Stručni rad
Prihvaćeno 5. 12. 2005.

Predrag Lončar

O invarijantama polinoma četvrtog stupnja

O invarijantama polinoma četvrtog stupnja

ABSTRACT

In this paper invariants of the polynomial of the fourth degree over the field of real numbers (discriminant and some others) are studied. As a consequence, some elementary inequalities are obtained and some characteristic graphs of these polynomials are drawn.

Key words: polynomial, invariants

MSC 2000: 11C08, 11D25

O invarijantama polinoma četvrtog stupnja

SAŽETAK

U ovom radu se proučavaju invarijante polinoma četvrtog stupnja nad poljem realnih brojeva, diskriminanta i neke druge. Kao posljedica dobivaju se neke elementarne nejednakosti i crtaju neki karakteristični grafovi tih polinoma.

Ključne riječi: polinom, invarijante

1 Uvod

Ovaj rad je motiviran radom [5]. Glavni cilj rada je podrobnije izučavanje invarijanata polinoma četvrtog stupnja. Neka je zadan polinom četvrtog stupnja

$$P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{1}$$

gdje je $(a_i \in R, i = 0,1,2,3,4)$ i $a_4 \neq 0$.
Neka je $P(x)$ *normirani* polinom četvrtog stupnja:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{2}$$

pri čemu je

$$a = \frac{a_3}{a_4}, \quad b = \frac{a_2}{a_4}, \quad c = \frac{a_1}{a_4}, \quad d = \frac{a_0}{a_4}. \tag{3}$$

Nultočke polinoma (1) odnosno (2) označavat ćemo uvijek s x_1, x_2, x_3 i x_4. Dakle,

$$P_4(x) = a_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Derivacije polinoma označit ćemo s $P'(x)$, $P''(x)$... i zvati prva, druga... derivacija od $P(x)$. Vrijedi

$$P'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c,$$

$$P''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b.$$

U daljnjem ćemo koristiti rezultate iz rada [5], a posebice ovu podjelu:
1. slučaj. $P_4(x)$ ima dvije realne i dvije kompleksne nultočke,
2. slučaj. $P_4(x)$ ima sve nultočke kompleksne i
3. slučaj. $P_4(x)$ ima sve nultočke realne.
U daljnjem tekstu ćemo ih zvati: prvi slučaj, drugi slučaj i treći slučaj. Drugi slučaj nastupa tada i samo tada kada je $a_4 \cdot P_4(x) > 0$ za sve realne x.
Taylorov razvoj polinoma $P(x)$ u okolini točke $x_0 = h$ je

$$P(x) = (x-h)^4 + \frac{P'''(h)}{3!}(x-h)^3 + \frac{P''(h)}{2!}(x-h)^2 + \\ + \frac{P'(h)}{1!}(x-h) + P(h). \tag{4}$$

Supstitucijom $t = x - h$ dobivamo

$$Q(t) = P(t+h) = \\ = t^4 + \frac{P'''(h)}{3!}t^3 + \frac{P''(h)}{2!}t^2 + \frac{P'(h)}{1!}t + P(h), \tag{5}$$

pri čemu je za sve h uvijek $P''''(h) = 4! = 24$. Nultočke polinoma $Q(t)$ su $t_i = x_i - h$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Zapis (2) polinoma $P(x)$ je Taylorov razvoj toga polinoma oko točke $x_0 = 0$ i stoga je

$$\frac{P''''(0)}{4!} = 1, \quad \frac{P'''(0)}{3!} = a, \quad \frac{P''(0)}{2!} = b, \\ \frac{P'(0)}{1!} = c, \quad P(0) = d. \tag{6}$$

Radi lakšeg izučavanja polinoma $P(x)$ uvodimo supstituciju $t = x - H$ i biramo H tako da član uz treću potenciju nestane, tj. $\frac{P'''(H)}{3!} = 0$.

Sada $P'''(H) = 0$ povlači $H = -\frac{a}{4}$. U novoj varijabli $t = x + \frac{a}{4}$ dobivamo kanonski oblik polinoma četvrtog stupnja

$$S(t) = t^4 + pt^2 + qt + r, \tag{7}$$

pri čemu je

$$p = -\frac{3a^2 - 8b}{8}, \quad q = \frac{a^3 - 4ab + 8c}{8},$$
$$r = \frac{256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4}{256}. \tag{8}$$

Uvedemo li oznake

$$N = 3a^2 - 8b, \qquad Q = 8c - 4ab + a^3,$$
$$R = 256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4, \tag{9}$$

možemo pisati

$$S(t) = t^4 - \frac{N}{8}t^2 + \frac{Q}{8}t + \frac{R}{256}, \tag{10}$$

pri čemu vrijedi

$$N = -8p, \quad Q = 8q, \quad R = 256r. \tag{11}$$

Stoga kanonski oblik (7) možemo pisati:

$$S(t) = t^4 - \frac{N}{8}t^2 + \frac{Q}{8}t + \frac{R}{256}. \tag{12}$$

Nultočke polinoma $S(t)$ su $t_i = x_i + \frac{a}{4}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ i kako je koeficijent od t^3 jednak nuli, po Vietovim formulama imamo $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$. Dakle, kanonski oblik $S(t)$ je onaj jedinstveni oblik polinoma četvrtog stupnja u kojem je težište $t_t = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}$ nultočaka jednako nuli i stoga je taj oblik uvijek isti bez obzira iz kojeg Taylorovog razvoja (4) krenemo (sjetimo se da iz jednog Taylorovog razvoja prelazimo uvijek u drugi nekom supstitucijom $x = X + l$). Stoga p, q i r možemo računati tako da u formulu (8) stavimo umjesto a, b, c, d izraze $\frac{P'''(h)}{3!}, \frac{P''(h)}{2!}, \frac{P'(h)}{1!}, P(h)$ (usporediti sa formulom (6)). Time dobijemo:

$$\begin{aligned} 96p &= 48P''(h) - (P'''(h))^2, \\ 1728q &= (P'''(h))^3 - 72P''(h)P'''(h) + 1728P'(h), \\ 110592r &= 110592P(h) - 4608P'(h)P'''(h) + \\ &\quad +96P''(h)(P'''(h))^2 - (P'''(h))^4, \end{aligned} \tag{13}$$

pri čemu je h proizvoljan realan broj.

Da izrazi na desnoj strani formula ne ovise o h uvjeravamo se i tako da te izraze deriviramo po h i koristeći $P''''(x) = 24$ pokažemo da su sve njihove prve derivacije jednake 0, tj. ti su izrazi konstante. Kako su formule (13) valjane za $h = 0$ (zbog formule (8)), slijedi da one vrijede i za bilo koji h.

Napomena 1 *Polinom $S(t)$ u prvom slučaju ima realne nultočke t_1, t_2 i konjugirano kompleksne $-\frac{t_1+t_2}{2} \pm Li$, $L > 0$, pa glasi*

$$t^4 + \left[L^2 - \frac{3t_1^2 + 2t_1t_2 + 3t_2^2}{4}\right]t^2$$
$$-(t_1+t_2)\left[L^2 + \frac{(t_1-t_2)^2}{4}\right]t + t_1t_2\left[L^2 + \frac{(t_1+t_2)^2}{4}\right].$$

Polinom $S(t)$ u drugom slučaju ima kompleksne nultočke $-w \pm Li$ i $w \pm Mi$, $L \neq 0$, $M \neq 0$, pa glasi

$$t^4 + (L^2+M^2-2w^2)t^2 + 2w(M^2-L^2)t + (L^2+w^2)(M^2+w^2).$$

Polinom $S(t)$ u trećem slučaju ima realne nultočke t_1, t_2, t_3 i $t_4 = -t_1 - t_2 - t_3$, pa glasi

$$t^4 - (\Sigma^2 - S)t^2 + (S\Sigma - \Pi)t - \Sigma\Pi,$$

gdje je

$$\Sigma = t_1 + t_2 + t_3, \ S = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1, \ \Pi = t_1t_2t_3.$$

Iz napomene 1 vidimo da u drugom slučaju vrijedi $r = (L^2 + w^2)(M^2 + w^2) > 0$, što izlazi i iz $r = t_1\overline{t_1}t_3\overline{t_3} = |t_1|^2|t_3|^2 > 0$.

2 Invarijante polinoma $P(x)$

Definicija 1 *Simetrične, homogene (isti broj članova) i izobarične (zbroj produkta težine članova i njegove potencije je isti za sve članove) izraze od koeficijenata polinoma (1) koji se ne mijenjaju prilikom zamjene $x = t - h$ zovemo invarijantama polinoma (1). Invarijantu podijeljene sa a_4^h gdje je h stupanj homogenosti invarijante zvati ćemo apsolutnom invarijantom (i njen stupanj homogenosti je 0).*

Prilikom supstitucije $t = kx + l$ invarijanta se množi s nekom potencijom od k. Važno je da u tim izrazima uključimo sve koeficijente a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0 polinoma koje smatramo da su težina 0, 1, 2, 3 i 4. Tako npr. izraz za a_4^2N glasi

$$a_4^2N = 3a_3^2 - 8a_2a_4 \tag{14}$$

i to je invarijanta stupnja homogenosti 2 i stupnja izobaričnosti 2. Izraz

$$N = \frac{3a_3^2 - 8a_2a_4}{a_4^2} \tag{15}$$

je po definiciji apsolutna invarijanta. Apsolutne invarijante polinoma su zapravo izrazi koji su homogene i simetrične funkcije razlika $x_i - x_j$ polaznog polinoma (1) pa onda simetrične funkcije razlika $t_i - t_j$ bilo kojeg polinoma dobivenog pomicanjem polinoma (1) (uočite da je $x_i - x_j = (x_i - h) - (x_j - h)$ za sve h). Tako npr. izraz za N glasi

$$N = (x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+ \\ +(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2 \tag{16}$$

i očito je nenegetivan ako su sve nultočke x_i realne i jednak 0 ako i samo ako je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ tj. onda i samo onda kada je je $p = q = r = 0$. Izraz N zvat ćemo *Newtonovski izraz* polinoma (1). Apsolutne invarijante su izrazi sastavljeni od p, q i r, tj. od N, Q i R, s time da p, q i r, odnosno N, Q i R zapišemo, uz pomoć formula (8) i (3), pomoću koeficijenata a_4, a_3, a_2, a_1 i a_0. Jedna apsolutna invarijanta je izraz $p^2 - 4r$, odnosno izraz $N^2 - R$, iz [5] koji nakon sređivanja glasi,

$$p^2-4r = \frac{16a_4^2(a_2^2+a_1a_3-4a_0a_4)-16a_2a_3^2a_4+3a_3^4}{16a_4^4}. \tag{17}$$

3 Diskriminanta

Jedna od najvažnijih invarijanata polinoma, apsolutno ireducibilna po svim svojim keficijentima [4, str. 450.-453.] i [6, str. 126.-127.] je tzv. *diskriminanta D* polinoma definirana sa $D = a_4^6\Pi_{i<j}(x_i - x_j)^2$. Kao izraz od koeficijenata ona se dobiva preko Vietovih formula. U sljedećem teoremu dajemo niz korisnih izraza za diskriminantu. Uvedimo oznake:

$$A_1 = a_2^2-3a_1a_3+12a_0a_4 = \frac{A_2}{16}, \tag{18}$$

$$B_1 = 27a_1^2a_4+27a_0a_3^2+2a_2^3-72a_0a_2a_4-9a_1a_2a_3, \tag{19}$$

$$N_1 = 3a_3^2-8a_2a_4 = a_4^2N, \tag{20}$$

$$K_1 = 4a_4^2(9a_1^2-32a_0a_2)-4a_1a_2a_4a_3+ \\ +(48a_0a_4+a_2^2)a_3^2-3a_1a_3^3 = 4a_4^2K, \tag{21}$$

$$G = a_1^2a_4+a_3^2a_0-4a_0a_2a_4, \quad H = a_1a_3-4a_0a_4, \tag{22}$$

$$P = 27Q^2, \tag{23}$$

gdje su Q i R su dani formulama (11), (8) i (3).

Teorem 1 *Diskriminanta polinoma $P_4(x) = a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, odnosno, ako je $a_0 \neq 0$, polinoma $R_4(x) = x^4P_4(\frac{1}{x}) = a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$, dana je uz oznake (18) do (23) izrazima*

$$\begin{aligned} D \;=\; & 256a_0^3a_4^3-192a_0^2a_1a_3a_4^2-128a_0^2a_2^2a_4^2- \\ & -6a_0a_1^2a_3^2a_4-80a_0a_1a_2^2a_3a_4+16a_0a_2^4a_4- \\ & -4a_1^3a_3^3+a_1^2a_2^2a_3^2+144a_0^2a_2a_3^2a_4+ \\ & +144a_0a_1^2a_2a_4^2-27a_0^2a_3^4-27a_1^4a_4^2 \\ & -4a_0a_2^3a_3^2-4a_1^2a_2^3a_4+18a_0a_1a_2a_3^3+ \\ & +18a_1^3a_2a_3a_4, \end{aligned} \tag{24}$$

$$27D = 4A_1^3 - B_1^2, \tag{25}$$

$$144a_4^2D = -3K_1^2+2N_1A_1\cdot K_1+a_4^4RA_1^2, \tag{26}$$

$$D = -27G^2-2a_2(2A_1-3H)G+(A_1-H)H^2, \tag{27}$$

$$2^{12}\cdot 3^3 D = -P^2+2N_1(N_1^2-3A_2)P- \\ -(N_1^2-4A_2)(N_1^2-A_2)^2. \tag{28}$$

Ako je $P_4(x)$ oblika $S(x) = x^4+px^2+qx+r$, onda se veličine A_1 i B_1 reduciraju na veličine $A = p^2+12r$ i $B = 27q^2+2p^3-72pr$, a veličina K glasi $K = 9q^2-32pr$. Uz oznake

$$\Delta = p^2-4r \quad i \quad D_d = -\frac{1}{2}(8p^3+27q^2),$$

diskriminanta polinoma $S(x)$ dana je izrazima:

$$D = 16rp^4-4q^2p^3-128r^2p^2+144rq^2p-27q^4+256r^3, \tag{29}$$

$$D = 256r^3-128p^2r^2+16p(p^3+9q^2)r-q^2(27q^2+4p^3), \tag{30}$$

$$27D = 4A^3 - B^2, \tag{31}$$

$$D = -27q^4+4p(36r-p^2)q^2+16r(p^2-4r)^2, \tag{32}$$

$$D = -4\Delta^3+4p^2\Delta^2-36pq^2\Delta+(32p^3-27q^2)q^2, \tag{33}$$

$$D = 16r\Delta^2-36pq^2\Delta+(32p^3-27q^2)q^2, \tag{34}$$

$$D = -27(q^2-4pr)^2-4p(p^2+18r)(q^2-4pr)+ \\ +16r^2(p^2+16r), \tag{35}$$

$$9D = -3K^2-4pAK+16rA^2, \tag{36}$$

$$\frac{27}{4}D = -D_d^2-6pAD_d-4(2p^2-3r)A^2, \tag{37}$$

$$3D = 4(p^2+12r)\left[(p^2-4r)^2+6pq^2\right]- \\ -\left[2p(p^2-4r)+9q^2\right]^2, \tag{38}$$

$$9D = -3(B-2K)^2+8p(p^2+12r)(B-2K)- \\ -4(p^2-4r)(p^2+12r)^2. \tag{39}$$

Dokaz. Izraz (25) dokazan je u [7, (15), str. 231.], a izraz (29) slijedi odmah iz (24) zamjenom a_0 sa r, a_1 sa q, a_2 sa p, a_3 sa 0 i a_4 sa 1. Koristeći formule (11), (8) i (3) iz (25) i (29) dobivamo sve ostale izraze za diskriminantu $P_4(x)$. Iz definicije diskriminante polinoma pomoću nultočaka polinoma i iz Vietove formule za produkt nultočaka lako izlazi da su diskriminante polinoma $P_4(x)$ i $R_4(x)=x^4P_4(\frac{1}{x})$ jednake (uočiti da ako 0 nije nultočka polinoma $P_4(x)$, onda su nultočke polinoma $R_4(x)$ dane sa $\frac{1}{x_i}$, $i=1,2,...,4$.). Ako je 0 nultočka polinoma $P_4(x)$, onda je $P_4(x)=x\cdot P_3(x)$ i diskriminanta polinoma $P_4(x)$ jednaka je $[P_3(0)]^2\cdot$ diskriminanta od $P_3(x)$ i gornje formule tada daju ispravnu diskriminantu kubnog polinoma $R_3(x)=x^4P_4(\frac{1}{x})$ pomnoženu s $[P_3(0)]^2$ tj. s a_1^2.

Napomena 2 *U radu [5] diskriminanta Descartesove kubne rezolvente polinoma $S(t)$ označena je s D_1. Usporedbom izraza za D_1u radu [5] i izraza za diskriminantu D u Teoremu 1 vidimo da vrijedi $D=-108D_1$. Izrazi za diskriminantu u Teoremu 1 napisani su kao kvadratne i kubne funkcije nekih invarijanata polinoma $P_4(x)$, pa možemo gledati njihovu diskriminantu po tim invarijantama. Kratko ćemo reći da u izrazu (25) diskriminanta kvadratnog trinoma po B_1 je $16A_1^3$, u izrazu (26) diskriminanta po K_1 je $64A_1$, u izrazu (27) diskriminanta po G je $4A_1^3$, a u izrazu (28) diskriminanta po P je$16^4A_1^3$. Isto tako u izrazu (30) diskriminanta kvadratnog trinoma po varijabli r je $3\cdot2^{19}q^2D_d^3$, u izrazu (33) diskriminanta po Δ je $384q^2D_d^3$, a u izrazu (35) diskriminanta po q^2-4pr je A^3. Zapamtimo da u izrazu (36) diskriminanta po varijabli K iznosi $16A^3$, a u izrazu (37) diskriminanta po D_d iznosi $4A^3$.*

Navedimo glavni teorem dokazan u radu [5, str. 14., teorem 2]:

Teorem 2 *Neka je $P(x)=x^4+px^2+qx+r$. Tada smo u prvom slučaju onda i samo onda kada je $D<0$ ili ($D=0$ i ($p^2-4r<0$ ili ($p^2-4r>0$ i $p>0$))) ili ($D=0$ i $p^2-4r=0$ i $p>0$ i $q\neq0$), u drugom slučaju onda i samo onda kada je ($D>0$ i ($p^2-4r<0$ ili ($p^2-4r\geq0$ i $p>0$))) ili ($q=0$ i $p^2-4r=0$ i $p>0$), u trećem slučaju onda i samo onda kada je $D\geq0$ i $p^2-4r\geq0$ i $p\leq0$.*

U slučaju $q=0$ imamo po formuli (34) iz Teorema 1 $D=16r\Delta^2$ i ovu posljedicu, koje dokaz prepuštamo čitaocu.

Korolar 1 *Neka je $P_4(x)=x^4+px^2+r=0$ bikvadratna jednadžba. U prvom slučaju smo tada i samo tada kada je $r<0$ ili ($r=0$ i $p>0$). U drugom slučaju smo onda i samo onda ako je ($p^2-4r<0$) ili ($p^2-4r\geq0$ i $p>0$ i $r>0$). U trećem smo slučaju ako i samo ako je ($p^2-4r\geq0$ i $p\leq0$ i $r\geq0$).*

Izreka Teorema 2 u slučaju realnih različitih nultočaka može se poboljšati.

Lema 1 *Polinom $P(x)$ ima četiri realne različite nultočke ako i samo ako je*

$$D>0 \text{ i } p<0 \text{ i } p^2-4r>0.$$

Dokaz. Promatrajmo **Eulerovu kubnu rezolventu**

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0 \tag{40}$$

uvedenu u dokazu Teorema 2 iz rada [5] uz pomoć koje je **L. Euler** riješio jednadžbu četvrtog stupnja. Lako se provjeri da je diskriminanta od (40) upravo diskriminanta polinoma $S(t)$, dakle i od $P(x)$, što je pokazano formulom (38) iz Teorema 1. (Podsjetimo se da je diskriminanta polinoma $b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$ data izrazom $4(b_2^2-3b_1b_3)(b_1^2-3b_0b_2)-(b_1b_2-9b_0b_3)^2$.) Poznato je [3, str. 67., zadatak 2.] da polinom $P(x)$ ima četiri realne nultočke onda i samo onda ako su sve nultočke od (40) realne i nenegativne. Nadalje, polinom $P(x)$ ima četiri realne različite nultočke onda i samo onda ako su sve nultočke od (40) realne i nenegativne i međusobno različite. No, nultočke od (40) su realne i nenegativne i međusobno različite onda i samo onda ako je $D>0$ i $p<0$ i $p^2-4r>0$. Dokažimo to, čime ujedno imamo dokaz Leme 1. Ako su nultočke od (40) realne i pozitivne i međusobno različite, onda je po kriteriju realnosti nultočaka kubne jednadžbe $D>0$, a po Vietovim formulama $p<0$ i $p^2-4r>0$. Ako pak je $D>0$ i $p<0$ i $p^2-4r>0$, onda su zbog $D>0$ sve nultočke od (40) realne i međusobno različite. Pretpostavimo da je $q\neq0$. Onda po Descartesovom teoremu o broju negativnih nultočaka izlazi da (53) nema negativnih nultočaka (broj promjena predznaka u nizu -1, $2p$, $-(p^2-4r)$, $-q^2$ je nula!), a kako je $q\neq0$, 0 nije nultočka od (53), i jer su sve nultočke od (40) realne, one su sve pozitivne. Neka je je $q=0$. Onda je $r>0$ (koristiti formulu (34) za diskriminantu iz Teorema 1). U tom slučaju (53) glasi $z(z^2+2pz+p^2-4r)$ i njene nultočke su 0 i dvije nultočke kvadratne jednadžbe $z^2+2pz+p^2-4r$, koje su realne i različite (jer je diskriminanta od $z^2+2pz+p^2-4r$ jednaka $16r>0$), a po pretpostavkama $p<0$ i $p^2-4r>0$ i po Vietovim formulama obje su pozitivne.

Zadatak 1.
Pretpostavimo da smo u trećem slučaju i da su t_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ realne nultočke polinoma $S(t)$. Dokažite da je tada $p=-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2)\leq0$, i da je $p=0$ onda i samo onda ako je $S(t)=t^4$. Dokažite na temelju nejednakosti između kvadratne i geometrijske sredine brojeva $|t_i|$, $i\in\{1,2,3,4\}$ da tada vrijedi $p^2-4r\geq0$ i da je u trećem slučaju $p^2-4r=0$ onda i samo onda kada je $S(t)=(t^2-t_1^2)^2$ za neki realni t_1.

Lema 2 *U trećem slučaju vrijedi nejednakost* $2p(p^2-4r)+9q^2 \leq 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je u trećem slučaju $2p(p^2-4r)+9q^2 > 0$. Znamo da je u trećem slučaju $D \geq 0$ i $p \leq 0$ i $p^2-4r \geq 0$ po Lemi 1, i da je po Korolaru 2 $A = p^2+12r \geq 0$. Onda bi po formuli (39) za diskriminantu iz Teorema 1 imali $D \leq -\frac{1}{3}(B-2K)^2 < 0$, protivno tvrdnji Leme 1. Dakle je $B-2K = 2p(p^2-4r)+9q^2 \leq 0$.

Analizirajmo sada diskriminantu iz Teorema 1. Iz formule (25) u Teoremu 1 slijedi da $A_1 < 0$ povlači $D < 0$ i da $A_1 \leq 0$ povlači $D \leq 0$. Odavde slijedi da $D \geq 0$ povlači $A_1 \geq 0$ i da $D > 0$ povlači $A_1 > 0$. Dakle, ako je u trećem slučaju $A_1 = 0$, tada je $D = 0$, i iz izraza (25) i $B_1 = 0$, što ćemo kasnije u Propoziciji 4 karakterizirati kao slučaj barem trostruke realne nultočke. U drugom slučaju za polinom $S(t)$ vrijedi $S(t) > 0$ za sve $t \in R$, pa stoga $S(0) = R > 0$, tj. $r > 0$ i $A_1 = \dfrac{3}{64}R + \left(\dfrac{N}{8}\right)^2 > 0$. Osim toga je $A_1 > \left(\dfrac{N}{8}\right)^2$ tj. $|N| < 8\sqrt{A_1}$.

Neka je $A_1 \geq 0$, tj. $A_2 \geq 0$. Iz izraza (28), zbog $P \geq 0$, vidimo da pretpostavke $2N_1(N_1^2-3A_2) \leq 0$ i $N_1^2-4A_2 > 0$ povlače $D < 0$. No, $2N_1(N_1^2-3A_2) \leq 0$ i $N_1^2-4A_2 > 0$ je ekvivalentno s $N_1 \leq 0$ i $N_1^2-4A_2 > 0$, odnosno s $A_1 \geq 0$ i $N_1 < -8\sqrt{A_1} \leq 0$, odnosno s $N_1 < 0$ i $R < 0$. Dakle, $D < 0$ ako je $N_1 < 0$ i $R < 0$. Za kanonski oblik $S(t)$, lako vidimo i iz izraza (29) da $p > 0$ i $r < 0$ povlače $D < 0$. Iz izraza (29) ujedno vidimo da $p \geq 0$, $r < 0$ povlače $D < 0$ (prvi slučaj) i da $p \geq 0$, $r \leq 0$ i $q \neq 0$ isto povlače $D < 0$ (prvi slučaj).

Neka su p i r zadani. Proučimo diskriminantu u obliku (32) kao kvadratnu jednadžbu po q^2. U drugom i trećem slučaju imamo $p^2+12r \geq 0$ po gore dokazanom, pa $D \geq 0$ povlači

$$\frac{2}{27}\left[p(36r-p^2)-\sqrt{p^2+12r}^3\right] \leq q^2 \leq$$
$$\leq \frac{2}{27}\left[p(36r-p^2)+\sqrt{p^2+12r}^3\right]. \tag{41}$$

Neka smo u prvom slučaju. Ako je $p^2+12r \leq 0$, imamo, po gore dokazanom, da je za bilo koji q ispunjeno $D < 0$. Neka vrijedi $p^2+12r > 0$. Lako vidimo da je $p(36r-p^2)+\sqrt{p^2+12r}^3 \leq 0$ onda i samo onda kada je $r \leq 0$, $p \geq 0$, pa u slučaju ($r \leq 0$, $p \geq 0$) nema nikakvih uvjeta na q. Analizom $p(36r-p^2) < \sqrt{p^2+12r}^3$, koja povlači nejednakost $r(p^2-4r)^2 > 0$, izlazi da u slučaju ($r > 0$ ili $r = 0$, $p < 0$) vrijedi samo nejednakost

$$\frac{2}{27}\left[p(36r-p^2)+\sqrt{p^2+12r}^3\right] \leq q^2.$$

Ako je ($r < 0$ i $p < 0$), onda vrijedi nejednakost

$$q^2 \leq \frac{2}{27}\left[p(36r-p^2)-\sqrt{p^2+12r}^3\right]$$

ili nejednakost

$$\frac{2}{27}\left[p(36r-p^2)+\sqrt{p^2+12r}^3\right] \leq q^2.$$

Napomena 3 *Pretpostavimo da su p i q zadani i da je diskriminanta $D(\Delta)$ je zapisana kao kubni polinom od $\Delta = p^2-4r$ (formula (33) iz Teorema 1). Imamo $D(\frac{4}{3}p^2) = -\frac{4}{27}D_d^2$, $D'(\Delta) = -4(3\Delta^2-2p^2\Delta+9pq^2)$, $D'(0) = -36pq^2$, $D'(\frac{4}{3}p^2) = \frac{8}{3}pD_d$. Pretpostavimo $p > 0$. Tada po Teoremu 2 ne može nastupiti treći slučaj i vrijedi $D_d < 0$. Iz izraza za $D'(\Delta)$ vidimo da je $D(\Delta)$ strogo padajuća za $\Delta < 0$, i za $\Delta > \frac{2}{3}p^2$ i da je $D'(0) \leq 0$. Neka je $p > 0$ i $q \neq 0$. Kako diskriminanta $D(\Delta)$ po Δ iznosi $q^2D_d^3$ (napomena 2), i kako je $q^2D_d^3 < 0$, jednadžba $D(\Delta) = 0$ ima točno jedno jednostruko realno rješenje (i dva konjugirano kompleksna rješenja). Dakle postoji realno δ tako da $\Delta < \delta$ povlači $D > 0$ (drugi slučaj po Teoremu 2) i $\Delta > \delta$ povlači $D < 0$ (prvi slučaj). Kako je $\lim\limits_{\Delta\to-\infty} D(\Delta) = \infty$, $D(0) = (32p^3-27q^2)q^2$ i $\lim\limits_{\Delta\to\infty} D(\Delta) = -\infty$, vrijedi $\delta < 0$ ako je $32p^3-27q^2 < 0$, $\delta = 0$ ako je $32p^3-27q^2 = 0$ i $\delta > 0$ ako je $32p^3-27q^2 > 0$. Isti zaključak dobivamo koristeći Descartesov teorem o broju pozitivnih nultočaka polinoma $D(-\Delta)$, odnosno $D(\Delta)$, [1, p. 178., Descartesovo pravilo predznaka].*

Napomena 4 *Neka je $p > 0$, $D \geq 0$ i $\Delta \geq 0$. Dokažimo da je tada $32p^3-27q^2 \geq 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $p > 0$, $D \geq 0$ i $\Delta \geq 0$, i $32p^3-27q^2 < 0$. Uočimo da je tada $q \neq 0$. No tada po napomeni 3 jednadžba $D(\Delta) = 0$ ima točno jedno jednostruko negativno rješenje δ u kojem $D(\Delta)$ mijenja znak pa je za sve $\Delta \geq 0$ ispunjeno $D(\Delta) < 0$. No to je u proturječju s pretpostavkom $D \geq 0$ i $\Delta \geq 0$. Analogno bi dokazali da ako je $p > 0$, $D \geq 0$ i $\Delta > 0$, tada vrijedi $32p^3-27q^2 > 0$. Primijenimo obje dokazane tvrdnje na slučaj $p > 0$, $q \neq 0$, $D = 0$ i $\Delta > 0$. Po Teoremu 2 u prvom smo slučaju. Dalje koristimo napomenu 1 i njene oznake. Zbog $D = 0$ imamo $t_1 = t_2 = t \neq 0$. Stavimo li $t^2 = T$ i $L^2 = N$, imamo $p = N-2T$ i $\Delta = N\cdot(N-8T)$. Nejednakost $32p^3-27q^2 > 0$ postaje $8(N-2T)^3 \geq 27TN^2$ za sve $N \geq 8T > 0$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\Delta = 0$, tj. ako i samo ako je $N = 8T$.*

Napomena 5 *Neka smo u prvom slučaju i neka je $\Delta = 0$. Tada je po Teoremu 2, $\Delta = 0$, $D < 0$, ili $\Delta = 0$, $D = 0$, $q \neq 0$. Ako je $\Delta = 0$, $D < 0$, onda, zbog $D(0) = (32p^3-27q^2)q^2$, vrijedi $q \neq 0$ i $32p^3-27q^2 < 0$. Ako je $\Delta = 0$, $D = 0$,*

$q \neq 0$, imamo, zbog $D(0) = (32p^3 - 27q^2)q^2$, jednakost $32p^3 = 27q^2 > 0$, dakle $p > 0$, u skladu s Teoremom 2. Dvostruku realnu nultočku polinoma $S(t)$ u slučaju $\Delta = 0$, $D = 0$, $q \neq 0$ računamo,

$$t_1 = t_2 = -(signq) \cdot \sqrt{\frac{p}{6}} = -\sqrt[3]{\frac{q}{16}}.$$

Prema tome, vrijedi $32p^3 - 27q^2 \leq 0$. Ako nastupi znak jednakosti, onda je $D = 0$ i stoga $t_1 = t_2$ (vidjeti napomenu 1). Uvedimo oznake $S = t_1 + t_2$ i $P = t_1 t_2$. Izrazimo li Δ pomoću S i T i riješimo li kvadratnu jednadžbu $\Delta = 0$ po $4L^2$ imamo

$$4L^2 = 3S^2 + 4P \pm 8\sqrt{P \cdot S^2}. \tag{42}$$

Iz formule (42) vidimo da je ovdje $P \geq 0$ i da bez smanjenja općenitosti možemo uzeti $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$. Uvedimo oznake $\sqrt{t_1} = \lambda$, $\sqrt{t_2} = \mu$ ($\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$) i izaberimo predznak $+$ u formuli (42). Onda po napomeni 1 imamo $p = 2\lambda\mu(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)$ i $q = -\left[(\lambda+\mu)(\lambda^2+\mu^2)\right]^2$. Nejednakost $32p^3 - 27q^2 \leq 0$ nakon sređivanja postaje nejednakost

$$\left[\frac{\lambda\mu(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)}{3}\right]^3 \leq \left[\frac{(\lambda+\mu)\left(\lambda^2+\mu^2\right)}{4}\right]^4, \tag{43}$$

za sve nenegativne λ i μ. Znak jednakosti vrijedi tada i samo tada kada je $\lambda = \mu$.

4 Invarijante A, B i K

Pogledajmo izraz (25) u Teoremu 1. Zbog ireducibilnosti diskriminante naslućujemo da bi izrazi

$$A = \frac{A_1}{a_4^2} = \frac{a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4}{a_4^2} \tag{44}$$

i

$$B = \frac{B_1}{a_4^3} = \tag{45}$$

$$= \frac{27a_1^2a_4 + 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0a_2a_4 - 9a_1a_2a_3}{a_4^3}$$

trebali biti invarijante. Zaista, supstitucija $t = x - h$ u $P_4(x)$ daje, nakon sređivanja

$$a_2^2(h) - 3a_1(h)a_3(h) + 12a_0(h)a_4(h) = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4$$

i isto za drugi izraz. U kanonskom obliku za polinom $S(t)$ te veoma važne invarijante glase

$$\begin{aligned} A &= p^2 + 12r \\ B &= 27q^2 + 2p^3 - 72pr \end{aligned}$$

Nadalje vrijede relacije

$$64A = N^2 + 3R \tag{46}$$

$$256B = 108Q^2 - N^3 + 9NR.$$

Kako je

$$3R = 64A - N^2, \tag{47}$$

kanonski oblik polinoma $S(t)$ glasi

$$S(t) = t^4 - \frac{N}{8}t^2 + \frac{Q}{8}t + \frac{64A - N^2}{768}. \tag{48}$$

Invarijante A i B mogu se zapisati pomoću nultočaka x_i, $i = 1,2,3,4$. U tu svrhu promatrajmo Ferarrijevu kubnu rezolventu polinoma $P(x)$ (vidjeti zapis 2),

$$Y^3 - bY^2 + (ac - 4d)Y - (c^2 + a^2d - 4bd) = 0$$

i njene korijene Y_i, $i = 1,2,3$. Kao što je poznato, vrijedi $Y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$; $Y_2 = x_1x_3 + x_2x_4$; $Y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$, [2, str. 117, zadatak 814 a)]. Definirajmo sada $U = Y_2 - Y_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$; $V = Y_3 - Y_1 = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2)$; $W = Y_1 - Y_2 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$ pri čemu je $U + V + W = 0$. Sada imamo pomoću Vietovih formula za polinom $P(x)$:

$$A = b^2 - 3(ac - 4d) =$$

$$= Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 - (Y_1Y_2 + Y_2Y_3 + Y_3Y_1), \tag{49}$$

$$A = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2), \tag{50}$$

i

$$B = 27(a^2d + c^2 - 4bd) - 9b(ac - 4d), \tag{51}$$

$$B = U^2(V - W) + V^2(W - U) + W^2(U - V) =$$

$$= (W - U)(V - U)(U - W). \tag{52}$$

Iz jednakosti (50) i (52) vidimo da su po definiciji 1 A i B i apsolutne invarijante.
Promotrimo još jednu invarijantu koja je vezana uz vrijednosti polinoma $P_4(x)$ u svim točkama ekstrema ili točki horizontalne infleksije (jednoj, ako ona postoji), x_e. Vrijedi $P_4'(x_e) = 0$, odakle imamo

$$x_e^3 = -\frac{3a_3x_e^2 + 2a_2x_e + a_1}{4a_4}.$$

Odavde dobijemo

$$4P_4(x_e) = \frac{-(3a_3^2 - 8a_2a_4)x_e^2 + 2(6a_1a_4 - a_2a_3)x_e}{4a_4} +$$

$$+\frac{(16a_0a_4-a_1a_3)}{4a_4}. \qquad (53)$$

Označimo sa K diskriminantu desne strane jednakosti (53):

$$K=\frac{4a_4^2(9a_1^2-32a_0a_2)-4a_1a_2a_3a_4+48a_0a_3^2a_4}{4a_4^2}+$$
$$+\frac{a_2^2a_3^2-3a_1a_3^3}{4a_4^2}. \qquad (54)$$

Ako je $a_3=0$ i $a_4=1$, onda je $K=9q^2-32pr$. Diskriminanta kubnog polinoma $S(t)$, kažimo D_d, je invarijanta dana do na pozitivni faktor izrazom

$$2^7D_d=N^3-27Q^2, \qquad (55)$$

odnosno, po formulama (11) s

$$2D_d=-(8p^3+27q^2). \qquad (56)$$

Veze između invarijanata D_d (formule (55) i (56)), B i K za polinom $P_4(x)$ su:

$$2D_d=9K-4B=N\cdot A-3K, \qquad (57)$$

$$12K=4B+N\cdot A, \qquad (58)$$

i

$$64B=-N^3+48N\cdot A+27Q^2.$$

Iz formule (58) lako slijedi da je K invarijanta jer su to N, A i B. Iz formule (25) u Teoremu 1, i iz formule (58) odmah izlazi sljedeća propozicija

Propozicija 1 *Ako je $(A<0)$, ili $(A=0$ i $B\neq 0)$, ili $(A=0$ i $K\neq 0)$, tada je $D<0$ i polinom $P_4(x)$ ima dvije realne različite, i dvije kompleksne nultočke.*

Relacije (31) i (36) povlače sljedeće dvije posljedice

Korolar 2 *Ako je $D\geq 0$ (drugi ili treći slučaj), onda je $(A>0)$ ili $(A=B=D=0)$.*

Korolar 3 *Ako je $D\geq 0$ (drugi ili treći slučaj), onda je $(A>0)$ ili $(A=K=D=0)$.*

Propozicija 2 *Pretpostavimo da je za polinom $P_4(x)$ invarijanta $K<0$ i time $p\neq 0$. Ako je $N<0$, onda $P_4(x)$ ima sve nultočke kompleksne i samo jedan ekstrem i vrijedi $D_d<0$ i $D\geq 0$, a ako je $N>0$, onda $P_4(x)$ ima dvije realne različite i dvije kompleksne nultočke i vrijedi $D<0$.*

Dokaz. Ako za sve x_e vrijedi $a_4P_4(x_e)>0$, (vidjeti formulu (53)), onda $P_4(x)$ ima sve nultočke kompleksne, a ako za sve x_e vrijedi $a_4P_4(x_e)<0$, onda $P_4(x)$ ima dvije realne i dvije kompleksne nultočke, jer je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}a_4P_4(x)=+\infty$. To će se desiti u slučaju $K<0$, (kada je $p\neq 0$), jer tada kvadratni trinom na desnoj strani formule (53) prima vrijednosti uvijek istog predznaka (suprotnog od predznaka od N).

Propozicija 3 *Ako su sve nultočke polinoma $P_4(x)$ realne, vrijedi $K\geq 0$. Ako su sve nultočke polinoma $P_4(x)$ realne i različite, vrijedi $K>0$.*

Dokaz. Dokažimo drugi dio propozicije. Pretpostavimo da je $a_4=1$ i $a_3=0$ i da su sve nultočke polinoma $P_4(x)$ realne i različite. Ako je $r=0$, onda je $q\neq 0$ jer su sve nultočke polinoma $P_4(x)$ realne i različite, pa stoga sve proste (jednostruke). No tada je $K=9q^2>0$. Neka je $r\neq 0$, što povlači da 0 nije nultočka polinoma $P(x)$. Onda su i sve nultočke polinoma $R(y)=y^4P(\frac{1}{y})=ry^4+qy^3+ry^2+1=0$ opet realne i različite. Po Rolleovom teoremu i nultočke derivacije $R'(y)=y(4ry^2+3qy+2r)$ su sve realne i različite, pa diskriminanta polinoma $4ry^2+3qy+2r$, a to je upravo broj K, mora biti pozitivna. Prvi dio propozicije dokazuje se posve analogno i dovoljno ga je dokazati samo za slučaj $r\neq 0$.

Zadatak 2.
Pretpostavimo da smo u trećem slučaju. Zapišite tada za polinom $S(t)$ dokazane nejednakosti $A=p^2+12r\geq 0$, $K=9q^2-32pr\geq 0$ i $D_d=-\frac{1}{2}(8p^3+27q^2)\geq 0$ pomoću njegovih nultočaka t_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, odnosno pomoću veličina Σ, S i Π iz napomene 1. Dokažite da u trećem slučaju $A=p^2+12r=0$ tada i samo tada ako je $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{t,t,t,-3t\}$ za neko realno t (slučaj realne, barem trostruke nultočke). Dokažite da je u trećem slučaju $K=9q^2-32pr=0$ i $D=0$ tada i samo tada ako je $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{t,t,t,-3t\}$ za neko realno t ili $\{t_1,t_2,t_3,t_4\}=\{0,0,r,-r\}$ za neko realno r. Dokažite da ako su sve nultočke t_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ realne i međusobno različite, vrijedi $A>0$ i $D_d>0$.

Zadatak 3.
Pretpostavimo da smo u trećem slučaju. Dokažite da tada za polinom $S(t)$ vrijedi **Newtonovska nejednakost** $\left(\frac{q}{\binom{4}{1}}\right)^2\geq\left(\frac{p}{\binom{4}{2}}\right)r$, tj. $3q^2\geq 8pr$, koja je slabija od $K=9q^2-32pr\geq 0$. Kada vrijedi znak jednakosti?
Uputa: Dovoljno je dokazati da za $r\neq 0$ vrijedi $3q^2>8pr$. Gledajte polinom $R(z)=\frac{1}{r}z^4\cdot S(\frac{1}{z})$ i zapišite $\frac{q}{r}$ i $\frac{p}{r}$ pomoću njegovih realnih nultočaka z_i, $i\in\{1,2,3,4\}$. Potom nejednakost $3\left(\frac{q}{r}\right)^2>8\frac{p}{r}$ svedite na nejednakost $N>0$ (vidjeti formulu (16)).

Napomena 6 *Pretpostavimo da smo trećem slučaju i da je $p^2+q^2+r^2 \neq 0$. Koristeći izreku Korolara 2, Leme 1, Leme 2 i Propozicije 3, imamo tada ove nejednakosti*

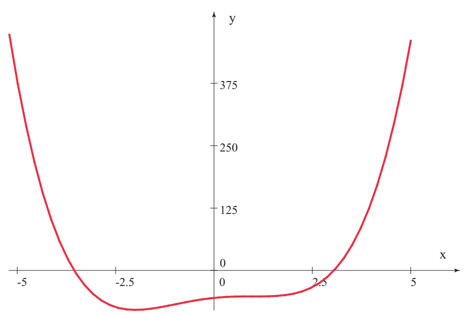
$$0 \leq -\frac{9q^2}{2p} \leq p^2-4r \leq p^2-\frac{9q^2}{8p}, \tag{59}$$

ili ekvivalentno

$$0 \leq \frac{8p^3+27q^2}{8p} \leq p^2+12r \leq \frac{8p^3+27q^2}{2p}. \tag{60}$$

5 Grafovi

Na temelju proučenih invarijanata opišimo grafove polinoma $P(x)$, koji je sveden na kanonski oblik $S(t)$ (formula (48)) i nacrtajmo samo neke posebne slučajeve. Uzmimo da $P(x)$ ima točku horizontalne infleksije x_i. Tada $P'(x)$, tj. $S'(t)$ ima dvostruku, ali ne i trostruku nultočku, što je ekvivalentno s $D_d = 0$ i $N > 0$.



Slika 1.

Slika 1. prikazuje slučaj točke horizontalne infleksije za polinom $P(x) = x^4-6x^2+8x-55 = (x-1)^3(x+3)-52$. Slučaj horizontalne infleksije nastupa onda i samo onda kada je $D_d = 0$ i $p < 0$ ili ekvivalentno kada je $p = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{q}^2 < 0$. Kako je $N = -8p$, i N invarijanta na pomake imamo $N > 0$ u slučaju horizontalne infleksije. Važne točke grafa su ekstrem $E(-\sqrt[3]{q}, -\frac{3}{2}\sqrt[3]{q}^4+r)$, točka kose infleksije $K(-\frac{\sqrt[3]{q}}{2}, -\frac{13}{16}\sqrt[3]{q}^4+r)$ i točka horizontalne infleksije $H(\frac{\sqrt[3]{q}}{2}, \frac{3}{16}\sqrt[3]{q}^4+r)$. Kanonski oblik polinoma u slučaju horizontalne točke infleksije je

$$S(t) = t^4-\frac{3\sqrt[3]{q^2}}{2}t^2+qt+r.$$

Zadatak 4.
Dokažite da u slučaju horizontalne točke infleksije pomakom koordinatnog sustava $x = X+h$, $y = Y$ polinom $P(x)$ možemo pisati kao $\widetilde{P}(X) = X^4+A_3X^3+A_0$.

Napomena 7 *Gledajmo diskriminantu D polinoma $S(x)$ kao funkciju od Δ (formula (33) iz Teorema 1). Iz napomene 3 znamo da je $D(\frac{4}{3}p^2) = -\frac{4}{27}D_d^2$, $D'(\frac{4}{3}p^2) = \frac{8}{3}pD_d$. Odavde vidimo da slučaj horizontalne infleksije nastupa tada i samo tada kada $D(\Delta)$ ima jednu dvostruku realnu nultočku $\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{4}{3}p^2$ i jednu od nje različitu jednostruku nultočku $\Delta_3 = -\frac{5}{3}p^2$. Slučaj $S(t) = t^4+r$ nastupa onda i samo onda kada $D(\Delta)$ ima trostruku realnu nultočku $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$.*

Neka je ekstrem ili točka horizontalne infleksije ujedno i nultočka i to ekstrem nultočka parnog reda, a točka horizontalne infleksije nultočka neparnog reda (ovo je npr. slučaj ako $S(t)$ ima trostruku ili četverostruku nultočku). Onda je $D = 0$ i po formuli (53) $16a_4P(x_e) = 0$, i $K \geq 0$.

Propozicija 4 *Polinom $P_4(x)$ ima točno trostruku realnu nultočku onda i samo onda kada je $A = 0$, $K = 0$ i $N > 0$ ili ekvivalentno $A = 0$, $B = 0$ i $N > 0$. U tom slučaju je njegov kanonski oblik*

$$S(t) = t^4-3\frac{\sqrt[3]{q}^2}{2}t^2+qt-3\frac{\sqrt[3]{q}^4}{16}, \tag{61}$$

ili

$$S(t) = (t+\frac{3q}{4p})^3(t-\frac{9q}{4p}) = (t-\frac{\sqrt[3]{q}}{2})^3(t+\frac{3\cdot\sqrt[3]{q}}{2}). \tag{62}$$

Polinom $P_4(x)$ četverostruku realnu nultočku tada i samo tada kada je $A = 0$, $B = 0$ i $N = 0$.

Dokaz. Neka polinom $P_4(x)$ ima barem trostruku nultočku x_t. Onda je $D = 0$, $D_d = 0$, što povlači iz (57) da je $3K = N\cdot A$, te iz formule (16) slijedi da je $N \geq 0$ (a $N > 0$ samo ako je nultočka točno trostruka realna). Onda je ta nultočka ili jedini ekstem ili jedina točka horizontalne infleksije. Kako su B, A, N i K invarijante možemo, bez smanjenja općenitosti, uzeti $x_t = 0$, i $P_4(x) = a_4x^4+a_3x^3$, dakle $a_2 = a_1 = a_0 = 0$. Sada su A i B po formulama (44) i (45) nula, a zbog $3K = N\cdot A$ je i $K = 0$. Po formuli (14) je $N = 3a_3^2$. Kako je $N \neq 0$, slijedi $N > 0$ i $a_3 \neq 0$. To je upravo slučaj trostruke realne nultočke. Obratno, neka je $K = A = 0$, odnosno, po formuli (58) neka je ekvivalentno $B = A = 0$. Kako su B, A, N i K invarijante, uzmimo kanonski oblik (7) polinoma $P_4(x)$. Onda je $D_d = 0$ po formuli (57) i $D = 0$ po formuli (31) iz Teorema 1 pa imamo barem dvostruku nultočku x_d. No $D_d = 0$ povlači $N \geq 0$. Uvažimo li relaciju $D_d = 0$, tj. $N^3 = 27Q^2$, kanonski oblik (48) polinoma $S(t)$ glasi:

$$S(t) = t^4-\frac{3\sqrt[3]{Q^2}}{8}t^2+\frac{Q}{8}t-\frac{9\sqrt[3]{Q^4}}{768}.$$

Odavde, i iz $Q = 8q$, slijedi formula (61). Ako je $N = 0$, onda je i $Q = 0$, i imamo četverostruku realnu nultočku. Ako je $N > 0$, imamo trostruku realnu nultočku. Formulu $x_t = -\dfrac{3q}{4p} = \dfrac{\sqrt[3]{q}}{2} = \dfrac{\sqrt[3]{Q}}{4}$ lako dobijemo iz Vietovih formula, pa imamo i formulu (62).

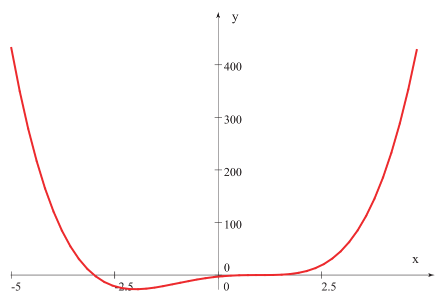
Zadatak 5.
Dokažite da slučaj trostruke realne nultočke nastupa onda i samo onda kada je $D_d = 0$, $A = 0$ i $N > 0$, tj. tada i samo tada kada je $8p^3 + 27q^2 = 0$, $p^2 + 12r = 0$ i $p < 0$.

Upotrebom supstitucije $x = \dfrac{1}{z}$ i Propozicije 4, dokazuje se ova posljedica

Korolar 4 *Svaki polinom $P_4(x)$ može se svesti na oblik*

$$a_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_0 = 0, \tag{63}$$

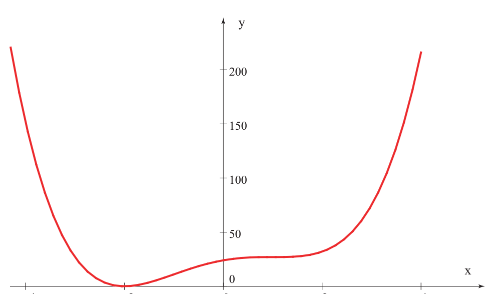
gdje je $a_4 \neq 0$, a c_3, c_2 i c_1 su realni brojevi. Polinom (63) ima pri tom točno trostruku realnu nultočku akko je $(c_3 \neq 0,\ c_2 = c_0 = 0)$ ili $(c_0 \neq 0$ i $c_2^2 + 12a_4c_0 = 0$ i $9c_3^2 - 32a_4c_2 = 0)$.



Slika 2

Slika 2 prikazuje slučaj trostruke realne nultočke za polinom $P(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+1)$.

Sljedeća slika prikazuje jedini preostali slučaj horizontalne infleksije u kojem je $D = 0$, ali koji nije slučaj trostruke realne nultočke. To je slučaj $D_d = D = 0$, $A \neq 0$ i $N > 0$. Preciznije, to je slučaj $D_d = D = 0$, $A > 0$ i $N > 0$.



Slika 3

Slika 3 prikazuje slučaj horizontalne infleksije s dvostrukom realnom nultočkom i dvije konjugirano kompleksne nultočke. Na gornjoj slici je nacrtan graf polinoma $P(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2\left[(x-2)^2 + 2\right]$.
Iz formule (37) u Teoremu 1 vidimo da taj slučaj nastupa onda i samo onda kada je $8p^3 + 27q^2 = 0$, $2p^2 - 3r = 0$ i $p < 0$, ili ekvivalentno onda i samo onda kada je $N^3 = 27Q^2$ i $9N^2 = 64A$. Tada je po formuli (46) $3R = 8N^2$. Kanonski oblik polinoma $S(t)$, uz korištenje formula (11) glasi:

$$S(t) = t^4 - \frac{3\sqrt[3]{q^2}}{2}t^2 + qt + \frac{3\sqrt[3]{q^4}}{2}$$

ili

$$S(t) = (t + \sqrt[3]{q})^2\left[(t - \sqrt[3]{q})^2 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{q^2}\right].$$

Napomena 8 *Neka je točka t_e koja je ekstrem ili točka horizontalne infleksije, ujedno i nultočka polinoma $S(t)$ i to ekstrem nultočka parnog reda, ovdje reda dva ili četiri, a točka horizontalne infleksije nultočka neparnog (ali većeg od jedan) reda, dakle ovdje reda tri. Onda po formuli (53) imamo $S(t_e) = 0$ i $K \geq 0$. Primijetimo da $S(t_e) = 0$ povlači $D = 0$ (jer je t_e višestruka nultočka) pa po formuli (31) iz Teorema 1 slijedi $A \geq 0$, a da $K = 0$ povlači $9D = 16r \cdot A^2 = \frac{4}{3}(A - p^2) \cdot A^2$ po formuli (36) iz Teorema 1. Neka je $P(x_e) = 0$ i $K = 0$. Onda je ili 1°($D = 0$ i $r = 0$ i $A > 0$) i imamo* ***prvi*** *ili* ***treći slučaj****, ili 2°($D = 0$ i $r \neq 0$ i $A = 0$) ili 3°($D = 0$ i $r = A = 0$). Slučaj 2° je slučaj trostruke realne nultočke po Propoziciji 4. U tom slučaju je, opet po Propoziciji 4, $D_d = 0$ i $B = 0$, a kako je $A = p^2 + 12r$, to $A = 0$ povlači $r = -\frac{1}{12}p^2 < 0$, i time $p \neq 0$. Osim toga iz $D_d = 0$ slijedi $8p^3 = -27q^2$ pa je $p < 0$, tj. $N > 0$. Kanonski oblik polinoma $S(t)$ za slučaj trostruke realne nultočke time glasi ($Q = 8q$),*

$$S(t) = t^4 - \frac{3\sqrt[3]{Q^2}}{8}t^2 + \frac{Q}{8}t - \frac{9\sqrt[3]{Q^4}}{768}.$$

U slučaju 3°, tj. ako je $D = 0$ i $r = A = 0$, tada je $p = q = D_d = 0$, i $B = 0$, pa imamo $P(x) = x^4$ i četverostruku realnu nultočku. Ako je $D_d = 0$, onda za r dovoljno vrijedi $S(t) > 0$ i imamo drugi slučaj. Dakle, ako je $D_d = 0$ moguća su sva tri slučaja, jedino u trećem slučaju ne mogu tada sve realne nultočke biti različite.

Neka je $D_d > 0$. Onda je $N > 0$ i graf ima tri ekstrema i dvije točke infleksije, po jednu između dva susjedna ekstrema. Moguća su sva tri slučaja nultočaka od $P_4(x)$.

Ako je $D_d < 0$, graf polinoma $P(x)$ ima samo jedan ekstrem, nema točke horizontalne infleksije i mogu nastupiti samo prvi i drugi slučaj. Dvije točke infleksije pojavljuju se onda i samo onda kada je $N > 0$, obje desno od ekstrema ako je $Q > 0$ i obje lijevo ako je $Q < 0$. Ako je $D_d < 0$ i $N = 0$, imamo slučaj točke dodira višeg reda u $t = 0$ i kanonski oblik polinoma $S(t)$ tada glasi $S(t) = t^4 + qt + r$. Razmotrimo pobliže treći, realni slučaj. Po Rolleovom teoremu $P'(x)$ tada ima tri realne nultočke, a $P'(x)$ dvije realne nultočke. Ako $P(x)$ ima sve realne nultočke i kratnost svake je najviše dva, onda opet po Rolleovom teoremu $P'(x)$ ima tri realne različite i prema tome jednostruke (proste) nultočke pa je $D_d > 0$, a $P'(x)$ dvije realne različite i proste nultočke. Dakle, graf od $P(x)$ ima tri različita ekstrema i dvije različite točke kose infleksije između dva susjedna ekstrema. Po formuli (16) je tada $N > 0$. Ako $P(x)$ ima sve realne nultočke i jednu točno trostruku nultočku, opet po Rolleovom teoremu, $P'(x)$ ima sve realne nultočke, i to jednu kratnosti jedan, koja je ekstrem i jednu kratnosti dva, koja je točka horizontalne infleksije i stoga vrijedi $D_d = 0$. Ako $P(x)$ ima jednu četverostruku realnu nultočku, ona je ekstrem. Tada $P'(x)$ ima jednu trostruku realnu nultočku pa je $D_d = 0$. Po formuli (16) sada je $N = 0$. Dakle, ako $P(x)$ ima sve realne nultočke i jednu barem trostruku nultočku, onda $P(x)$ ima jedan ekstrem i $D_d = 0$. Vidimo da $P'(x)$ ima u trećem slučaju uvijek tri realne nultočke, pa vrijedi $D_d \geq 0$ što povlači, po formuli (55), $N \geq 0$. Iz analize slijedi da u trećem slučaju $D_d = 0$ onda i samo onda kada $P(x)$ ima trostruku ili četverostruku realnu nultočku, a $N = 0$ onda i samo onda kada je $P(x) = (x - x_0)^4$.

U slučaju $q = 0$, **graf bikvadratne funkcije** $P_b(x) = x^4 + px^2 + r$ je zbog parnosti funkcije, simetričan s obzirom na y-os i ovisi o p. Ako je $p \geq 0$, graf ima jedan ekstrem, i to lokalni minimum u $x = 0$ i nema točaka infleksije. Ako je $p < 0$, graf ima tri ekstrema (dva lokalna minimuma i jedan lokalni maksimum u $x = 0$) i dvije točke infleksije. Pri tom se između dvaju susjednih ekstrema, od kojih je jedan lokalni minimum, a drugi lokalni maksimum, nalazi jedna točka infleksije.

Literatura

[1] DEMIDOVICH B. P., MARON I. A., *Computational Mathematics*, Mir, 1976.

[2] FADDEEV D. K., SOMINSKIJ I. S., *Sbornik zadač po vissšej algebre*, Nauka, Moskva, 1968.

[3] RADIĆ M., *Rješivost algebarskih jednadžbi*, Zagreb, 1966.

[4] REDEI L., *Algebra 1.*, Akademiai Kiado, Budapest, 1967.

[5] VIHER R. *Posljedice Descartesove metode za faktorizaciju polinoma 4. stupnja*, KoG 5, (2000/01), 11-15.

[6] WAERDEN B. L. VAN DER, *Algebra I i II*, Springer-Verlag, 1967.

[7] WEBER H., *Lehrbuch der Algebra, I*, Vieweg & Sohn, 1912.

Predrag Lončar

Geotehnički fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Hallerova aleja 7, 42000 Varaždin

e-mail: ivan.loncar1@vz.htnet.hr