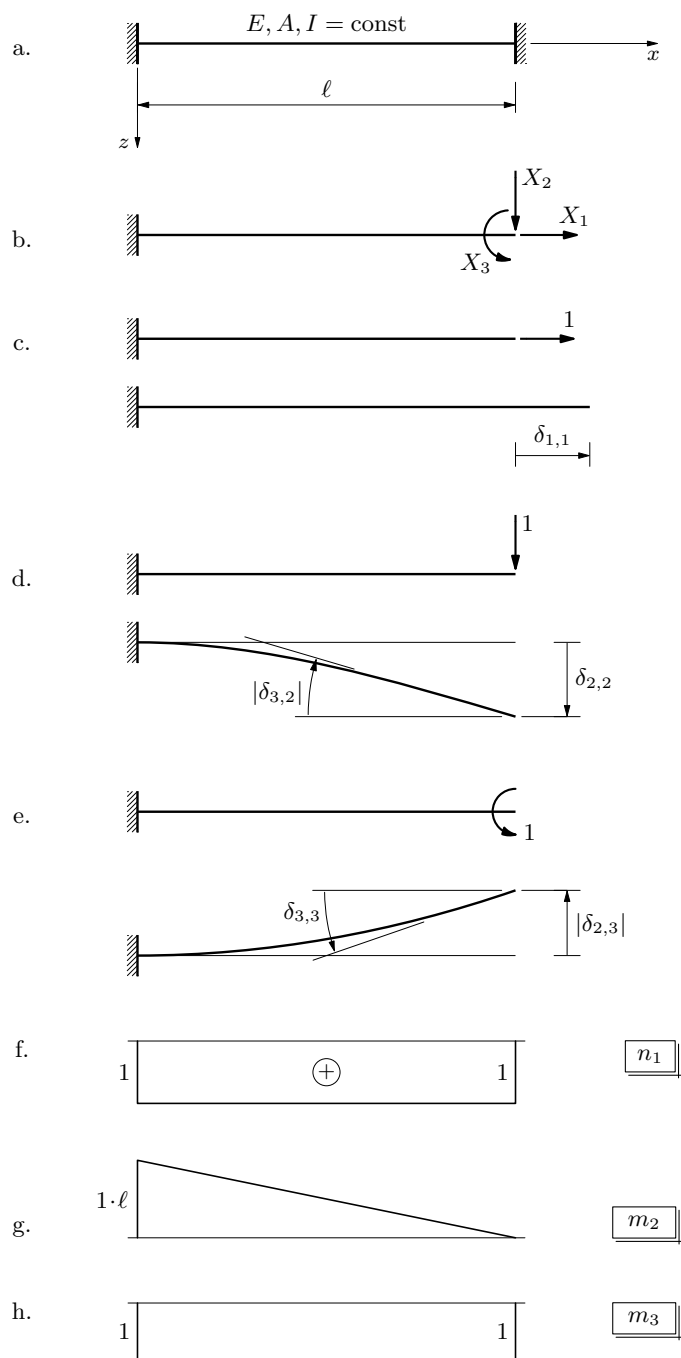
Slika 155.

Jasno je da s pomoću izrazâ (288) i komponenata matrice inverzne matrici popustljivosti u izrazu (289) možemo izračunati vrijednosti unutarnjih sila u obostrano upetoj gredi za bilo kakvo djelovanje. Za izračunavanje „slobodnih” članova  $\delta_{i,0}$  u većini će nam slučajeva trebati i „jedinični” dijagrami  $n_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$ , prikazani na slikama 153.d., f. i g. (na stranici 257.).

### 11.7.4. Varijacija na temu

Koeficijenti popustljivosti ovise o izboru neodređenih sila, odnosno, o izboru osnovnoga sistema. Promijenimo li osnovni sistem, promijenit će se i koeficijenti popustljivosti — njihove kinematičke interpretacije i izrazi prema kojima ih izračunavamo.

Uzmimo, recimo, da je odabrani osnovni sistem konzola prikazana na slici 156.b. Pravci djelovanja sila  $\vec{X}_1$  i  $\vec{X}_2$  poklapaju se s uzdužnim i poprečnim smjerovima na gredi,



Slika 156.

te su neki koeficijenti popustljivosti ponovo jednaki nuli [koji?]. Skice na slikama c., d. i e. kinematičke su interpretacije onih koji to nisu [izrecite te interpretacije!].

Uz „jedinične” dijagrame prikazane na slikama 156.f., g. i h., dobivamo:

$$\delta_{1,1} = \int_0^\ell \frac{n_1^2(x)}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot (1 \cdot \ell) \cdot 1 = \frac{\ell}{EA},$$

$$\delta_{2,2} = \int_0^\ell \frac{m_2^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell \cdot \ell \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \ell \right) = \frac{\ell^3}{3EI},$$

$$\begin{aligned}\delta_{3,2} &= \int_0^\ell \frac{m_3(x) m_2(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell \cdot \ell \right) \cdot (-1) = -\frac{\ell^2}{2EI}, \\ \delta_{2,3} &= \int_0^\ell \frac{m_2(x) m_3(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot (1 \cdot \ell) \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \ell \right) = -\frac{\ell^2}{2EI}, \\ \delta_{3,3} &= \int_0^\ell \frac{m_3^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot (1 \cdot \ell) \cdot 1 = \frac{\ell}{EI},\end{aligned}$$

pa je matrica popustljivosti (rastavljena odmah u podmatrice)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\parallel & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_\perp \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{\ell}{EA} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\ell^3}{3EI} & -\frac{\ell^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell}{EI} \end{array} \right], \quad (290)$$

dok je matrica njoj inverzna

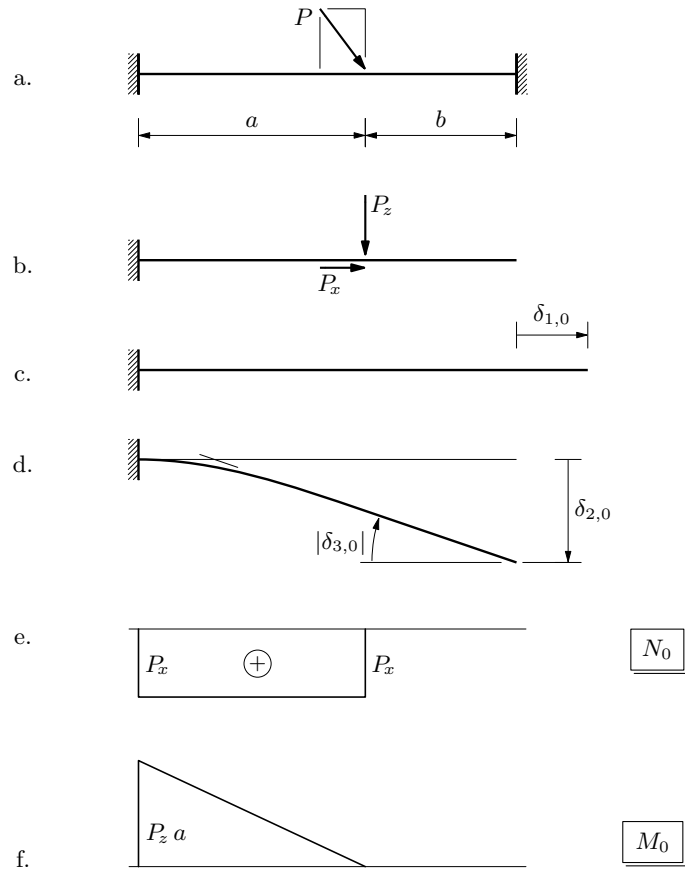
$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\parallel^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_\perp^{-1} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{array} \right]. \quad (291)$$

### 11.7.5. Koncentrirana sila

S pomoću matrice  $\mathbf{D}^{-1}$  iz izraza (291) izračunat ćemo vrijednosti unutarnjih sila u obostrano upetoj gredi koja je opterećena koncentriranom silom (slika 157.a.).

Sada su „slobodni” članovi (uz dijagrame  $N_0$  i  $M_0$  sa slika 157.e. i f. te dijagrame  $n_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  sa slika 156.f., g. i h.)

$$\begin{aligned}\delta_{1,0} &= \int_0^\ell \frac{n_1(x) N_0(x)}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot (P_x \cdot a) \cdot 1 = \frac{P_x a}{EA}, \\ \delta_{2,0} &= \int_0^\ell \frac{m_2(x) M_0(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot P_z \cdot a \cdot a \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \ell + \frac{1}{3} \cdot b \right) = \frac{P_z a^2 (3\ell - a)}{6EI}, \\ \delta_{3,0} &= \int_0^\ell \frac{m_3(x) M_0(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot P_z \cdot a \cdot a \right) \cdot (-1) = -\frac{P_z a^2}{2EI}\end{aligned}$$



Slika 157.

(njihovo je kinematičko značenje skicirano na slikama 157.c. i d.), te su

$$X_1 = \frac{EA}{\ell} \cdot \left( -\frac{P_x a}{EA} \right) = -\frac{P_x a}{\ell},$$

$$X_2 = \frac{12 EI}{\ell^3} \cdot \left( -\frac{P_z a^2 (3\ell - a)}{6 EI} \right) + \frac{6 EI}{\ell^2} \cdot \frac{P_z a^2}{2 EI} = -\frac{P_z a^2 (3\ell - 2a)}{\ell^3},$$

$$X_3 = \frac{6 EI}{\ell^2} \cdot \left( -\frac{P_z a^2 (3\ell - a)}{6 EI} \right) + \frac{4 EI}{\ell} \cdot \frac{P_z a^2}{2 EI} = -\frac{P_z a^2 b}{\ell^2}.$$

$X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$  vrijednosti su unutarnjih sila na desnom kraju grede (slika 158.b.):

$$N(\ell) = X_1, \quad T(\ell) = X_2 \quad \text{i} \quad M(\ell) = X_3.$$

Vrijednosti sila na lijevome kraju izračunat ćemo iz uvjetâ ravnoteže projekcija sila na osi  $x$  i  $z$  i iz uvjeta ravnoteže momenata u odnosu na lijevi kraj:

$$\begin{aligned} -N(0) + P_x + N(\ell) &= 0, \\ -T(0) + P_z + T(\ell) &= 0, \\ -M(0) - a \cdot P_z - \ell \cdot T(\ell) + M(\ell) &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi:

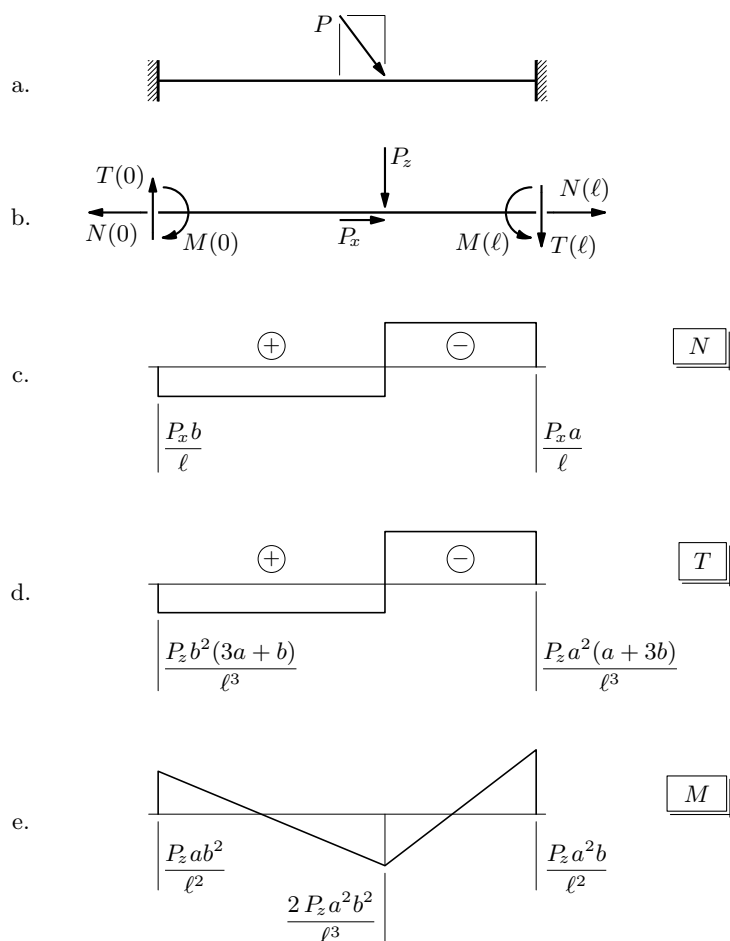
$$N(0) = P_x - \frac{P_x a}{\ell} = \frac{P_x b}{\ell},$$

$$T(0) = P_z - \frac{P_z a^2(a + 3b)}{\ell^3} = \frac{P_z b^2(3a + b)}{\ell^3},$$

$$M(0) = -P_z a + \frac{P_z a^2(a + 3b)}{\ell^2} - \frac{P_z a^2 b}{\ell^2} = -\frac{P_z a b^2}{\ell^2}.$$

U izrazima za  $N(0)$  i  $N(\ell)$  pojavljuje se samo  $P_x$ , a u izrazima za  $T(0)$ ,  $T(\ell)$ ,  $M(0)$  i  $M(\ell)$  samo  $P_z$ , što ponovo potvrđuje međusobnu neovisnost djelovanja po osi štapa i djelovanja okomito na nju.

Konačni dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slikama 158.c., d. i e.



Slika 158.

## 11.8. O rešetkastim nosačima — formaln(ij)i pogled na metodu sila

Ako je u sustavu jednadžbi ravnoteže (150) u odjeljku 6.1. broj vrijednosti sila veći od broja jednadžbi,  $b > 2n$ , i ako je rang ravnotežne matrice  $2n$ , sistem je štapova geometrijski nepromjenjiv, ali statički neodređen. Budući da joj je rang jednak broju redaka ( $i$ , time, broju



jednadžbi ravnoteže), slika je matrice  $\mathbf{A}$  cijeli prostor  $\mathbb{R}^{2n}$ , pa je sustav jednadžbi ravnoteže rješiv za sve vektore koji leže u tom prostoru — dakle, za sve vektore  $\mathbf{f}$ . Ali, kako je broj vrijednosti sila u štapovima veći od broja jednadžbi, matrica  $\mathbf{A}$  prostor veće dimenzije preslikava u prostor manje dimenzije. Pri tom preslikavanju neki vektori prostora  $\mathbb{R}^b$  iščezavaju, odnosno, više se vektora toga prostora preslikava u jedan vektor prostora  $\mathbb{R}^{2n}$ : ako je  $\mathbf{s}_0$  neki vektor prostora redaka matrice  $\mathbf{A}$  i ako su  $\bar{\mathbf{s}}_l$  bazni vektori njezine jezgre, tada se svi vektori

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \sum_l x_l \bar{\mathbf{s}}_l \quad (292)$$

s bilo kojim koeficijentima  $x_l$  preslikavaju u isti vektor prostora čvorova. Rješenje sustava jednadžbi stoga ne može biti jedinstveno. Za izdvajanje jednoga rješenja treba pored uvjeta ravnoteže primijeniti i kinematičke uvjete. Povezivanje kinematičkih i ravnotežnih uvjeta ostvaruje se uvođenjem *konstitucijskih relacija* koje za zglobne štapove izražavaju međuovisnost vrijednosti uzdužnih sila u njima i promjena njihovih duljina.

Djeluje li u štapu uzdužna sila vrijednosti  $S_{\{i,j\}}$ , promjena je njegove duljine

$$d_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\}} S_{\{i,j\}}, \quad (293)$$

pri čemu je

$$\delta_{\{i,j\}} = \frac{\ell_{\{i,j\}}}{E_{\{i,j\}} A_{\{i,j\}}} \quad (294)$$

*koeficijent uzdužne popustljivosti*. Te ćemo koeficijente smjestiti u dijagonalnu matricu  $\text{diag}(\delta)$  tako da koeficijent  $\delta_{\{i,j\}}$  štapa brojčana oznaka kojega je  $\kappa$  upišemo na glavnu dijagonalu u sjecište retka  $\kappa$  i stupca  $\kappa$ .

Izraz (292) zapisat ćemo u obliku

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{x}, \quad (295)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{S}}$  matrica stupci koje su bazni vektori  $\bar{\mathbf{s}}_l$  jezgre matrice  $\mathbf{A}$ , a  $\mathbf{x}$  je vektor koji sadrži koeficijente  $x_l$ . Uzet ćemo uz to da je  $\mathbf{s}_0$  neko rješenje sustava jednadžbi ravnoteže (150), tako da je  $\mathbf{A} \mathbf{s}_0 = -\mathbf{f}$ . Tada je i  $\mathbf{s}$  rješenje toga sustava:

$$\mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{A} (\mathbf{s}_0 + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{s}_0 + \mathbf{A} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{s}_0 = -\mathbf{f};$$

treća jednakost slijedi iz činjenice da vektori  $\bar{\mathbf{S}} \mathbf{x}$  leže u jezgri matrice  $\mathbf{A}$ , pa je  $\mathbf{A} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Da nađemo vektor  $\mathbf{s}_0$  i matricu  $\bar{\mathbf{S}}$  Gausovim ćemo eliminacijskim postupkom matricu  $\mathbf{A}$  i vektor  $\mathbf{f}$  prevesti u  $\tilde{\mathbf{A}}$  i  $\tilde{\mathbf{f}}$ . Uporišni stupci matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  odgovaraju štapovima sistema čiji sklop daje statički određeni sistem; ostali su štapovi „prekobrojni”. Uzmemo li da su vrijednosti sila u prekobrojnim štapovima jednake nuli, vrijednosti sila u štapovima određenoga sistema (i, time, vektor  $\mathbf{s}_0$ ) možemo izračunati uvrštavanjem unazad u sustav  $\tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varsigma}_0 = -\tilde{\mathbf{f}}$ , gdje je  $\boldsymbol{\varsigma}_0$  vektor koji na mjestima štapova određenoga sistema sadrži nepoznanice, a na mjestima prekobrojnih štapova nule.

Vektore  $\bar{\mathbf{s}}_l$  odredit ćemo uvrštavanjem unazad u sustave  $\tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varsigma}_l = \mathbf{0}$ , pri čemu su  $\boldsymbol{\varsigma}_l$  vektori koji sadrže nepoznanice na mjestima štapova statički određenoga sistema, 1 na mjestu prekobrojnog štapa  $l$  i 0 na mjestima ostalih prekobrojnih štapova.

Fizički prihvatljivo rješenje mora pored uvjeta ravnoteže zadovoljiti i određene kinematičke uvjete: vrijednosti sila u štapovima moraju uzrokovati kompatibilne promjene njihovih duljina — sistem štapova se mora moći sklopiti bez dodatnih promjena duljina. Uzajamna ovisnost vrijednosti uzdužne sile i promjene duljine štapa dana je konstitucijskom relacijom (293).

Sažeti je matični zapis izraza (293) za sve štapove

$$\mathbf{d} = \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{s}, \quad (296)$$

a uvrštavanje izraza (295) daje

$$\mathbf{d} = \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) (\mathbf{s}_0 + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{x}). \quad (297)$$

Traženi je vektor kompatibilnih promjena duljine okomit na prostor nekompatibilnih promjena duljina, koji je lijeva jezgra kinematičke matrice  $\mathbf{B}$ . Budući da se lijeva jezgra matrice  $\mathbf{B}$  podudara s jezgrom matrice  $\mathbf{A}$ , uvjet je okomitosti

$$\bar{\mathbf{S}}^T \mathbf{d} = \mathbf{0}. \quad (298)$$

Uz (297) taj je uvjet

$$\bar{\mathbf{S}}^T \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) (\mathbf{s}_0 + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

ili

$$\bar{\mathbf{S}}^T \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \bar{\mathbf{S}} \mathbf{x} = -\bar{\mathbf{S}}^T \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{s}_0. \quad (299)$$

Matrica

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{S}}^T \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \bar{\mathbf{S}} \quad (300)$$

je *matrica popustljivosti sistema*, dok je vektor

$$\mathbf{d}_0 = \bar{\mathbf{S}}^T \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{s}_0 \quad (301)$$

vektor promjena duljina štapova izazvanih ravnotežnim silama u osnovnom sistemu, pa je sustav (299) *sustav jednažbi kompatibilnosti*

$$\mathbf{D} \mathbf{x} = -\mathbf{d}_0. \quad (302)$$

## 12. Opća metoda pomaka

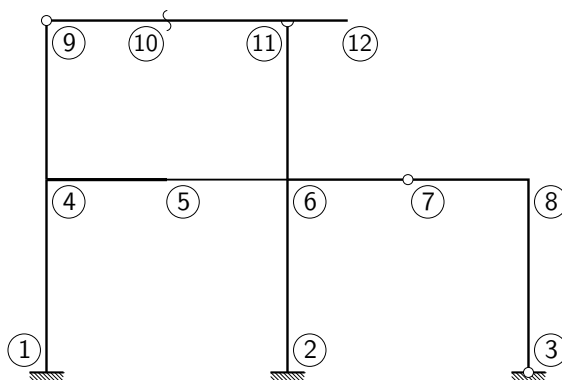
### 12.1. O metodama pomakâ

Štapnim elementima, linijskim elementima ili, kratko, štapovima nazivat ćemo dijelove štapnih sistema za koje se sile i momenti na njihovim krajevima mogu razmjerno lako izraziti kao funkcije pomaka i zaokreta tih krajeva. Najjednostavniji je štapni element ravni štap nepromjenjivoga poprečnog presjeka, izveden od jednog materijala, tako da su po cijeloj njegovoj duljini  $EA = \text{const}$  i  $EI = \text{const}$ . Ograničit ćemo se stoga na ravninske sisteme s ravnim štapovima po dijelovima nepromjenjivih poprečnih presjeka.

Točke u kojima se štapni elementi povezuju međusobno ili s podlogom te točke na njihovim slobodnim krajevima nazvat ćemo čvorovima.

U konstrukciji sa slike 159. čvorovi 1, 2 i 3 ležajni su čvorovi, u čvoru 6 sastaju se četiri štapa, u čvorovima 4 i 11 po tri štapa, u čvorovima 5, 7, 8, 9 i 10 po dva štapa, dok je čvor 12 slobodni kraj štapa. Iako točke 5 i 7 leže na ravnim dijelovima osi štapova, treba ih smatrati čvorovima — spojevima dvaju štapova — jer se u 5 skokovito mijenja poprečni presjek grede između čvorova 4 i 6 (dakle, i vrijednosti  $EA$  i  $EI$ ), a u 7 je zglob (te se, stoga, progibna linija „lomi“). Napokon, primjer čvora 10 pokazuje da čvorom možemo proglasiti bilo koju točku sistema (drugim riječima, jedan štap „prelomiti“ u dva), ako je to zbog bilo kojega razloga pogodno.

Krutim čvorom nazivamo čvor u koji su svi štapovi međusobno ili s podlogom kruto spojeni (čvorovi 1, 2, 4, 5, 6, 8 i 10), a zglobnim čvor u koji su svi štapovi spojeni zgلوبno (čvorovi 3, 7 i 9); čvor može biti i mješoviti *kruto-zglobni* (čvor 11), a rjeđe ćemo nailaziti na štapove koji su u čvorove spojeni pomičnim vezama. Pomalo paradoksalno, slobodni kraj štapa (čvor 12) smatrat ćemo krutim čvorom. Sve čvorove osim ležajnih prozvat ćemo *slobodnima*.

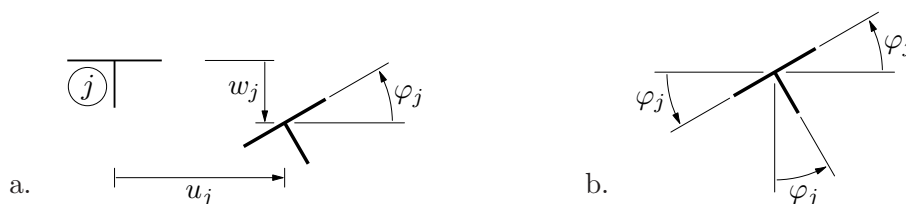


Slika 159.

Par čvorova jednoznačno određuje štapni element, pa ćemo štap priključen u čvorove  $i$  i  $j$  označiti sa  $\{i, j\}$ . U našem primjeru štapni su elementi:  $\{1,4\}$ ,  $\{2,6\}$ ,  $\{3,8\}$ ,  $\{4,5\}$ ,  $\{5,6\}$ ,  $\{6,7\}$ ,  $\{7,8\}$ ,  $\{4,9\}$ ,  $\{6,11\}$ ,  $\{9,10\}$ ,  $\{10,11\}$  i  $\{11,12\}$ .

*Metode pomakâ* metode su proračuna štapnih sistema u kojima su temeljne nepoznanice *orijentirane duljine translacijskih pomaka* i *kutovi zaokreta* odabranih točaka sistema nazvanih čvorovima.

Za ravninu u kojoj opisujemo sistem odabrat ćemo, kao i do sada, ravninu  $xz$ . Svaki slobodni ravninski kruti čvor  $j$  ima dva translacijska stupnja slobode — translacijski pomak po općem pravcu (određen s pomoću dva kinematička parametra: nagibom toga pravca i orijentiranom duljinom pomaka) uvijek se može rastaviti na komponente  $\vec{u}_j = u_j \vec{i}$  i  $\vec{w}_j = w_j \vec{k}$  po pravcima usporednim s osima  $x$  i  $z$  (pa su ponovo potrebna dva određena kinematička parametra: *orijentirane duljine*  $u_j$  i  $w_j$  tih komponenata). K tomu još, iako je čvor bezdimenzionalna geometrijska točka, pridodat ćemo mu infinitezimalne odsječke na krajevima osi priključenih štapova, pa će svaki slobodni kruti čvor imati i jedan rotacijski stupanj slobode — zaokret za kut  $\varphi_j$  oko osi kroz čvor, okomite na ravninu sistema (slika 160.a.). Odsječci osi svih štapova priključenih u kruti čvor pomiču se zajedno s njim i zaokreću za isti kut  $\varphi_j$  (slika b.); drugim riječima, pomaci i zaokreti u čvor priključenih krajeva štapova jednaki su pomacima i zaokretima čvora.



Slika 160.

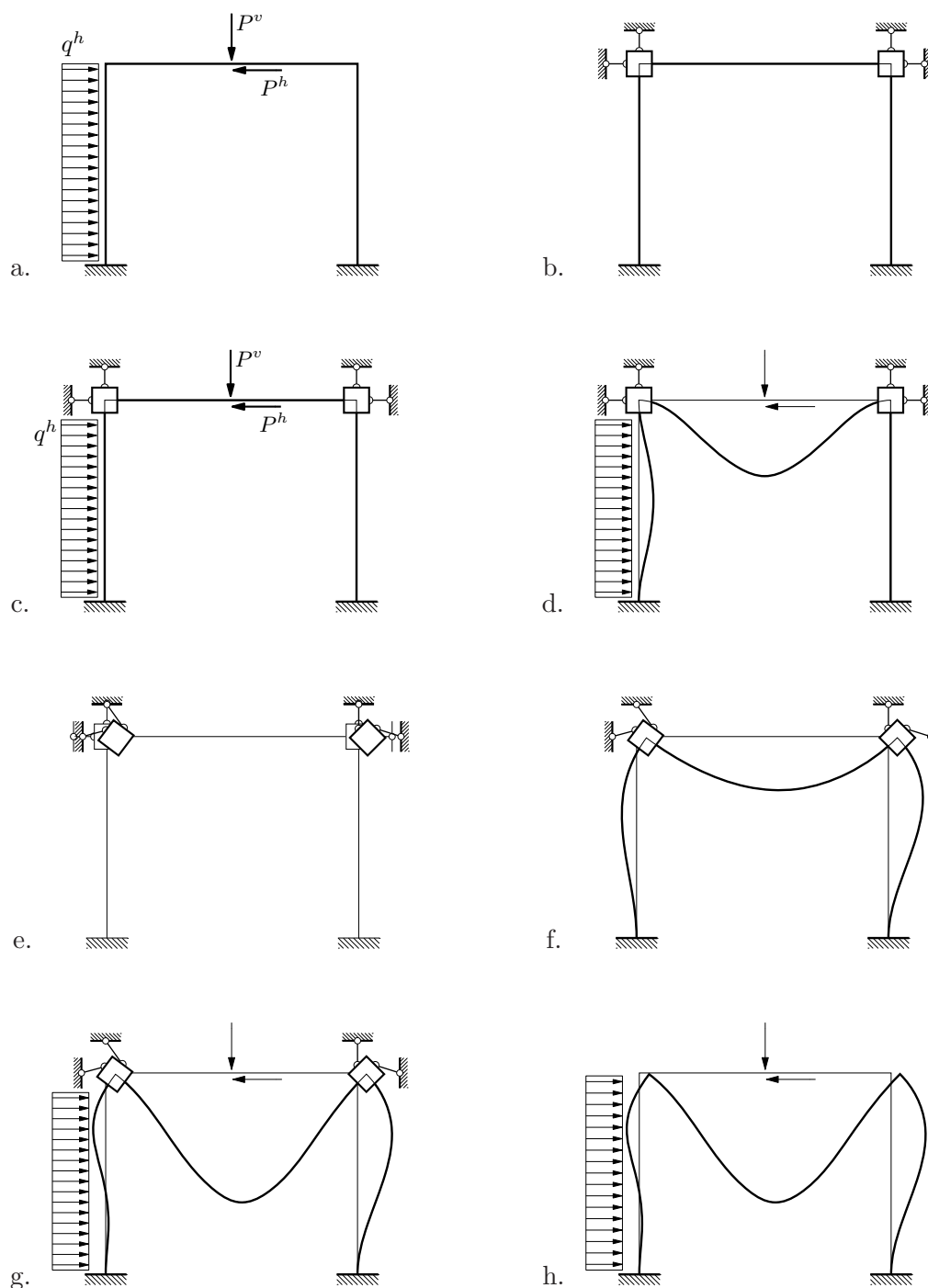
Ako je, međutim, štap sa slobodnim čvorom spojen zglobo, priključeni se infinitezimalni odsječak njegove osi može zaokretati neovisno o čvoru. Štapovi sa zglobovim ili pomičnim vezama zahtijevaju stoga dodatnu obradu i složeniji postupak, ali se istodobno za slobodni zglobovi čvor može uzeti da ima samo translacijske stupnjeve slobode.

Stupnjeve slobode mogu imati i ležajni čvorovi. Naime, u ležajevima su samo komponente pomaka po pravcima veza poznate — ili su spriječene, ili su zadane kao prisilni pomaci. Primjerice, ležaj 3 konstrukcije sa slike 159. ima rotacijski stupanj slobode, pa će kut  $\varphi_3$  biti nepoznanica ne isključi li se statičkom kondenzacijom.

Zanemare li se uzdužne deformacije ravnih štapova, razmak čvorova jednoga štapa ne mijenja se, pa između njihovih translacijskih pomaka postoji kinematičko ograničenje; time se broj nepoznanica smanjuje, ali treba prepoznati neovisne translacijske pomake sistema. Takva se inačica metode naziva *inženjerskom metodom pomakâ*, dok ćemo metodu u općoj formulaciji, u kojoj se vrijednosti svih triju komponenata pomaka čvora uzimaju kao nepoznanice, nazivati *općom* (ili *točnom*) *metodom pomakâ*.

Za razliku od metode sila i inženjerske metode pomakâ, opću je metodu pomakâ razmjerno lako formalizirati, pa je ta metoda algoritamska osnova većine kompjutorskih programa za proračun štapnih konstrukcija. Na zamislima i postupcima opće metode

pomakâ utemeljena je i *metoda konačnih elemenata* koja omogućava proračun plošnih (ploče, zidovi, ljuske, ...) i masivnih sistema, a primjenjuje se, osim u konstruktorstvu, i u drugim područjima građevinarstva, poput hidromehanike ili geomehanike, kao i u mnogim drugim područjima tehnike.



Slika 161.

Napomenut ćemo još i da se metodama pomakâ mogu, osim statički neodređenih, proračunavati i statički određeni sistemi.

## 12.2. Zamisao

Proračun nekom od metoda pomakâ provodi se, kao i u metodi sila, na sistemu koji nazivamo osnovnim. No, *osnovni sistem* sada oblikujemo dodajući izvornome sistemu (primjerice, slika 161.a. na prethodnoj stranici) zamišljene veze s podlogom koje sprečavaju sve translacijske pomake i zaokrete slobodnih čvorova (slika b.; kvadratićima smo označili *momentne spojeve* koji sprečavaju zaokrete, ali dopuštaju pomake čvorova po bilo kojem pravcu kroz njih.). U prvome se koraku proračuna na osnovni sistem nanose zadane sile (slika c.); na slici d. skicirana je progibna linija osnovnoga sistema zbog zadanih opterećenja. No, ta skica (zaboravimo li na trenutak zamišljene veze) ne izgleda nimalo „prirodno” — čvorovi izvornoga sistema pod zadanim će se opterećenjima zaokrenuti i pomaknuti (slika h.). Kako bismo osnovni sistem doveli u mehaničko stanje (slika g.) u kojemu je izvorni sistem (slika h.), u drugom se koraku njegovi čvorovi prisilno zaokreću i pomiču po pravcima zamišljenih veza (slike e. i f.).

Nešto više detalja u opis proračunskoga postupka i njegovu mehaničku interpretaciju unijet ćemo primjerom sa slike 162.a., dok ćemo matematički, posebice matrični formalizam podrobnije razraditi u sljedećem odjeljku.

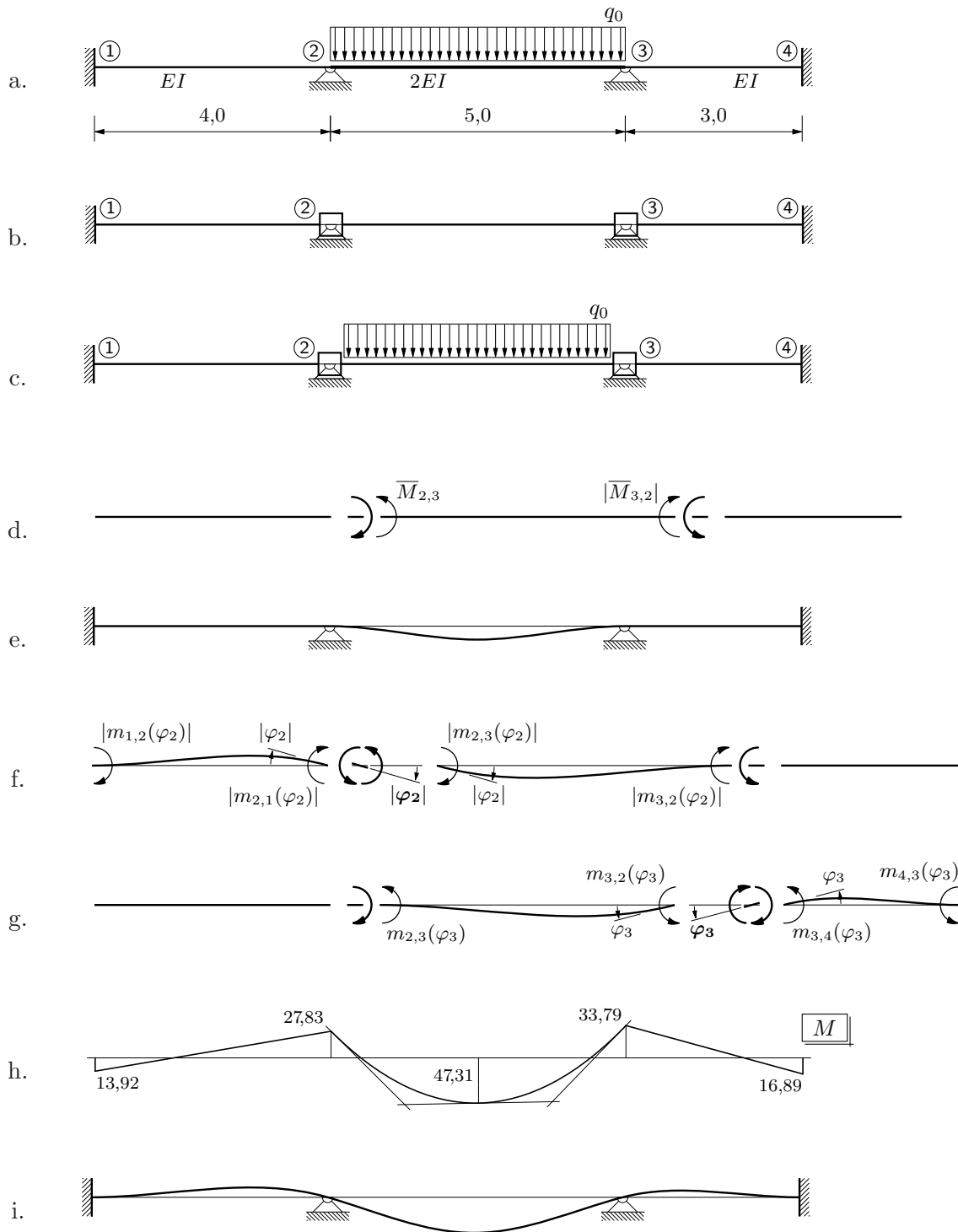
Ležajnim su vezama spriječeni translacijski i rotacijski pomaci čvorova 1 i 4 te translacijski pomaci čvorova 2 i 3. Kao mogući pomaci ostaju stoga samo zaokreti čvorova 2 i 3, pa osnovni sistem za metodu pomaka nastaje dodavanjem momentnih spojeva u ta dva čvora (slika 162.b.). Kako su sada onemogućeni svi pomaci na oba kraja svakog raspona, možemo reći da se izvorni sistem „raspao” na tri obostrano upete grede.

Na osnovnom je sistemu opterećena „obostrano upeta greda” {2,3} (slika 162.c.). U odjeljku 11.7., *Matrica popustljivosti ravnoga štapa*, izveli smo opće izraze za izračunavanje vrijednosti „reaktivnih” momenata na njezinim krajevima (slika d.): ako je  $q_0 = 25\text{kN/m}'$ , tada su

$$\overline{M}_{2,3} = \frac{q_0 \ell_{\{2,3\}}^2}{12} = 52,08 \text{ kNm} \quad \text{i} \quad \overline{M}_{3,2} = -\frac{q_0 \ell_{\{2,3\}}^2}{12} = -52,08 \text{ kNm}.$$

Te momente, koje nazivamo *momentima upetosti*, a i sve ostale momente na oba kraja grede, smatrat ćemo pozitivnima ako je smisao njihove vrtnje suprotan smislu vrtnje kazaljke na satu.

Uvedene oznake traže riječ–dvije pojašnjenja. Ponaјprije, vrijednosti momenata upetosti označavat ćemo potezom iznad slova  $M$ :  $\overline{M}$ . Uz to, u čvoru 2 sastaju se grede {1,2} i {2,3}, pa se u općem slučaju momenti upetosti mogu pojaviti na priključenim krajevima obje grede. Kako bismo ih razlikovali, uveli smo dva indeksa: prvi indeks označava kraj grede „u kojem se nalazimo”, dok je drugi indeks oznaka „drugoga kraja” grede. Prema tome,  $\overline{M}_{2,3}$  vrijednost je momenta upetosti na kraju 2 grede {2,3}, dok je  $\overline{M}_{2,1}$  vrijednost momenta upetosti na kraju 2 grede {1,2}; u našem je primjeru  $\overline{M}_{2,1} = 0$ . Poredak je indeksa važan: dok je  $\overline{M}_{2,3}$  vrijednost momenta upetosti na kraju 2 grede {2,3},  $\overline{M}_{3,2}$



Slika 162.

vrijednost je na njezinu kraju 3. (S druge strane, duljina grede ne ovisi o tome od kojega je kraja mjerimo, pa duljinu grede  $\{2,3\}$  možemo označiti ili s  $l_{\{2,3\}}$  ili s  $l_{\{3,2\}}$ .)

U izvornom se sistemu čvorovi 2 i 3 mogu slobodno zaokretati, a to će se pod zadanim opterećenjem i dogoditi. Stanje pomakâ sa slike 162.e., u kojemu su zbog zamišljenih

momentnih spojeva  $\varphi_2 = 0$  i  $\varphi_3 = 0$ , nije, dakle, stvarno stanje pomakâ izvornoga sistema. Da bismo osnovni sistem doveli u to stvarno stanje, momentne spojeve moramo zaokrenuti za kutove za koje se zaokreću čvorovi izvornoga sistema. Zaokreti momentnih spojeva prisilni su zaokreti „ležajeva” „obostrano upetih greda” od kojih je osnovni sistem sastavljen. Stoga će se, zaokrenemo li spoj u čvoru 2 za neki kut  $\varphi_2$ , u priključenim gredama pojaviti momenti savijanja, a na njihovim krajevima reaktivni momenti. Vrijednosti reaktivnih momenata na krajevima 2 greda  $\{1,2\}$  i  $\{2,3\}$  zbog zaokreta čvora 2 za kut  $\varphi_2$  označili smo na slici 162.f. s  $m_{2,1}(\varphi_2)$  i  $m_{2,3}(\varphi_2)$ , a vrijednosti momenata na „drugim” krajevima tih greda s  $m_{1,2}(\varphi_2)$  i  $m_{3,2}(\varphi_2)$ . Isto će se tako u gredama  $\{2,3\}$  i  $\{3,4\}$  pojaviti momenti zbog zaokreta spoja u čvoru 3 za neki kut  $\varphi_3$ . Vrijednosti reaktivnih momenata na krajevima, izazvanih tim zaokretom, označene su na slici g. sa  $m_{2,3}(\varphi_3)$  i  $m_{3,2}(\varphi_3)$ , odnosno sa  $m_{3,4}(\varphi_3)$  i  $m_{4,3}(\varphi_3)$ . Dok momente u gredi  $\{1,2\}$  izaziva samo zaokret spoja u čvoru 2, a momente u gredi  $\{3,4\}$  samo zaokret spoja u čvoru 3, momente u gredi  $\{2,3\}$  izazivaju zaokreti oba spoja, pa su vrijednosti reaktivnih momenata zbog zaokretâ momentnih spojeva:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= m_{1,2}(\varphi_2), \\ m_{2,1} &= m_{2,1}(\varphi_2), \\ m_{2,3} &= m_{2,3}(\varphi_2) + m_{2,3}(\varphi_3), \\ m_{3,2} &= m_{3,2}(\varphi_2) + m_{3,2}(\varphi_3), \\ m_{3,4} &= m_{3,4}(\varphi_3), \\ m_{4,3} &= m_{4,3}(\varphi_3). \end{aligned}$$

Momente na krajevima greda zbog zaokreta čvorova (i, kasnije, zbog translacijskih pomaka čvorova) uvijek ćemo označavati malim slovom  $m$  uz odgovarajući par indeksa.

U odjeljku 11.7. izveli smo i izraze za vrijednosti momenata na krajevima zbog prisilnoga zaokreta ležaja:

$$m_{i,j}(\varphi_i) = 4 \frac{E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} \varphi_i \quad \text{i} \quad m_{j,i}(\varphi_i) = 2 \frac{E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} \varphi_i.$$

Prema tome:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= 2 \frac{E_{\{1,2\}} I_{\{1,2\}}}{\ell_{\{1,2\}}} \varphi_2 = 2 \frac{EI}{4} \varphi_2 = \frac{1}{2} EI \varphi_2, \\ m_{2,1} &= 4 \frac{E_{\{1,2\}} I_{\{1,2\}}}{\ell_{\{1,2\}}} \varphi_2 = 4 \frac{EI}{4} \varphi_2 = EI \varphi_2, \\ m_{2,3} &= 4 \frac{E_{\{2,3\}} I_{\{2,3\}}}{\ell_{\{2,3\}}} \varphi_2 + 2 \frac{E_{\{2,3\}} I_{\{2,3\}}}{\ell_{\{2,3\}}} \varphi_3 \\ &= 4 \frac{2EI}{5} \varphi_2 + 2 \frac{2EI}{5} \varphi_3 = \frac{8}{5} EI \varphi_2 + \frac{4}{5} EI \varphi_3, \\ m_{3,2} &= 2 \frac{E_{\{2,3\}} I_{\{2,3\}}}{\ell_{\{2,3\}}} \varphi_2 + 4 \frac{E_{\{2,3\}} I_{\{2,3\}}}{\ell_{\{2,3\}}} \varphi_3 \\ &= 2 \frac{2EI}{5} \varphi_2 + 4 \frac{2EI}{5} \varphi_3 = \frac{4}{5} EI \varphi_2 + \frac{8}{5} EI \varphi_3, \end{aligned}$$



$$m_{3,4} = 4 \frac{E_{\{3,4\}} I_{\{3,4\}}}{\ell_{\{3,4\}}} \varphi_3 = 4 \frac{EI}{3} \varphi_3 = \frac{4}{3} EI \varphi_3,$$

$$m_{4,3} = 2 \frac{E_{\{3,4\}} I_{\{3,4\}}}{\ell_{\{3,4\}}} \varphi_3 = 2 \frac{EI}{3} \varphi_3 = \frac{2}{3} EI \varphi_3.$$

Te vrijednosti zasad, međutim, ne možemo iz navedenih izraza izračunati, jer su nam kutovi  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$  u stvarnome stanju pomakâ nepoznati. Ali, zatvorili smo krug: budući da u izvornome sistemu u čvorovima 2 i 3 nema spojeva s podlogom, kutovi zaokreta  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$  moraju biti takvi da reaktivni momenti, koji se zbog njih razvijaju u momentnim spojevima osnovnoga sistema, ponište reaktivne momente izazvane zadanim djelovanjem — momente koje smo nazvali momentima upetosti. Drugim riječima, ukupni reaktivni momenti moraju iščeznuti, pa će nam taj zahtjev dati sustav jednadžbi iz kojega možemo izračunati kutove.

Ukupni reaktivni moment u zamišljenom momentnom spoju s podlogom zbroj je reaktivnih momenata svih priključenih greda, izazvanih prisilnim zaokretima spojeva na njihovim krajevima (slike 162.f. i g.), i momenata upetosti svih priključenih greda (slika d.):

$$M_2 = m_{2,1} + (m_{2,3} + \overline{M}_{2,3}),$$

$$M_3 = (m_{3,2} + \overline{M}_{3,2}) + m_{3,4}.$$

Uvjeti iščezavanja reaktivnih momenata,  $M_2 = 0$  i  $M_3 = 0$ , daju:

$$m_{2,1} + m_{2,3} + \overline{M}_{2,3} = 0,$$

$$m_{3,2} + m_{3,4} + \overline{M}_{3,2} = 0.$$

Te jednadžbe ujedno izražavaju uvjete ravnoteže momenata u čvorovima 2 i 3 izvornoga sistema. Kad momentne spojeve u čvorovima 2 i 3 zaokrenemo za kutove  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$  (slike 162.f. i g.), greda {1,2} djeluje na momentni spoj u čvoru 2 momentom čija je vrijednost  $-m_{2,1}$ , a greda {2,3} momentom s vrijednošću  $-m_{2,3}$ ; istodobno, greda {2,3} djeluje na spoj u čvoru 3 momentom čija je vrijednost  $-m_{3,2}$ , a na taj spoj djeluje i greda {3,4} momentom s vrijednošću  $-m_{4,3}$ . K tomu još zbog zadane distribuirane sile  $q_0$  greda {2,3} djeluje na spoj u čvoru 2 momentom s vrijednošću  $-\overline{M}_{2,3}$ , a na spoj u čvoru 3 momentom s vrijednošću  $-\overline{M}_{3,2}$  (slika d.). Napokon, na te spojeve djeluju i reaktivni momenti  $\vec{M}_2$  i  $\vec{M}_3$ , pa su jednadžbe ravnoteže spojeva:

$$-m_{2,1} - m_{2,3} - \overline{M}_{2,3} + M_2 = 0,$$

$$-m_{3,2} - m_{3,4} - \overline{M}_{3,2} + M_3 = 0.$$

Budući da reaktivni momenti moraju iščeznuti, čvorovi ostaju u ravnoteži i ako ih „odvojimo” od spojeva s podlogom; jednadžbe tada postaju jednadžbama ravnoteže momenata u čvorovima izvornoga sistema — sistema u kojem nema momentnih spojeva, pa stoga ni momenata  $\vec{M}_2$  i  $\vec{M}_3$ :

$$-m_{2,1} - m_{2,3} - \overline{M}_{2,3} = 0,$$

$$-m_{3,2} - m_{3,4} - \overline{M}_{3,2} = 0.$$

Promjenom predznakâ dobivamo prethodno izvedene jednadžbe.

Izrazimo li u tim jednadžbama vrijednosti  $m_{i,j}$  momenata  $\bar{m}_{i,j}$  kao funkcije kutova zaokretâ, dobivamo — nakon prebacivanja poznatih vrijednosti na desne strane — sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} EI \varphi_2 + \left[ \frac{8}{5} EI \varphi_2 + \frac{4}{5} EI \varphi_3 \right] &= -\bar{M}_{2,3}, \\ \left[ \frac{4}{5} EI \varphi_2 + \frac{8}{5} EI \varphi_3 \right] + \frac{4}{3} EI \varphi_3 &= -\bar{M}_{3,2}, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \frac{13}{5} EI \varphi_2 + \frac{4}{5} EI \varphi_3 &= -52,08, \\ \frac{4}{5} EI \varphi_2 + \frac{44}{15} EI \varphi_3 &= 52,08, \end{aligned}$$

u kojemu su nepoznanice kutovi  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ . Njegova su rješenja

$$\varphi_2 = -\frac{27,83}{EI} \quad \text{i} \quad \varphi_3 = \frac{25,34}{EI}.$$

I na kraju, s poznatim kutovima  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ , konačne ćemo vrijednosti momenata na krajevima izračunati kao zbrojeve vrijednosti momenata upetosti, postoje li, i vrijednosti momenata izazvanih prisilnim zaokretima čvorova:

$$M_{1,2} = m_{1,2} = \frac{1}{2} EI \varphi_2 = \frac{1}{2} EI \left( -\frac{27,83}{EI} \right) = -13,92 \text{ kNm},$$

$$M_{2,1} = m_{2,1} = EI \varphi_2 = EI \left( -\frac{27,83}{EI} \right) = -27,83 \text{ kNm},$$

$$\begin{aligned} M_{2,3} = m_{2,3} + \bar{M}_{2,3} &= \frac{8}{5} EI \varphi_2 + \frac{4}{5} EI \varphi_3 + \bar{M}_{2,3} \\ &= \frac{8}{5} EI \left( -\frac{27,83}{EI} \right) + \frac{4}{5} EI \frac{25,34}{EI} + 52,08 = 27,83 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{3,2} = m_{3,2} + \bar{M}_{3,2} &= \frac{4}{5} EI \varphi_2 + \frac{8}{5} EI \varphi_3 + \bar{M}_{3,2} \\ &= \frac{4}{5} EI \left( -\frac{27,83}{EI} \right) + \frac{8}{5} EI \frac{25,34}{EI} - 52,08 = -33,79 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$M_{3,4} = m_{3,4} = \frac{4}{3} EI \varphi_3 = \frac{4}{3} EI \frac{25,34}{EI} = 33,79 \text{ kNm},$$

$$M_{4,3} = m_{4,3} = \frac{2}{3} EI \varphi_3 = \frac{2}{3} EI \frac{25,34}{EI} = 16,89 \text{ kNm},$$

Konačni momentni dijagram na osnovnom i, ujedno, na izvornom sistemu prikazan je na slici 162.h., a na slici i. skicirano je stvarno stanje pomakâ izvornoga sistema.

### 12.2.1. Dualitet metoda sila i pomakâ

Iz prikaza proračunskoga slijeda može se naslutiti da je zamisao iz koje su izvedene metode pomakâ „dualna” temeljnoj zamisli metode sila:

U metodi sila osnovni sistem nastaje raskidanjem veza, pa se pod zadanim djelovanjima sile koje su te veze prenosile ne mogu razviti i oduprijeti pomacima, što znači da su po pravcima raskinutih veza omogućeni pomaci kojih nema u izvornom sistemu. U metodama pomakâ pak osnovni sistem nastaje dodavanjem veza. Te veze sprečavaju „slobodne” pomake i zaokrete čvorova, pa će se u njima pri zadanim djelovanjima pojaviti reaktivne sile i momenti kojih u izvornome sistemu nema.

Pod zadanim se djelovanjima osnovni sistem metode sila nalazi u jednome od mogućih stanja ravnoteže izvornoga sistema. No, to moguće stanje nije i stvarno stanje ravnoteže izvornoga sistema — unutarne sile ne daju polje pomakâ koje zadovoljava uvjete kompatibilnosti. Analogno, polje pomakâ osnovnoga sistema neke od metoda pomakâ u *stanju spriječenih pomaka čvorova* tek je jedno od mogućih stanja pomakâ izvornog sistema. *Mogućim* ili *dopustivim stanjem pomakâ* nazivamo svako polje pomakâ koje zadovoljava uvjete neprekinutosti i ležajne uvjete. To stanje, u kojemu je osnovni sistem, nije, međutim, stvarno stanje pomakâ izvornoga sistema — zamišljene veze preuzimaju i prenose na podlogu dio sila koje djeluju na čvorove.

Osnovni sistem metode sila dovodimo u stvarno stanje ravnoteže izvornoga sistema tako da raskinute veze nadomjestimo statički neodređenim poopćenim silama koje imaju „prave vrijednosti”. Te vrijednosti — nepoznanice metode sila — moraju zadovoljiti jednadžbe kompatibilnosti: raskinute se veze moraju „zatvoriti”. Analogno, osnovni ćemo sistem metode pomakâ dovesti u stvarno stanje pomakâ izvornoga sistema tako da stanju spriječenih pomaka čvorova pribrojimo *stanja prisilnih pomaka čvorova*, pri čemu ti pomaci i zaokreti moraju biti takvi da reakcije, koje se zbog njih razvijaju u zamišljenim vezama, ponište reakcije izazvane zadanim djelovanjima. Kada reakcije iščeznu, na čvorove osnovnoga sistema djelovat će samo one sile koje djeluju na čvorove izvornog sistema. Budući da su u izvornom sistemu te sile u ravnoteži, bit će u ravnoteži i u osnovnom sistemu. Slijedi da uvjete iščezavanja reakcija u zamišljenim vezama možemo izraziti kao *uvjete ravnoteže* sila i momenata u čvorovima izvornoga sistema. Drugim riječima, sustavu jednadžbi kompatibilnosti u metodi je pomakâ dualan *sustav jednadžbi ravnoteže* — njihovo su rješenje tražene, do tada nepoznate orijentirane duljine komponenta pomakâ čvorova i kutovi njihovih zaokreta.

### 12.2.2. Druga metafora

U udžbenicima se katkada matematički formalizam metoda pomakâ interpretira na ponešto drugačiji način (primjerice, [5], odjeljak 4.2.). Dok je prvi korak ponovo proračun u stanju spriječenih pomaka, u drugom se koraku zamišljene veze s podlogom uklanjaju, pa se čvorovi slobodno pomiču i zaokreću pod djelovanjem neuravnoteženih sila „zaostalih” iz prvoga koraka. Tijekom tog stanja, nazvanoga *stanjem slobodnih pomaka*, konstrukcija se uravnotežuje i prelazi u stvarno stanje pomakâ. Drugim riječima, stvarno je stanje pomakâ sada zbroj stanja spriječenih i stanja slobodnih pomaka čvorova.

## 12.3. Matrična formulacija opće metode pomakâ

„Među nama, mislim da gospodin Holmes još nije potpuno ozdravio. Ponaša se vrlo čudno i jako je uzbuđen.”

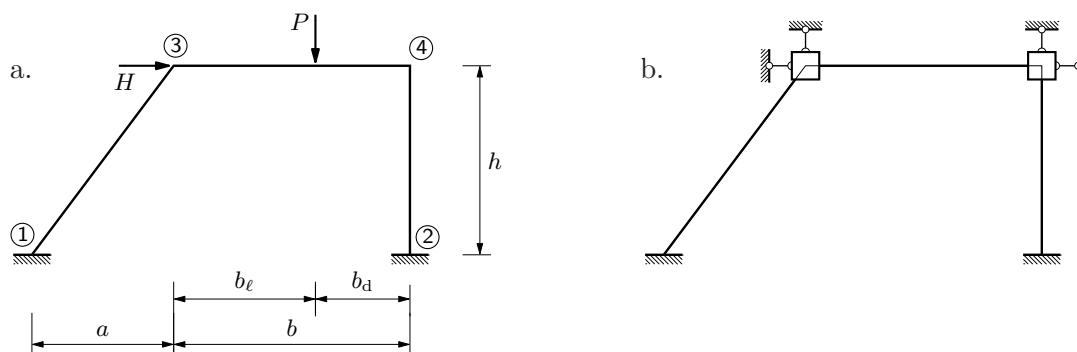
„Mislim da ne trebate brinuti,” rekoh. „Obično bih našao metodu u njegovu ludilu.”

„Neki bi rekli da ima ludila u njegovoj metodi,” promrmlja inspektor.

A. C. Doyle: *The Reigate Puzzle*

U prethodom smo odjeljku postupak proračuna općom metodom pomakâ uveli razmjerno jednostavnim primjerom kontinuiranoga nosača: nepoznati su bili samo kutovi zaokreta iznad ležajeva 2 i 3, pa su za njihovo izračunavanje dovoljne bile jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima. Kako su osi svih momenata okomite na ravninu konstrukcije i kako je dogovorni pozitivni smisao vrtnje momenata na oba kraja štapa jednak, oblikovanje tih jednadžbi svelo se na zbrajanje vrijednosti momenata. U proračunu okvirnih konstrukcija, međutim, za izražavanje uvjeta ravnoteže sila (u užem smislu) u čvorovima, trebat će te sile rastaviti u komponente usporedne s odabranim osima — za općeprimjenjivi proračunski postupak nedostaje nam stoga još nekoliko „tehničkih” detalja.

U okvirnoj konstrukciji sa slike 163.a. slobodni su čvorovi 3 i 4, pa će nepoznanice biti  $u_3, w_3, \varphi_3, u_4, w_4$  i  $\varphi_4$ , dok ćemo osnovni sistem za opću metodu pomakâ oblikovati dodavanjem veza koje sprečavaju translacijske pomake i zaokrete tih čvorova (slika 163.b.). [Koliko je stupanj statičke neodređenosti okvirne konstrukcije sa slike a.? Koliko bi, prema tome, bilo nepoznanica u proračunu metodom sila?]



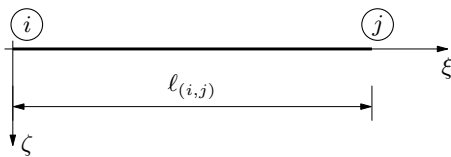
Slika 163.

Budući da su u osnovnome sistemu svi čvorovi nepomični, osnovni je sistem sklop u stanovitu smislu međusobno neovisnih obostrano upetih greda. Neovisnih, zato što svaku od njih možemo neovisno riješiti, odnosno, postupcima opisanima u odjeljku 11.7., *Matrična popustljivosti ravnoga štapa*, možemo izvesti opće izraze primjenjive u rješavanju bilo koje od njih. A ipak, i stoga ograda „neovisni u stanovitu smislu”, kada u stanju prisilnih pomaka pomaknemo ili zaokrenemo zamišljeni ležaj u nekom čvoru, pomaknut će se ili zaokrenuti u čvor priključeni krajevi svih priključenih štapova: primjerice, zaokrenemo li momentni spoj u čvoru 4, zaokrenut će se desni kraj grede {3,4} i gornji kraj stupa {2,4}.

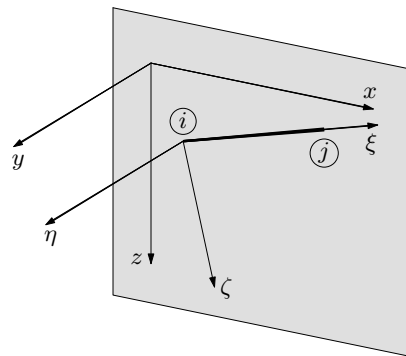
### 12.3.1. Sile na krajevima štapnoga elementa

Štap priključen u čvorove  $i$  i  $j$  nazvali smo štapom  $\{i, j\}$ . Njegove ćemo krajeve označiti prema pripadnim čvorovima te govoriti o kraju  $i$  i kraju  $j$ . Statičke i kinematičke veličine na  $i$ -tom kraju štapa  $\{i, j\}$  označavat ćemo parom (donjih) indeksa  $i, j$ , a veličine na kraju  $j$  parom  $j, i$ .

Štapovi konstrukcije u raznim su položajima u ravnini: u našem je primjeru štap  $\{3,4\}$  horizontalan, štap  $\{4,2\}$  vertikaln, dok štap  $\{1,3\}$  „stoji koso”. Drugim riječima, njihove osi zatvaraju različite kutove s osi  $x$  koordinatnoga sustava. Sustav  $xyz$  nazivamo *globalnim koordinatnim sustavom*. Kako bismo funkcijske veze sila na krajevima štapa — reakcija „obostrano upete grede” — i zadanih opterećenja te, u stanju prisilnih pomaka, sila na krajevima i pomakâ krajeva izrazili u obliku primjenjivom na štap u bilo kojem položaju, uvest ćemo pojam lokalnoga koordinatnog sustava: *lokalni desni pravokutni koordinatni sustav  $\xi\eta\zeta$  štapnoga elementa  $\{i, j\}$*  odabrat ćemo tako da kraj  $i$  leži u njegovu ishodištu i da uzdužna os štapa leži na osi  $\xi$ , pri čemu je os  $\xi$  orijentirana od  $i$ -toga kraja prema kraju  $j$  (slika 164.).<sup>40</sup> Iako  $\{i, j\}$  i  $\{j, i\}$  označavaju isti štap, uvođenjem lokalnoga koordinatnog sustava poredak oznaka čvorova u oznaci štapa postaje bitnim; kad ćemo trebati naglasiti da je  $i$  njegov prvi, a  $j$  drugi čvor, štap ćemo označiti s  $(i, j)$ .



Slika 164.



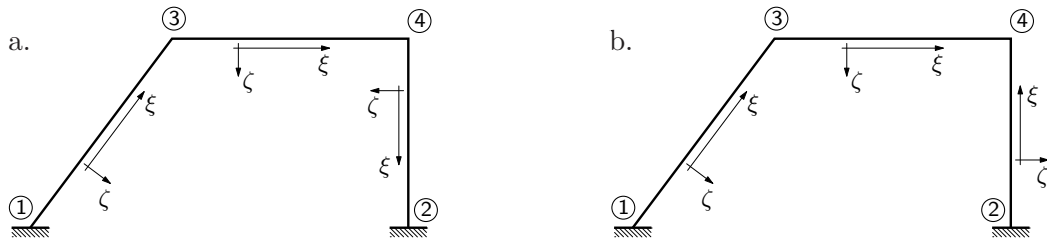
Slika 165.

Na slici 166.a. uz pojedine su štapove naše konstrukcije skicirane (izmaknuto, preglednosti radi) osi lokalnih koordinatnih sustava, pri čemu smo štapove označili s  $(1,3)$ ,  $(3,4)$  i  $(4,2)$ . Označimo li, međutim, štap između čvorova 2 i 4 s  $(2,4)$ , promijenit će se ishodište i orijentacija pripadnih lokalnih osi (slika b.).

Budući da je štap dio ravninske konstrukcije, uzet ćemo da se sva kinematička i statička djelovanja odvijaju u ravnini  $\xi\zeta$ , koja se poklapa s ravninom  $xz$ , dok su osi  $y$  i  $\eta$  usporedne i orijentirane na istu stranu ravnine  $xy = \xi\zeta$  (slika 165.). Vektori momenata i zaokretâ čvorova bit će usporedni s osi  $\eta$ .

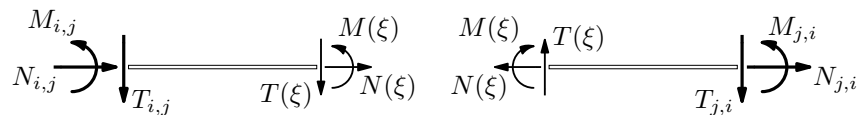
*Sile na krajevima štapnoga elementa* poopćene su sile kojima čvorovi djeluju na štap. Uzet ćemo zasad da je štap u čvorove priključen krutim vezama, pa na oba kraja postoje sve tri poopćene sile — uzdužna i poprečna sila te moment.

<sup>40</sup> Strogo govoreći, lokalni koordinatni sustav pripada štapu  $\{i, j\}$ , ili, drugim riječima, svaki štap ima svoj lokalni koordinatni sustav, pa bi ga trebalo označiti s  $(\xi\eta\zeta)_{(i,j)}$ , a osi s  $\xi_{(i,j)}$ ,  $\eta_{(i,j)}$  i  $\zeta_{(i,j)}$ , ali...



Slika 166.

Iako su i sile na krajevima unutarnje sile, njihova će se dogovorna orijentiranost donekle razlikovati od uobičajene orijentiranosti unutarnjih sila: sile na oba kraja štapa dogovorno su pozitivne ako se njihov smisao djelovanja poklapa s pozitivnim smislom odgovarajuće osi; na slici 167. prikazane su pozitivno orijentirane sile na krajevima štapa, kao i pozitivno orijentirane „obične” unutarnje sile u nekom presjeku  $\xi$ . U prethodnom smo odjeljku vidjeli da takav „dogovor” o pozitivnom smislu vrtnje momentata na krajevima olakšava postavljanje jednadžbi ravnoteže momentata u čvorovima (jednostavno zbrajamo njihove vrijednosti), a pokazat će se da nešto slično, iako malo složenije, vrijedi i za ostale jednadžbe.



Slika 167.

Znamo da su ukupne sile na krajevima štapa zbrojevi sila u stanju spriječenih pomaka čvorova i sila u stanju prisilnih pomaka čvorova. Za vrijednosti sila na kraju  $i$  možemo stoga pisati

$$\begin{aligned} N_{i,j} &= \bar{N}_{i,j} + n_{i,j}, \\ T_{i,j} &= \bar{T}_{i,j} + t_{i,j}, \\ M_{i,j} &= \bar{M}_{i,j} + m_{i,j}, \end{aligned} \quad (303)$$

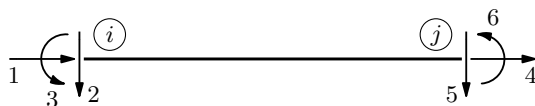
gdje su  $\bar{N}_{i,j}$ ,  $\bar{T}_{i,j}$ ,  $\bar{M}_{i,j}$  vrijednosti sila u stanju spriječenih, a  $n_{i,j}$ ,  $t_{i,j}$ ,  $m_{i,j}$  vrijednosti sila u stanju prisilnih pomaka. Analogni se izrazi mogu napisati za vrijednosti sila na kraju  $j$ .

### 12.3.2. Sile upetosti

Stanje spriječenih pomaka zamišljeno je stanje u kojem se u proračun uvode opterećenja na štapovima i sva ostala zadana djelovanja, poput slijeganja ležajeva i temperaturnih promjena. Sile na krajevima štapova u stanju spriječenih pomaka nazivaju se i *silama upetosti*. Poredamo li te sile prema slici 168., njihove vrijednosti možemo svrstati u vektor

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = [\bar{N}_{i,j} \quad \bar{T}_{i,j} \quad \bar{M}_{i,j} \quad \bar{N}_{j,i} \quad \bar{T}_{j,i} \quad \bar{M}_{j,i}]^T,$$

pa su, primjerice,  $\bar{f}_{(i,j)_3} = \bar{M}_{i,j}$  i  $\bar{f}_{(i,j)_5} = \bar{T}_{j,i}$ .



Slika 168.

Opći izrazi za izračunavanje vrijednosti sila upetosti izvode se najčešće primjenom metode sila. Tako smo u odjeljku 11.7. izveli izraze za djelovanje koncentriranih sila  $\vec{P}_\xi$  i  $\vec{P}_\zeta$  u smjerovima osi  $\xi$  i  $\zeta$  i momenta  $\vec{M}$  u točki koja je za  $b_\ell$  udaljena od čvora  $i$ :

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i,j} &= -P_\xi \frac{b_d}{\ell_{\{i,j\}}}, & \bar{N}_{j,i} &= -P_\xi \frac{b_\ell}{\ell_{\{i,j\}}}, \\ \bar{T}_{i,j} &= -P_\zeta \frac{(3b_\ell + b_d)b_d^2}{\ell_{\{i,j\}}^3} - M \frac{6b_\ell b_d}{\ell_{\{i,j\}}^3}, & \bar{T}_{j,i} &= -P_\zeta \frac{(b_\ell + 3b_d)b_\ell^2}{\ell_{\{i,j\}}^3} + M \frac{6b_\ell b_d}{\ell_{\{i,j\}}^3}, \\ \bar{M}_{i,j} &= P_\zeta \frac{b_\ell b_d^2}{\ell_{\{i,j\}}^2} + M \frac{b_d(3b_\ell - \ell_{\{i,j\}})}{\ell_{\{i,j\}}^2}, & \bar{M}_{j,i} &= -P_\zeta \frac{b_\ell^2 b_d}{\ell_{\{i,j\}}^2} + M \frac{b_\ell(3b_d - \ell_{\{i,j\}})}{\ell_{\{i,j\}}^2}, \end{aligned} \quad (304)$$

gdje je  $b_d = \ell_{\{i,j\}} - b_\ell$ . Uočite da smo pri „prenošenju” izrazâ predznake vrijednosti sila na  $i$ -tom kraju promijenili u skladu s dogovorom o pozitivnoj orijentiranosti sila na krajevima. (A prilagodili smo i neke oznake.).

Za jednoliko raspodijeljene sile koje djeluju u smjerovima lokalnih osi  $\xi$  i  $\zeta$ , s vrijednostima  $q_\xi$  i  $q_\zeta$ , vrijednosti sila upetosti izračunavaju se prema izrazima

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i,j} &= -\frac{1}{2} q_\xi \ell_{\{i,j\}}, & \bar{N}_{j,i} &= -\frac{1}{2} q_\xi \ell_{\{i,j\}}, \\ \bar{T}_{i,j} &= -\frac{1}{2} q_\zeta \ell_{\{i,j\}}, & \bar{T}_{j,i} &= -\frac{1}{2} q_\zeta \ell_{\{i,j\}}, \\ \bar{M}_{i,j} &= \frac{1}{12} q_\zeta \ell_{\{i,j\}}^2, & \bar{M}_{j,i} &= -\frac{1}{12} q_\zeta \ell_{\{i,j\}}^2. \end{aligned} \quad (305)$$

Izraze za vrijednosti momenata izveli smo u odjeljku 11.7., a ostale vam izvode ostavljamo za domaću zadaću.

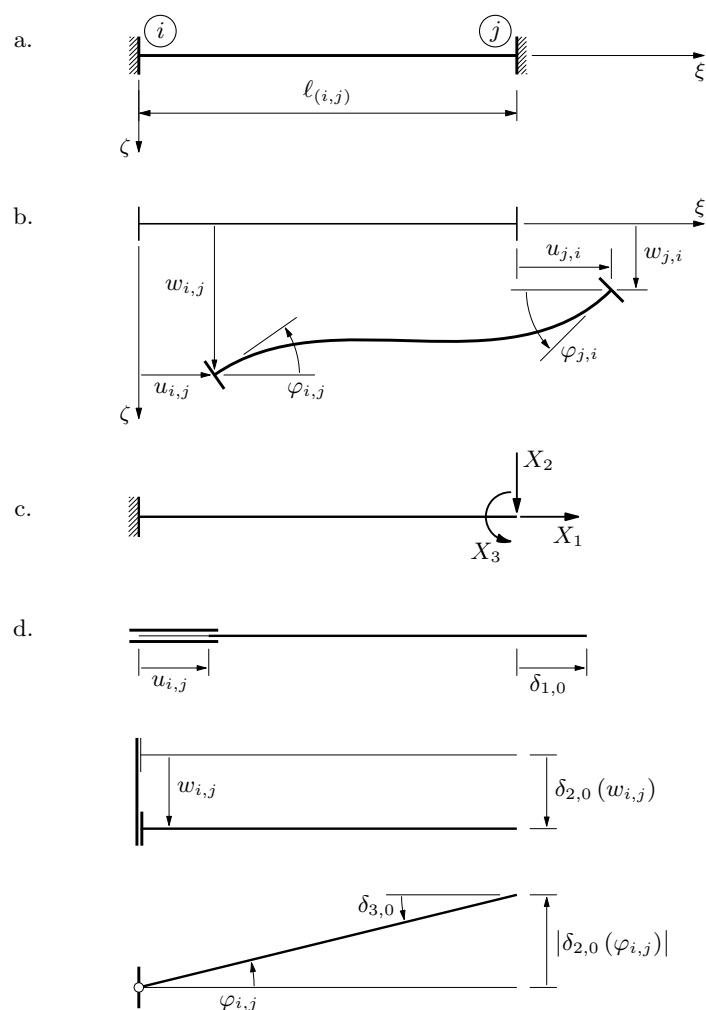
Za mnoge se, složenije, tipove opterećenja izrazi za vrijednosti sila upetosti mogu naći u raznim priručnicima i u udžbenicima građevne statike drugih autora.

### 12.3.3. Odnos između sila na krajevima i pomakâ krajeva

Sile u stanju prisilnih pomaka posljedica su (poopćenih) pomaka krajeva štapa koji su jednaki pomacima čvorova sistema. Ti su pomaci prisilni pomaci ležajeva obostrano upete grede (slika 169.a.) koja je proračunska shema štapnoga elementa:  $u_{i,j}$  i  $w_{i,j}$  te  $u_{j,i}$  i  $w_{j,i}$  orijentirane su duljine komponenata pomaka ležajeva  $i$  i  $j$  po osi štapa i okomito na nju, dok su  $\varphi_{i,j}$  i  $\varphi_{j,i}$  kutovi njihovih zaokreta (slika b.). Pozitivni smisao tih komponenata odgovara pozitivnom smislu osi lokalnoga koordinatnog sustava, a time i pozitivnom smislu sila na krajevima, prikazanima na slici 164.

I opće izraze za vrijednosti sila na krajevima štapa kao funkcija vrijednosti poopćenih pomaka krajeva izvest ćemo metodom sila. (Veze između momenata i zaokreta jednoga

kraja, koje smo upotrijebili u prethodnom odjeljku, već smo izveli u odjeljku 11.7., a sada ćemo izvesti cjelovite izraze za vrijednosti svih sila, u kojima su obuhvaćeni utjecaji svih komponenata pomakâ oba kraja.) Za osnovni sistem odabrat ćemo konzolu sa slike 169.c.



Slika 169.

Prema uvjetima kompatibilnosti vrijednosti pomakâ hvatišta sila  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$  i  $\bar{X}_3$  po pravcima njihova djelovanja moraju biti jednake vrijednostima odgovarajućih komponenata pomaka ležaja  $j$ :

$$\bar{\delta}_1 = u_{j,i}, \quad \bar{\delta}_2 = w_{j,i} \quad \text{i} \quad \bar{\delta}_3 = \varphi_{j,i}.$$

S pomoću dijagramâ pomakâ prikazanih na slici 169.d. određujemo vrijednosti pomakâ hvatišta prekobrojnih sila po pravcima njihova djelovanja, prouzročenih pomacima ležaja  $i$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= u_{i,j}, \\ \delta_{2,0} &= \delta_{2,0}(w_{i,j}) + \delta_{2,0}(\varphi_{i,j}) = w_{i,j} - \varphi_{i,j} l_{\{i,j\}}, \\ \delta_{3,0} &= \varphi_{i,j}, \end{aligned}$$



pa je sustav jednadžbi kompatibilnosti

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} - \varphi_{i,j} \ell_{\{i,j\}} \\ \varphi_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix},$$

gdje je  $\mathbf{D}$  matrica popustljivosti dana izrazom (290) na stranici 265.

Prema izrazu (291) na istoj stranici, inverzna je matrica matrice fleksibilnosti

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\{i,j\}} A_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}^3} & \frac{6 E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}^2} \\ 0 & \frac{6 E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{4 E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} \end{bmatrix}.$$

Uvedemo li oznake

$$k_{\{i,j\}}^a = \frac{E_{\{i,j\}} A_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} \quad \text{i} \quad k_{\{i,j\}}^f = \frac{E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} \quad (306)$$

bit će

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} \\ 0 & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 4 k_{\{i,j\}}^f \end{bmatrix},$$

pa je rješenje sustava

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} u_{j,i} - u_{i,j} \\ w_{j,i} - w_{i,j} + \varphi_{i,j} \ell_{\{i,j\}} \\ \varphi_{j,i} - \varphi_{i,j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{\{i,j\}}^a (u_{j,i} - u_{i,j}) \\ \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} (w_{j,i} - w_{i,j}) + \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} (\varphi_{j,i} + \varphi_{i,j}) \\ \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} (w_{j,i} - w_{i,j}) + 4 k_{\{i,j\}}^f \varphi_{j,i} + 2 k_{\{i,j\}}^f \varphi_{i,j} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Osnovni smo sistem odabrali tako da sile  $\vec{X}_1$ ,  $\vec{X}_2$  i  $\vec{X}_3$  odgovaraju silama na kraju  $j$  štapnoga elementa, te su neposredno

$$\begin{aligned} n_{j,i} &= X_1 = k_{\{i,j\}}^a (-u_{i,j} + u_{j,i}), \\ t_{j,i} &= X_2 = \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} (-w_{i,j} + w_{j,i}) + \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} (\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i}), \\ m_{j,i} &= X_3 = \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} (-w_{i,j} + w_{j,i}) + 2 k_{\{i,j\}}^f \varphi_{i,j} + 4 k_{\{i,j\}}^f \varphi_{j,i}. \end{aligned}$$

Izraze za vrijednosti sila na kraju  $i$  možemo sada izvesti iz jednadžbi ravnoteže cijeloga štapa [skicirajte štap sa silama koje na nj djeluju i napišite jednadžbe ravnoteže (treća jednadžba neka je jednadžba ravnoteže momenata oko  $i$ -tog kraja)!]:

$$\begin{aligned} n_{i,j} &= -n_{j,i} = k_{\{i,j\}}^a (u_{i,j} - u_{j,i}), \\ t_{i,j} &= -t_{j,i} = \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} (w_{i,j} - w_{j,i}) + \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} (-\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}), \\ m_{i,j} &= -m_{j,i} + \ell_{\{i,j\}} \cdot t_{j,i} = \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} (-w_{i,j} + w_{j,i}) + 4 k_{\{i,j\}}^f \varphi_{i,j} + 2 k_{\{i,j\}}^f \varphi_{j,i}. \end{aligned}$$

Svrstamo li vrijednosti sila na krajevima i vrijednosti komponenata pomakâ krajeva u vektore (odabavši ponovo poredak sila, ali sada i pomakâ, prema slici 168.), dobivene izraze možemo zapisati u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 & -k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 0 & -\frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} \\ 0 & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 4 k_{\{i,j\}}^f & 0 & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 2 k_{\{i,j\}}^f \\ -k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 & k_{\{i,j\}}^a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 0 & \frac{12 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}^2} & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} \\ 0 & -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 2 k_{\{i,j\}}^f & 0 & \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} & 4 k_{\{i,j\}}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix}, \quad (307)$$

i, jezgrovitije, matricnom stenografijom:

$$\mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{(i,j)}. \quad (308)$$

Matrica  $\mathbf{k}_{(i,j)}$  je *matrica krutosti štapnoga elementa*  $\{i, j\}$  izražena u lokalnom koordinatnom sustavu, vektor  $\mathbf{u}_{(i,j)}$  je vektor orijentiranih duljina komponenata translacijskih pomaka krajeva štapa usporednih s osima lokalnoga koordinatnog sustava i kutova zaokretâ osi štapa na njegovim krajevima, a vektor  $\mathbf{f}_{(i,j)}$  je vektor vrijednosti sila na krajevima štapa izazvanih pomacima tih krajeva.

Komponenta  $k_{(i,j)_{a,b}}$ ,  $a, b = 1, \dots, 6$ , matrice  $\mathbf{k}_{(i,j)}$  vrijednost je sile s indeksom  $a$ ,  $f_{(i,j)_a}$ , izazvane jediničnom komponentom pomaka s indeksom  $b$ ,  $u_{(i,j)_b} = 1$  (pri čemu brojeke na slici 168. daju vrijednosti indeksâ  $a$  u  $f_{(i,j)_a}$  i  $b$  u  $u_{(i,j)_b}$ ). Primjerice, ako je

$$u_{(i,j)_3} = \varphi_{i,j} = 1$$

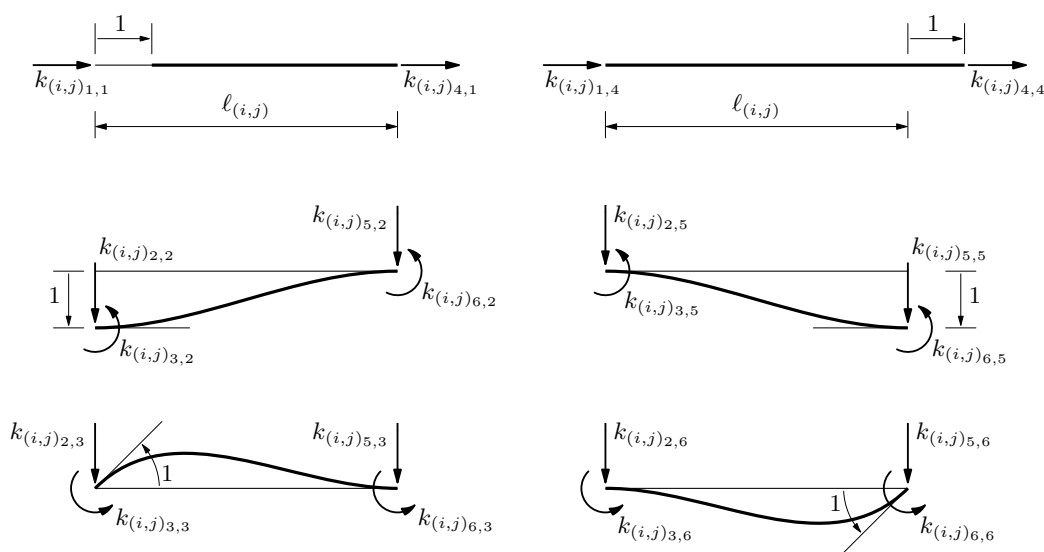
te ako su

$$\begin{aligned} u_{(i,j)_1} = u_{i,j} &= 0, & u_{(i,j)_4} = u_{j,i} &= 0, \\ u_{(i,j)_2} = w_{i,j} &= 0, & u_{(i,j)_5} = w_{j,i} &= 0, \\ & & u_{(i,j)_6} = \varphi_{j,i} &= 0, \end{aligned}$$

uvrštavanjem u (307) dobivamo

$$\begin{aligned} f_{(i,j)_1} = n_{i,j} &= 0 = k_{(i,j)_{1,3}}, & f_{(i,j)_4} = n_{j,i} &= 0 = k_{(i,j)_{4,3}}, \\ f_{(i,j)_2} = t_{i,j} &= -\frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} = k_{(i,j)_{2,3}}, & f_{(i,j)_5} = t_{j,i} &= \frac{6 k_{\{i,j\}}^f}{\ell_{\{i,j\}}} = k_{(i,j)_{5,3}}, \\ f_{(i,j)_3} = m_{i,j} &= 4 k_{\{i,j\}}^f = k_{(i,j)_{3,3}}, & f_{(i,j)_6} = m_{j,i} &= 2 k_{\{i,j\}}^f = k_{(i,j)_{6,3}}. \end{aligned}$$

Sile, čije su vrijednosti različite od nule, i njihov uzrok prikazani su na donjem lijevom crtežu slike 170. Kako je vrijednost drugoga indeksa u oznakama svih sila 3, riječ je o komponentama trećeg stupca matrice krutosti.



Slika 170.

Ostali crteži slike 170. sadrže sile, vrijednosti različitih od nule, izazvane ostalim komponentama pomaka; na svakom crtežu samo jedna komponenta pomaka ima vrijednost 1, dok su vrijednosti svih ostalih 0, kao što skice progibnih linija i pokazuju.

Odmah možemo vidjeti da je matrica krutosti štapnoga elementa *simetrična*, a lako je pokazati da je i *singularna*: izvodeći iz jednadžbi ravnoteže štapa izraze za vrijednosti sila na  $i$ -tom kraju (smatrajući vrijednosti sila na kraju  $j$  poznatima), dobili smo

$$\begin{aligned}n_{i,j} &= -n_{j,i}, \\t_{i,j} &= -t_{j,i}, \\m_{i,j} &= \ell_{\{i,j\}} \cdot t_{j,i} - m_{j,i},\end{aligned}$$

što znači da prvi redak matrice nastaje množenjem četvrtog, a drugi množenjem petog sa  $-1$ , dok je treći redak linearna kombinacija petoga i šestog retka. Matrica krutosti, prema tome, ima tri linearno nezavisna retka, pa joj je rang tek tri.

#### 12.3.4. Ukupne sile na krajevima štapnoga elementa

Ukupne sile na krajevima štapa zbrojevi su sila upetosti i sila u stanju prisilnih pomaka:

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} + \mathbf{f}_{(i,j)} = \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} + \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{(i,j)}. \quad (309)$$

Za promjene koordinatnih sustava i za sastavljanje jednadžbi ravnoteže čvorova pogodno je „razdvojiti” krajeve štapa:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i} \\ \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_i} \\ \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{(i,j)_i} \\ \mathbf{f}_{(i,j)_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_i} \\ \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{i,i}} & \mathbf{k}_{(i,j)_{i,j}} \\ \mathbf{k}_{(i,j)_{j,i}} & \mathbf{k}_{(i,j)_{j,j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(i,j)_i} \\ \mathbf{u}_{(i,j)_j} \end{bmatrix}, \quad (310)$$

tako da su

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i} = [N_{i,j} \ T_{i,j} \ M_{i,j}]^T, \quad \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_i} = [\bar{N}_{i,j} \ \bar{T}_{i,j} \ \bar{M}_{i,j}]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{f}_{(i,j)_i} = [n_{i,j} \ t_{i,j} \ n_{i,j}]^T$$

vektori vrijednosti ukupnih sila, sila upetosti i sila zbog pomakâ oba kraja na kraju  $i$ ,

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j} = [N_{j,i} \ T_{j,i} \ M_{j,i}]^T, \quad \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_j} = [\bar{N}_{j,i} \ \bar{T}_{j,i} \ \bar{M}_{j,i}]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{f}_{(i,j)_j} = [n_{j,i} \ t_{j,i} \ n_{j,i}]^T$$

vektori vrijednosti sila na kraju  $j$  te

$$\mathbf{u}_{(i,j)_i} = [u_{i,j} \ w_{i,j} \ \varphi_{i,j}]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{u}_{(i,j)_j} = [u_{j,i} \ w_{j,i} \ \varphi_{j,i}]^T$$

vektori vrijednosti komponenata pomakâ kraja  $i$  i kraja  $j$ .

Matrica  $\mathbf{k}_{(i,j)}$  rastavljena je na odgovarajući način na blokove  $3 \times 3$ , tako da (pod)matrice  $\mathbf{k}_{(i,j)_{i,i}}$  i  $\mathbf{k}_{(i,j)_{i,j}}$  izražavaju utjecaje pomakâ krajeva  $i$  i  $j$  na vrijednosti sila na  $i$ -tom kraju,

$$\mathbf{f}_{(i,j)_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{i,i}} & \mathbf{k}_{(i,j)_{i,j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(i,j)_i} \\ \mathbf{u}_{(i,j)_j} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{(i,j)_{i,i}} \mathbf{u}_{(i,j)_i} + \mathbf{k}_{(i,j)_{i,j}} \mathbf{u}_{(i,j)_j},$$

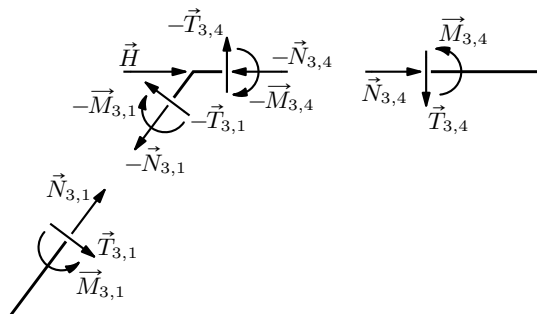
a (pod)matrice  $\mathbf{k}_{(i,j)_{j,i}}$  i  $\mathbf{k}_{(i,j)_{j,j}}$  utjecaje pomakâ krajeva  $i$  i  $j$  na vrijednosti sila na kraju  $j$  [napišite odgovarajući matrični izraz!].

### 12.3.5. Napomena o diferencijalnim jednadžbama poljâ pomakâ

U prethodna smo dva odjeljka izraze za vrijednosti sila na krajevima izveli primjenom metode sila. Ti se izrazi mogu izvesti i rješavanjem diferencijalnih jednadžbi poljâ uzdužnih i poprečnih pomaka ravnoga štapa [5, odjeljak 4.2.3.]. U stanju prisilnih (ili, prema [5], slobodnih) pomaka čvorova te su jednadžbe homogene, dok su rubni uvjeti nehomogeni, jer izražavaju opće vrijednosti pomakâ i kutove zaokretâ ležajeva. U stanju pak spriječenih pomaka čvorova diferencijalne su jednadžbe za različite vrste opterećenja nehomogene, jer su funkcije kojima su ta opterećenja opisana s desne strane znaka jednakosti, a rubni su uvjeti homogeni.

### 12.3.6. Prijelaz u globalni koordinatni sustav

U čvoru 3 okvira sa slike 163.a. na stranici 279., primjerice, sastaju su štapovi  $\{1,3\}$  i  $\{3,4\}$ , pa na nj osim sile  $\vec{H}$  djeluju i sile  $-\vec{N}_{3,1}$ ,  $-\vec{T}_{3,1}$ ,  $-\vec{N}_{3,4}$  i  $-\vec{T}_{3,4}$  te momenti  $-\vec{M}_{3,1}$  i  $-\vec{M}_{3,4}$  (slika 171.). Budući da su osi  $\eta$  lokalnih koordinatnih sustava oba štapa, a time i osi oba momenta, usporedne s globalnom osi  $y$  i da su jednako orijentirane, vrijednosti momenata mogu se u jednadžbi ravnoteže momenata neposredno zbrojiti. Međutim, osi  $\xi$  i  $\zeta$  različitih lokalnih sustava imaju različite nagibe u odnosu na globalnu os  $x$ , pa i sile (u užem smislu) djeluju na pravcima različitih nagiba. Da bismo uvjete ravnoteže sila (u užem smislu) mogli izraziti u skalarnome obliku, svaku od tih sila moramo rastaviti u po dvije komponente usporedne s dvije pogodno odabrane osi. Prirodno je za to izabrati osi  $x$  i  $z$  globalnoga koordinatnog sustava.



Slika 171.

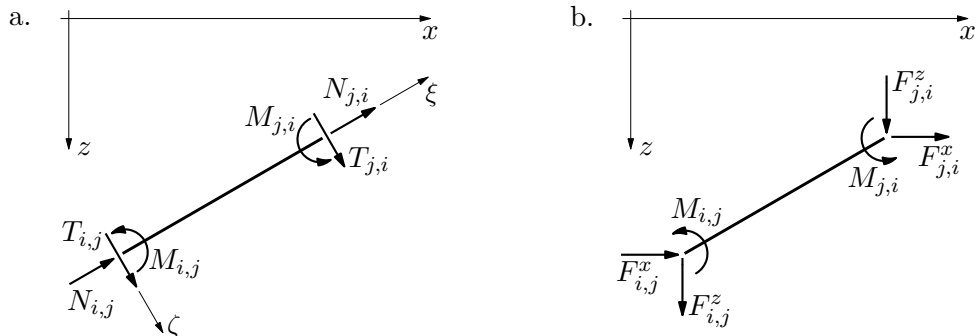
Općenitije, za svaki štapa  $\{i,j\}$  moramo sile  $\vec{N}_{i,j}$  i  $\vec{T}_{i,j}$  na  $i$ -tom kraju te sile  $\vec{N}_{j,i}$  i  $\vec{T}_{j,i}$  na kraju  $j$ , usporedne s lokalnim osima  $\xi$  i  $\zeta$  (slika 172.a.), zamijeniti silama koje su usporedne s globalnim osima  $x$  i  $z$ :  $\vec{F}_{i,j}^x$  i  $\vec{F}_{i,j}^z$  te  $\vec{F}_{j,i}^x$  i  $\vec{F}_{j,i}^z$  (slika b.).

„Zamijeniti”, naravno, znači da rezultantu  $\vec{F}_{i,j}$  sila  $\vec{N}_{i,j}$  i  $\vec{T}_{i,j}$  (slika 173.a.) treba rastaviti u komponente  $\vec{F}_{i,j}^x$  i  $\vec{F}_{i,j}^z$  (slika b.):

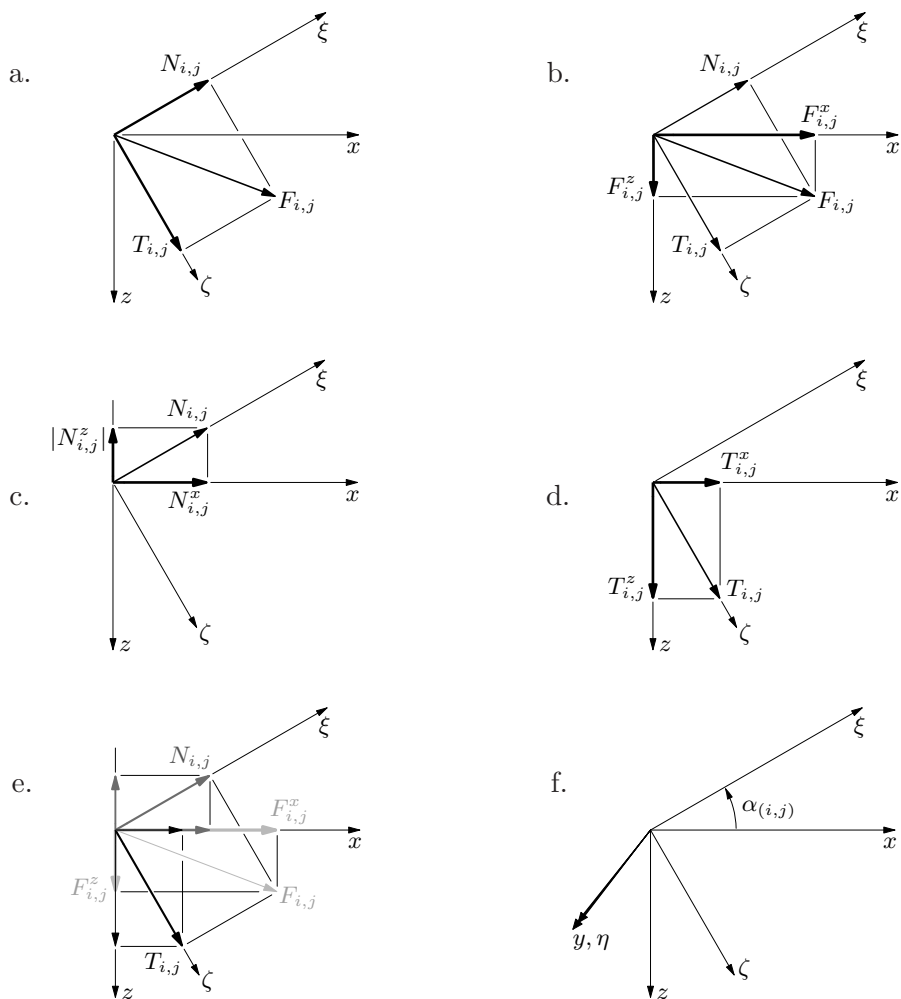
$$\vec{N}_{i,j} + \vec{T}_{i,j} = \vec{F}_{i,j} = \vec{F}_{i,j}^x + \vec{F}_{i,j}^z.$$

Rastavimo li silu  $\vec{N}_{i,j}$  u komponente  $\vec{N}_{i,j}^x$  i  $\vec{N}_{i,j}^z$  usporedne s globalnim osima (slika c.) i na sličan način silu  $\vec{T}_{i,j}$  u komponente  $\vec{T}_{i,j}^x$  i  $\vec{T}_{i,j}^z$  (slika d.), vrijednosti komponenata  $\vec{F}_{i,j}^x$  i  $\vec{F}_{i,j}^z$  bit će, prema slici e.,

$$F_{i,j}^x = N_{i,j}^x + T_{i,j}^x \quad \text{i} \quad F_{i,j}^z = N_{i,j}^z + T_{i,j}^z. \quad (311)$$



Slika 172.



Slika 173.

Kut između globalne osi  $x$  i lokalne osi  $\xi$  označit ćemo sa  $\alpha_{(i,j)}$  (slika f.). Pozitivnim ćemo smatrati „zaokret” od osi  $x$  do osi  $\xi$  u smislu suprotnom od smisla vrtnje kazaljke na satu — njegova se os poklapa s osi  $y = \eta$ . (Kako vrijednosti komponenata sila ne ovise o translaciji koordinatnoga sustava, možemo uzeti da oba sustava imaju ishodišta u istoj

točki.)

Za vrijednosti komponenata sila  $\vec{N}_{i,j}$  i  $\vec{T}_{i,j}$ , usporednih s globalnim osima, možemo sada, prema slikama c. i d., pisati

$$\begin{aligned} N_{i,j}^x &= N_{i,j} \cdot \cos \alpha_{(i,j)}, \\ N_{i,j}^z &= N_{i,j} \cdot \cos (\pi/2 + \alpha_{(i,j)}) = -N_{i,j} \cdot \sin \alpha_{(i,j)}, \\ T_{i,j}^x &= T_{i,j} \cdot \cos (\pi/2 - \alpha_{(i,j)}) = T_{i,j} \cdot \sin \alpha_{(i,j)}, \\ T_{i,j}^z &= T_{i,j} \cdot \cos \alpha_{(i,j)}, \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u (311) dobivamo

$$\begin{aligned} F_{i,j}^x &= N_{i,j} \cdot \cos \alpha_{(i,j)} + T_{i,j} \cdot \sin \alpha_{(i,j)}, \\ F_{i,j}^z &= -N_{i,j} \cdot \sin \alpha_{(i,j)} + T_{i,j} \cdot \cos \alpha_{(i,j)}. \end{aligned}$$

Dodamo li još trivijalni identitet

$$M_{i,j} = M_{i,j},$$

ta tri izraza možemo povezati u

$$\begin{bmatrix} F_{i,j}^x \\ F_{i,j}^z \\ M_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,j} \\ T_{i,j} \\ M_{i,j} \end{bmatrix}$$

i, sažeto,

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g = \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}; \quad (312)$$

vektor  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g = [F_{i,j}^x \ F_{i,j}^z \ M_{i,j}]^T$  sadrži vrijednosti komponenata sila na  $i$ -tom kraju, usporednih s osima globalnoga koordinatnog sustava, dok je matricom

$$\mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (313)$$

definirana transformacija lokalnoga koordinatnog sustava štapnog elementa  $\{i, j\}$  u globalni koordinatni sustav.

Budući da su dogovorne pozitivne orijentacije sila na oba kraja štapa jednake (slika 172.), analogne izraze možemo napisati za vrijednosti sila na kraju  $j$ :

$$\begin{bmatrix} F_{j,i}^x \\ F_{j,i}^z \\ M_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{j,i} \\ T_{j,i} \\ M_{j,i} \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j}^g = \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j}. \quad (314)$$

Nadovežemo li vektore  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}$  i  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j}$  u vektor  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}$ , a vektore  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g$  i  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j}^g$  u vektor  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g$ , bit će

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}, \quad (315)$$

ili, opširnije, s podvektorima i podmatricama kao komponentama,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g \\ \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i} \\ \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_j} \end{bmatrix}, \quad (316)$$

ili, potpuno „raspisano”, sa skalarnim komponentama,

$$\begin{bmatrix} F_{i,j}^x \\ F_{i,j}^z \\ M_{i,j} \\ F_{j,i}^x \\ F_{j,i}^z \\ M_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,j} \\ T_{i,j} \\ M_{i,j} \\ N_{j,i} \\ T_{j,i} \\ M_{j,i} \end{bmatrix}.$$

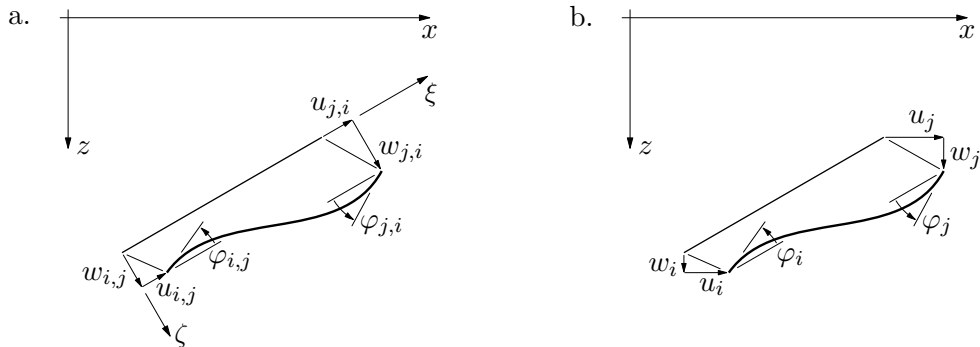
Sile na krajevima štapa su, kao što znamo, zbrojevi sila u stanju prisilnih pomaka i sila upetosti:

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{f}_{(i,j)} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{(i,j)} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}.$$

Uvrštavanje u izraz (315) daje

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{(i,j)} + \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}. \quad (317)$$

Vektor  $\mathbf{u}_{(i,j)}$  sadrži orijentirane duljine komponenata translacijskih pomaka krajeva, usporednih s osima  $\xi$  i  $\zeta$  lokalnoga koordinatnog sustava, i kutove zaokretâ osi štapa na njegovim krajevima oko osi koje su usporedne s lokalnom osi  $\eta$  (slika 174.a.). No, kao temeljne smo nepoznanice u odjeljku 12.1. odabrali orijentirane duljine komponenata pomaka i kutove zaokretâ čvorova. Kako se u čvoru gotovo uvijek sastaje više štapova, nismo ga mogli „vezati” uz neki od njih — translacijski smo pomak čvora stoga rastavili u komponente usporedne s globalnim osima  $x$  i  $z$ , a njegov je zaokret zaokret oko osi



Slika 174.



usporedne s globalnom osi  $y$  (slika 160.a. na stranici 271.). Da bismo tako odabrane nepoznanice (slika 174.b.) mogli uvesti u jednadžbe ravnoteže sila i momenata u čvorovima, vrijednosti sila treba izraziti kao funkcije tih nepoznanica. Kako je lokalna os  $\eta$  usporedna s globalnom osi  $y$ , kutovi zaokreta krajeva osi štapa jednaki su kutovima zaokreta čvorova u koje je štap priključen:

$$\varphi_{i,j} = \varphi_i \quad \text{i} \quad \varphi_{j,i} = \varphi_j.$$

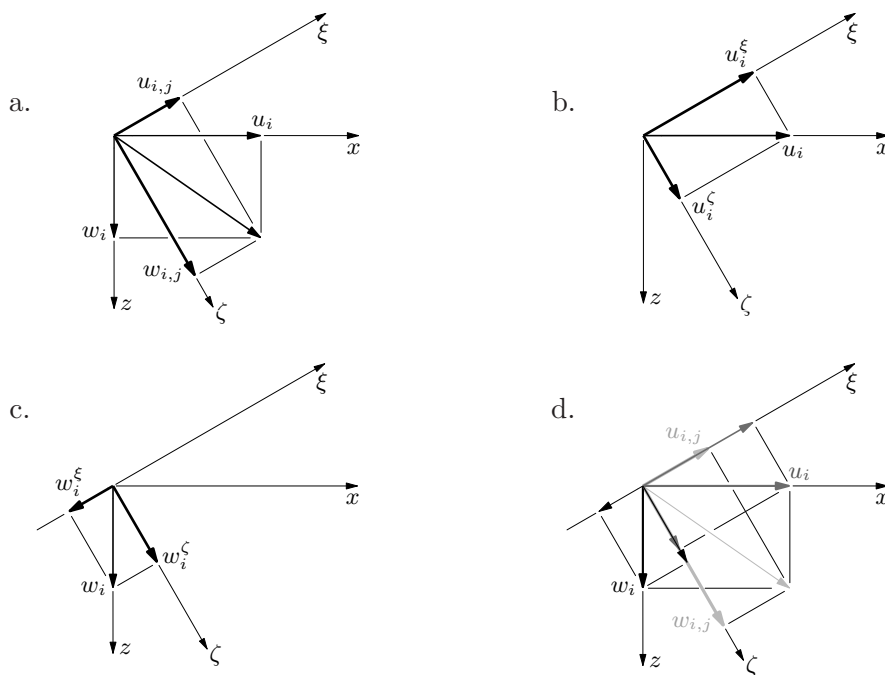
U općem će se slučaju, međutim, rastav translacijskoga pomaka u komponente koje su usporedne s osima  $\xi$  i  $\zeta$  razlikovati od rastava u komponente usporedne s osima  $x$  i  $z$  (slike 174.a. i b.). Vrijednosti  $u_{i,j}$ ,  $w_{i,j}$ ,  $u_{j,i}$  i  $w_{j,i}$  treba stoga izraziti kao funkcije nepoznanica  $u_i$ ,  $w_i$ ,  $u_j$  i  $w_j$ .

Ta će transformacija imati smisao suprotan od transformacije sila koju smo netom proveli: polazište su tada bile sile usporedne s osima lokalnoga, a tražili smo komponente njihove rezultante koje su usporedne s osima globalnog koordinatnog sustava; sada pak komponente pomaka koje su usporedne s globalnim preslikavamo u komponente usporedne s lokalnim osima. Iako sada putujemo „unazad”, izvod izrazâ za transformaciju bit će — u osnovnim koracima — analogan.

Translacijski pomak čvora  $i$ , koji je rezultanta komponenata  $\bar{u}_i$  i  $\bar{w}_i$ , želimo rastaviti u komponente  $\bar{u}_{i,j}$  i  $\bar{w}_{i,j}$ , usporedne s osima lokalnoga koordinatnog sustava štapa  $\{i, j\}$  (slika 175.a.):

$$\bar{u}_i + \bar{w}_i = \bar{u}_{i,j} + \bar{w}_{i,j}.$$

To možemo ostvariti i tako da komponente  $\bar{u}_i$  i  $\bar{w}_i$ , koje su, rekosmo, usporedne s global-



Slika 175.

nim osima, prvo rastavimo u komponente usporedne s osima  $\xi$  i  $\zeta$  (slike b. i c.),

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i^\xi + \bar{u}_i^\zeta \quad \text{i} \quad \bar{w}_i = \bar{w}_i^\xi + \bar{w}_i^\zeta,$$

a potom zbrojimo parove s istim osima usporednih komponenta (slika d):

$$\bar{u}_{i,j} = \bar{u}_i^\xi + \bar{w}_i^\xi \quad \text{i} \quad \bar{w}_{i,j} = \bar{u}_i^\zeta + \bar{w}_i^\zeta;$$

jasno je [zašto?] da su vrijednosti dobivenih komponenta

$$u_{i,j} = u_i^\xi + w_i^\xi \quad \text{i} \quad w_{i,j} = u_i^\zeta + w_i^\zeta.$$

Ako je  $\alpha_{(i,j)}$  kut između osi  $x$  i  $\xi$  (slika 173.f.), bit će, prema slikama 175.b. i c.,

$$\begin{aligned} u_i^\xi &= u_i \cdot \cos \alpha_{(i,j)}, \\ u_i^\zeta &= u_i \cdot \cos (\pi/2 - \alpha_{(i,j)}) = u_i \cdot \sin \alpha_{(i,j)}, \\ w_i^\xi &= w_i \cdot \cos (\pi/2 + \alpha_{(i,j)}) = -w_i \cdot \sin \alpha_{(i,j)}, \\ w_i^\zeta &= w_i \cdot \cos \alpha_{(i,j)}, \end{aligned}$$

pa uvrštavanje u prethodne izraze daje

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= u_i \cdot \cos \alpha_{(i,j)} - w_i \cdot \sin \alpha_{(i,j)}, \\ w_{i,j} &= u_i \cdot \sin \alpha_{(i,j)} + w_i \cdot \cos \alpha_{(i,j)}, \end{aligned}$$

ili, nakon dodavanja izraza za jednakost kutova, u matričnom zapisu,

$$\begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & -\sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ \sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}.$$

Taj izraz možemo matričnom stenografijom sažeti u

$$\mathbf{u}_{(i,j)_i} = \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \mathbf{u}_i. \quad (318)$$

Matricom

$$\mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & -\sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ \sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (319)$$

definirana je *transformacija globalnoga koordinatnog sustava u lokalni koordinatni sustav štapnog elementa*  $\{i, j\}$ .

Usporedba prethodnoga izraza i izraza (313) na stranici 290. pokazuje da je

$$\mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} = \left[ \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \right]^T. \quad (320)$$

Lako je uz to pokazati da je

$$\mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} = \mathbf{I}_3 \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} = \mathbf{I}_3,$$

gdje je  $\mathbf{I}_3$  jedinična matrica tipa  $3 \times 3$  [dokažite to neposrednim množenjem matrica!]. To znači da se opisanim prijelazom iz globalnoga u lokalni i povratkom u globalni koordinatni sustav, kao ni prijelazom iz lokalnog u globalni i povratkom u lokalni sustav ništa ne mijenja. Drugim riječima,

$$\mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} = \left[ \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \right]^{-1} \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} = \left[ \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \right]^{-1}. \quad (321)$$

No, iz (320) i (321) slijedi

$$\left[ \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \right]^{-1} = \left[ \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \right]^T \quad \text{i} \quad \left[ \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \right]^{-1} = \left[ \mathbf{r}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \right]^T; \quad (322)$$

(realna) matrica  $\mathbf{A}$  za koju je  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  naziva se *ortogonalnom matricom*, a pripadna transformacija *ortogonalnom transformacijom*.

Preslikavanje vrijednosti komponenta pomaka čvora  $j$  u vrijednosti s lokalnim osima usporednih komponenta pomaka kraja  $j$  ostvaruje se s pomoću iste matrice transformacije [zašto?]:

$$\mathbf{u}_{(i,j)j} = \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \mathbf{u}_j. \quad (323)$$

Za oba je kraja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(i,j)i} \\ \mathbf{u}_{(i,j)j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}, \quad (324)$$

ili, još kraće,

$$\mathbf{u}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \mathbf{u}_{i;j}, \quad (325)$$

gdje je

$$\mathbf{u}_{i;j} = [\mathbf{u}_i \ \mathbf{u}_j]^T = [u_i \ w_i \ \varphi_i \ u_j \ w_j \ \varphi_j]^T.$$

[Jesu li matrice  $\mathbf{R}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)}$  i  $\mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)}$  ortogonalne?]

Slijedi

$$\mathbf{f}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \mathbf{k}_{(i,j)} \left[ \mathbf{R}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \mathbf{u}_{i;j} \right].$$

Množenje matrica asocijativna je operacija, pa možemo pisati

$$\mathbf{f}_{(i,j)}^g = \left[ \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{R}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \right] \mathbf{u}_{i;j}.$$

Matrica

$$\mathbf{k}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{R}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \quad (326)$$

matrica je *krutosti štapnoga elementa*  $\{i, j\}$  izražena u globalnom koordinatnom sustavu, pomoću koje vrijednosti komponenta sila na krajevima štapa  $\{i, j\}$  u stanju prisilnih pomaka, usporednih s osima globalnoga koordinatnog sustava izražavamo kao funkcije orijentiranih duljina komponenta pomakâ i kutova zaokretâ čvorova u koje su krajevi priključeni:

$$\mathbf{f}_{(i,j)}^g = \mathbf{k}_{(i,j)}^g \mathbf{u}_{i;j}.$$

[Je li matrica  $\mathbf{k}_{\{i,j\}}^g$  simetrična? A singularna?]

Uvedemo li još i oznaku

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{(\ell \rightarrow g)} \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}, \quad (327)$$

izraz (317) za ukupne vrijednosti sila na krajevima štapa napokon prelazi u

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g = \mathbf{k}_{(i,j)}^g \mathbf{u}_{i;j} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g. \quad (328)$$

### 12.3.7. Jednadžbe ravnoteže čvorova

Na svaki čvor  $i$  sistema djeluju sile od priključenih štapova, a mogu djelovati i aktivne ili reaktivne koncentrirane sile i momenti. Čvor pritom mora biti u ravnoteži. Primjerice, za čvor 3 (lijevi slobodni čvor) okvira sa slike 163.a. na stranici 279. jednadžbe su ravnoteže, prema slici 176.,

$$\begin{aligned} -F_{3,1}^x - F_{3,4}^x + H &= 0, \\ -F_{3,1}^z - F_{3,4}^z &= 0, \\ -M_{3,1} - M_{3,4} &= 0, \end{aligned}$$

dok su za čvor 1 (lijevi ležaj) jednadžbe ravnoteže

$$\begin{aligned} -F_{1,3}^x + F_1^x &= 0, \\ -F_{1,3}^z + F_1^z &= 0, \\ -M_{1,3} + M_1 &= 0, \end{aligned}$$

gdje smo sa  $F_1^x$ ,  $F_1^z$  i  $M_1$  označili vrijednosti reakcija. Svrstamo li, osim unutarnjih, i vrijednosti vanjskih sila koje djeluju na pojedine čvorove u vektor, zapisi su uvjetâ ravnoteže za ta dva čvora

$$-\begin{bmatrix} F_{3,1}^x \\ F_{3,1}^z \\ M_{3,1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{3,4}^x \\ F_{3,4}^z \\ M_{3,4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad -\begin{bmatrix} F_{1,3}^x \\ F_{1,3}^z \\ M_{1,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1^x \\ F_1^z \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

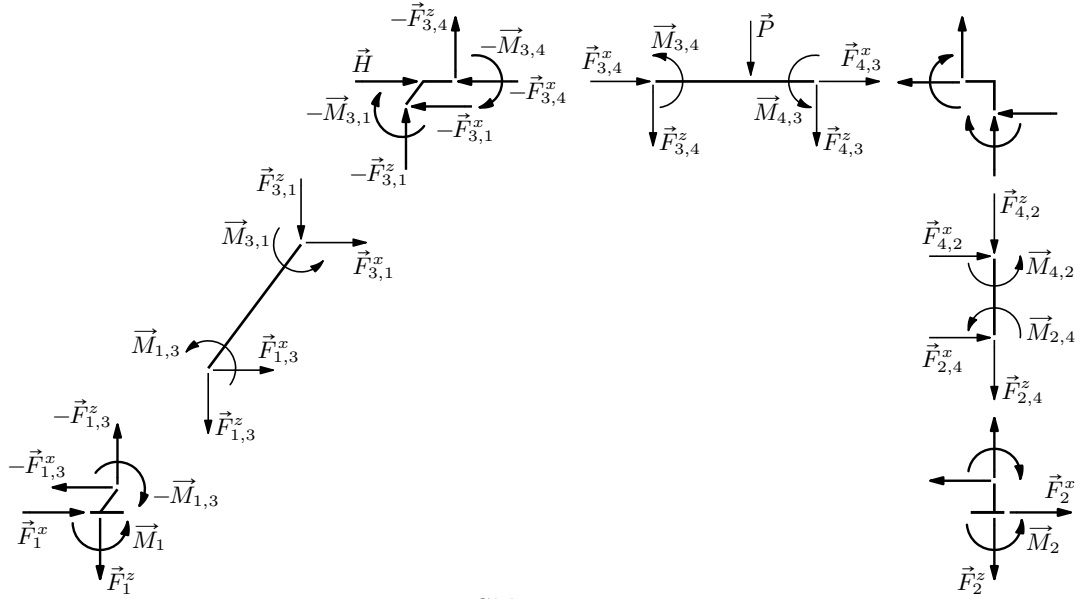
[Napišite jednadžbe ravnoteže i za preostala dva čvora!]

Stenografski je zapis uvjetâ ravnoteže za sva četiri čvora našeg okvira

$$\begin{aligned} -\hat{\mathbf{f}}_{(1,3)_1}^g + \mathbf{f}_1 &= \mathbf{0}, \\ -\hat{\mathbf{f}}_{(4,2)_2}^g + \mathbf{f}_2 &= \mathbf{0}, \\ -\hat{\mathbf{f}}_{(1,3)_3}^g - \hat{\mathbf{f}}_{(3,4)_3}^g + \mathbf{f}_3 &= \mathbf{0}, \\ -\hat{\mathbf{f}}_{(3,4)_4}^g - \hat{\mathbf{f}}_{(4,2)_4}^g &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Opći je formalni zapis uvjetâ ravnoteže čvora  $c$

$$-\sum_{(s_c)} \hat{\mathbf{f}}_{(s_c)_c}^g + \mathbf{f}_c = \mathbf{0}, \quad (329)$$



Slika 176.

pri čemu zbrajamo po svim štapovima  $(s_c) = (c, e)$  i  $(s_c) = (e, c)$  koji su priključeni u taj čvor, a vektor

$$\mathbf{f}_c = [F_c^x \ F_c^z \ M_c]^T$$

sadrži vrijednosti vanjskih aktivnih ili reaktivnih sila koje na nj djeluju.

Da u jednadžbe ravnoteže (329) uvedemo temeljne nepoznanice — vrijednosti komponenta pomaka čvorova, treba iz izraza (328) izdvojiti odgovarajući kraj štapa. Stoga ćemo taj izraz rastaviti u

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)i}^g \\ \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)j}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)i,i}^g & \mathbf{k}_{(i,j)i,j}^g \\ \mathbf{k}_{(i,j)j,i}^g & \mathbf{k}_{(i,j)j,j}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)i}^g \\ \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)j}^g \end{bmatrix}; \quad (330)$$

primjerice,  $\hat{\mathbf{f}}_{(3,4)}^g = \mathbf{k}_{(3,4)}^g \mathbf{u}_{3;4} + \bar{\mathbf{f}}_{(3,4)}^g$  rastavit ćemo u

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{(3,4)3}^g \\ \hat{\mathbf{f}}_{(3,4)4}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \\ \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{(3,4)3}^g \\ \bar{\mathbf{f}}_{(3,4)4}^g \end{bmatrix}.$$

Ako je  $c = i$ , vektor  $\hat{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g$  je vektor ukupnih vrijednosti komponenta sila na  $i$ -tome kraju štapa,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g &= \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)i}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)i,i}^g & \mathbf{k}_{(i,j)i,j}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)i}^g = \mathbf{k}_{(i,j)i,i}^g \mathbf{u}_i + \mathbf{k}_{(i,j)i,j}^g \mathbf{u}_j + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)i}^g \\ &= \mathbf{k}_{(s_c)c,c}^g \mathbf{u}_c + \mathbf{k}_{(s_c)c,e}^g \mathbf{u}_e + \bar{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g, \end{aligned}$$

a ako je pak  $c = j$ ,  $\hat{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g$  je vektor ukupnih vrijednosti komponenta sila na kraju  $j$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g &= \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)j}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)j,i}^g & \mathbf{k}_{(i,j)j,j}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)j}^g = \mathbf{k}_{(i,j)j,i}^g \mathbf{u}_i + \mathbf{k}_{(i,j)j,j}^g \mathbf{u}_j + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)j}^g \\ &= \mathbf{k}_{(s_c)c,e}^g \mathbf{u}_e + \mathbf{k}_{(s_c)c,c}^g \mathbf{u}_c + \bar{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g. \end{aligned}$$

Uvrštavanje podizrazâ iza posljednjega znaka jednakosti u jednadžbu (329) daje

$$\sum_{(s_c)} \left( \mathbf{k}_{(s_c)c,c}^g \mathbf{u}_c + \mathbf{k}_{(s_c)c,e}^g \mathbf{u}_e \right) = - \sum_{(s_c)} \bar{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g + \mathbf{f}_c. \quad (331)$$

Ta jednadžba sažeto izražava temeljnu zamisao metoda pomakâ: zasad nepoznati pomaci čvorova, čije su vrijednosti komponente vektora  $\mathbf{u}_c$  i vektora  $\mathbf{u}_e$  za sve čvorove  $e$  na drugim krajevima štapova  $s_c$  priključenih u čvor  $c$ , moraju biti upravo takvi da sile koje izazovu u tim štapovima, a kojima ti štapovi djeluju na čvor  $c$  (lijeva strana jednadžbe), uravnoteže poznata djelovanja na taj čvor — sile upetosti i zadane<sup>41</sup> koncentrirane sile (desna strana jednadžbe).

Izrazimo li, prema tome, ukupne vrijednosti komponenta sila na krajevima štapova kao funkcije vrijednostî komponenta pomakâ čvorova i zadanoga opterećenja, sadržanog u vrijednostima sila upetosti, dobit ćemo za okvir u našem primjeru sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} & - \left[ \mathbf{k}_{(1,3)1,1}^g \mathbf{u}_1 + \mathbf{k}_{(1,3)1,3}^g \mathbf{u}_3 \right] + \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}, \\ & - \left[ \mathbf{k}_{(4,2)2,4}^g \mathbf{u}_4 + \mathbf{k}_{(4,2)2,2}^g \mathbf{u}_2 \right] + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}, \\ & - \left[ \mathbf{k}_{(1,3)3,1}^g \mathbf{u}_1 + \mathbf{k}_{(1,3)3,3}^g \mathbf{u}_3 \right] - \left[ \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g \mathbf{u}_3 + \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \mathbf{u}_4 + \bar{\mathbf{f}}_{(3,4)3}^g \right] + \mathbf{f}_3 = \mathbf{0}, \\ & - \left[ \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g \mathbf{u}_3 + \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g \mathbf{u}_4 + \bar{\mathbf{f}}_{(3,4)4}^g \right] - \left[ \mathbf{k}_{(4,2)4,4}^g \mathbf{u}_4 + \mathbf{k}_{(4,2)4,2}^g \mathbf{u}_2 \right] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

i, nakon prebacivanja pribrojnika koji ne sadrže nepoznanice na desne strane i promjena predznaka,

$$\begin{aligned} & \mathbf{k}_{(1,3)1,1}^g \mathbf{u}_1 + \mathbf{k}_{(1,3)1,3}^g \mathbf{u}_3 = \mathbf{f}_1, \\ & \mathbf{k}_{(4,2)2,2}^g \mathbf{u}_2 + \mathbf{k}_{(4,2)2,4}^g \mathbf{u}_4 = \mathbf{f}_2, \\ & \mathbf{k}_{(1,3)3,1}^g \mathbf{u}_1 + \left[ \mathbf{k}_{(1,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g \right] \mathbf{u}_3 + \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \mathbf{u}_4 = -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)3}^g + \mathbf{f}_3, \\ & \mathbf{k}_{(4,2)4,2}^g \mathbf{u}_2 + \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g \mathbf{u}_3 + \left[ \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g + \mathbf{k}_{(4,2)4,4}^g \right] \mathbf{u}_4 = -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)4}^g. \end{aligned}$$

Sustav ćemo napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(1,3)1,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,3)1,3}^g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(4,2)2,2}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(4,2)2,4}^g \\ \mathbf{k}_{(1,3)3,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(4,2)4,2}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g + \mathbf{k}_{(4,2)4,4}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)3}^g + \mathbf{f}_3 \\ -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)4}^g \end{bmatrix}.$$

Sažeti je zapis općega sustava jednadžbi ravnoteže čvorova

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{q}. \quad (332)$$

<sup>41</sup> U ležajnim čvorovima djeluju nepoznate reakcije, no pokazat ćemo uskoro da se pripadne jednadžbe ne uvode u nastavak postupka izračunavanja pomakâ. Na određivanje vrijednostî reakcija vratit ćemo se u pododjeljku 12.3.9.

Vektori  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{q}$  imaju po  $3n$  komponentata, gdje je  $n$  broj čvorova konstrukcije:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n]^T, \quad \mathbf{q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_n]^T;$$

pritom je

$$\mathbf{q}_c = -\sum_{(s_c)} \bar{\mathbf{f}}_{(s_c)c}^g + \mathbf{f}_c. \quad (333)$$

Matrica  $\mathbf{K}$  sastavljena je od  $n \times n$  blokova tipa  $3 \times 3$ . Kao što u primjeru vidimo, dijagonalni su blokovi

$$\mathbf{K}_{c,c} = \sum_{(s_c)} \mathbf{k}_{(s_c)c,c}^g.$$

Ako su čvorovi  $c$  i  $e$  povezani štapom  $(c, e)$ , onda su pripadni izvandijagonalni blokovi

$$\mathbf{K}_{c,e} = \mathbf{k}_{(c,e)c,e}^g \quad \text{i} \quad \mathbf{K}_{e,c} = \mathbf{k}_{(c,e)e,c}^g;$$

ako su čvorovi  $c$  i  $e$  povezani štapom  $(e, c)$ , izvandijagonalni su blokovi

$$\mathbf{K}_{c,e} = \mathbf{k}_{(e,c)c,e}^g \quad \text{i} \quad \mathbf{K}_{e,c} = \mathbf{k}_{(e,c)e,c}^g;$$

nisu li čvorovi povezani, ti će blokovi biti  $3 \times 3$  nul-matrice.

Matrica  $\mathbf{K}$  je simetrična i singularna. Međutim, osim nepoznanica, vektor  $\mathbf{u}$  sadrži i vrijednosti poznatih pomaka po pravcima ležajnih veza. U našem su primjeru čvorovi 1 i 2 upeti ležajevi, pa su  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$  i  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ , tako da njihovo unašanje u sustav daje

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{k}_{(1,3)1,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,3)1,3}^g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(4,2)2,2}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(4,2)2,4}^g \\ \hline \mathbf{k}_{(1,3)3,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(4,2)4,2}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g + \mathbf{k}_{(4,2)4,4}^g \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)3}^g + \mathbf{f}_3 \\ -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)4}^g \end{bmatrix}$$

ili, općenitije,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\ell,\ell} & \mathbf{K}_{\ell,s} \\ \mathbf{K}_{s,\ell} & \mathbf{K}_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\ell \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix}, \quad (334)$$

gdje indeksi  $\ell$  i  $s$  označavaju podmatrice i podvektore koji „pripadaju” ležajnim i slobodnim čvorovima. Iz

$$\mathbf{K}_{\ell,\ell} \mathbf{0} + \mathbf{K}_{\ell,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_\ell \quad \text{i} \quad \mathbf{K}_{s,\ell} \mathbf{0} + \mathbf{K}_{s,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_s$$

slijedi

$$\mathbf{K}_{\ell,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_\ell \quad (335)$$

i

$$\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_s. \quad (336)$$

Vektor  $\mathbf{q}_s$  sadrži, prema definiciji (333), zbrojeve vrijednosti sila upetosti transformiranih u globalni koordinatni sustav ( $s$  promijenjenim predznacima) i vrijednosti sila zadanih u slobodnim čvorovima, tako da su njegove komponente poznate.

Ima li konstrukcija dovoljno ležajnih veza, ispravno raspoređenih, matrica  $\mathbf{K}_{s,s}$  je regularna, štoviše i pozitivno definitna, pa se sustav (336) može riješiti, odnosno, mogu se izračunati do sada nepoznate vrijednosti komponenta pomakâ čvorova.

Sustav (336) je u našem primjeru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(1,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \\ \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g + \mathbf{k}_{(4,2)4,4}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)3}^g + \mathbf{f}_3 \\ -\bar{\mathbf{f}}_{(3,4)4}^g \end{bmatrix}.$$

### 12.3.8. Konačne vrijednosti sila na krajevima štapnoga elementa

Vrijednosti koje dobivamo rješavanjem sustava (336) vrijednosti su komponenta pomakâ čvorova usporednih s osima globalnoga koordinatnog sustava. Izraz (309) na stranici 287., međutim, povezuje vrijednosti sila na krajevima nekog štapa i vrijednosti komponenta pomakâ tih krajeva koje su usporedne s osima njegova lokalnog koordinatnog sustava. Izračunane pomake moramo stoga primjenom izraza (325) transformirati iz globalnoga u lokalni koordinatni sustav. I napokon, prema izrazu (309), vrijednosti su konačnih sila na krajevima štapa sadržane u vektoru

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{(i,j)} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{R}_{(i,j)}^{(g \rightarrow \ell)} \mathbf{u}_{i;j} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}. \quad (337)$$

### 12.3.9. Reakcije

Vektor  $\mathbf{q}_\ell$  u (334) i (335) sadrži zbrojeve vrijednosti sila upetosti (transformiranih u globalni sustav i promijenjenih predznaka) i nepoznatih vrijednosti reakcija na pravcima ležajnih veza; formalno,

$$\mathbf{q}_\ell = -\bar{\mathbf{f}}_\ell^g + \mathbf{p}_\ell.$$

Iz tog izraza i jednadžbe (335) slijedi da se vrijednosti reakcija mogu izračunati prema izrazu

$$\mathbf{p}_\ell = \mathbf{q}_\ell + \bar{\mathbf{f}}_\ell^g = \mathbf{K}_{\ell,s} \mathbf{u}_s + \bar{\mathbf{f}}_\ell^g. \quad (338)$$

U našem primjeru štapovi spojeni s ležajevima nisu opterećeni, pa je  $\bar{\mathbf{f}}_\ell^g = \mathbf{0}$ , a vektor je vrijednosti ležajnih reakcija

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(1,3)1,3}^g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(4,2)2,4}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}.$$

### 12.3.10. Utjecaj numeracije čvorova

Čvorove okvira sa slike 163.a. na stranici 279. numerirali smo tako da su prva dva čvora bila ležajna. Zbog toga je bilo lako napraviti rastav (334) sustava (332) i izdvojiti sustav (336).

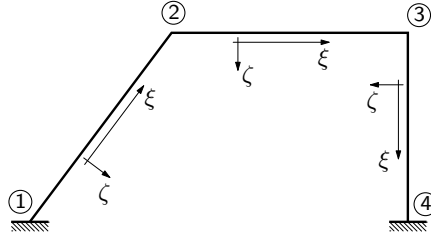
Numeriramo li, međutim, čvorove kao na slici 177., tada je sustav jednadžbi ravnoteže čvorova

$$\begin{aligned} -\hat{\mathbf{f}}_{(1,2)1}^g + \mathbf{f}_1 &= \mathbf{0}, \\ -\hat{\mathbf{f}}_{(1,2)2}^g - \hat{\mathbf{f}}_{(2,3)2}^g + \mathbf{f}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
-\hat{\mathbf{f}}_{(2,3)_3}^g - \hat{\mathbf{f}}_{(3,4)_3}^g &= \mathbf{0}, \\
-\hat{\mathbf{f}}_{(3,4)_4}^g + \mathbf{f}_4 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

odnosno, nakon uvođenja vektorâ  $\mathbf{u}_i$  i prevođenja u matrični oblik,



Slika 177.

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{k}_{(1,2)1,1}^g & \mathbf{k}_{(1,2)1,2}^g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{k}_{(1,2)2,1}^g & \mathbf{k}_{(1,2)2,2}^g + \mathbf{k}_{(2,3)2,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)2,3}^g & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{k}_{(2,3)3,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_3 \\
\mathbf{u}_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_1 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_2}^g + \mathbf{f}_2 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_3}^g \\
\mathbf{f}_4
\end{bmatrix},$$

pa uvrštavanje ležajnih uvjeta daje

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{k}_{(1,2)1,1}^g & \mathbf{k}_{(1,2)1,2}^g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{k}_{(1,2)2,1}^g & \mathbf{k}_{(1,2)2,2}^g + \mathbf{k}_{(2,3)2,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)2,3}^g & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{k}_{(2,3)3,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} \\
\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_3 \\
\mathbf{0}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_1 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_2}^g + \mathbf{f}_2 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_3}^g \\
\mathbf{f}_4
\end{bmatrix}.$$

Taj se sustav ne može neposredno rastaviti prema (334). Da to omogućimo, poznate ćemo vrijednosti (najdonji nul-vektor) pomaknuti prema „vrhu” vektora vrijednosti komponenata pomakâ uz odgovarajuću permutaciju stupaca matrice sustava:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc}
\mathbf{k}_{(1,2)1,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,2)1,2}^g & \mathbf{0} \\
\mathbf{k}_{(1,2)2,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,2)2,2}^g + \mathbf{k}_{(2,3)2,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)2,3}^g \\
\mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g & \mathbf{k}_{(2,3)3,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g \\
\mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g
\end{array} \right]
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_1 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_2}^g + \mathbf{f}_2 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_3}^g \\
\mathbf{f}_4
\end{bmatrix}.$$

Dobivena matrica sustava nije simetrična. Provest ćemo stoga „simetričnu” promjenu redoslijeda jednadžbi permutacijom redaka matrice sustava i redaka vektora na desnoj strani:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc}
\mathbf{k}_{(1,2)1,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,2)1,2}^g & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)4,4}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)4,3}^g \\
\hline
\mathbf{k}_{(1,2)2,1}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{(1,2)2,2}^g + \mathbf{k}_{(2,3)2,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)2,3}^g \\
\mathbf{0} & \mathbf{k}_{(3,4)3,4}^g & \mathbf{k}_{(2,3)3,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g
\end{array} \right]
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_1 \\
\mathbf{f}_4 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_2}^g + \mathbf{f}_2 \\
-\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)_3}^g
\end{bmatrix}.$$

Time smo sustav doveli u oblik (334), pa možemo izdvojiti dio koji sadrži nepoznanice:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(1,2)2,2}^g + \mathbf{k}_{(2,3)2,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)2,3}^g \\ \mathbf{k}_{(2,3)3,2}^g & \mathbf{k}_{(2,3)3,3}^g + \mathbf{k}_{(3,4)3,3}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)2}^g + \mathbf{f}_2 \\ -\bar{\mathbf{f}}_{(2,3)3}^g \end{bmatrix}.$$

Permutacija redaka i stupaca matrice razmjerno je dugotrajna operacija. Osim toga, može se pokazati da matrice  $\mathbf{K}_{s,\ell}$ ,  $\mathbf{K}_{\ell,s}$  i  $\mathbf{K}_{\ell,\ell}$ , koje se pojavljuju u prikazanom formalnom izvodu, ne treba ni izračunavati. Matrica  $\mathbf{K}_{s,s}$  može se, uz malo „knjigovodstva”, neposredno oblikovati; opis postupka, međutim, prelazi okvire ovoga razmjerno sažetog prikaza.

Ako se matrica  $\mathbf{K}_{\ell,s}$  ne izračunava, vrijednosti reakcija mogu se izračunati iz jednadžbi ravnoteže ležajnoga čvora — njihove vrijednosti jednake su zbroju vrijednosti odgovarajućih komponentata ukupnih sila na krajevima štapova priključenih u ležajne čvorove, ali im je smisao djelovanja, naravno, suprotan.

### 12.3.11. Prisilni pomaci ležajeva

Ako su zadani prisilni pomaci ležajeva, sustav (332) rastavljamo u

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\ell,\ell} & \mathbf{K}_{\ell,s} \\ \mathbf{K}_{s,\ell} & \mathbf{K}_{s,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_\ell \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\ell \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix}, \quad (339)$$

gdje vektor  $\bar{\mathbf{u}}_\ell$  sadrži vrijednosti komponentata zadanih pomaka. (Ako je to zbog numeracije čvorova potrebno, prije rastavljanja sustava provest ćemo u prethodnom odjeljku opisanu permutaciju komponentata vektora  $\mathbf{u}$  i odgovarajuću permutaciju stupaca matrice  $\mathbf{K}$ , a potom i, kako bi se očuvala simetrija, njezinih redaka, te, istodobno, komponentata vektora  $\mathbf{q}$ .)

Sada iz

$$\mathbf{K}_{s,\ell} \bar{\mathbf{u}}_\ell + \mathbf{K}_{s,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_s$$

slijedi

$$\mathbf{K}_{s,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_s - \mathbf{K}_{s,\ell} \bar{\mathbf{u}}_\ell. \quad (340)$$

Komponente vektora  $\mathbf{q}_s$  su poznate. Budući da vektor  $\bar{\mathbf{u}}_\ell$  sadrži vrijednosti poznatih pomaka, može se i umnožak  $\mathbf{K}_{s,\ell} \bar{\mathbf{u}}_\ell$  izračunati, pa je desna strana sustava poznata. Ako su pomaci svih ležajeva spriječeni, to jest, ako je  $\bar{\mathbf{u}}_\ell = \mathbf{0}$ , sustav (340) prelazi u sustav (336).

Ne izračunava li se matrica  $\mathbf{K}_{s,\ell}$ , zadani se pomaci ležajeva u proračun uključuju kao sile upetosti zbog prisilnih pomaka krajeva štapova priključenih u te ležajeve. Izrazi za vrijednosti sila upetosti jednaki su, naravno, izrazima za vrijednosti sila na krajevima štapova u stanju prisilnih pomaka čvorova. Međutim, komponente pomaka ležajeva zadaju se najčešće u smjerovima osi globalnoga koordinatnog sustava:  $\bar{\mathbf{u}}_i^g = [\bar{u}_i \ \bar{w}_i \ \bar{\varphi}_i]^T$ . Za izračunavanje vrijednosti sila upetosti treba vrijednosti komponentata zadanih pomaka izraziti u lokalnom koordinatnom sustavu štapa  $\{i, j\}$ :  $\bar{\mathbf{u}}_{(i,j)_i} = \mathbf{r}_{(i,j)} \bar{\mathbf{u}}_i^g$ . Ako je zadan pomak čvora  $i$ , vrijednosti su sila upetosti

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_i,i} \\ \mathbf{k}_{(i,j)_j,i} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{(i,j)_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_i,i} \\ \mathbf{k}_{(i,j)_j,i} \end{bmatrix} \mathbf{r}_{(i,j)} \bar{\mathbf{u}}_i^g,$$

a ako je zadan pomak čvora  $j$ , te su vrijednosti

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(i,j)}_{i,j} \\ \mathbf{k}^{(i,j)}_{j,j} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(i,j)}_{i,j} \\ \mathbf{k}^{(i,j)}_{j,j} \end{bmatrix} \mathbf{r}^{(i,j)} \bar{\mathbf{u}}_j^g.$$

I na kraju, iz

$$\mathbf{K}_{\ell,\ell} \bar{\mathbf{u}}_\ell + \mathbf{K}_{\ell,s} \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_\ell$$

dobivamo i izraz za vektor vrijednosti reakcija:

$$\mathbf{p}_\ell = \mathbf{q}_\ell + \bar{\mathbf{f}}_\ell^g = \mathbf{K}_{\ell,\ell} \mathbf{u}_\ell + \mathbf{K}_{\ell,s} \mathbf{u}_s + \bar{\mathbf{f}}_\ell^g.$$

## 12.4. O rešetkastim nosačima

Za promjenu duljine štapa za  $d_{\{i,j\}}$  treba u nj unijeti uzdužnu silu vrijednosti

$$S_{\{i,j\}} = k_{\{i,j\}} d_{\{i,j\}}, \quad (341)$$

gdje je

$$k_{\{i,j\}} = \frac{E_{\{i,j\}} A_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} \quad (342)$$

*koeficijent uzdužne krutosti.* Usporedba s izrazom (294) za koeficijent uzdužne popustljivosti  $\delta_{\{i,j\}}$  (odjeljak 11.8.) pokazuje da je  $k_{\{i,j\}} = 1/\delta_{\{i,j\}}$ .

Koeficijente krutosti  $k_{\{i,j\}}$  smjestit ćemo u dijagonalnu matricu  $\text{diag}(\mathbf{k})$  na isti način na koji smo koeficijente popustljivosti  $\delta_{\{i,j\}}$  smjestili u matricu  $\text{diag}(\boldsymbol{\delta})$ : ako je  $\kappa$  brojčana oznaka štapa  $\{i, j\}$ , koeficijent  $k_{\{i,j\}}$  bit će dijagonalna komponenta  $k_{\kappa,\kappa}$  matrice  $\text{diag}(\mathbf{k})$ . Iz  $k_{\{i,j\}} = 1/\delta_{\{i,j\}} = \delta_{\{i,j\}}^{-1}$  neposredno slijedi  $\text{diag}(\mathbf{k}) = [\text{diag}(\boldsymbol{\delta})]^{-1}$ .

Izraze (341) za sve štapove možemo sada zapisati matričnom stenografijom:

$$\mathbf{s} = \text{diag}(\mathbf{k}) \mathbf{d}. \quad (343)$$

Uvrstimo li taj izraz u jednadžbu ravnoteže (150) u odjeljku 6.1., dobit ćemo

$$\mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{k}) \mathbf{d} = -\mathbf{f},$$

a potom, uvrštavanjem izraza (224) u odjeljku 8.3.,

$$-\mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{k}) \mathbf{B} \mathbf{u} = -\mathbf{f}, \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{k}) \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

te, uz (226), konačno

$$\mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{k}) \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (344)$$

Matrica

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{k}) \mathbf{A}^T \quad (345)$$

je *matrica krutosti sistema*, pa u (344) možemo prepoznati sustav jednadžbi ravnoteže

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (346)$$

## 13. O metodi konačnih elemenata

### 13.1. Umjesto uvoda



A–Z metode konačnih elemenata: J. Argyris, R. W. Clough i O. C. Zienkiewicz

Prenijet ćemo — na engleskom, da nešto ne izgubimo prijevodom — nekoliko odlomaka iz članka O. C. Zienkiewicza [48]:

“Since my early introduction to the possibilities offered by numerical approximation by Sir Richard Southwell viz. his relaxation methods and Allen, my objective has been always that of providing solutions for otherwise intractable problems of interest to applied science and engineering. This objective indeed was shared by others with similar background and led to the development of the finite element method in the late fifties and sixties.

This method was only made possible by the advent of the electronic, digital computer which at the time was making its entry into the field of large arithmetic processing. Indeed the rapid rise and widespread recognition of the methodology of Finite Elements is clearly linked with the development of the computer. This of course led to a rapid development of the method which today, through various commercial and research codes, provides the key for rational design of structures, study of aeronautical fluid dynamics and electromagnetic devices needed by physics.

It is therefore not surprising that much of the development and direction of the finite element method was provided by applied scientists (engineers) seeking to solve real problems. Though recognising the roots of the methodology and the mathematical basis of the procedures, such

work frequently omitted the very rigorous proofs of the quality satisfying pure mathematicians. It was therefore of much value to the field that in the seventies more formal, mathematical, approaches were introduced generally confirming the validity of previous reasoning and adding a deeper understanding.

[...] what I intended to present are in the main the various features of the *generalised finite element formulation* which can be widely applied and offers many possibilities. The view that ‘the finite element method is simply a systematic technique for construction of Ritz–Galerkin approximations for irregular domains’ is in my opinion too restrictive and I hope that wider possibilities are implied in the name.

Nothing in the field of finite element activity is done in isolation. The technology transfer is now rapid between one or another area of activity.

Finally, let me stress that the process is a playground of many, including both engineers and mathematicians. The first, using intuition, frequently act before proof of correctness is made available by the later. The history shows that in general this has been the path of progress!”

## 13.2. O općoj metodi pomakâ, ponovo . . .

Nepoznanice opće metode pomakâ orijentirane su duljine pomaka i kutovi zaokreta odabranih točaka štapnoga sistema. Ravnotežni oblik cijeloga sistema opisali smo tako s pomoću vrijednosti poopćenih pomaka konačnoga broja točaka koje nazivamo čvorovima. Drugim riječima, konstrukciju smo prešutno diskretizirali.

*Diskretizacijom* nazivamo aproksimaciju neprekinute sredine — kontinuuma — proračunskim modelom čije je stanje određeno konačnim brojem neovisnih veličina, pa diferencijalne jednadžbe kojima opisujemo stanje ili ponašanje kontinuiranih sistema — klasični modeli matematičke fizike — prelaze u sustave algebarskih jednadžbi.

Osvrnut ćemo se još jednom na opću metodu pomakâ, sada u svjetlu postupka diskretizacije. Orijetirane duljine nepoznatih pomaka i kutovi zaokretâ čvorova određuju se rješavanjem sustava jednadžbi ravnoteže sila i momenata u čvorovima, pri čemu se unutarne sile u štapnim elementima izražavaju kao funkcije tih pomaka i zaokreta. Naime, na čvorove uz zadane vanjske koncentrirane sile i momente djeluju i unutarne sile u priključenim štapnim elementima.<sup>42</sup> To su sile kojima se štapovi odupiru pomacima čvorova u koje su priključeni, a osim toga te sile u čvorove prenose i sva djelovanja na štapove — kao što znamo, vrijednosti sila na krajevima štapnoga elementa  $\{i, j\}$  zbrojevi su vrijednosti sila zbog pomakâ krajeva i vrijednosti sila upetosti:

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{(i,j)} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}.$$

Podvektor  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}$  vektora  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}$  sadrži vrijednosti sila na  $i$ -tome kraju elementa, pa na čvor  $i$  djeluju sile čije su vrijednosti komponente vektora  $-\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}$ .

Opći izrazi za komponente matrice krutosti  $\mathbf{k}_{(i,j)}$  mogu se izvesti tako da se analitički riješe *homogene* diferencijalne jednadžbe ravnoteže štapa (jednadžbe drugoga i četvrtog reda) uz *nehomogene* rubne uvjete, dobivena polja pomakâ (opisana polinomima prvoga i trećeg stupnja) uvrste u diferencijalne veze poljâ unutarnjih sila i poljâ pomakâ te

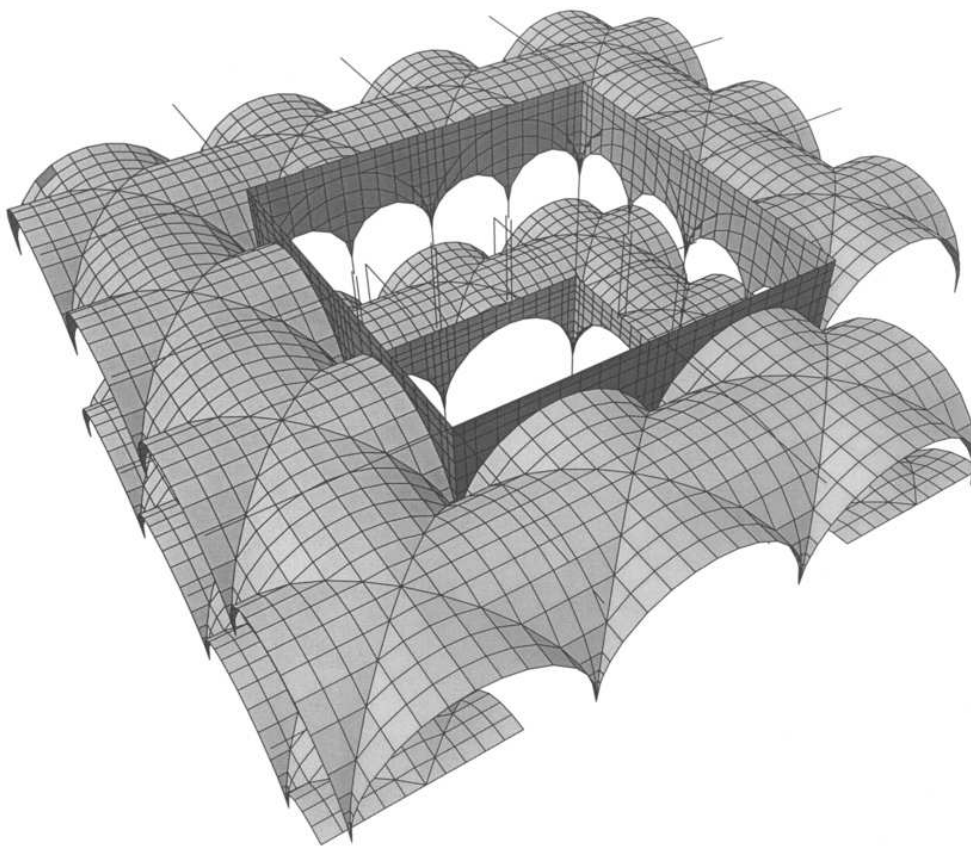
<sup>42</sup> K tomu se još u djelovanju na ležajne čvorove ubrajaju i prisilni pomaci.

nađu sile na krajevima štapa (prvi dio odjeljka 4.2.3.1. u [5]). Druga je mogućnost izvođenja primjena metode sila — rješavanje obostrano upete grede za zadane pomake (odjeljak 12.3.3. u ovim skriptama). Slično tome, vrijednosti sila upetosti izračunavaju se rješavanjem *nehomogenih* diferencijalnih jednadžbi ravnoteže uz *homogene* rubne uvjete (odjeljak 4.2.3.2. u [5]). ili, ponovo, metodom sila (odjeljak 12.3.2. ovdje).

Oblikovanjem matrice krutosti štapa i vektora vrijednosti sila upetosti opis mehaničkoga stanja cijelog štapnog elementa — neprekinutoga niza bezbroj točaka — zamijenili smo opisom stanja dviju točaka — krajeva elementa — omogućujući time diskretizaciju. Štapna je konstrukcija sklop štapnih elemenata međusobno povezanih u čvorovima.

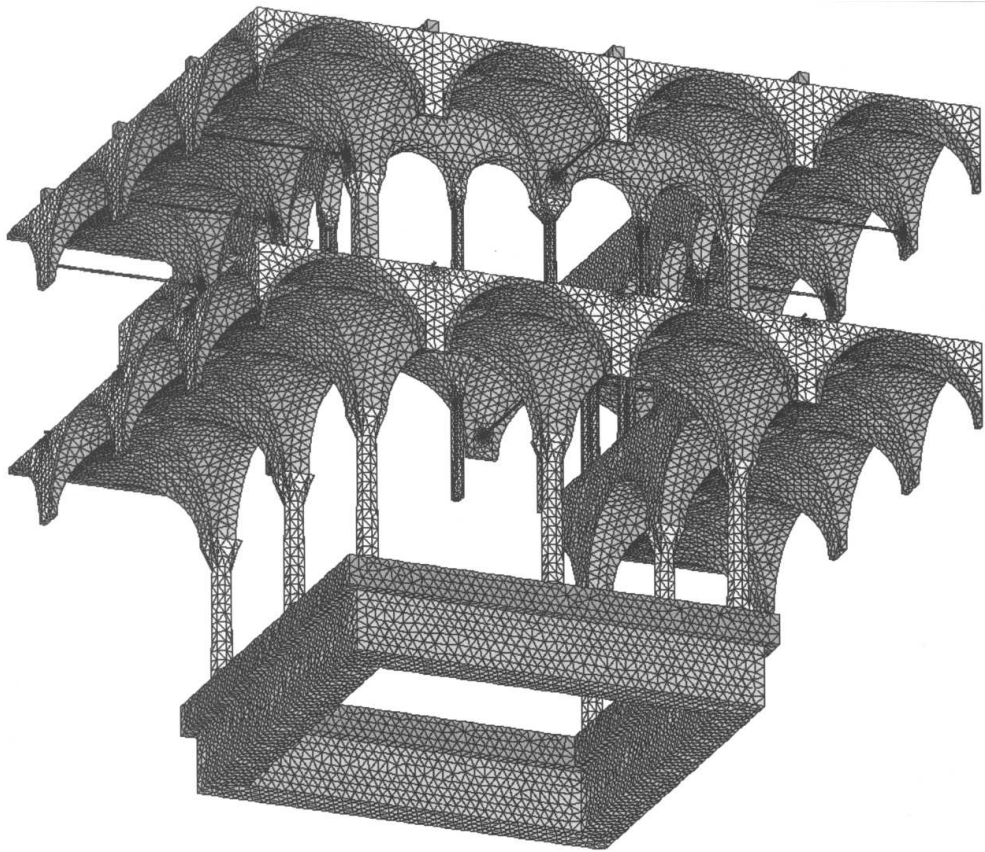
Začeta u analogiji s općom metodom pomakâ, osnovna je zamisao metode konačnih elemenata „razbijanje” složene plošne ili masivne, pa i štapne konstrukcije na međusobno povezane dijelove jednostavnog oblika (slike 178. i 179., iz [24]) na kojima je nepoznato polje, najčešće polje pomakâ, određeno vrijednostima polja u konačnom broju točaka. Dijelove na koje se konstrukcija razlaže nazivamo *konačnim elementima*. Tim je nazivom istaknuta razlika u odnosu na infinitezimalne — neizmjerljivo male — veličine matematičke analize i „klasične” matematičke fizike.

Diferencijalne jednadžbe ravnoteže štapa lako je analitički riješiti te stoga izraze za koeficijente matrice krutosti štapnoga elementa i vektora vrijednosti sila upetosti nije teško izvesti. I primjena metode sila daje točna, analitička rješenja. (Štoviše, metodom



Slika 178. Model atrija Kneževa dvora u Dubrovniku s plošnim i štapnim konačnim elementima





Slika 179. Model atrija Kneževa dvora s tetraedarskim konačnim elementima

sila mogu se razmjerno lako odrediti i matrice krutosti zakrivljenih štapnih elemenata te štapnih elemenata promjenjivoga poprečnog presjeka, ravnih i zakrivljenih [5, drugi dio odjeljka 4.2.3.1.] Međutim, za plošne i volumne konačne elemente često je nemoguće naći analitička rješenja odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi. Zbog toga se nepoznato polje na pojedinim elementima aproksimira razmjerno jednostavnim funkcijama kao što su polinomi. Cjelovita funkcija, sastavljena od takvih međusobno povezanih „krpi”, aproksimacija je nepoznatoga polja na čitavoj konstrukciji. Kako bi se njihovim povezivanjem moglo ostvariti polje tražene glatkoće, funkcije definirane na susjednim dijelovima moraju biti u stanovitom smislu usklađene. (Formalno, višedimenzionalni se elementi, kao i štapni, povezuju samo u čvorovima, ali se najčešće traži neprekinutost funkcije i derivacija određena stupnja preko cijeloga zajedničkog ruba dvaju susjednih elemenata.)

Za izbor oblika elemenata i na njima definiranih funkcija bitan je zahtjev da se povećanjem broja elemenata, uz istodobno smanjivanje njihovih veličina, dobiva sve „bolja” aproksimacija. Time se otvara Pandorina kutija složenih matematičkih pitanja dokaza konvergencije te *apriornih* i *aposteriornih* ocjena pogrešaka.

### 13.3. Pretpostavljeno polje pomaka

Kako su nepoznata polja najčešće polja pomaka, funkcije koje definiramo na elementima nazvat ćemo *pretpostavljenim poljima pomaka*.

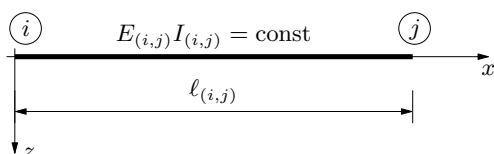
Pretpostavljeno polje pomakâ mora zadovoljiti nekoliko uvjeta koji se mogu bez pre-  
stroge matematičke formalizacije izvesti iz fizikalne interpretacije problema.

Ograničit ćemo se na dobro nam poznati problem savijanja ravne Bernoulli–Eulerove  
grede u ravnini  $xz$ , sažeto izražen diferencijalnom jednažbom

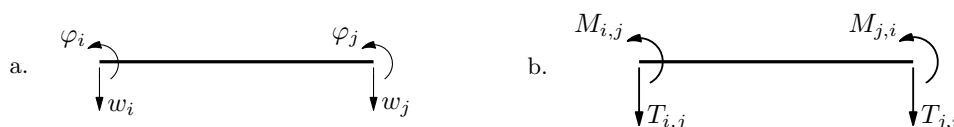
$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E(x) I(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x); \quad (347)$$

nepoznata funkcija  $w$  opisuje progibnu liniju grede pod zadanom poprečnom distribuira-  
nom silom čiju vrijednost opisuje funkcija  $q$ . Pomaci svih točaka elementa odvijaju se  
po pravcima koji su usporedni s osi  $z$ , pa su određeni samo svojim orijentiranim dulji-  
nama. Iako je u općem slučaju polje pomakâ vektorsko, u ovom ga jednostavnom slučaju  
možemo smatrati skalarnim poljem.

Odgovarajući je konačni element prikazan na slici 180.; nazvat ćemo ga *grednim ele-  
mentom*. Njegova matrica krutosti, znamo, povezuje vrijednosti poopćenih sila na kraje-  
vima (slika 181.b.) i vrijednosti poopćenih pomaka krajeva koje su jednake vrijednostima  
poopćenih pomakâ čvorova (slika a.). (Za ravne su elemente djelovanja u poprečnom i  
uzdužnom smjeru, kao što znamo, međusobno neovisna, pa se mogu i neovisno rješavati.  
Može se stoga reći i da je matrica krutosti štapnoga elementa, koju smo uveli u općoj  
metodi pomakâ, nastala uklapanjem matrice krutosti *zglobnog štapa* u matricu krutosti  
grednog elementa, a na isti je način sastavljen i vektor vrijednosti sila upetosti.)



Slika 180.



Slika 181.

### 13.3.1. Pomaci krutoga tijela

Pretpostavljeno polje pomakâ mora omogućiti prikaz translacijskih i rotacijskih po-  
maka elementa kao krutoga tijela, dakle, pomakâ pri kojima se element ne deformira.

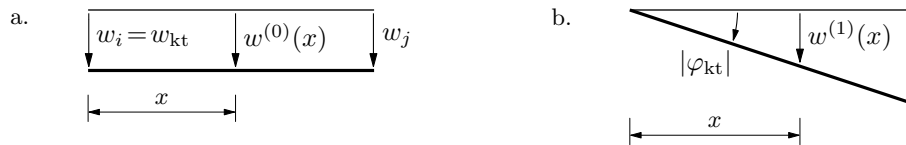
Pri translacijskom pomaku okomito na os elementa sve točke elementa imaju jednaki  
pomak (slika 182.a.), pa polje pomakâ mora sadržavati konstantni član:

$$w^{(0)}(x) = a_0.$$

Polje pomakâ nastalo rotacijom krutog tijela oko čvora  $i$  opisuje se u teoriji malih pomaka  
(slika 182.b.) linearnom funkcijom

$$w^{(1)}(x) = a_1 x.$$





Slika 182.

Rotacija oko neke druge točke može se prikazati kompozicijom translacije i rotacije, pa ćemo je opisati afinom funkcijom

$$w^{(0)}(x) + w^{(1)}(x) = a_0 + a_1 x.$$

### 13.3.2. Stanje konstantne deformacije

Zamislimo li konstrukciju kao sklop konačnih elemenata, koje u nizu uzastopnih, sve finijih aproksimacija smanjujemo (povećavajući pritom njihov broj), stanje deformacija će se uzduž pojedinih elemenata sve manje mijenjati, odnosno, sve će se više približavati nekoj konstantnoj vrijednosti; naravno, u različitim se elementima te vrijednosti mogu razlikovati, ovisno o složenosti stvarnog polja naprezanja u cijelom nosaču.

Pretpostavljeno polje pomakâ mora, stoga, omogućiti prikaz konstantnoga polja deformacija unutar elementa. Osnovna je deformacijska veličina u teoriji Bernoulli–Eulerove grede zakrivljenost koju aproksimiramo drugom derivacijom polja pomakâ. Kako je druga derivacija kvadratne funkcije konstanta, pretpostavljeno polje pomakâ mora sadržavati i kvadratni član:

$$w^{(2)}(x) = a_2 x^2.$$

### 13.3.3. Neprekinutost u spoju elemenata

Kao i u metodi pomakâ, konačni su elementi međusobno povezani u čvorovima. Neprekinutost grednoga nosača — nema prekidâ ni lomova — osigurana je zahtjevom da u spoju susjedni elementi imaju jednaki pomak i jednaki zaokret. Uvjete neprekinutosti treba zadovoljiti na oba kraja elementa što znači da na polje pomakâ unutar elementa utječu (barem) četiri međusobno neovisne veličine. Pretpostavljenu polju pomakâ moramo stoga dodati i četvrti član:

$$w^{(3)}(x) = a_3 x^3.$$

### 13.3.4. Vektorski prostor polinomâ

Polje pomakâ na elementu pretpostavit ćemo, prema tome, u obliku polinoma trećega stupnja:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \quad (348)$$

Uvedemo li vektore

$$\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{X}(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]^T,$$

funkciju  $w$  može zapisati u obliku

$$w(x) = \mathbf{X}(x) \cdot \mathbf{a} = [\mathbf{X}(x)]^T \mathbf{a}.$$

Skup funkcija  $\mathcal{X} = \{1, x, x^2, x^3\}$  čini bazu *vektorskoga prostora funkcija* koji sadrži sve polinome do, uključujući, trećeg stupnja. Pojedini polinomi linearne su kombinacije baznih funkcija s koeficijentima  $a_0, a_1, a_2, a_3$ . Prva je derivacija funkcije  $w$

$$\begin{aligned} w'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \\ &= [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2]^T \mathbf{a} \\ &= [\mathbf{X}'(x)]^T \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Na slici 182. vidimo da koeficijenti  $a_0$  i  $a_1$  imaju jasnu geometrijsku interpretaciju:

$$a_0 = w_{\text{kt}} \quad \text{i} \quad a_1 = -\varphi_{\text{kt}}.$$

Za preostala se dva koeficijenta to, međutim, ne može reći.

Umjesto baze  $\mathcal{X}$  pogodnije je polinome prikazati u bazi za koju su koeficijenti u linearnoj kombinaciji vrijednosti pomakâ i kutovi zaokretâ krajeva elementa. Neka su

$$\begin{aligned} w(0) &= w_i, \\ -w'(0) &= \varphi_i, \\ w(\ell_{\{i,j\}}) &= w_j, \\ -w'(\ell_{\{i,j\}}) &= \varphi_j. \end{aligned} \tag{349}$$

Iz izraza (348) i njegove derivacije tada slijedi:

$$\begin{aligned} a_0 &= w_i, \\ -a_1 &= \varphi_i, \\ a_0 + a_1 \ell_{\{i,j\}} + a_2 \ell_{\{i,j\}}^2 + a_3 \ell_{\{i,j\}}^3 &= w_j, \\ -a_1 - 2a_2 \ell_{\{i,j\}} - 3a_3 \ell_{\{i,j\}}^2 &= \varphi_j. \end{aligned}$$

Riječ je o sustavu jednadžbi u kojemu su nepoznanice brojevi  $a_0, a_1, a_2$  i  $a_3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell_{\{i,j\}} & \ell_{\{i,j\}}^2 & \ell_{\{i,j\}}^3 \\ 0 & -1 & -2\ell_{\{i,j\}} & -3\ell_{\{i,j\}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}.$$

Riješimo li ga, dobivamo

$$\begin{aligned} a_0 &= w_i, \\ a_1 &= -\varphi_i, \\ a_2 &= -\frac{3}{\ell_{\{i,j\}}^2} w_i + \frac{2}{\ell_{\{i,j\}}} \varphi_i + \frac{3}{\ell_{\{i,j\}}^2} w_j + \frac{1}{\ell_{\{i,j\}}} \varphi_j, \\ a_3 &= \frac{2}{\ell_{\{i,j\}}^3} w_i - \frac{1}{\ell_{\{i,j\}}^2} \varphi_i - \frac{2}{\ell_{\{i,j\}}^3} w_j - \frac{1}{\ell_{\{i,j\}}^2} \varphi_j. \end{aligned}$$

Uvrštavanje u (348) daje, nakon sređivanja,

$$w(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{\ell_{\{i,j\}}^2} + \frac{2x^3}{\ell_{\{i,j\}}^3}\right) w_i + \left(-x + \frac{2x^2}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{x^3}{\ell_{\{i,j\}}^2}\right) \varphi_i \\ + \left(\frac{3x^2}{\ell_{\{i,j\}}^2} - \frac{2x^3}{\ell_{\{i,j\}}^3}\right) w_j + \left(\frac{x^2}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{x^3}{\ell_{\{i,j\}}^2}\right) \varphi_j,$$

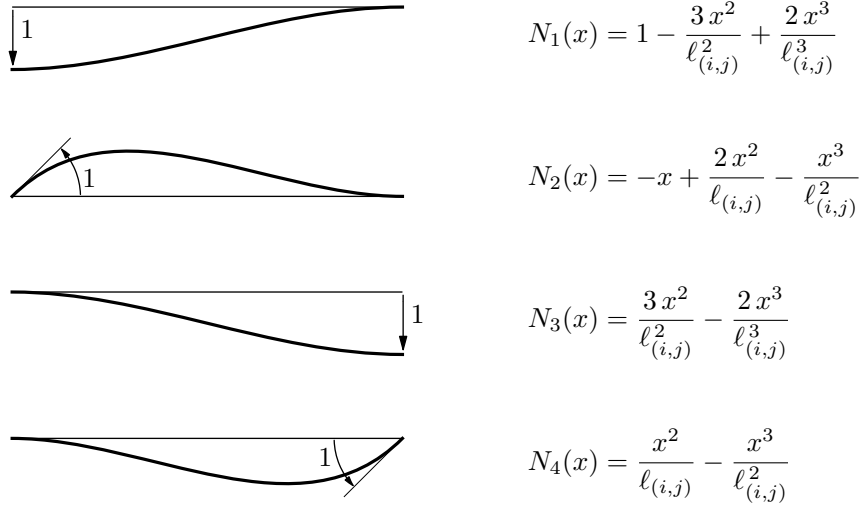
ili, u matričnom zapisu,

$$w(x) = [\mathbf{N}(x)]^T \mathbf{u}_{i,j}, \quad (350)$$

gdje su

$$\mathbf{u}_{i,j} = [w_i \ \varphi_i \ w_j \ \varphi_j]^T, \quad (351)$$

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{\ell_{\{i,j\}}^2} + \frac{2x^3}{\ell_{\{i,j\}}^3} & -x + \frac{2x^2}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{x^3}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{3x^2}{\ell_{\{i,j\}}^2} - \frac{2x^3}{\ell_{\{i,j\}}^3} & \frac{x^2}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{x^3}{\ell_{\{i,j\}}^2} \end{bmatrix}^T. \quad (352)$$



Slika 183.

Može se pokazati da su komponente vektora  $\mathbf{N}(x)$  linearno neovisne funkcije pa tvore bazu  $\mathcal{N}$  koja razapinje isti vektorski prostor funkcija kao i baza  $\mathcal{X}$ . Za razliku od funkcija baze  $\mathcal{X}$ , funkcije  $N_\alpha$ ,  $\alpha=1, 2, 3, 4$ , prikazane na slici 183., imaju sljedeća svojstva:

1. sve funkcije  $N_\alpha$  polinomi su istoga, trećeg stupnja;
2.  $N_1(0) = 1$ ,  $N_2(0) = 0$ ,  $N_3(0) = 0$ ,  $N_4(0) = 0$ ,  
 $N_1'(0) = 0$ ,  $N_2'(0) = -1$ ,  $N_3'(0) = 0$ ,  $N_4'(0) = 0$ ,  
 $N_1(\ell_{\{i,j\}}) = 0$ ,  $N_2(\ell_{\{i,j\}}) = 0$ ,  $N_3(\ell_{\{i,j\}}) = 1$ ,  $N_4(\ell_{\{i,j\}}) = 0$ ,  
 $N_1'(\ell_{\{i,j\}}) = 0$ ,  $N_2'(\ell_{\{i,j\}}) = 0$ ,  $N_3'(\ell_{\{i,j\}}) = 0$ ,  $N_4'(\ell_{\{i,j\}}) = -1$ ;
3. funkcije koje opisuju translacijske pomake,  $N_1$  i  $N_3$ , tvore *particiju jedinice*:  
 $N_1(x) + N_3(x) = 1 \quad \forall x \in [0, \ell_{\{i,j\}}]$ .

### 13.4. Primjena teorema o virtualnom radu

Izraze za komponente matrice krutosti i za vrijednosti vektora sila upetosti možemo, uz pretpostavljeno polje pomakâ, izvesti primjenjujući teorem o virtualnom radu.

Za konačni element Bernoulli–Eulerove grede matematički je iskaz jednakosti virtualnih radova:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} M(x) \delta\kappa(x) dx \\ &= T_{ij} \delta w_i + M_{ij} \delta\varphi_i + T_{ji} \delta w_j + M_{ji} \delta\varphi_j + \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} q(x) \delta w(x) dx. \end{aligned} \quad (353)$$

Integralom s lijeve strane znaka jednakosti izražen je rad momenata savijanja na diferencijalima polja virtualnih zaokretâ poprečnih presjeka; prva četiri člana s desne strane radovi su poopćenih sila na krajevima elementa, koje na element djeluju kao vanjske sile, na poopćenim virtualnim pomacima krajeva, a posljednji pak integral daje rad zadanoga opterećenja na polju virtualnih pomaka.

Moment savijanja i polje pomakâ vezani su izrazom

$$M(x) = E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \kappa(x) = -E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} w''(x),$$

te se integral s lijeve strane — virtualni rad unutarnjih sila — može pisati u obliku

$$\delta\mathfrak{U}_{\{i,j\}} = \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} M(x) \delta\kappa(x) dx = E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} w''(x) \delta w''(x) dx. \quad (354)$$

Umjesto stvarnoga, nepoznatog polja pomakâ uvrstit ćemo u prethodni izraz pretpostavljeno polje (350) čija je druga derivacija

$$w''(x) = [\mathbf{N}''(x)]^T \mathbf{u}_{i,j} = [\mathbf{B}(x)]^T \mathbf{u}_{i,j}; \quad (355)$$

vektor  $\mathbf{B}(x)$  sadrži druge derivacije baznih funkcija  $N_i(x)$ :

$$\mathbf{B}(x) = \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{6}{\ell_{\{i,j\}}^2} + \frac{12x}{\ell_{\{i,j\}}^3} & \frac{4}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{6x}{\ell_{\{i,j\}}^2} & \frac{6}{\ell_{\{i,j\}}^2} - \frac{12x}{\ell_{\{i,j\}}^3} & \frac{2}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{6x}{\ell_{\{i,j\}}^2} \end{array} \right]^T. \quad (356)$$

Jednakost (353) vrijedi za po volji odabrano polje virtualnih pomaka, pa, stoga, i za polje oblika

$$\delta w(x) = [\mathbf{N}(x)]^T \delta \mathbf{u}_{i,j}, \quad (357)$$

gdje je

$$\delta \mathbf{u}_{i,j} = [\delta w_i \quad \delta\varphi_i \quad \delta w_j \quad \delta\varphi_j]^T \quad (358)$$

vektor poopćenih virtualnih pomaka krajeva elementa. Druga je derivacija odabranoga virtualnog polja

$$\delta w''(x) = [\mathbf{B}(x)]^T \delta \mathbf{u}_{i,j}. \quad (359)$$

Uvrstimo li pretpostavljena polja u desnu stranu izraza (354), dobit ćemo<sup>43</sup>:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{U}_{\{i,j\}} &= E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \delta\mathbf{u}_{i;j}^T \mathbf{B}(x) [\mathbf{B}(x)]^T \mathbf{u}_{i;j} dx \\ &= \delta\mathbf{u}_{i;j}^T \left( E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \mathbf{B}(x) [\mathbf{B}(x)]^T dx \right) \mathbf{u}_{i;j}.\end{aligned}$$

Integralni podizraz u zagradama,

$$\mathbf{k}_{(i,j)} = E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \mathbf{B}(x) [\mathbf{B}(x)]^T dx, \quad (360)$$

zapis je matrice čije su komponente

$$k_{(i,j)_{a,b}} = k_{(i,j)_{b,a}} = E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} B_a(x) B_b(x) dx; \quad (361)$$

primjerice:

$$\begin{aligned}k_{(i,j)_{2,4}} &= k_{(i,j)_{4,2}} = E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} B_2(x) B_4(x) dx \\ &= E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \left( \frac{4}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{6x}{\ell_{\{i,j\}}^2} \right) \left( \frac{2}{\ell_{\{i,j\}}} - \frac{6x}{\ell_{\{i,j\}}^2} \right) dx \\ &= \frac{2 E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}}.\end{aligned}$$

Izračunamo li sve komponente, dobit ćemo:

$$\mathbf{k}_{(i,j)} = \frac{E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{\ell_{\{i,j\}}} \begin{bmatrix} 12/\ell_{\{i,j\}}^2 & -6/\ell_{\{i,j\}} & -12/\ell_{\{i,j\}}^2 & -6/\ell_{\{i,j\}} \\ -6/\ell_{\{i,j\}} & 4 & 6/\ell_{\{i,j\}} & 2 \\ -12/\ell_{\{i,j\}}^2 & 6/\ell_{\{i,j\}} & 12/\ell_{\{i,j\}}^2 & 6/\ell_{\{i,j\}} \\ -6/\ell_{\{i,j\}} & 2 & 6/\ell_{\{i,j\}} & 4 \end{bmatrix}. \quad (362)$$

Virtualni rad unutarnjih sila možemo sada sažeto zapisati kao

$$\delta\mathcal{U}_{\{i,j\}} = \delta\mathbf{u}_{i;j}^T \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i;j}. \quad (363)$$

<sup>43</sup> Množenje je skalara komutativno, pa je

$$\int_0^{\ell_{\{i,j\}}} w''(x) \delta w''(x) dx = \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \delta w''(x) w''(x) dx.$$

Nadalje, kako za skalare trivijalno vrijedi  $a = a^T$ , možemo pisati  $\delta w''(x) = [\delta w''(x)]^T$ , odnosno

$$[\mathbf{B}(x)]^T \delta\mathbf{u}_{i;j} = [[\mathbf{B}(x)]^T \delta\mathbf{u}_{i;j}]^T = \delta\mathbf{u}_{i;j}^T \mathbf{B}(x).$$

Te algebarske akrobacije omogućuju izlučivanje vektora  $\delta\mathbf{u}_{i;j}^T$  pred znak integrala, oblikovanje matrice  $\int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \mathbf{B}(x) [\mathbf{B}(x)]^T dx$  i, konačno, dovođenje izraza za  $\delta\mathcal{U}_{\{i,j\}}$  u oblik  $\delta\mathbf{u}_{i;j}^T \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i;j}$ .

Rad zadanoga opterećenja na pretpostavljenim virtualnim pomacima bit će:

$$\delta \mathfrak{W}_{\{i,j\}}^{(\bar{\mathbf{f}})} = \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} q(x) \delta w(x) dx = \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \delta \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{N}(x) q(x) dx = \delta \mathbf{u}_{i,j}^T \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \mathbf{N}(x) q(x) dx.$$

Podizraz iza posljednjega znaka jednakosti skalarni je produkt vektora  $\delta \mathbf{u}_{i,j}^T$  i vektora

$$-\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \mathbf{N}(x) q(x) dx, \quad (364)$$

pa je, sažetije,

$$\delta \mathfrak{W}_{\{i,j\}}^{(\bar{\mathbf{f}})} = \delta \mathbf{u}_{i,j}^T (-\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}). \quad (365)$$

Komponente su vektora  $\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}$

$$\bar{f}_{(i,j)_a} = - \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} N_a(x) q(x) dx, \quad (366)$$

te je, primjerice, za  $q(x) = q_0$

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \left[ -\frac{q_0 \ell_{\{i,j\}}}{2} \quad \frac{q_0 \ell_{\{i,j\}}^2}{12} \quad -\frac{q_0 \ell_{\{i,j\}}}{2} \quad -\frac{q_0 \ell_{\{i,j\}}^2}{12} \right]^T.$$

Napokon, označimo li sa  $\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}$  vektor vrijednosti sila na krajevima elementa,

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = [T_{ij} \quad M_{ij} \quad T_{ji} \quad M_{ji}]^T, \quad (367)$$

prva se četiri člana na desnoj strani izraza (353) mogu sažeti u

$$\delta \mathfrak{W}_{\{i,j\}}^{(\hat{\mathbf{f}})} = \delta \mathbf{u}_{i,j}^T \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}. \quad (368)$$

S pomoću izraza (363), (365) i (368) možemo jednakost virtualnih radova unutarnjih i vanjskih sila, izraz (353), zapisati u matričnom obliku:

$$\delta \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j} = \delta \mathbf{u}_{i,j}^T (\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} - \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}). \quad (369)$$

Da bi gredni element bio u ravnoteži, ta jednakost mora vrijediti za polje virtualnih pomaka određeno bilo kojim vektorom  $\delta \mathbf{u}_{i,j}$ , pa mora biti

$$\mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j} = \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} - \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}. \quad (370)$$

Slijedi

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}. \quad (371)$$

### 13.5. Primjena teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije

Drugi je način izvođenja izrazâ za komponente matrice krutosti i za vrijednosti vektora sila upetosti primjena teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije sistema.

Ta je energija, znamo, jednaka zbroju potencijalne energije deformacije i potencijalne energije aktivnih vanjskih sila.

Potencijalna je energija deformacije grednoga elementa u Bernoulli–Eulerovoj teoriji

$$\mathfrak{A}_{\{i,j\}} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} M(x) \kappa(x) dx = \frac{E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{2} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} [w''(x)]^2 dx. \quad (372)$$

Uvrstimo li umjesto stvarnoga pretpostavljeno polje pomaka, bit će

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\{i,j\}} &= \frac{E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}}}{2} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} \mathbf{u}_{i,j}^T [\mathbf{B}(x)]^T \mathbf{B}(x) \mathbf{u}_{i,j} dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \left( E_{\{i,j\}} I_{\{i,j\}} \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} [\mathbf{B}(x)]^T \mathbf{B}(x) dx \right) \mathbf{u}_{i,j}, \end{aligned}$$

odnosno, označimo li, kao i prije, matricu prikazanu podizrazom u zagradama sa  $\mathbf{k}_{(i,j)}$ ,

$$\mathfrak{A}_{\{i,j\}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j}. \quad (373)$$

Potencijalna je energija zadanoga opterećenja

$$\mathfrak{E}_{\{i,j\}}^{(\bar{\mathbf{f}})} = - \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} q(x) w(x) dx, \quad (374)$$

pa je uz pretpostavljeno polje pomakâ

$$\mathfrak{E}_{\{i,j\}}^{(\bar{\mathbf{f}})} = - \mathbf{u}_{i,j}^T \int_0^{\ell_{\{i,j\}}} [\mathbf{N}(x)]^T q(x) dx = - \mathbf{u}_{i,j}^T (-\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}), \quad (375)$$

dok je potencijalna energija sila na krajevima elementa

$$\mathfrak{E}_{\{i,j\}}^{(\mathbf{f})} = - \mathbf{u}_{i,j}^T \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)}. \quad (376)$$

Dakle, potencijalna je energija sistema:

$$\Pi_{\{i,j\}} = \mathfrak{A}_{\{i,j\}} + \mathfrak{E}_{\{i,j\}}^{(\mathbf{f})} + \mathfrak{E}_{\{i,j\}}^{(\bar{\mathbf{f}})} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i,j}^T (\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} - \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}). \quad (377)$$

Prema teoremu o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije sistema, od svih mogućih stanja pomakâ ravnotežnu konfiguraciju tijela čini ono polje pomakâ za koje potencijalna energija sistema, kao funkcija vrijednosti pomakâ i odgovarajućih deformacija, poprima stacionarnu vrijednost.<sup>44</sup>

Uvrštavanjem pretpostavljenoga polja pomakâ (350) potencijalna energija sistema postaje funkcijom vrijednosti pomakâ krajeva elementa:

$$\Pi_{\{i,j\}} : \mathbf{u}_{i,j} \mapsto \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j}).$$

<sup>44</sup> Pri linearnom odnosu sila i pomakâ ili deformacija ta je vrijednost minimum.

Stacionarna vrijednost funkcije točka je u kojoj njezin gradijent iščezava:

$$\text{grad } \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j}) = \mathbf{0}.$$

Gradijent funkcije više varijabli definira se kao vektor čije su komponente derivacije funkcije po pojedinim varijablama:

$$\begin{aligned} \text{grad } \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j}) &= \frac{\partial \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial \mathbf{u}_{i,j}} \\ &= \left[ \frac{\partial \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial w_i} \quad \frac{\partial \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial \varphi_i} \quad \frac{\partial \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial w_j} \quad \frac{\partial \Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial \varphi_j} \right]^T \end{aligned}$$

Funkcija  $\Pi_{\{i,j\}}(\mathbf{u}_{i,j})$  sastavljena je od kvadratnoga i od linearnog dijela:

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j} \quad \text{i} \quad - \mathbf{u}_{i,j}^T (\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} - \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}).$$

Raspisivanjem prvoga izraza, uz činjenicu da je  $\mathbf{k}_{(i,j)}$  simetrična matrica, može se lako vidjeti da je gradijent kvadratnoga dijela  $\mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j}$ ; slično tome, gradijent je linearnog dijela  $-(\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} - \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)})$ .

Slijedi

$$\mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j} - (\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} - \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}) = \mathbf{0}$$

ili

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \mathbf{u}_{i,j} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}.$$



## 14. Utjecajne funkcije i utjecajne linije — definicije i primjena

### 14.1. Pojam utjecajne funkcije

Mnoge se konstrukcije — mostovi, nadvožnjaci, vijadukti, kranske staze — grade po najprije za preuzimanje pokretnih opterećenja poput vlakova, cestovnih vozila ili kranova. Kreću li se ta opterećenja većim brzinama, izazvat će ubrzanja dijelova nosača, te će se pojaviti i inercijalne sile koje se moraju u proračunu uzeti u obzir; takav se proračun proučava i obrađuje u *dinamici konstrukcija*. Pretpostavimo li, međutim, da brzina kretanja opterećenja nije velika, nastala će ubrzanja biti malena, a kako su inercijalne sile proporcionalne ubrzanjima, moći ćemo ih u proračunu zanemariti.

Promjenom položaja opterećenja mijenjaju se reakcije i unutarnje sile u konstrukciji, kao i njezini pomaci. Treba, stoga, sile i pomake izračunati više puta, za različite karakteristične položaje opterećenja.

Princip superpozicije, ako je primjenjiv, omogućava razmjerno brz i jednostavan proračun. (Istu zamisao možemo primijeniti i pri djelovanju nepomičnih opterećenja, ima li ih više vrsta.) Da utvrdimo kako se neka sila ili pomak mijenjaju ovisno o položaju opterećenja, izrazit ćemo ih kao *funkcije položaja jedinične sile*. Ako je pri djelovanju jedinične sile u točki  $x_1$  vrijednost određene sile ili pomaka  $\eta_1$ , tada će, prema principu superpozicije, pri djelovanju sile  $\vec{P}_1$  vrijednosti  $P_1$  u  $x_1$  vrijednost te veličine biti  $P_1 \cdot \eta_1$ ; pretpostavljamo da se pri promjeni vrijednosti sile ne mijenja pravac njezina djelovanja. Ako je pak pri djelovanju jedinične sile u točki  $x_2$  vrijednost promatrane veličine  $\eta_2$ , pri djelovanju sile  $\vec{P}_2$  vrijednosti  $P_2$  u  $x_2$  ta će vrijednost biti  $P_2 \cdot \eta_2$ . Djeluju li istodobno  $\vec{P}_1$  u  $x_1$  i  $\vec{P}_2$  u  $x_2$ , ta je vrijednost  $P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2$ , dok je pri istodobnom djelovanju sile  $\vec{P}_1$  u točki  $x_2$  i sile  $\vec{P}_2$  u točki  $x_1$  ta vrijednost  $P_2 \cdot \eta_1 + P_1 \cdot \eta_2$ .

*Funkcija  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}$  položaja jedinične sile, čija je vrijednost vrijednost statičke ili kinematičke veličine  $\mathfrak{F}$  u odabranoj točki  $\tilde{x}$  na nosaču, prouzročena djelovanjem te jedinične sile, naziva se utjecajnom funkcijom za veličinu  $\mathfrak{F}$  u točki  $\tilde{x}$ . Utjecajna funkcija, drugim riječima, preslikava položaj jedinične sile, koja se „kreće” po nosaču, u vrijednost tom silom izazvane poopćene sile ili poopćenoga pomaka u prethodno odabranoj točki nosača:*

$$\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}} : x \mapsto \eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}(x); \quad (378)$$

vrijednost veličine  $\mathfrak{F}$  u točki  $\tilde{x}$ , kao vrijednost utjecajne funkcije  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}$  u točki  $x$ , označana je s  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}(x)$ .

Treba istaknuti razliku u značenjima područjâ definicije i vrijednosti utjecajnih funkcija i funkcija kojima izražavamo vrijednosti sila ili pomaka u (svim) točkama uzduž osi

nosača: iako je u oba slučaja područje definicije skup točaka osi nosača, u izrazu  $F(x)$ , primjerice  $M(x)$ ,  $T(x)$  ili  $w(x)$ , varijabla  $x$  označava točku u kojoj izračunavamo vrijednost veličine  $\mathfrak{F}$  (momenta savijanja  $\vec{M}$ , poprečne sile  $\vec{T}$  ili pomaka  $\vec{w}$ ) za zadano nepomično opterećenje, pa su  $F(x)$  za različite  $x$  vrijednosti veličine  $\mathfrak{F}$  u različitim točkama; u izrazu pak  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}(x)$ , poput  $\eta_{M\tilde{x}}(x)$ ,  $\eta_{T\tilde{x}}(x)$  ili  $\eta_{w\tilde{x}}(x)$ , varijabla  $x$  označava točku u kojoj djeluje jedinična sila, a vrijednost veličine  $\mathfrak{F}$  izračunavamo u točki  $\tilde{x}$ , te je  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}(x)$  za sve položaje  $x$  jedinične sile vrijednost veličine  $\mathfrak{F}$  u istoj točki, točki  $\tilde{x}$  — s pomoću utjecajne funkcije  $\eta_{M\tilde{x}}$ , primjerice, može se izračunati vrijednost momenta savijanja samo u točki  $\tilde{x}$ , ni u jednoj drugoj.

*Grafički prikaz utjecajne funkcije na štapnim nosačima naziva se utjecajnom linijom, a na plošnim nosačima utjecajnom plohom.* Utjecajna linija za neku veličinu je, prema tome, linija čije ordinate daju vrijednosti te veličine ako jedinična sila djeluje u točkama za koje očitavamo te ordinate. Formalno, utjecajna je linija graf funkcije  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}$ :

$$\left\{ (x, \eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \ell] \right\}. \quad (379)$$

Na statički određenim sistemima utjecajne su funkcije za statičke veličine po segmentima linearne — točnije, afne — funkcije ili konstante, pa su utjecajne linije sastavljene od dijelova pravaca. Na neodređenim su pak sistemima utjecajne funkcije nelinearne, a utjecajne linije, po dijelovima, krivulje. Utjecajne linije za (poopćene) pomake na svim su sistemima po dijelovima krivulje. Zabavljat ćemo se samo s utjecajnim funkcijama i utjecajnim linijama za statičke veličine: reakcije i unutarnje sile.

Za neku statičku veličinu utjecajne funkcije i utjecajne linije mogu se odrediti statičkim ili kinematičkim postupkom. Pri nalaženju utjecajnih funkcija pretpostavljamo da jedinična sila može djelovati u bilo kojoj točki nosača, ali se pritom ograničavamo na sile usporedne sa zadanim pravcem — obično vertikalnim ili horizontalnim. Nagib tog pravca nazivamo smjerom djelovanja. Smjer djelovanja treba unaprijed zadati. Ako su za ravninski nosač poznate utjecajne funkcije za dva različita smjera djelovanja, jasno je da se s pomoću njih mogu izračunati utjecaji opterećenja koje djeluje u bilo kojem smjeru. Osim smjera djelovanja, unaprijed treba zadati i orijentaciju sile — vertikalna jedinična sila, primjerice, može djelovati „prema gore” ili „prema dolje”.

U *statičkom postupku* neposredno slijedimo definiciju utjecajne funkcije: iz uvjeta ravnoteže nosača opterećenoga jediničnom silom u po volji odabranoj točki  $x$  izvodimo funkcijski izraz za vrijednost veličine  $\mathfrak{F}$  u točki  $\tilde{x}$ .

*Kinematički se postupak* temelji na *teoremu Müller–Breslaua*. Za statički određeni sistem utjecajnu liniju možemo nacrtati kao *plan pomaka mehanizma* nastaloga raskidanjem veze koja u izvornom sistemu prenosi promatranu silu, ako je po pravcu djelovanja te sile zadan jedinični pomak njezina hvatišta, suprotan od smisla njezina djelovanja. Ako je pak izvorni sistem statički neodređen, sistem koji ostaje nakon raskidanja odgovarajuće veze geometrijski je nepromjenjiv, pa crtamo njegovu *progibnu liniju*. Kinematički je postupak u nekim slučajevima jednostavniji i brži od statičkoga, a u mnogim je slučajevima pregledniji.

Postupcima određivanja utjecajnih funkcija i crtanja utjecajnih linija potpunije ćemo se i podrobnije pozabaviti u *Gradjevnoj statici 2*.

## 14.2. Primjena

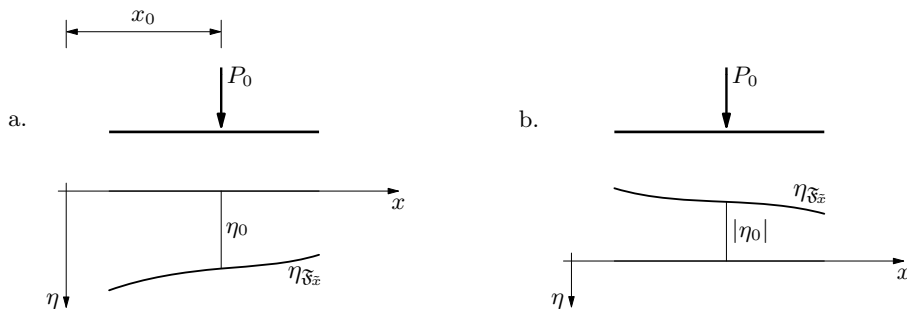
Opisat ćemo sada postupak izračunavanja tražene veličine za djelovanja raznih vrsta opterećenja s pomoću utjecajnih funkcija ili utjecajnih linija; temeljnu smo zamisao za niz koncentriranih sila u prethodnom odjeljku već skicirali. Pretpostavit ćemo zasad da su nam utjecajna funkcija  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}$  i utjecajna linija za traženu veličinu  $\mathfrak{F}$  u točki  $\tilde{x}$  poznate. Smjer djelovanja zadanih opterećenja mora se, naravno, podudarati sa smjerom djelovanja koji je pretpostavljen pri nalaženju odgovarajuće utjecajne funkcije ili linije.

### 14.2.1. Utjecaj jedne koncentrirane sile

Ako na nosač djeluje sila  $\vec{P}_0$  u točki  $x_0$  i ako je vrijednost utjecajne funkcije u toj točki  $\eta_0 = \eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}(x_0)$  (slika 184.a.), vrijednost veličine  $\mathfrak{F}$  u točki  $\tilde{x}$  bit će

$$F_{\tilde{x}}(\vec{P}_0) = P_0 \cdot \eta_0. \quad (380)$$

Pri izračunavanju vrijednosti  $F_{\tilde{x}}$  uvažiti treba predznak ordinate  $\eta_0$  (slike a. i b.) i smisao djelovanja sile  $\vec{P}_0$ ; njezina će vrijednost biti pozitivna ili negativna, ovisno o tome ima li isti smisao kao jedinična sila ili joj je smisao suprotan.



Slika 184.

### 14.2.2. Utjecaj niza koncentriranih sila

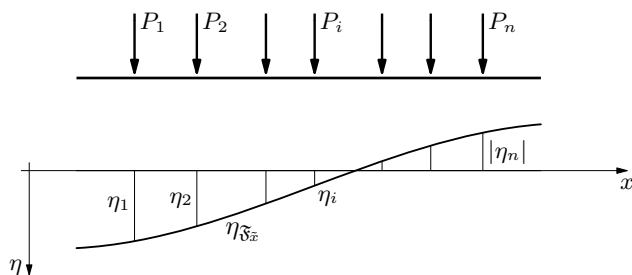
Djeluju li na nosač sile niza  $\{\vec{P}_i\}_{i=1}^n = \{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\}$  u točkama  $x_i$  u kojima su vrijednosti utjecajne funkcije  $\eta_i = \eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}(x_i)$  (slika 185.), bit će

$$F_{\tilde{x}}(\{\vec{P}_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n P_i \eta_i; \quad (381)$$

i sada, naravno, treba uvažiti orijentacije sila i predznake vrijednosti  $\eta_i$ .

Vrijednost veličine  $\mathfrak{F}$  u točki  $\tilde{x}$ , prouzročene silama  $\{\vec{P}_i\}_{i=1}^n$  označili smo s  $F_{\tilde{x}}(\{\vec{P}_i\}_{i=1}^n)$ . Izračunavamo li, naime, vrijednosti  $F_{\tilde{x}}$  za različite zadane sile s pomoću utjecajnih funkcija ili utjecajnih linija, tada  $F_{\tilde{x}}$  možemo smatrati funkcijom tih zadanih sila.

Analizirat ćemo poseban slučaj: dio je utjecajne funkcije na dijelu nosača na kojem djeluju sile  $\vec{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , linearan (slika 186.). Prikažemo li funkciju  $\eta_{\mathfrak{F}\tilde{x}}$  izrazom



Slika 185.

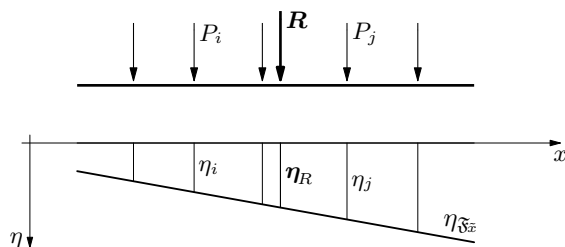
$\eta_{\xi_x}(x) = ax + b$ , vrijednosti utjecajne funkcije u točkama  $x_i$  bit će  $\eta_i = \eta_{\xi_x}(x_i) = ax_i + b$ , pa je

$$F_{\bar{x}}(\{\vec{P}_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n P_i \eta_i = \sum_{i=1}^n P_i (ax_i + b) = a \sum_{i=1}^n P_i x_i + b \sum_{i=1}^n P_i;$$

$\sum_{i=1}^n P_i = R$  vrijednost je rezultante  $\vec{R}$  sila  $\vec{P}_i$ , dok je  $\sum_{i=1}^n P_i x_i$  zbroj vrijednosti momenta sila  $\vec{P}_i$  u odnosu na točku  $x=0$ . Kako je prema Varignonovu teoremu taj zbroj jednak vrijednosti momenta rezultante u odnosu na istu točku,  $\sum_{i=1}^n P_i x_i = R x_R$ , gdje je  $x_R$  točka u kojoj djeluje rezultanta  $\vec{R}$ , dobivamo

$$F_{\bar{x}}(\{\vec{P}_i\}_{i=1}^n) = a R x_R + b R = R (a x_R + b) = R \eta_{\xi_x}(x_R) = R \eta_R = F_{\bar{x}}(R).$$

Prema tome, utjecaj niza koncentriranih sila koje djeluju na dijelu nosača na kojem je utjecajna linija dio pravca jednak je utjecaju njihove rezultante.

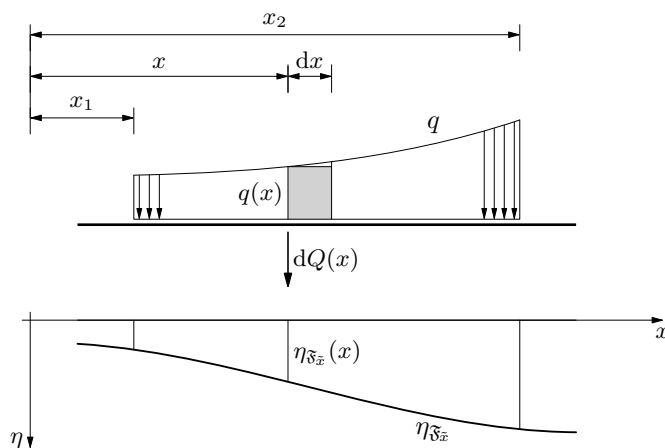


Slika 186.

Treba naglasiti da se jednom rezultantom smiju zamijeniti samo one sile koje djeluju na dijelu nosača koji „pokriva” jedan pravčasti odsječak — ako je utjecajna linija sastavljena od nekoliko pravčastih odsječaka, sile se moraju zamjenjivati rezultatama po pojedinim dijelovima nosača koje ti odsječci pokrivaju.

### 14.2.3. Utjecaj distribuirane sile

Neka na dijelu nosača između točaka  $x_1$  i  $x_2$  djeluje distribuirana sila čija je vrijednost opisana funkcijom  $q$  i neka je utjecajna funkcija za neku veličinu  $\xi_x$  linearna ili nelinearna funkcija  $\eta_{\xi_x}$  (slika 187.). Na infinitezimalnom odsječku  $(x, x + dx)$  možemo op-



Slika 187.

terećenje  $\bar{q}$  zamijeniti infinitezimalnom koncentriranom silom  $d\bar{Q}(x, dx)$  čija je vrijednost  $dQ(x, dx) = q(x) dx$ , a hvatište u  $x$ ; njezin će utjecaj tada biti

$$F_{\bar{x}}(d\bar{Q}(x, dx)) = dQ(x, dx) \cdot \eta_{\delta_x}(x) = q(x) dx \cdot \eta_{\delta_x}(x) = q(x) \eta_{\delta_x}(x) dx.$$

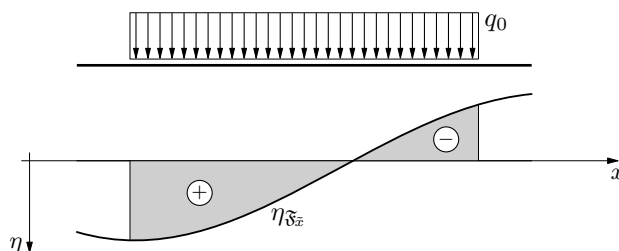
Ukupni utjecaj distribuirane sile na dijelu  $[x_1, x_2]$  dobivamo integracijom:

$$F_{\bar{x}}(\bar{q}) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \eta_{\delta_x}(x) dx. \quad (382)$$

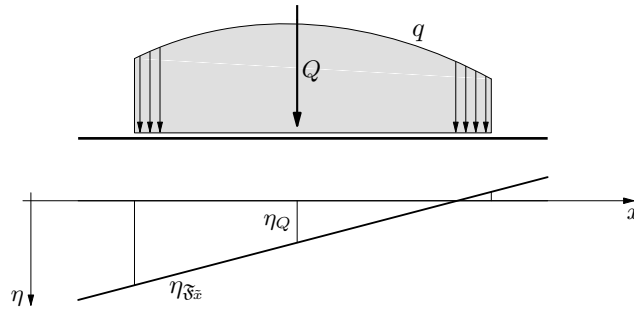
U posebnom slučaju, ako je sila jednoliko raspodijeljena,  $q(x) \equiv q_0$ , bit će

$$F_{\bar{x}}(\bar{q}_0) = \int_{x_1}^{x_2} q_0 \eta_{\delta_x}(x) dx = q_0 \int_{x_1}^{x_2} \eta_{\delta_x}(x) dx = q_0 \mathfrak{A}_{1,2},$$

gdje je, slikovito rečeno,  $\int_{x_1}^{x_2} \eta_{\delta_x}(x) dx = \mathfrak{A}_{1,2}$  površina „ispod” krivulje  $\eta_{\delta_x}$  na segmentu  $[x_1, x_2]$  („slikovito rečeno”, jer ta „površina” nije geometrijska površina — vrijednost integrala može biti i negativna.) Dakle, utjecaj jednoliko distribuirane sile može se izračunati kao umnožak njezine vrijednosti i površine, uz odgovarajući predznak, ispod utjecajne linije na dijelu nosača na kojem ta sila djeluje (slika 188.; na toj je slici dio „površine” pozitivan, a dio negativan).



Slika 188.



Slika 189.

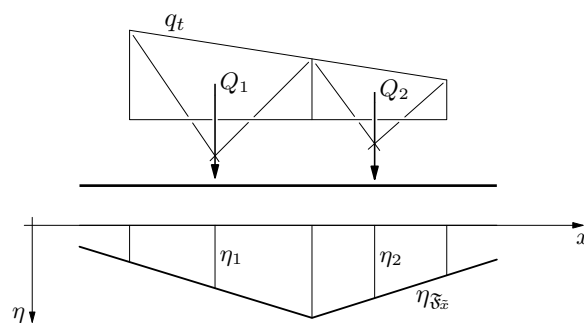
Kao drugi poseban slučaj, ako je utjecajna funkcija na dijelu nosača na kojem djeluje (opća) distribuirana sila  $\vec{q}$  linearna,  $\eta_{\vec{s}_x}(x) = ax + b$ , bit će

$$F_{\vec{x}}(\vec{q}) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \eta_{\vec{s}_x}(x) dx = a \int_{x_1}^{x_2} q(x) x dx + b \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx;$$

$\int_{x_1}^{x_2} q(x) dx = Q$  vrijednost je rezultante distribuirane sile  $\vec{q}$ , dok je  $\int_{x_1}^{x_2} q(x) x dx$  vrijednost momenta te sile u odnosu na  $x = 0$ , koja je, prema Varignonovu teoremu, jednaka vrijednosti momenta njezine rezultante u odnosu na tu točku,  $Q x_Q$ , gdje je  $x_Q$  točka u kojoj djeluje sila  $\vec{Q}$ , točnije, apscisa težišta površine „ispod” krivulje kojom je distribuirana sila prikazana. Slijedi:

$$F_{\vec{x}}(\vec{q}) = a Q x_Q + b Q = Q (a x_Q + b) = Q \eta_{\vec{s}_x}(x_Q) = Q \eta_Q = F_{\vec{x}}(\vec{Q});$$

ili: utjecaj distribuirane sile, koja djeluje na dijelu nosača na kojemu je utjecajna linija dio pravca, jednak je utjecaju rezultante te sile (slika 189.). Kao i pri izračunavanju utjecaja niza sila, djeluje li distribuirana sila „iznad” utjecajne linije sastavljene od više pravčastih odsječaka, rezultante treba uzimati nad pojedinim odsječcima (slika 190.:  $F_{\vec{x}}(\vec{q}_t) = Q_1 \eta_1 + Q_2 \eta_2$ ).



Slika 190.

#### 14.2.4. Utjecaj koncentriranoga momenta

Pretpostavit ćemo zasad da je utjecajna funkcija linearna. Koncentrirani moment  $\vec{M}$  vrijednosti  $M$ , koji djeluje u točki  $x_M$ , zamijenit ćemo spregom sila  $\vec{P}_\ell$  i  $\vec{P}_d$  koje djeluju

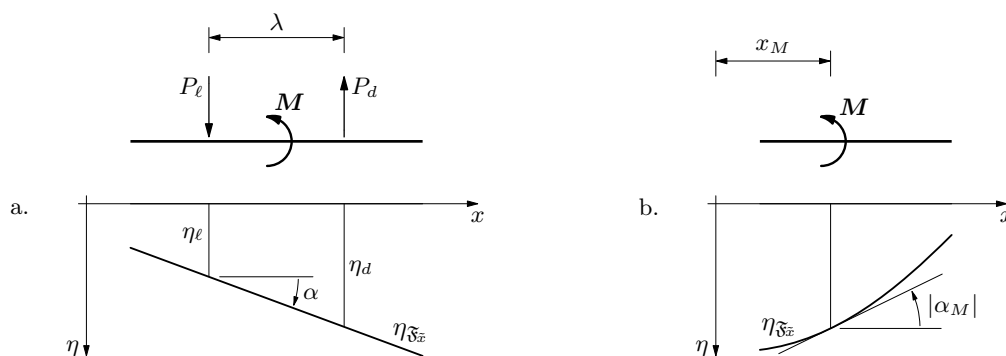
na međusobnoj udaljenosti  $\lambda$ , u točkama  $x_\ell = x_M - \lambda/2$  i  $x_d = x_M + \lambda/2$  (slika 191.a.); vrijednosti sila sprega su  $P_\ell = P_d = M/\lambda$ . Utjecaj tog para sila bit će

$$F_{\vec{x}}(\vec{P}_\ell, \vec{P}_d) = P_\ell \eta_\ell - P_d \eta_d = \frac{M}{\lambda} \eta_\ell - \frac{M}{\lambda} \eta_d = M \left( -\frac{\eta_d - \eta_\ell}{\lambda} \right) = -M \operatorname{tg} \alpha,$$

gdje je  $\alpha$  orijentirani kut između osi  $x$  i pravca utjecajne linije. (Kako je utjecajna funkcija na našoj slici rastuća, iz relacije

$$\frac{\eta_d - \eta_\ell}{\lambda} = \eta'_{\vec{x}}(x_M)$$

slijedi da je prikazani kut  $\alpha$  pozitivan. U ravnini  $xz$  je, prema tome, sa stajališta matematičke analize i diferencijalne geometrije, pozitivan onaj kut čiji je smisao jednak smislu vrtnje kazaljke na satu. To ne mora vrijediti za njegove kinematičke interpretacije — primjerice, kut zaokreta osi nosača, kao i moment, smatramo pozitivnim ako mu je smisao suprotan smislu vrtnje kazaljke na satu.)



Slika 191.

Izraz  $M \operatorname{tg} \alpha$  ne ovisi o razmaku sila  $\lambda$ , pa zaključujemo da je

$$F_{\vec{x}}(\vec{M}) = -M \operatorname{tg} \alpha. \quad (383)$$

(Negativan predznak u izrazu za  $F_{\vec{x}}$  posljedica je spomenute pomalo neugodne i, možda, zbunjujuće činjenice da pozitivan moment i pozitivan kut  $\alpha$  imaju suprotan smisao vrtnje.) Vidimo, uz to, da na linearnom dijelu utjecajne funkcije položaj hvatišta koncentriranoga momenta ne utječe na vrijednost  $F_{\vec{x}}$ .

Nije li utjecajna funkcija linearna (slika 191.b.), moment ćemo zamijeniti spregom (neizmjerljivo velikih) sila na infinitezimalnoj udaljenosti  $d\lambda = dx$ . Slijedi:

$$F_{\vec{x}}(\vec{M}) = M \left( -\frac{d\eta_{\vec{x}}(x)}{dx} \right) = -M \eta'_{\vec{x}}(x_M) = -M \operatorname{tg} \alpha_M. \quad (384)$$

Sada je  $\alpha_M$  (orijentirani) kut nagiba tangente na utjecajnu liniju u točki koja daje vrijednost utjecajne funkcije u hvatištu  $x_M$  momenta  $\vec{M}$ . Budući da se nagib tangente na krivulju utjecajne linije mijenja uzduž osi nosača, vrijednost utjecaja ovisit će o točki u kojoj moment djeluje.

## Literatura

- [1] I. AGANOVIĆ: *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element, Zagreb, 2003.
- [2] I. AGANOVIĆ i K. VESELIĆ: *Jednadžbe matematičke fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [3] E. ALLEN and W. ZALEWSKI: *Form and Forces. Designing Efficient, Expressive Structures*, J. Wiley & Sons, New York, 2010.
- [4] V. ANDREJEV: *Mehanika. I dio. Statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
- [5] M. ANĐELIĆ: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilšta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [6] S. S. ANTMAN: *Nonlinear Problems of Elasticity*, Second edition, Springer, New York, 2005.
- [7] T. E. BOOTHBY: *Engineering Iron and Stone. Understanding Structural Analysis and Design Methods of the Late 19th Century*, ASCE Press, Reston, 2015.
- [8] E. BYSKOV: *Elementary Continuum Mechanics for Everyone. With Applications to Structural Mechanics*, Springer, Dordrecht, 2013.
- [9] D. M. CANNELL: *George Green. Mathematician & Physicist 1793–1841*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2001.
- [10] K. ČALIŠEV: *O dopunitbenim naprezanjima rešetkastih nosača*, Tehnički list Udruženja Jugoslavenskih inženjera i arhitekta, 4 (1922.) 1/2, str. 1–6.
- [11] K. ČALIŠEV: *Primijenjena statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1951.
- [12] R. DUGAS: *A History of Mechanics*, Éditions du Griffon, Neuchâtel, 1955.
- [13] J. DVORNIK: *Matematički model*, natuknica u *Leksikonu građevinarstva*, urednik V. SIMOVIĆ, Masmedia, Zagreb, 2002.
- [14] L. P. FELTON and R. B. NELSON: *Matrix Structural Analysis*, J. Wiley & Sons, New York, 1997.
- [15] A. GHALI and A. M. NEVILLE: *Structural Analysis. A Unified Classical and Matrix Approach*, Fourth edition, E & FN Spon, London, 1997.



- [16] S. HAWKING: *The Universe in a Nutshell*, Bantam Books, New York, 2001; prijevod: *Svemir u orahovoj ljusci*, Izvori, Zagreb, 2002.
- [17] J. HEYMAN: *Elements of the Theory of Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [18] J. HEYMAN: *Structural Analysis. A Historical Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [19] K. D. HJELMSTAD: *Fundamentals of Structural Mechanics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.
- [20] I. A. KARNOVSKY and O. LEBED: *Advanced Methods of Structural Analysis*, Springer, New York, 2010.
- [21] R. KUŠEVIĆ: *Viša građevna statika*, neautorizirane bilješke s predavanja, Zagreb, 1943.
- [22] R. KUŠEVIĆ: *Ruđer Bošković u povijesti građevinskog inženjerstva*, *Građevinar* **13** (1961) 10, str. 301–308; pretpisak: *Građevinar* **51** (1999) 1, str. 43–52.
- [23] C. LANZOS: *The Variational Principle of Mechanics*, University of Toronto Press, Toronto, 1970.
- [24] D. LAZAREVIĆ, J. DVORNIK i K. FRESL: *Analiza oštećenja atrija Kneževa dvora u Dubrovniku*, *Građevinar*, **56** (2004) 10, str. 601–612.
- [25] E. MACH: *Science of Mechanics*, 6th ed., Open Court, La Salle, 1960.
- [26] I. A. MACLEOD: *Modern Structural Analysis. Modelling Process and Guidance*, Thomas Telford, London, 2005.
- [27] Ž. MARKOVIĆ: *Uvod u višu analizu. Dio prvi*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1945.
- [28] Ž. MARKOVIĆ: *Uvod u višu analizu. II. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1952.
- [29] J. A. L. MATHESON: *Hyperstatic Structures*, Second edition, Butterworths, London, 1971.
- [30] V. NIČE: *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
- [31] V. NIČE: *Deskriptivna geometrija. Prvi svezak*, Školska knjiga, Zagreb, 1982.
- [32] J. S. PRZEMIENIECKI: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1968.
- [33] M. SEKULOVIĆ: *Teorija linijskih nosača*, Građevinska knjiga, Beograd, 2005.
- [34] V. SIMOVIĆ: *Građevna statika I*, Građevinski institut, 1988.

- [35] C. SMITH: *The Science of Energy. A Cultural History of Energy Physics in Victorian Britain*, University of Chicago Press, Chicago, 1998.
- [36] S. STEVIN: *De Beghinselen der Weeghconst*, Leiden, 1608; s prijevodom na engleski jezik: *The Elements of the Art of Weighing*, [http://www.historyofscience.nl/works\\_detail.cfm?RecordId=2702](http://www.historyofscience.nl/works_detail.cfm?RecordId=2702).
- [37] I. SUPEK i M. FURIĆ: *Počela fizike. Uvod u teorijsku fiziku*, Školska knjiga, Zagreb, 1994.
- [38] S. P. TIMOSHENKO: *History of Strength of Materials, with a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, McGraw–Hill, New York, 1953.; prijevod: *Istorija otpornosti materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
- [39] S. P. TIMOSHENKO: *Strength of Materials. Elementary Theory and Problems*, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1958.; prijevod: *Otpornost materijala I*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- [40] Š. UNGAR: *Matematička analiza u  $\mathbb{R}^n$* , Golden Marketing • Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.
- [41] K. WASHIZU: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Second edition, Pergamon Press, Oxford, 1974.
- [42] H. WERNER: *Prepoznavanje spojenih sustava*, Građevinar, **44** (1992.) 10, str. 651–659.
- [43] H. WERNER: *Mehanika II. — Kinematika (Predavanja — sažetak)*, skripta, Građevinski fakultet, Zagreb, 2002.
- [44] H. WERNER: *Mehanika I — Statika*, Hrvatski savez građevinskih inženjera, Zagreb, 2007.
- [45] O. WERNER i S. SABLJIĆ: *Teorija konstrukcija. I. dio*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1963.
- [46] W. S. WOLFE: *Graphical Analysis. The Textbook of Graphic Statics*, McGraw–Hill, New York, 1921.
- [47] W. WUNDERLICH and W. D. PILKEY: *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods*, Second edition, CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [48] O. C. ZIENKIEWICZ: *Origins, Milestones and Directions of the Finite Element Method — A Personal View*, in *Handbook of Numerical Analysis IV*, eds. P. G. CIARLET and J. L. LIONS, Elsevier, Amsterdam, 1996.
- [49] D. ŽUBRINIĆ: *Uvod u varijacione metode za diferencijalne jednačbe*, Elektrotehnički fakultet, Zagreb, 1991.