Wissenschaftlicher Originalbeitrag
Angenommen 28.06.1996

VLASTA SZIROVICZA

Die Fußpunktkurven der Kegelschnitte in der isotropen Ebene

Pedal Curves of Conics in an Isotropic Plane
ABSTRACT
First we introduce the notion of pedal curves in isotropic plane I_2. Then we give a classification of curves of order 4, which are pedals of conics given by their normal forms with respect to the group $\mathcal{G}_5$ of isotropic similarities. Finally, we give a relationship between the pedals and the quadratic inversion for these curves in isotropic plane.

Key Words
geometry, isotropic plane, pedal curves, quadratic inversion

Nožišne krivulje konika u izotropnoj ravnini
SAŽETAK
Za konike izotropne ravnine čije su jednadžbe dane u normalnom obliku s obzirom na grupu $\mathcal{G}_5$ izotropnih gibanja izvedene su jednadžbe nožišnih krivulja. Dokazano je da su to krivulje 4. reda, te je uspostavljena veza između njih i krivulja 4. reda dobivenih kvadratnom inverzijom.

Ključne riječi
geometrija, izotropna ravnina, nožišna krivulja, kvadratna inverzija

Eine isotrope Ebene ist eine reelle affine Ebene $A_2(\mathscr{R})$, die über eine Absolutfigur $\{f,F\}$ - bestehend aus einen Geraden f und einem mit f inzidenten Punkt F — metrisiert wird. Alle Transformationen der Gestalt

$$\bar{x} = c_1 + c_2x$$
$$\bar{y} = c_3 + c_4x + c_5y$$

bilden die fünfparametrige allgemeine isotrope Ähnlichkeitsgruppe $\mathcal{G}_5$ der isotropen Ebene [6].
Bezüglich der allgemeinen isotropen Ähnlichkeitsgruppe $\mathcal{G}_5$ existieren in der isotropen Ebene sieben Typen von Kegelschnitten, die durch nachstehende Normalformen beschrieben werden können:

Ellipse	$x^2 + y^2 = 1$	(1)
Imaginäre Ellipse	$x^2 + y^2 = -1$	(2)
Hyperbel 1. Art	$x^2 - y^2 = 1$	(3)
Hyperbel 2. Art	$x^2 - y^2 = -1$	(4)
Parabel	$y^2 = x$	(5)
Spezielle Hyperbel	$xy = 1$	(6)
Isotroper Kreis	$y = x^2$	(7)

Ein isotroper Kreis ist ein Kegelschnitt, der im Punkt F die absolute Gerade f als Tangente besitzt.

BEMERKUNG. In der isotropen Ebene existieren drei Arten von Hyperbeln in Bezug auf die Lage des absoluten Punktes F zu den Schnittpunkten der Hyperbeln mit der absoluten Geraden. Sind die Tangenten, die von F an die Hyperbel gelegt werden können reell, so liefert dies eine Hyperbel 1. Art; sind diese Tangenten konjugiert-komplex, dann ist die Hyperbel 2. Art; fällt der Punkt F in einen der Schnittpunkte der Hyperbel mit der Geraden f, dann spricht man von einer speziellen Hyperbel. Der letzte Kegelschnitt ist ein isotropes Analogon zur gleichseitigen Hyperbel der euklidischen Ebene [8].

Für die weiteren Betrachtungen sind die folgenden Überlegungen wichtig:

1. Für einen beliebigen Kegelschnitt kann man die Gleichung seiner polaren Kurve in Bezug auf einen isotropen Kreis (7) bestimmen.
Nehmen wir eine Ellipse mit der Gleichung

$$k^*(x,y) \equiv x^2 + y^2 = 1 \tag{8}$$

Die Gleichung ihrer polaren Kurve bezüglich (7) wird auf folgende Weise bestimmt:
Die Determinante der algebraischen Komplementen der Kurve (7) sind die Koeffizienten der zu ihr adjungierten Kurve: $A_1 = -0.25$, $E_1 = 0.5$. Damit lautet ihre Gleichung in Geradenkoordinaten

$$c(u,v) \equiv u^2 - 4v = 0. \tag{9}$$

Der Zusammenhang zwischen dem Pol und seiner Polaren bezüglich einer Kurve ist durch die Relation

$$x:y:1 = (A_1u + B_1v + D_1):(B_1u + C_1v + E_1):(D_1u + E_1v + F_1)$$

gegeben. Im Fall des Kreises (7) lautet diese Formel

$$x = -\frac{u}{2v}, \quad y = \frac{1}{v}. \tag{10}$$

Setzt man (10) in (8) ein, so folgt

$$k(u,v) \equiv u^2 - 4v^2 + 4 = 0 \tag{11}$$

als Gleichung jenes Kegelschnittes, der polar zur Ellipse (8) bezüglich des isotropen Kreises (7) ist. Wir bemerken, daß dies eine Hyperbel 2. Art ist.

2. Nun sei in der isotropen Ebene I_2 ein isotroper Kreis durch die Gleichung $x^2 - y = 0$ gegeben. Ist eine Gerade $y = kx + l$ Tangente dieses Kreises, so muß in der Schnittbedingung

$$x_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + l} \tag{12}$$

die Diskriminante verschwinden. Dies liefert einerseits die Berührbedingung

$$k^2 = -4l \tag{13}$$

und anderseits die Koordinate $x_0 = 0.5k$ für den Berührungspunkt $L(x_0, y_0)$. Weiter findet man mittels (13) und der Kreisgleichung $0.25k^2 - y = 0$,
also $4y = k^2 = -4l$, woraus $y_0 = -l$ folgt.

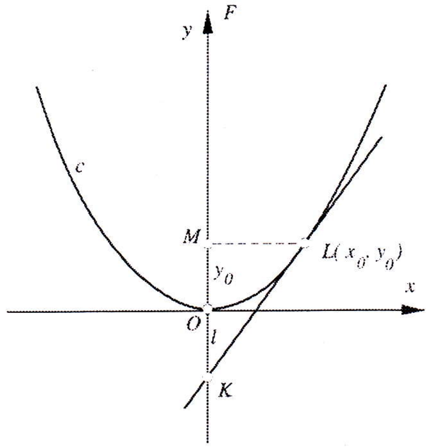

Fig.1.

Der Berührungspunkt L in Fig.1 besitzt somit die Koordinaten $L(0.5k,-l)$. Für den Schnittpunkt K stellt sich $K(0,l)$ ein.

3. In der euklidischen Ebene ist die Fußpunktkurve eines beliebigen Kegelschnittes bezüglich eines Pols die Menge der Fußpunkte der Normalen, die durch den Pol auf die Tangenten dieses Kegelschnittes gelegt werden können.
In der isotropen Ebene enthalten alle isotropen Normalen die auf die Tangenten eines Kegelschnittes gelegt werden, den absoluten Punkt F, d.h. alle Fußpunktkurven sind zu isotropen Geraden ausgeartet.
Wir schlagen deshalb einen anderen Weg ein um den Begriff der Fußpunktkurve in die isotrope Ebene zu übertragen. Die Kurve 2. Klasse (11) besitzt in Punktkoordinaten die Gleichung

$$k(x,y) \equiv 4x^2 - y^2 + 1 = 0 \tag{14}$$

Die Gleichung eines parallelen Tangentenpaars der Kurve (14) lautet nach [1]

$$y = kx \pm \sqrt{-\frac{k^2}{4} + 1}. \tag{15}$$

Um für eine beliebige Tangente (15) des Kegelschnittes (14) eindeutig eine isotrope Ersatz-Normale zu definieren, bestimmt man zu dieser Tangente die parallele Tangente des isotropen Kreises (7). Die Gleichung dieser Tangente hat wegen (13) die Form

$$y = kx - \frac{k^2}{4}. \tag{16}$$

Durch ihren Berührungspunkt $L(0.5k,-l)$ legen wir die isotrope Normale, die dann die Gleichung

$$x = \frac{k}{2} \tag{17}$$

besitzt.

Den Schnittpunkt der Geraden (15) und (17) definieren wir als Normalenfußpunkt. Da die beiden Gleichungen von einem Parameter k abhängig sind, legt die Schnittpunktsmenge die gesuchte ***Fußpunktkurve des Kegelschnittes*** (14) in der isotropen Ebene fest. Man findet ihre Normalform zû

$$k_N \equiv 4x^4 + x^2 + y^2 - 4x^2y - 1 = 0. \tag{18}$$

Da die angegebene Erzeugung der Fußpunktkurve von der Wahl des Kreises (7) abhängt, werden wir diesen Kreis als ***Grundkreis der Fußpunkterzeugung*** bezeichnen. Daraus folgt der

Satz 1
Die Fußpunktkurve einer Ellipse (11) bezüglich des Grundkreises der Fußpunkterzeugung ist eine algebraische Kurve 4. Ordnung (18).

Diese Kurve k_N ist in Fig. 2. die Fußpunktkurve des Kegelschnittes k bezüglich des Grundkreises c.

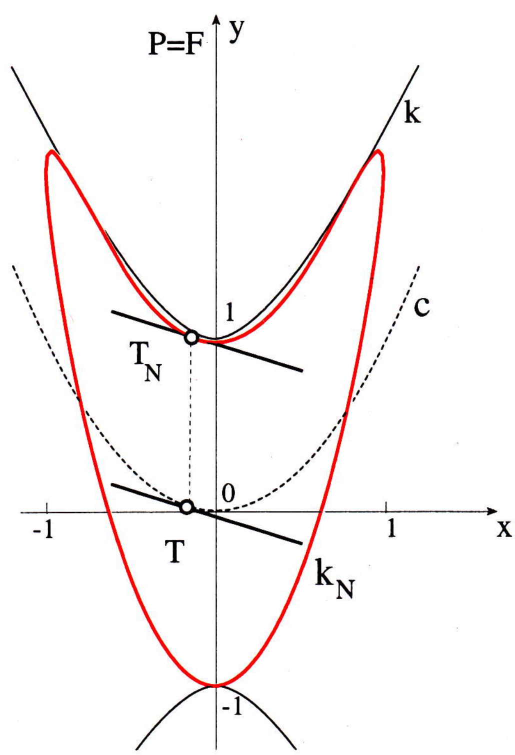

Fig. 2.

Auf dieselbe Weise bestimmt man die Gleichung der Fußpunktkurve jeder der Kegelschnitte (1) - (6), was in der folgenden Übersicht zusammengestellt ist:

k^*	k	k_N	
Ellipse	*Hyperbel 2.Art*		
$x^2+y^2-1=0$	$4x^2-y^2+1=0$	$4x^4+x^2+y^2-4x^2y-1=0$	(19)
Imaginäre Ellipse	*Hyperbel 1.Art*		
$x^2+y^2+1=0$	$4x^2+y^2+1=0$	$4x^4+x^2+y^2-4x^2y+1=0$	(20)
Hyperbel 1.Art	*Hyperbel 1.Art*		
$x^2-y^2-1=0$	$4x^2-y^2-1=0$	$4x^4-x^2+y^2-4x^2y+1=0$	(21)
Hyperbel 2.Art	*Ellipse*		
$x^2-y^2+1=0$	$4x^2+y^2-1=0$	$4x^4-x^2+y^2-4x^2y-1=0$	(22)
Parabel	Spezielle Hyperbel		
$y^2=x$	$8xy+1=0$	$4x^4+y^2-4x^2y+x=0$	(23)

4. Die Gleichung der quadratischen Inversion in der isotropen Ebene bezüglich eines isotropen Kreises lautet nach [4]

$$\bar{x}=x$$
$$\bar{y}=2x^2-y. \qquad (24)$$

Die inverse Kurve k_C zu (8) gewinnt man mittels (24) zu

$$k_C \quad \equiv \quad 4x^4+x^2+y^2-4x^2y-1=0 \qquad (25)$$

Offensichtlich ist (25) mit der Gleichung (18) identisch. Dasselbe Verfahren kann auch für die anderen Kegelschnitte durchgeführt werden. Als Hauptresultat ergibt sich der folgende Satz, der aus der euklidischen, aber auch aus der hyperbolischen Ebene ([9] und [7]) bekannt ist:

Satz 2

Die Fußpunktkurve k_N eines beliebigen Kegelschnittes k in der isotropen Ebene bezüglich des absoluten Punktes F als Pol und des Grundkreises c der Fußpunktserzeugung ist jener Kurve k_c identisch, die mittels der quadratischen Inversion eines Kegelschnittes k^* bezüglich desselben Pols und desselben Inversiongrundkreises c erzeugbar ist. Dabei sind die Kegelschnitte k und k^* polar in Bezug auf den Kreis c; die Kurve k_c ist das inverse Bild von k^* und k_N ist die Fußpunktkurve von k (Fig. 3).

Diesen Zusammenhang könnte man auf Kurven höherer Ordnung verallgemeinern, wie dies aus der euklidischen Ebene bekannt ist.

* Die Abbildungen wurden mittels einem PC486 und dem Programm Autodesk AutoCAD for MS Windows Release 12 und Wolfram Research Mathematica for Windows Release 2.2 gezeichnet.

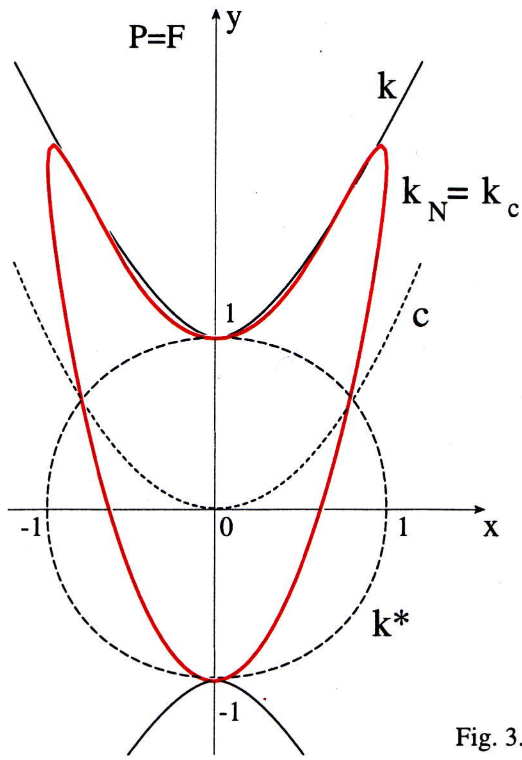

Fig. 3.

LITERATUR

[1] CESAREC, R.: *Analitička geometrija I*, Zagreb, 1957,

[2] FLADT, K.: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Frankfurt/Main, 1962,

[3] МАКАРОВА, Н. М.: Кривые второго порядка в плоской параболической геометрии *»Вопросй дифференциальной и неевклидовой геометрии«*, Ученые записки МГПИ им. Ленина (1963), 222-251.

[4] PALMAN, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, Rad JAZU 444(1989), 37-46,

[5] PALMAN, D.: Vollständig zirkuläre Kurven 4. Ordnung der isotropen Ebene, Rad HAZU [456] 10 (1991), 15-32,

[6] SACHS, H.: *Ebene isotrope Geometrie*, Braunschweig-Wiesbaden, 1987,

[7] SZIROVICZA, V.: Vollkommen zirkuläre Fusspunktskurven der hyperbolischen Ebene, Rad JAZU [408] 3 (1984), 17-25,

[8] ŠĆURIĆ-ČUDOVAN, V.: Ein Kennzeichnung der speziellen Hyperbel der isotropen Ebene, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien [201] (1992),111-115,

[9] WIELEITNER, H.: *Spezielle ebene Kurven*, Leipzig, 1908.

Mr. sc. Vlasta Szirovicza
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
10000 Zagreb, Kačićeva 26,
tel.: 418-897
fax: 45-61-206
e-mail: szvlasta@master.grad.hr