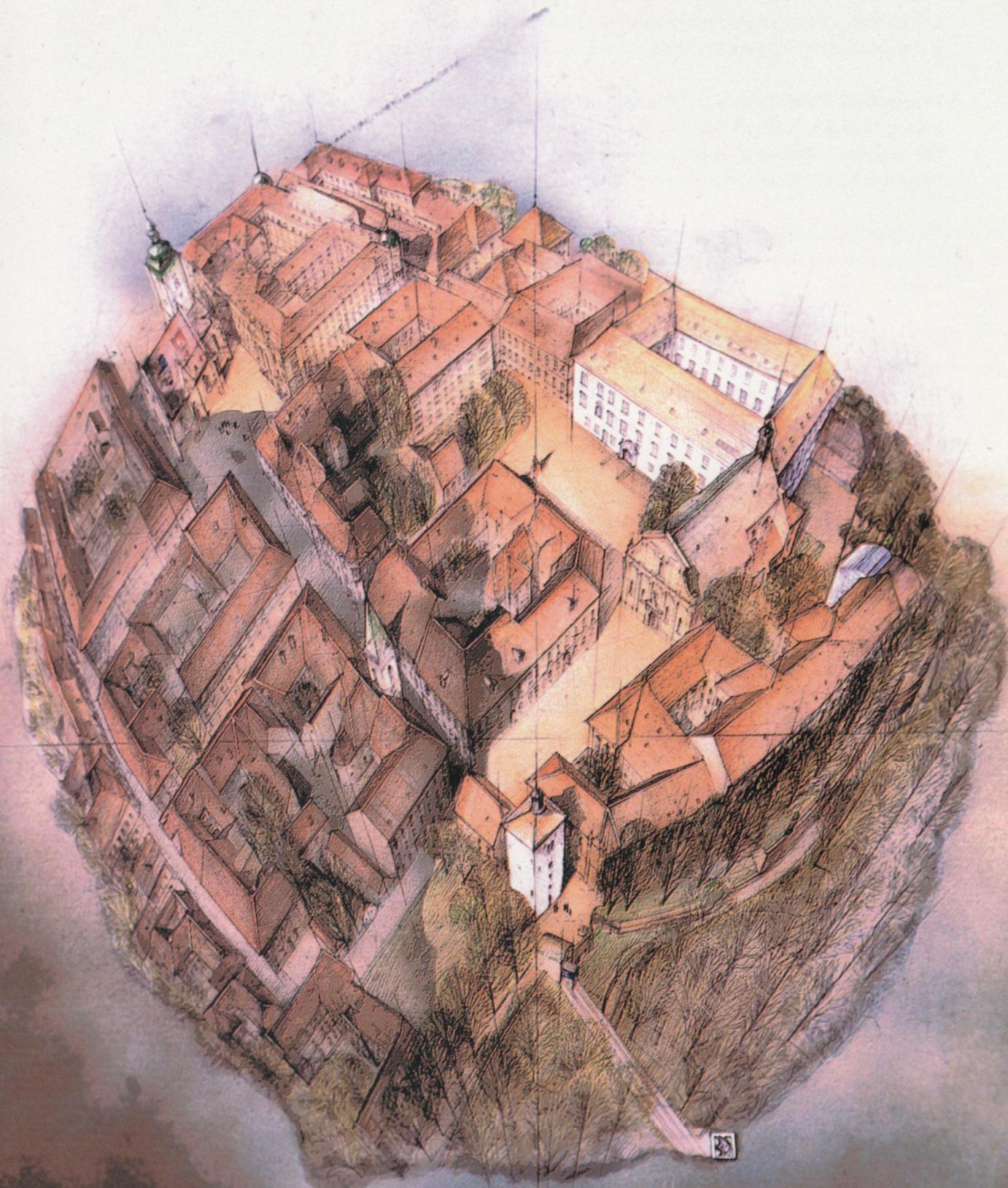


KoG

ISSN 1331-1611

BROJ 4
Zagreb, 1999.
Cijena 50 kn

ZNANSTVENO-STRUČNO-INFORMATIVNI ČASOPIS
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA KONSTRUKTIVNU GEOMETRIJU I KOMPЈUTORSKU GRAFIKU



UPUTE SURADNICIMA

“KoG” je časopis koji objavljuje znanstvene i stručne radove te ostale pri-loge iz područja konstruktivne geometrije i računalne grafike

ZNANSTVENI I STRUČNI ČLANCI

- Izvorni znanstveni rad** sadrži neobjavljene rezultate izvornih znanstvenih istraživanja, a znanstvene su informacije izložene tako da se točnost analiza i izvoda, na kojima se rezultati temelje, može provjeriti.
- Prethodno priopćenje** znanstveni je rad što sadrži jedan ili više novih znanstvenih podataka priroda kojih zahtijeva hitno objavljivanje. Ne mora nužno imati dovoljno pojedinosti za ponavljanje i provjeru rezultata.
- Pregledni rad** znanstveni je rad što sadrži izvoran, sažet i kritički prikaz jednog područja ili njegova dijela u kojem autor aktivno djeluje. Mora biti istaknuta uloga autorova izvornog doprinosa u tom području s obzirom na već publicirane radove te pregled tih radova.
- Stručni rad** sadrži korisne priloge iz područja struke koji nisu vezani uz izvorna autorova istraživanja, a iznesena zapažanja ne moraju biti novost u struci.

Rad, duljine do 30.000 znakova, mora biti neobjavljen i ne smije se istodobno ponuditi drugom časopisu. Autor za svoj rad predlaže kategoriju, a konačnu odluku o svrstavanju donosi Izdavački savjet na temelju zaključaka recenzentata.

Rad može biti napisan na hrvatskom, engleskom ili njemačkom jeziku. Autor predaje tekst na jeziku koji odabere, te sažetak na hrvatskom i engleskom jeziku. Sažetak opsegom ne bi trebao biti veći od 600 znakova. Naslov članka mora biti sažet i informativan. Citiranu literaturu treba poredati po abecednom redu prezimena autora. Radovi iz časopisa citiraju se: redni broj, prezime i inicijal imena autora ili skupine autora, naslov rada, naziv časopisa, volumen, godina u zagradi, broj časopisa u godini, broj početne i završne stranice rada. Knjige se citiraju: redni broj, prezime i inicijal imena autora ili skupine autora, naslov knjige, nakladnik, mjesto izdanja, godina.

Članci trebaju biti dopunjeni kontaktnim podatcima o autoru: ime i prezime, stručno zvanje, znanstveni stupanj, naziv poduzeća ili ustanove u kojoj radi, adresa ustanove i kuće, brojevi telefona i telefaksa, e-mail adresa, broj ţiro-računa.

O prihvatanju ili odbijanju rada autor će biti obaviješten.

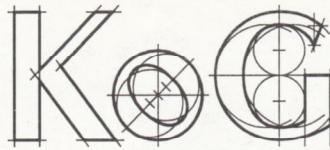
OSTALI PRILOZI

To su stručni osvrti i prikazi različitih sadržaja iz širokog područja geometrije i grafike, vijesti i izvješća o znanstveno-stručnim skupovima, prikazi knjiga, časopisa, studentskih radova, softvera i hardvera, koji se objavljaju u rubrikama “Geometrija i grafika” i “Vijesti, izvješća, prikazi”.

Rukopisi i svi prilozi predaju se uredništvu.

Za znanstvene i stručne radove potrebna su tri ispisa, a za ostale samo jedan. Prihvaćene radove autori dostavljaju elektronskom poštom kao ASCII datoteke. Preporučuje se LaTeX format.

Podrobnije upute dobivaju se u uredništvu.



ISSN 1331-1611

Znanstveno-stručno-informativni časopis Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku

Osnivač i izdavač

Hrvatsko društvo za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku

Izdavački savjet

Sonja Gorjanc, Miljenko Lapaine, Vlasta Szirovicza

Uredništvo

Miroslav Ambruš-Kiš, Jelena Beban-Brkić, Krešimir Fresl, Sonja Gorjanc, Miljenko Lapaine, Lidija Pletenac

Glavna urednica

Sonja Gorjanc

Lektorica

Branka Makovec

Grafičko oblikovanje

Miroslav Ambruš-Kiš

Grafička priprema

Krešimir Fresl (LaTeX)
Miroslav Ambruš-Kiš

Naslovna stranica

Branka Kaminski
Gradec, Zagreb, 1989., crtež, 70x50 cm

Posljednja stranica korica

Danijel Markovica
Zagreb, diplomski rad izrađen u Zavodu za kartografiju Geodetskog fakulteta, 1998., AutoCAD Map

Tisk

“O-tisak” d.o.o., Zagreb

Adresa uredništva

Avenija V. Holjevca 15
10010 Zagreb, Hrvatska
telefon: 01 66 70 509
telefaks: 01 66 00 642
e-mail: kog@master.grad.hr

KoG na Internetu

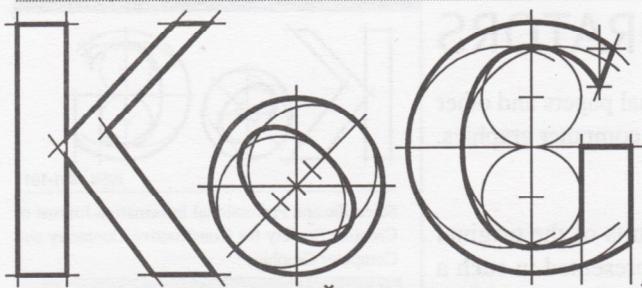
<http://www.mzt.hr/mzt/hrv/informacije/udruge/hdk/hdk.htm>

Naklada

250

Izlazi jednom na godinu

Izlazak ovoga broja materijalno je pomoglo Ministarstvo znanosti i tehnologije RH



ZNANSTVENO-STRUČNO-INFORMATIVNI ČASOPIS
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA KONSTRUKTIVNU GEOMETRIJU I KOMPЈUTORSKU GRAFIKU

SADRŽAJ

IZVORNI ZNANSTVENI RADOVI

<i>Hellmuth Stachel:</i> O tetraedrima u dodekaedru	5
<i>Vlasta Szirovicza, Ana Sliepčević:</i> Analogon Czuberovog teorema u izotropnoj ravnini	11
<i>Daniela Velichová:</i> Gustoća raspodjele unutarnjih točaka u modeliranju hiperdijelova	15
<i>Gert Meirl:</i> Zaključni teoremi o trokutu u području Wallace-Simsonovog teorema	23

STRUČNI RADOVI

<i>Miljenko Lapaine:</i> Pramen konika zadan pomoću jedne dvostrukе i dviju jednostrukih realnih točaka	27
<i>Dagmar Szarková:</i> Novi pristup numeričkom računanju točaka na lukovima dodira ovojnica helikoidne plohe ..	33
<i>Vinko Mandekić-Botteri:</i> O konstrukcijama zlatnih trokuta	39

GEOMETRIJA I GRAFIKA

<i>Miljenko Lapaine:</i> Primjene AutoCAD Mapa	43
--	----

VIJESTI, IZVJEŠĆA, PRIKAZI

GUIDE TO THE COLLABORATORS

“KoG” is the journal publishing scientific and professional papers and other contributions from the field of constructive geometry and computer graphics.

SCIENTIFIC AND PROFESSIONAL PAPERS

- 1. Original scientific paper** contains unpublished results of the original scientific research, and the scientific information is presented in such a way that it permits the exactness of analysis and derivations the results are based upon to be checked.
- 2. Preliminary communication** is a scientific work containing one or more new scientific data, the nature of which requests urgent publishing. It need not necessarily convey sufficient number of details for repetition or checking of results.
- 3. Review** is a scientific paper containing original, condensed and critical presentation of a field or its segment in which the author participates actively. The role of the author's original contribution in this field must be pointed out as related to already published works, accompanied by the survey of these works.
- 4. Professional paper** contains useful contributions from the professional field which are not bound to the original research of the author, and the observations presented need not be a novelty in the profession.

The paper containing 30.000 characters should be unpublished and it mustn't be offered to some other journal at the same time. The author suggests for his/her paper the category, and the final decision about how it is going to be classified is reached by the Publishing Council on the basis of the conclusions made by reviewers.

The paper can be written in Croatian, English or German. Author hands in the text in the language he/she has chosen, and the abstract in Croatian and English. The abstract should not exceed 600 characters. Paper title should be concise and informative. The reference should be listed in alphabetical order by author's family name. The papers from journals are to be cited as follows: number, author's or group of author's last name, initials, title of reference article, name of journal, volume, the year of publication in parenthesis, number of journal in the year, number of the first and end page of the paper. Books are cited as follows: number, author's last name, author's initials, title of the book, publisher, city, year of publishing.

The articles should be supplemented by the notes to authors: name, last name, title, scientific degree, name of the firm or institution he/she works at, home and institution address, phone and fax numbers, e-mail, number of bank account.

Author will be notified about his paper being either accepted or rejected.

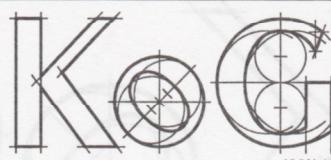
OTHER ATTACHMENTS

These are professional reviews and presentations of various contents from the wider area of geometry and graphics, news and reports about scientific and professional gatherings, presentations of books, journals, student papers, softwares and hardwares published in the departments on “Geometry and Graphics” and “News, reports and presentations”.

Manuscripts and all attachments are to be sent to the Editorial. For scientific and professional papers three copies are needed, for all other only one is enough.

Accepted papers are to be sent by authors by electronic mail as ASCII files. LaTeX format is recommended.

More detailed instructions are available from the Editorial.



ISSN 1331-1611

Scientific and Professional Information Journal of Croatian Society for Constructive Geometry and Computer Graphics

Founder and Publisher

Croatian Society for Constructive Geometry nad Computer Graphics

Board of Trustees

Sonja Gorjanc, Miljenko Lapaine, Vlasta Szirovicza

Editorial Board

Miroslav Ambruš-Kiš, Jelena Beban-Brkić, Krešimir Fresl, Sonja Gorjanc, Miljenko Lapaine, Lidija Pletenac

Editor-in-Chief

Sonja Gorjanc

Design

Miroslav Ambruš-Kiš

Layout

Krešimir Fresl (LaTeX)
Miroslav Ambruš-Kiš

Front Page Illustration

Branka Kaminski

Gradec, Zagreb, 1989., drawing, 70x50 cm

Back Cover Illustration

Danijel Markovica

Zagreb, graduation thesis written in the Department for cartography at the Faculty of Geodesy, 1998., AutoCAD Map

Print

“O-tisak” d.o.o., Zagreb

Editorial Address

Avenija V. Holjevca 15
10010 Zagreb, CROATIA
phone: + 385 1 66 70 509
fax: + 385 1 66 00 642
e-mail: kog@master.grad.hr

KoG on Internet

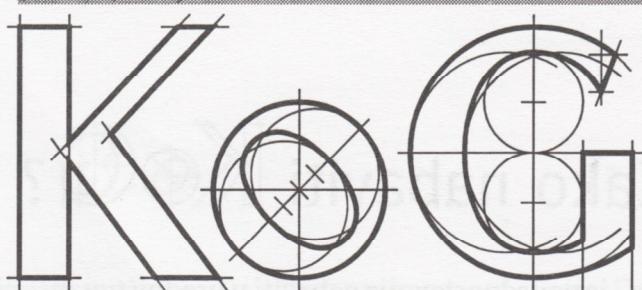
<http://www.mzt.hr/mzt/hr/informacije/udruge/hdk/hdk.htm>

Circulation

250

Published annually

This issue has been financially supported by Croatian Ministry of Science and Technology



SCIENTIFIC AND PROFESSIONAL INFORMATION JOURNAL OF
CROATIAN SOCIETY FOR CONSTRUCTIVE GEOMETRY AND COMPUTER GRAPHICS

CONTENTS

ORIGINAL SCIENTIFIC PAPERS

<i>Hellmuth Stachel</i> : On the Tetrahedra in the Dodecahedron	5
<i>Vlasta Szirovicza, Ana Sliepčević</i> : The Analog of the Czuber's Theorem in the Isotropic Plane	11
<i>Daniela Velichová</i> : Density of Interior Points Distribution in Modelling of Hyperpatches	15
<i>Gert Meirl</i> : Closure Theorems at Triangles in the Sphere of Wallace-Simson Theorem	23

PROFESSIONAL PAPERS

<i>Miljenko Lapaine</i> : Conic Section Pencil Given by a Double Point and Two Single Real Points	27
<i>Dagmar Szarková</i> : A New Approach to the Computer Aided Calculation of Points on the Envelope Helical Surface Characteristics	33
<i>Vinko Mandekić-Botteri</i> : On the Constructions of the Golden Triangles	39

GEOMETRY AND GRAPHICS

<i>Miljenko Lapaine</i> : The Applications of AutoCAD Map	43
---	----

NEWS, REPORTS, CONTRIBUTIONS



Kako nabaviti KoG?

KoG je najjednostavnije nabaviti u uredništvu časopisa

(Vlasta Szirovicza)

Građevinski fakultet

Av. V. Holjevca 15, 10 010 Zagreb, Hrvatska

Tel: 01 66 70 509

Fax: 01 66 00 642

E-mail: kog@master.grad.hr

Za Hrvatsku je cijena primjerka 50 kn + 10 kn za poštarinu.

Nakon uplate na žiro račun broj

30105-678-94594

poslat ćemo časopis na Vašu adresu.

Ako Vas zanima tematika časopisa i rad našega društva, preporučamo Vam da postanete članom HDKGK (godišnja članarina je 100 kn). Za člane država časopis je besplatan.

How to get KoG?

The easiest way to get your copy of KoG is by contacting the editor's office.

(Vlasta Szirovicza)

Faculty of Civil Engineering

Av. V. Holjevca 15, 10 010 Zagreb, Croatia

Tel: (385 1) 66 70 509

Fax: (385 1) 66 00 642

E-mail: kog@master.grad.hr

The price of the issue is \$10 + mailing expenses \$5 for European countries and \$10 for other parts of the world.

Original scientific paper

Accepted 15. 11. 1999.

On the Tetrahedra in the Dodecahedron

Dedicated to Prof. Gerhard GEISE at the occasion of his 70th birthday

O tetraedrima u dodekaedru

SAŽETAK

60 bridova od 10 tetraedara upisanih u pravilan dodekaedar čine tzv. GRÜNBAUMOVU mrežu. Poznato je da je ta struktura fleksibilna. Postoje jednoparametarska gibanja koja čuvaju simetriju s obzirom na os stranice ili na os koja prolazi vrhom. Rad se bavi analitičkim reprezentacijama takvih gibanja. Osim toga dokazano je da se oba gibanja mogu spojiti u dvoparametarska gibanja koja ne čuvaju simetriju.

On the Tetrahedra in the Dodecahedron

ABSTRACT

The 60 edges of the ten tetrahedra inscribed in a regular pentagondodecahedron form the so-called GRÜNBAUM framework. It is already known that this structure is flexible. There are one-parameter motions which preserve the symmetry with respect either to a face axis or to a vertex axis. The paper treats analytical representations of these motions. Furthermore it is proved that both motions can blend into two-parametric motions which do not preserve any symmetry.

MSC 1994: 53A17, 51M20

right vertices of \mathbf{C}_i form a *right* tetrahedron \mathbf{R}_i , the left vertices a *left* tetrahedron \mathbf{L}_i . And of course both \mathbf{L}_i and \mathbf{R}_i are inscribed in \mathbf{C}_i and therefore in \mathbf{D} .

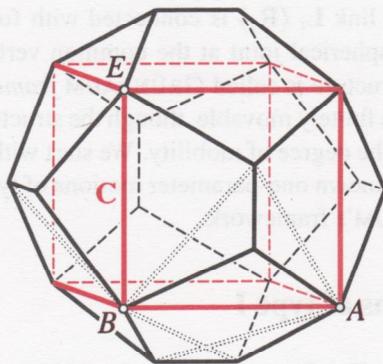


Fig. 1: Dodecahedron \mathbf{D} with one inscribed cube \mathbf{C} . Points A and E are *right* vertices, B is a *left* vertex of \mathbf{C} .

Another way to identify two vertices AE of \mathbf{D} as endpoints of an edge of any inscribed tetrahedron is as follows: There must be a path from A to E along three edges of \mathbf{D} – via the 'roof' displayed in Fig. 2. If at the first crossing point you take the *right* edge and at the second vertex the left one, then AE belongs to a *right* tetrahedron. The left choice at the first vertex and the right one afterwards results in an edge of a *left* tetrahedron.

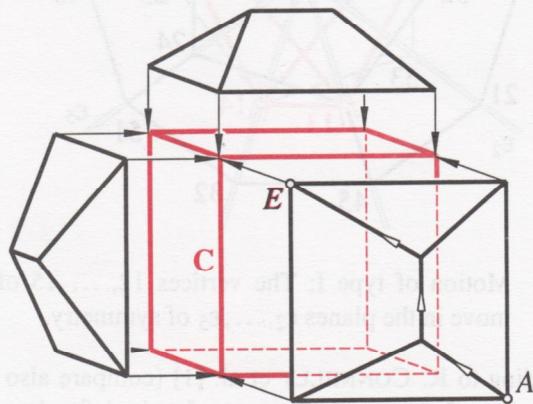


Fig. 2: Constructing a dodecahedron \mathbf{D} by adding roofs on a cube \mathbf{C} .

Each vertex of \mathbf{D} is a left vertex of any inscribed cube \mathbf{C}_i , therefore vertex of \mathbf{L}_i and at the same time vertex of any

1 Introduction

Since ancient times it is known that with the vertices of a regular pentagondodecahedron \mathbf{D} one can build five cubes $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_5$. It was EUCLID's strategy (cf. [3], p. 69) for constructing a dodecahedron by adding 'roofs' to each face of a cube (see Fig. 2). The edges of such an inscribed cube \mathbf{C}_i are diagonals of the faces of \mathbf{D} . With respect to \mathbf{D} we can distinguish between right and left vertices of \mathbf{C}_i depending on whether the edges through any vertex A are the right or the left diagonals of \mathbf{D} in the faces through A , if seen from outside (see Fig. 1). For each edge of \mathbf{C}_i the two endpoints A, B are of different type. So, the

right tetrahedron \mathbf{R}_j . We have $i \neq j$ as \mathbf{L}_i and \mathbf{R}_i are complementary tetrahedra of the cube \mathbf{C}_i . In the sequel we denote each vertex of \mathbf{D} by the ordered pair ij of different indices of the left and the right tetrahedron meeting there.

Suppose the tetrahedra are solids. Then the union of the right tetrahedra as well as the union of the left ones are well known stellated icosahedra (see [2], note cover page of [8]). They are mirror images from each other which surprisingly share all vertices and all oriented planes spanned by their faces (see [7]). Also the union of all ten tetrahedra is a stellated icosahedron.

Let us now focus on wire-frame models of the tetrahedra: The ten tetrahedra can be seen as the links of a kinematic chain. Each link \mathbf{L}_i (\mathbf{R}_j) is connected with four \mathbf{R}_j (\mathbf{L}_i), $i \neq j$, by a spherical joint at the common vertex ij . Due to [4] this structure is called GRÜNBAAUM framework. Surprisingly it is finitely movable, though the structure formula gives -6 as the degree of mobility. We start with representing the well known one-parameter motions of types I and II of GRÜNBAAUM's framework.

2 Motions of type I

Theorem 1 (R. CONNELLY et al., 1991): *For each face axis f of the regular dodecahedron \mathbf{D} there is a one-parameter motion of GRÜNBAAUM's framework preserving the five-fold symmetry about f .*

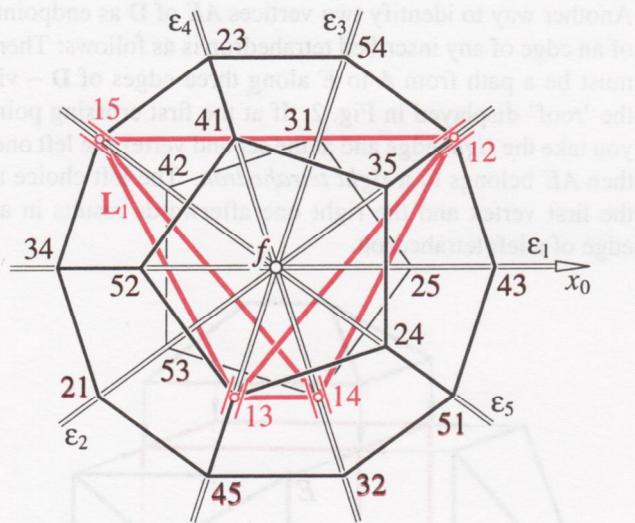


Fig. 3: Motion of type I: The vertices $12, \dots, 15$ of \mathbf{L}_1 move in the planes $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5$ of symmetry.

According to R. CONNELLY et al. [1] (compare also [6]) the motion of one tetrahedron, say \mathbf{L}_1 , is defined as follows: Let $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ be the five planes of symmetry through the face axis f (see view in direction of f in Fig. 3). Then the vertices $12, 13, 14, 15$ of \mathbf{L}_1 move within $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$, respectively. The trivial translation in direction of f can be ruled out by the additional condition that the center of

\mathbf{L}_1 remains in a plane orthogonal to f . The resulting one-parameter motion of \mathbf{L}_1 turns out to split into two rational motions of order 4. By iterated 72° -rotations about f these motions of \mathbf{L}_1 are transformed into those of $\mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_5$, resp., provided the notation is specified according to Fig. 3. The motions of $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_5$ are obtained by reflecting those of \mathbf{L}_1 in $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$, respectively.

Let (x, y, z) be Cartesian coordinates in the moving frame — attached to \mathbf{L}_1 — and let (x_0, y_0, z_0) be coordinates in the fixed frame. Then we can set up the motion of \mathbf{L}_1 as

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

with an orthogonal matrix (a_{ij}) . For the representation of (a_{ij}) we use quaternions: Each nontrivial homogeneous quadruple (q_0, \dots, q_3) defines an orthogonal matrix according to

$$(a_{ik}) = \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \cdot \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

and vice versa.

With regard to the fixed frame, we specify the z_0 -axis on f and the x_0 -axis in ε_1 . By the condition $w = 0$ the origin of the moving frame remains in the $x_0 y_0$ -plane.

The vertices of the moving tetrahedron \mathbf{L}_1 with edge length $2\sqrt{2}$ can be set up as

$$\begin{aligned} 12 &= (1, -1, -1), & 14 &= (-1, 1, -1), \\ 13 &= (1, 1, 1), & 15 &= (-1, -1, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Now for $j = 2, \dots, 5$ the vertex $1j$ is supposed to move in the plane ε_j of symmetry. According to (1) this results in four linear equations for the coordinates $(u, v, 0)$ of the translation vector and the entries a_{ij} of the orthogonal matrix. Setting

$$s_i := \sin \frac{2i\pi}{5}, \quad c_i := \cos \frac{2i\pi}{5} \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (4)$$

we obtain

$$\begin{aligned} s_2(u + a_{11} - a_{12} - a_{13}) + \\ + c_2(v + a_{21} - a_{22} - a_{23}) &= 0, \\ -s_1(u + a_{11} + a_{12} + a_{13}) + \\ + c_1(v + a_{21} + a_{22} + a_{23}) &= 0, \\ s_1(u - a_{11} + a_{12} - a_{13}) + \\ + c_1(v - a_{21} + a_{22} - a_{23}) &= 0, \\ -s_2(u - a_{11} - a_{12} + a_{13}) + \\ + c_2(v - a_{21} - a_{22} + a_{23}) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

We eliminate u, v by multiplying the equations in (5) either with $-s_1, -s_2, s_2, s_1$ or with $-c_1, c_2, c_2, -c_1$, resp., and summing up. This gives two linear equations

$$\begin{aligned} 4s_1c_1a_{12} + 2c_1a_{21} - a_{23} &= 0 \\ 4s_1c_1a_{11} + 2s_1a_{13} - a_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

when we pay attention to the identities

$$\begin{aligned} 4c_i^2 + 2c_i - 1 &= 0, & c_i^2 + s_i^2 &= 1, \\ s_1c_2 + s_2c_1 &= -s_2, & s_1c_2 - s_2c_1 &= -s_1, \\ s_2 = 2s_1c_1, & & c_1c_2 = -\frac{1}{4}, \\ 4c_1^2(4s_1^2 - 1) &= (1 - 2c_1)(2 + 2c_1) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Now we substitute in (6) the representation (2) of the a_{ij} . By setting $k := 1 - 4s_1c_1$ we obtain

$$[2c_1(1 - 2s_1)q_0 - q_2][2c_1(1 + 2s_1)q_1 - q_3] = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [kq_0 - (2s_1 + 2)q_2][kq_0 - (2s_1 - 2)q_2] - \\ - [(2s_1 + 2)q_1 + kq_3][(2s_1 - 2)q_1 + kq_3] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

We start with the second factor in (8) and express in (9) q_3 in terms of q_1 . This results in a quadratic equation for $(q_0 : q_1 : q_2)$

$$\begin{aligned} [kq_0 - (2s_1 + 2)q_2][kq_0 - (2s_1 - 2)q_2] + \\ + 4(8c_1 - 4s_1 + 16s_1c_1 - 3)q_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

We introduce homogeneous motion parameters $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ for this "conic" by setting

$$\begin{aligned} [kq_0 - (2s_1 + 2)q_2] \cdot c_1^2(2s_1 - 1)^2 &= \sigma^2, \\ [kq_0 - (2s_1 - 2)q_2] &= \\ &= 4(-8c_1 + 4s_1 - 16s_1c_1 + 3)\tau^2, \\ c_1(2s_1 - 1)q_1 &= \sigma\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

and obtain after some simplifications due to (7) the representation

$$\begin{aligned} q_0 &= -(2s_1 - 1)\sigma^2 + 2s_1(1 + 4s_1c_1)\tau^2, \\ q_1 &= 2(2s_1 - 1)\sigma\tau, \\ q_2 &= -(2c_1 + 1)\sigma^2 + 2s_1(2s_1 - 2)\tau^2, \\ q_3 &= 2(2c_1 + 1)\sigma\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

From (2) we get the orthogonal matrix in (1). The translation vector $(u, v, 0)$ is given by

$$\begin{aligned} u &= -a_{12} + c_1(a_{21} + a_{32})/s_1, \\ v &= -a_{22} + s_1(a_{11} + a_{13})/c_1 \end{aligned} \quad (13)$$

resulting from (5).

Due to the last equation in (7), the involutive projective transformation

$$(q_0 : q_1 : q_2 : q_3) \mapsto (q'_0 : q'_1 : q'_2 : q'_3)$$

obeying

$$\begin{aligned} q'_0 &= -q_3, & q'_2 &= q_1, \\ q'_1 &= -q_2, & q'_3 &= q_0 \end{aligned}$$

switches the two factors in (8) while (9) is preserved. On the other hand the first two rows in the orthogonal matrix (2) change signs. So a 180° -rotation about the z_0 -axis transforms the one-parameter motion represented in (12) and (13) into that stemming from the first factor in (8).

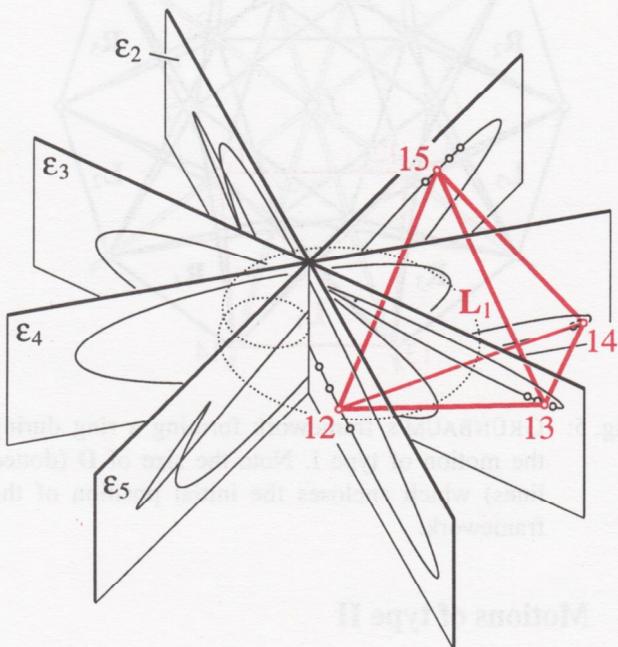


Fig. 4: The trajectories of the vertices of \mathbf{L}_1 under the motion of type I as defined in Fig. 3 and represented in (12) and (13).

Theorem 2: For a given face axis f of \mathbf{D} the motion of type I of any tetrahedron splits into two rational motions which can be transformed into each other by a halfturn about f . Both components are of order 4 and type a) according to the classification given by O. RÖSCHEL in [5].

Fig. 4 shows the trajectories of the vertices of \mathbf{L}_1 under the motion with the quaternion representation (12). When the motion parameters $(\sigma : \tau)$ are replaced by $(-\sigma : \tau)$, then q_1 and q_3 change signs. The same effect appears when the moving frame performs a halfturn about the y -axis (switching 12 with 15 and 13 with 14) while at the same time the fixed frame rotates about the y_0 -axis through 180° exchanging ε_2 with ε_5 and ε_3 with ε_4 . This is the reason why the trajectories of the vertices 12 and 15 are congruent as well as that of 13 and 14. The dotted curve in Fig. 4 shows the trajectory of the center of \mathbf{L}_1 .

A real GRÜNBAUM framework will not perform the full motion since one vertex can't move "through" the other.

But one can dissolve some joints and reassamble the structure in another position.¹ Then one will realize that during the motion of type I the ten tetrahedra fall apart and form a ring with a diameter which approximately doubles that of the initial position in the interior of the dodecahedron **D**. Fig. 5 shows the extended position in comparison with **D**.

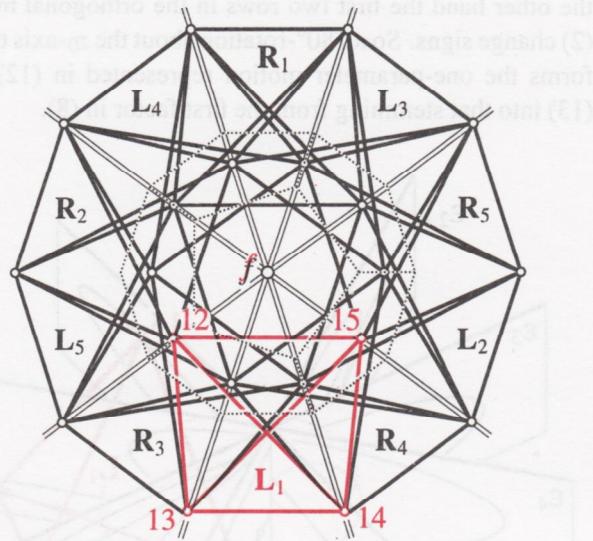


Fig. 5: GRÜNBAUM's framework forming a ring during the motion of type I. Note the size of **D** (dotted lines) which encloses the initial position of the framework.

3 Motions of type II

Theorem 3 (H. S., 1991): *For each vertex axis v of the regular dodecahedron there is a one-parameter motion of GRÜNBAUM's framework preserving the three-fold symmetry about v .*

Suppose v connects the vertices 45 and 54. Then v is a common axis of symmetry for \mathbf{L}_4 , \mathbf{R}_4 , \mathbf{L}_5 and \mathbf{R}_5 . When this axis v is kept fixed, then the vertices 41, 42, 43, 51, 52, 53, 14, 15, 24, 25, 34 and 35 can only move on a cylinder Φ of rotation with axis v (see view in Fig. 6 showing v as a point). According to [6] we define the motion of \mathbf{L}_1 by the additional condition that 12 and 13 remain in the planes φ_2, φ_3 of symmetry passing through v . After ruling out the translations along v we again end up with a one-parameter motion of \mathbf{L}_1 .

The movements of \mathbf{L}_2 and \mathbf{L}_3 are obtained by iterated 120° -rotations about v . Reflections in $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ transform the motion of \mathbf{L}_1 into those of $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$, resp., provided the notation is specified as in Fig. 6.

In order to represent the motion of type II analytically we define the z_0 -axis on v and the x_0 -axis in φ_1 . We specify the moving frame (x, y, z) attached to \mathbf{L}_1 by

$$\begin{aligned} 12 &= (\sqrt{2}, 0, 1), & 14 &= (0, \sqrt{2}, -1), \\ 13 &= (-\sqrt{2}, 0, 1), & 15 &= (0, -\sqrt{2}, -1). \end{aligned} \quad (14)$$

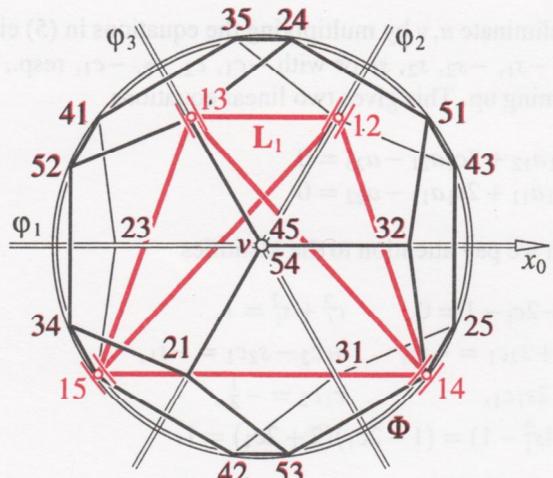


Fig. 6: Motion of type II: The vertices 12, 13 of \mathbf{L}_1 move in the planes φ_2, φ_3 of symmetry. 14 and 15 remain on the cylinder Φ of rotation.

Then the constraints defined above result in four equations

$$\begin{aligned} (u + a_{11}\sqrt{2} + a_{13})\sqrt{3} - (v + a_{21}\sqrt{2} + a_{23}) &= 0, \\ (u - a_{11}\sqrt{2} + a_{13})\sqrt{3} + (v - a_{21}\sqrt{2} + a_{23}) &= 0, \\ (u + a_{12}\sqrt{2} - a_{13})^2 + (v + a_{22}\sqrt{2} - a_{23})^2 &= \frac{8}{3}, \\ (u - a_{12}\sqrt{2} - a_{13})^2 + (v - a_{22}\sqrt{2} - a_{23})^2 &= \frac{8}{3}. \end{aligned} \quad (15)$$

From the two linear equations we obtain

$$u = a_{21}\sqrt{\frac{2}{3}} - a_{13}, \quad v = a_{11}\sqrt{6} - a_{23}. \quad (16)$$

We substitute this in the difference and sum of the last two equations in (15). So we end up with

$$\begin{aligned} Aa_{12} + Ba_{22} &= 0, \\ A^2 + B^2 + 2a_{12}^2 + 2a_{22}^2 &= \frac{8}{3} \text{ for} \\ A := a_{21}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2a_{13}, \quad B := a_{11}\sqrt{6} - 2a_{23}. \end{aligned} \quad (17)$$

Together with the orthogonality conditions

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

we have five equations for the six entries in the first two rows of the matrix (a_{ik}) . When in (17) the a_{ij} are replaced by q_0, \dots, q_3 according to (2) we obtain two homogeneous equations of degree 4.

However, explicit representations for the motions of type II have not yet been found.

¹ The author thanks Elisabeth ZACH for producing a model of GRÜNBAUM's framework. This was the key for detecting the two-parametric mobility presented in Section 4.

4 Two-parametric motions of GRÜNBAUM's framework

During the motion of type I as defined in Fig. 3 the moving tetrahedron \mathbf{L}_1 reaches positions which are symmetric with respect to ε_3 (see Fig. 7): Since ε_3 bisects the angle between ε_2 and ε_4 , we can choose $12 \in \varepsilon_2$ and $14 \in \varepsilon_4$ in symmetric position. This implies $13, 15 \in \varepsilon_3$, hence $15 \in f$.

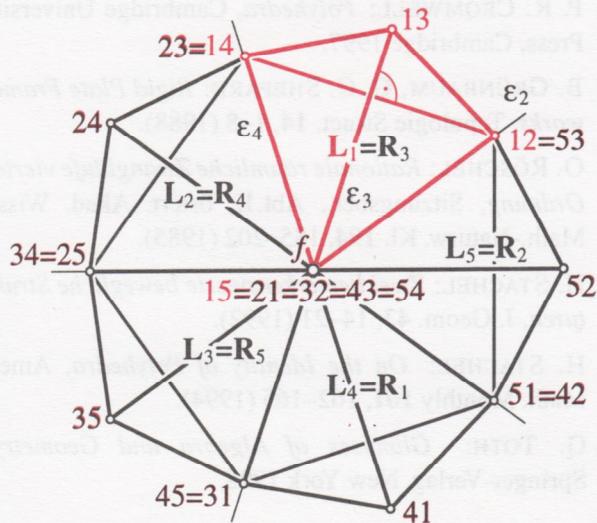


Fig. 7: Position of GRÜNBAUM's framework with pairwise coinciding tetrahedra and two-parametric mobility.

In this particular position the reflection of \mathbf{L}_1 in ε_3 gives $\mathbf{R}_3 = \mathbf{L}_1$. The iterated 72° -rotations about f and the reflections in ε_i , $i = 2, \dots, 5$, reveal that all tetrahedra are pairwise coincident: We have $\mathbf{R}_4 = \mathbf{L}_2$, $\mathbf{R}_5 = \mathbf{L}_3$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}_4$, and $\mathbf{R}_2 = \mathbf{L}_5$. All tetrahedra share the vertex $S := 15 = 21 = 32 = 43 = 54$.

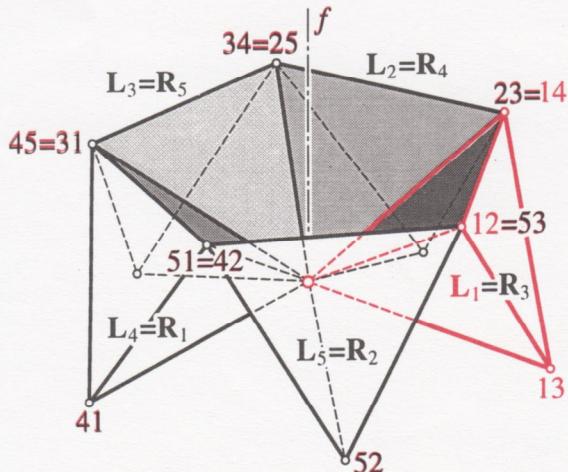


Fig. 8: GRÜNBAUM framework seen as a flexing pyramid with five triangular faces as bases for tetrahedra.

Because of $14 = 23$, $25 = 34$, $31 = 45$, $42 = 51$, and $53 = 12$ any two consecutive tetrahedra in the cycle $(\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3 \mathbf{L}_4 \mathbf{L}_5)$ have an edge through S in common.

So the whole structure can be seen as a five-sided pyramid built of five regular triangles which are the bases for the tetrahedra (Fig. 8). Such a pyramid with revolute joints at its edges flexes with mobility 2 like a spherical pentagon with hinges at its vertices.

During motions of type I the tetrahedron \mathbf{L}_1 also occupies positions symmetric with respect to ε_2 (Fig. 9). This time 14 and 15 are mutual mirror images in ε_2 which implies $13 \in f$. Hence the ten tetrahedra are again pairwise coinciding: $\mathbf{L}_1 = \mathbf{R}_2$, $\mathbf{L}_2 = \mathbf{R}_3$, $\mathbf{L}_3 = \mathbf{R}_4$, $\mathbf{L}_4 = \mathbf{R}_5$, and $\mathbf{L}_5 = \mathbf{R}_1$. The five tetrahedra share one vertex ($13 = 24 = 35 = 41 = 52$); any two consecutive tetrahedra in this closed kinematic chain with five links $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_5$ share an edge, passing through $14 = 32$, $25 = 43$, $31 = 54$, $42 = 15$, and $53 = 21$, respectively. This time the five-sided pyramid formed by the revolute axes is two-times wound around f (see Fig. 9).

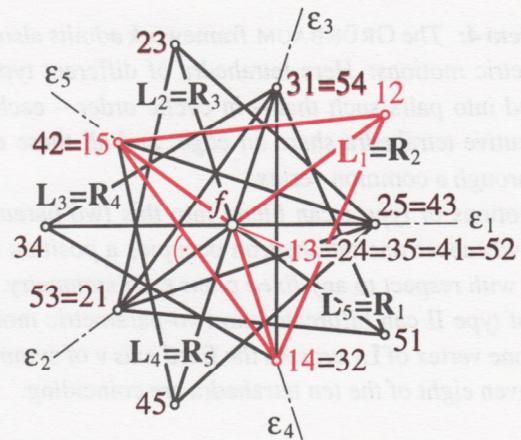


Fig. 9: Another position of GRÜNBAUM's framework with pairwise coinciding tetrahedra and degree 2 of mobility.

After interchanging 12 with 15 and 13 with 14 we obtain analogous cases where \mathbf{L}_1 occupies positions symmetric with respect to ε_4 or ε_5 , hence $\mathbf{L}_1 = \mathbf{R}_4$ or $\mathbf{L}_1 = \mathbf{R}_5$.

Also the motions of type II can blend into a two-parametric mobility: When during the motion displayed in Fig. 6 the vertex 12 crosses the axis v of symmetry, then because of the given edge length of \mathbf{L}_1 the vertices 14 and 15 are located on the same circle of the cylinder Φ . Hence 13 must be located on Φ too. This implies that in this position \mathbf{L}_1 is symmetric with respect to φ_1 , φ_2 and φ_3 . We get $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_3 = \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3$ (see Fig. 10). Even two of the remaining tetrahedra, say \mathbf{L}_4 and \mathbf{R}_5 , coincide with \mathbf{L}_1 . The two last coinciding tetrahedra $\mathbf{L}_5 = \mathbf{R}_4$ share a face with \mathbf{L}_1 .

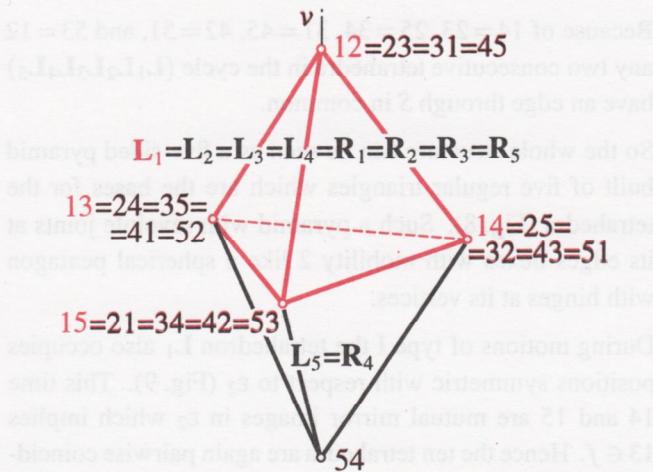


Fig. 10: In this position of GRÜNBAUM's framework a motion of type II can blend into two-parametric flexibility.

The same collapsed position can be reached when the flexing five-sided pyramid (Fig. 8) is folded such that three faces coincide.

Theorem 4: The GRÜNBAUM framework admits also two-parametric motions: Here tetrahedra of different type are coupled into pairs such that – in cyclic order – each two consecutive tetrahedra share an edge, and all these edges pass through a common vertex.

The motions of type I can blend into this two-parametric flexes whenever one tetrahedron occupies a position symmetric with respect to any fixed plane ε_i of symmetry. Motions of type II can bifurcate into two-parametric mobility when one vertex of L_1 crosses the fixed axis v of symmetry. Then even eight of the ten tetrahedra are coinciding.

It is still open whether these two-parametric motions complete the list of nontrivial flexes of the GRÜNBAUM framework.

References

- [1] R. CONNELLY, B. HENDRICKSON, M. TERRELL: *Kaleidoscopes and Mechanisms*, In K. BÖRÖCZKY et al. (ed.): Intuitive Geometry. Colloq. Math. Soc. János Bolyai **63**, 67–75 (1994).
- [2] H. S. M. COXETER, P. DU VAL, H. T. FLATHER, J. F. PETRIE: *The Fifty-Nine Icosahedra*, Springer-Verlag, New York 1982.
- [3] P. R. CROMWELL: *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [4] B. GRÜNBAUM, G. C. SHEPARD: *Rigid Plate Frameworks*, Topologie Struct. **14**, 1–8 (1988).
- [5] O. RÖSCHEL: *Rationale räumliche Zwangsläufe vierter Ordnung*, Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **194**, 185–202 (1985).
- [6] H. STACHEL: *Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen*, J. Geom. **43**, 14–21 (1992).
- [7] H. STACHEL: *On the Identity of Polyhedra*, Amer. Math. Monthly **101**, 162–165 (1994).
- [8] G. TOTH: *Glimpses of Algebra and Geometry*, Springer-Verlag, New York 1998.

Hellmuth Stachel

Institute of Geometry

Vienna University of Technology

Wiedner Hauptstrasse 8–10/113, A 1040 Wien

tel: +431 58801 11320, fax: +431 58801 11399

e-mail: stachel@geometrie.tuwien.ac.at

URL: <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel>

Originelle wissenschaftliche Arbeit

Angenommen 20. 11. 1999.

VLASTA SZIROVICZA, ANA SLIEPČEVIĆ

Ein Analogon des Czuberschen Satzes in der isotropen Ebene

Analogon Czuberovog teorema u izotropnoj ravnini

SAŽETAK

U radu se dokazuje da Czuberov teorem u izotropnoj ravnini vrijedi samo za 2-cirkularne kubike te potpuno cirkularne kubike tipa tridens.

Ključne riječi: geometrija, izotropna ravnina, cirkularna kubika, Czuberov teorem

The Analog of the Czuber's theorem in the isotropic plane

ABSTRACT

The paper proves that in the isotropic plane Czuber's theorem is valid only for the cubics of the second degree of circularity and for the completely circular cubics of the type tridens.

Key words: geometry, isotropic plane, circular cubic, Czuber's theorem

MSC 1991: 51N25

Die zirkulären Kurven in der isotropen Ebene sind diejenigen die den absoluten Punkt F enthalten. Nach dem Zirkularitätsgrad werden die **zirkulären Kurven 3. Ordnung** in **drei Typen** eingeteilt:

1. *erste Stufe des Zirkularitätsgrades.* Diese Kurve läuft durch den absoluten Punkt und hat diesen Punkt als einfachen Punkt;
2. *zweite Stufe des Zirkularitätsgrades.* Diese Kurve berührt die absolute Gerade im absoluten Punkt, oder hat den absoluten Punkt als Doppelpunkt;
3. *dritte Stufe des Zirkularitätsgrades.* Diese Kurve berührt und schneidet die absolute Gerade im absoluten Punkt und wird vollständig zirkuläre Kurve genannt. Diese Kurven teilen sich in drei Typen ein [5]:
 - a) **divergente Parabel.** Diese besitzt die absolute Gerade f als Wendetangente im absoluten Punkt F ,

- b) **kubische Parabel.** Diese besitzt die Spitze 1. Art im absoluten Punkt F , und die absolute Gerade f als die Tangente in dieser Spitze,
- c) **Tridens-kurve (Dreizahn).** Diese besitzt einen Knoten im F , wobei f die Tangente eines Zweiges im Knoten ist.

In der euklidischen Ebene gilt der **Czubersche Satz**:

Jede zirkuläre Kurve 3. Ordnung kann durch die Projektivität zwischen einem konzentrischen Kreisbüschel und einem Geradenbüschel erzeugt werden. Der Zentrum des Kreisbüschels liegt in dem vierfachen Brennpunkt und der Scheitelpunkt des Geradenbüschels in dem Hauptpunkt der Kubik [3].

Die Existenz dieses Satzes ist in der hyperbolischen Ebene in [4] bewiesen. Der Ziel dieser Arbeit ist die Existenz des Czuberschen Satzes in der isotropen Ebene nachzuprüfen. Um dies zu erreichen wird ein Analogon zum konzentrischen Kreisbüschel der euklidischen Ebene, bzw. ein Hyperoskulationskreisbüschel benutzt [10].

Ein Büschel der parabolischen isotropen Kreise vom Radius $\frac{1}{2A}$ in der isotropen Ebene besitzt die Gleichung

$$\mathcal{F} \equiv x^2 - 2Ay + \tau = 0, \quad (1)$$

wobei τ der Büschelsparameter ist. Durch zwei Geraden

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv y - \bar{y} = 0, \\ p_2 &\equiv x - \bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ist ein Geradenbüschel \mathcal{V} mit einem eigentlichen Grundpunkt $V(\bar{x}, \bar{y})$ aufgespannt. Dieses besitzt die Darstellung

$$\mathcal{V} \equiv y - \bar{y} + \mu(x - \bar{x}) = 0, \quad (3)$$

bzw.

$$\mathcal{V} \equiv x - \bar{x} + \lambda(y - \bar{y}) = 0, \quad (4)$$

wobei μ und $\lambda = \frac{1}{\mu}$ die Büschelsparameter sind.

Durch eine projektive Zuordnung zwischen einem Kreisbüschel und einem Geradenbüschel entsteht eine zirkuläre Kurve k^3 3. Ordnung [8]. Je nach der Wahl der Geradenbüschelsparameter erhält man zwei Typen dieser Kurven.

Typ 1: Die Zuordnung zwischen den Büscheln (1) und (3) wird projektiv wenn z. B. $\tau = \mu$ gilt. Somit folgt

$$(x^2 - 2Ay)(x - \bar{x}) - y + \bar{y} = 0,$$

bzw.

$$x^3 - 2Axy - \bar{x}x^2 + 2A\bar{y}y - y + \bar{y} = 0 \quad (5)$$

was offensichtlich eine **vollständig zirkuläre Kurve 3. Ordnung** darstellt. Mittels einer isotropen Bewegung kann sie die Form $xy = x^3 + ax^2 + bx + c$ erreichen. Somit gehört sie der Klasse der Tridens-Kurven (Abb. 1).

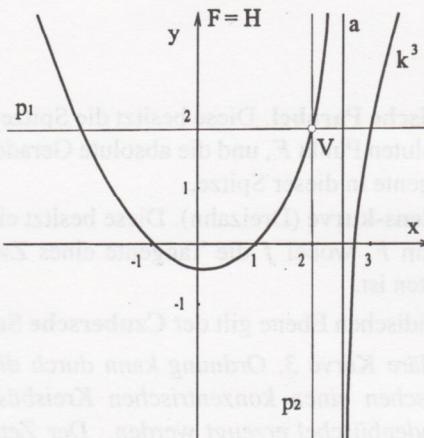


Abb. 1

Der vierfache Brennpunkt stimmt mit dem Zentrum F des Kreisbüschels überein. Der Hauptpunkt H der erzeugten Kubik, als der Schnittpunkt der Kubik mit ihren isotropen Asymptote a , ist im demselben Punkt F [4].

Spezielle Fälle entstehen dann, wenn der Scheitelpunkt V des gegebenen Geradenbüschels mit dem absoluten Punkt $F(0 : 0 : 1)$ zusammenfällt, wodurch \mathcal{V} ein Büschel der isotropen Geraden dargestellt ist. Um die Gleichung eines solchen Geradenbüschels \mathcal{V} zu bestimmen, wählen wir die isotrope Geraden

$$p_1 \equiv x - \bar{x} = 0,$$

$$p_2 \equiv x = 0.$$

Dieses besitzt die Darstellung

$$\mathcal{V} \equiv x - \bar{x} + \eta x = 0 \quad (6)$$

mit η als Büschelsparameter.

Setzt man in (6) für den Büschelsparameter $\nu = \frac{1}{\eta}$, erhält man

$$\mathcal{V} \equiv x + \nu(x - \bar{x}) = 0. \quad (7)$$

Somit entstehen zwei Fälle:

Fall (1,1): Aus (1) und (6) für $\eta = \tau$ folgt

$$x^3 - 2Axy - x + \bar{x} = 0, \quad (8)$$

als die Gleichung eines Tridens (Abb. 2.). Die isotrope Asymptote a dieser Kurve stimmt mit der y -Achse überein. Man sieht leicht, daß der isotrope Kreis $x^2 - 2Ay = 0$ mit der Kubik (8) keinen gemeinsamen Punkt hat. Er wird so als **asymptotischer Kreis** der erzeugten Kurve bezeichnet. Der vierfache Brennpunkt, wie auch der Hauptpunkt der Kurve, fällt in den Punkt $F=V$.

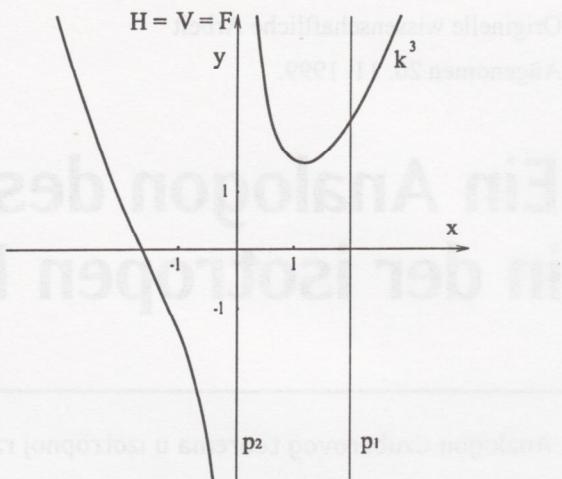


Abb. 2

Fall (1,2): Die Zuordnung zwischen (1) und (7) für $\nu = \tau$ gibt

$$x^3 - 2Axy - x - \bar{x}x^2 + 2A\bar{y}y = 0, \quad (9)$$

was wieder die Gleichung eines Tridens mit ähnlichen Eigenschaften, wie im Fall (1,1), darstellt (Abb. 3.).

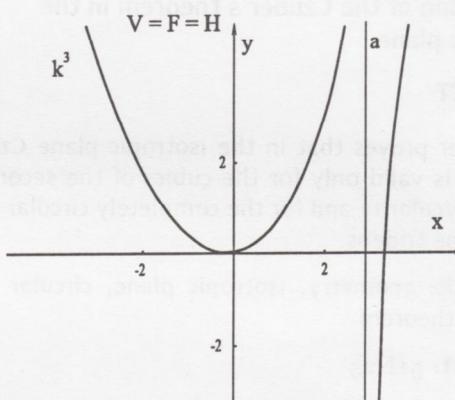


Abb. 3

Die **konstruktive Erzeugung** für die beiden Fälle führt man auf einem Modell, wo die uneigentliche Gerade f mit dem absoluten Punkt $F \in f$ als eigentliche betrachtet werden, auf die folgende Weise durch (dabei sind die parabolische Kreise diejenige Kegelschnitte die zueinander hyperoskulieren im Punkt F):

Die Tangenten aller isotropen Kreise des Hyperoskulationsbüschels \mathcal{F} mit den Berührungs punkten auf einer isotropen Geraden i bilden ein Geradenbüschel \mathcal{J} mit dem Scheitel $I \in f$. Alle Kreise des Büschels \mathcal{F} sind nämlich durch eine perspektive Kollineation verbundet, wobei f die Achse und F das Zentrum dieser Kollineation sind. Mittels der Projektivität zwischen den zwei Geradenbüscheln \mathcal{J} und \mathcal{V} ($V = F$) wurde eine projektive Zuordnung zwischen den Geradenbüschel \mathcal{V} und den Kreisbüschel \mathcal{F} dargestellt, so daß dem Kreis k_1 die Gerade $p_1 = f$, dem Kreis k_2 die Gerade $p_2 = i$ und dem entarteten Kreis k_3 die isotrope Gerade p_3 zugeordnet ist. Die konstruktive Lösung ist in Abb. 4. ersichtlich.

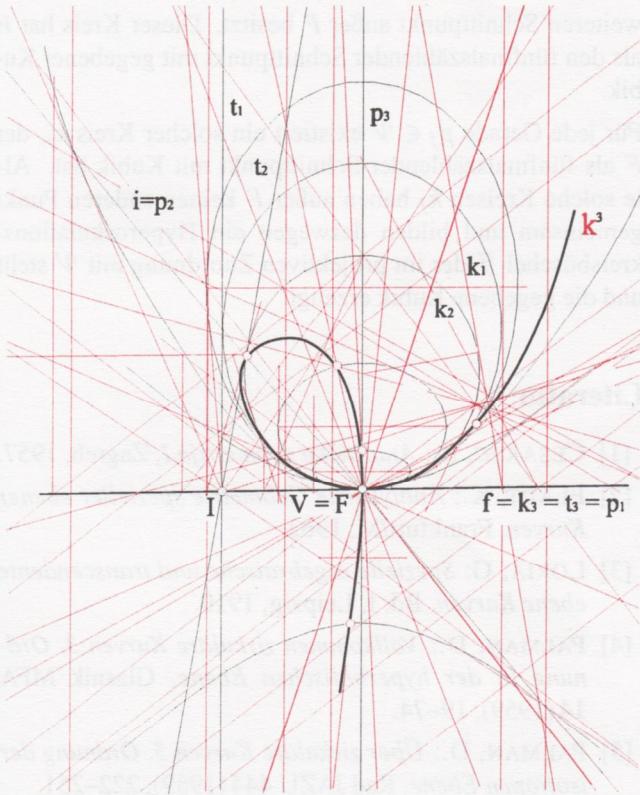


Abb. 4

Typ 2: Man nimmt für das Geradenbüschel \mathcal{V} die Gleichung (4). Die projektive Zuordnung zwischen dem Kreisbüschel (1) und dem Geradenbüschel (4) für $\tau = \lambda$ gibt die Gleichung

$$(x^2 - 2Ay)(y - \bar{y}) - x + \bar{x} = 0,$$

bzw.

$$x^2y - \bar{y}x^2 - 2Ay^2 + 2A\bar{y}y - x + \bar{x} = 0, \quad (10)$$

was offensichtlich eine Kurve 3. Ordnung mit dem Zirkularitätsgrad 2 bedeutet. Diese Kurve berührt die absolute Gerade im Punkt F und schneidet sie in noch einem uneigentlichen Punkt M der, wegen (2), die Koordinaten $(0 : 1 : 0)$ besitzt (Abb. 5.).

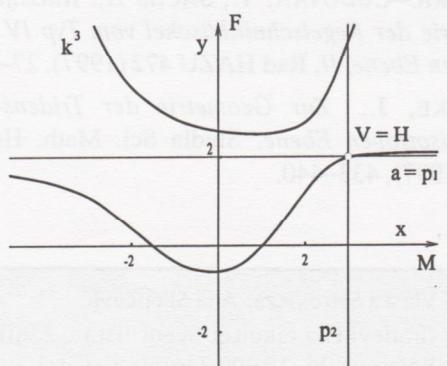


Abb. 5

Im allgemeinen wird die Kubik (10) vom Geschlecht 1. Man soll bemerken daß ihr Hauptpunkt in den Punkt V fällt.

Bei diesem Typ kann auch der Scheitelpunkt V ein uneigentliches Punkt sein. Einfachheit wegen kann der mit dem Punkt M übereinstimmen. Das Geradenbüschel wird dann durch zwei Geraden

$$g_1 \equiv y - \bar{y} = 0,$$

$$g_2 \equiv y = 0,$$

aufgespannt, sodaß zwei Fälle möglich sind. Seine Gleichung lautet

$$\mathcal{M} \equiv y - \bar{y} + \delta y = 0, \quad (11)$$

bzw.

$$\mathcal{M} \equiv y + \alpha(y - \bar{y}) = 0 \quad (12)$$

wobei δ und $\alpha = \frac{1}{\delta}$ die Büschelparameter sind.

Fall (2,1): Die projektive Zuordnung zwischen den Büscheln (1) und (11) erzeugt die Kubik mit der Gleichung

$$x^2y - 2Ay^2 - y + \bar{y} = 0 \quad (13)$$

die vom Zirkularitätsgrad 2 ist (Abb. 6.).

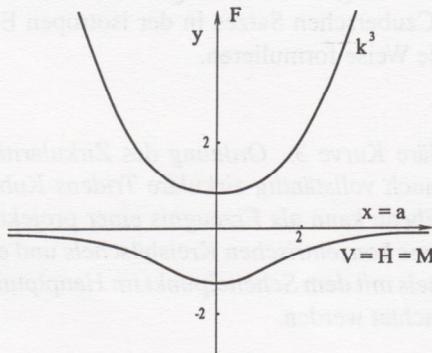


Abb. 6

Fall (2,2): Ist das Kreisbüschel (1) in der projektiven Zusammenhang mit den Geradenbüschel (12), entsteht wieder eine Kubik vom Zirkularitätsgrad 2 (Abb. 7.). Die Gleichung dieser Kubik besitzt die Form

$$x^2y - \bar{y}x^2 - 2Ay^2 + 2A\bar{y}y - y = 0. \quad (14)$$

In beiden Fällen sind die erzeugte Kurven vom Geschlecht 1. Sie besitzen denselben isotropen Schmiegeungskreis mit der Gleichung $x^2 - 2y - 1 = 0$, der die Kubik im absoluten Punkt F berührt und mit ihr keinen weiteren gemeinsamen Punkt hat. Der uneigentliche Punkt $V \equiv M$ ist der Wendepunkt wie auch der Hauptpunkt der Kubik [2].

Aus dargestellten Betrachtungen kann man schließen:

Durch die projektive Zuordnung zwischen einen Büschel konzentrischen isotropen Kreise und einen Geradenbüschel entsteht immer eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung vom Zirkularitätsgrad zwei oder drei, was nur von der gegebenen Projektivität und der Lage des Scheitelpunktes des Geradenbüschels abhängig ist. In den Punkt F fällt immer der vierfache Brennpunkt der Kubik. Im Fall die Kubik vom Zirkularitätsgrad zwei ist, fällt der Hauptpunkt immer in den Scheitelpunkt des Geradenbüschels. Für

die vollständig zirkuläre Kubik gilt dieses im allgemeinen nicht. Es gilt nur dann, wenn der Scheitelpunkt des Geradenbüschels mit dem absoluten Punkt F übereinstimmt.

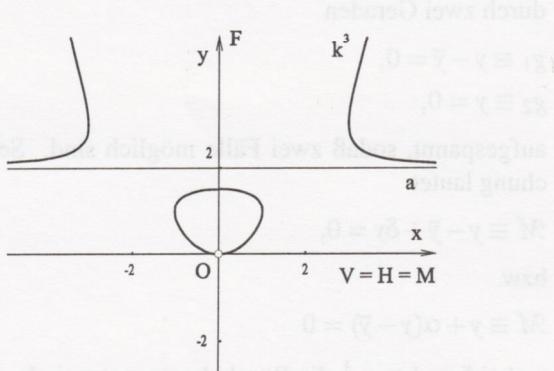


Abb. 7

Bemerkung. Die kubische Parabel wie auch die divergente Parabel wurden hier nicht betrachtet, da keine solche Kurve mittels Hyperoskulationskreisbüschels erzeugt werden kann [9].

Auf Grund der obigen Betrachtungen kann man einen Analogon des Czuberschen Satzes in der isotropen Ebene auf die folgende Weise formulieren.

Satz.

Jede zirkuläre Kurve 3. Ordnung des Zirkularitätsgrades zwei, wie auch vollständig zirkuläre Tridens-Kubik in der isotropen Ebene kann als Erzeugnis einer projektiven Zuordnung eines konzentrischen Kreisbüschels und eines Geradenbüschels mit dem Scheitelpunkt im Hauptpunkt dieser Kurve betrachtet werden.

Beweis. Sei eine zirkuläre Kurve 3. Ordnung des Zirkularitätsgrades zwei in der isotropen Ebene gegeben. Man nimmt den Scheitelpunkt V eines Geradenbüschels \mathcal{V} in ihrem Hauptpunkt H . Eine beliebige Gerade p_1 durch den Punkt V schneidet die Kubik in noch zwei Punkten A und B . Dieses Punktepaar bestimmt ein Kreisbüschel \mathcal{K} . Jeder Kreis k_i aus \mathcal{K} schneidet die Kubik in zwei weiteren Punkten C_i und D_i . Im \mathcal{K} gibt es nur ein Kreis k_1 bei dem die Schnittpunkte C_1 und D_1 mit dem Punkt F zusammenfallen. Dieser Kreis hat F als den viermalszählender Schnittpunkt mit der Kubik.

Für jede beliebige Gerade $p_j \in \mathcal{V}$ existiert ein solcher Kreis $k_j \in \mathcal{K}$, der F als viermalszählender Schnittpunkt mit Kubik hat. Alle solche Kreise k_j hyperoskulieren zu einander im F und bilden deswegen ein Hyperoskulationskreisbüschel \mathcal{F} , der in projektiven Zuordnung mit \mathcal{V} steht und die gegebene Kubik erzeugt.

Sei jetzt eine vollständig zirkuläre Tridens-Kubik gegeben. Eine beliebige Gerade $p_1 \in \mathcal{V}$, $V = H = F$, schneidet die Kubik, außer im Doppelpunkt F , in noch einem Punkt Q . Mit diesem Punkt ist ein Kreisbüschel \mathcal{K} der kongruenten isotropen Kreise eindeutig bestimmt [10]. Jeder Kreis k_i aus \mathcal{K} schneidet die Kubik in zwei weiteren Punkten C_i und D_i . In \mathcal{K} existiert nur ein Kreis k_1 der mit der Kubik keinen

weiteren Schnittpunkt außer F besitzt. Dieser Kreis hat F als den fünfmalzählenden Schnittpunkt mit gegebener Kubik.

Für jede Gerade $p_j \in \mathcal{V}$ existiert ein solcher Kreis k_j , der F als fünfmalzählender Schnittpunkt mit Kubik hat. Alle solche Kreise k_j haben außer F keinen anderen Punkt gemeinsam und bilden deswegen ein Hyperoskulationskreisbüschel \mathcal{F} der im projektiven Zuordnung mit \mathcal{V} steht und die gegebene Kubik erzeugt.

Literatur

- [1] CESAREC, R.: *Analitička geometrija I*, Zagreb, 1957.
- [2] FLADT, K.: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Frankfurt/M, 1962.
- [3] LORIA, G: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Bd. I, Leipzig, 1910.
- [4] PALMAN, D.: *Vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene*, Glasnik MFA **14**(1959), 19–74.
- [5] PALMAN, D.: *Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene*, Rad JAZU **444**(1989), 222–251.
- [6] SACHS, H.: *Ebene isotrope Geometrie*, Braunschweig — Wiesbaden, 1987.
- [7] SACHS, H.: *Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene*, Studia Sci. Math. Hungarica **24**(1989), 377–383.
- [8] SAVELOV, A. A.: *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- [9] SLIEPČEVIĆ, A.; SZIROVICZA, V.: *Die projektive Erzeugung der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene*, (im Druck).
- [10] SZIROVICZA, V.; SLIEPČEVIĆ, A.: *Eine Erzeugung der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene*, (im Druck).
- [11] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.: *Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I Teil*, Rad JAZU **450**(1990), 41–51.
- [12] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.; SACHS H.: *Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene, II*, Rad HAZU **472**(1997), 27–53.
- [13] TÖLKE, J.: *Zur Geometrie der Tridens-Kurven der isotropen Ebene*, Studia Sci. Math. Hungarica **33**(1997), 433–440.

Vlasta Szirovicza, Ana Sliepčević
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10 000 Zagreb, Croatia
e-mail: szvlasta@juraj.gradnz.grad.hr
e-mail: anasli@juraj.gradnz.grad.hr

Original scientific paper

Accepted 6. 12. 1999.

DANIELA VELICOVÁ

Density of Interior Points Distribution in Modelling of Hyperpatches

Density of Interior Points Distribution in Modelling of Hyperpatches

ABSTRACT

The paper deals with the modelling of hyperpatches (solid cells) on the basis of their creative representations and with the calculations of some intrinsic geometric properties of hyperpatches. The analytic representation of the hyperpatch in the form of a vector function of three variables provides the possibility to calculate and to control geometric properties and the density of distribution (homogeneous or non-homogeneous) of the hyperpatch interior points.

Key words: hyperpatch modelling, geometric properties, density of interior points

Gustoća raspodjele unutarnjih točaka u modeliranju hiperdijelova

SAŽETAK

Rad se bavi modeliranjem hiperdijelova (punih celija) na osnovi njihovih kreativnih reprezentacija i proračunima za neka svojstva unutarnje geometrije hiperdijelova. Analitička reprezentacija hiperdijela u formi vektorske funkcije od tri varijable omogućuje izračunavanje i kontrolu geometrijskih svojstava i gustoće raspodjele (homogene ili nehomogene) za unutarnje točke hiperdijela.

Ključne riječi: modeliranje hiperdijelovima, geometrijska svojstva, raspodjela unutarnjih točaka

MSC: 65D17, 68U07

of application of the generated objects, that are composite solids composed from several solid cells – hyperpatches. In the hyperpatch modelling, the geometry of the hyperpatch interior points can be considered on the basis of the intrinsic geometric properties, which are equivalent to the intrinsic geometric properties of surfaces. The intrinsic geometric properties of a hyperpatch are determined by the partial derivatives of the analytic representation of the hyperpatch, a vector function in three variables, and can be calculated from the coefficients of the hyperpatch fundamental forms. They can be extracted directly from the hyperpatch basic figure, which is a part of the input data structure for the computer processing.

In the relevance to the form of the basic figure, the geometry of the distribution of hyperpatch interior points can be defined implicitly or explicitly.

2 Basic relations

Let $\mathbf{K} = (\mathbf{U}, \mathbf{G})$ be a Creative space described in details in [3]. A hyperpatch (a solid cell) S that is a three-parametric subset of the extended Euclidean space \mathbb{E}^3 can be created on the basis of its creative law, which is in \mathbf{K} synthetically represented by the creative representation, an ordered pair (U, g) , where the basic figure $U \in \mathbf{U}$ and the generating principle $g \in \mathbf{G}$ are such, that applying the generating principle g on the basic figure U the hyperpatch S can be created. There are available three different forms of the generating principle g (geometric transformation T , a class of geometric transformations $T(u)$ defined on the interval, or any interpolation $I(u)$), that can be applied to the suitable basic figure, according to [4].

Creative representation of a hyperpatch, an ordered pair (U, g) , can be expressed in the six different forms:

- (a surface patch, a class of geometric transformations)
- (a solid cell, a geometric transformation)
- (a net of boundary surface patches, an interpolation)
- (a sequence of surface patches, an interpolation)
- (a grid of boundary edge curves, an interpolation)
- (a grid of points, an interpolation).

1 Introduction

Solid modelling is an important part of geometric modelling (described in [1], [2]). There exist different approaches to this problem, based on different representations of the modelled objects. Forms of the distinguished representations are determined by the areas

The possibility to describe and to control the feature of the non-uniform distribution of points in a hyperpatch is provided in the case of its modelling as an interpolated figure, using the creative representation in which the generating principle is an interpolation. These are the last four types of the creative representations. The intrinsic geometric properties of the created hyperpatch are explicitly predetermined in the basic figure, which is in a form of the ordered set of separate geometric figures (points, curve segments or surface patches) related to the hyperpatch, or vectors that can be tangent vectors to the isoparametric curve segments, twist vectors to the isoparametric surface patches and the density vectors in the given hyperpatch points. These geometric figures are represented analytically by their vector functions appearing as the elements of the analytic representation of the entire basic figure, a map of the created hyperpatch. In the map – matrix, there are all elements distributed in the appropriate order and predetermine the intrinsic geometric properties of the created hyperpatch, the curvature of the isoparametric curve segments (edge curves) and the isoparametric surface patches (face surfaces), or the non-homogeneity of the interior points' distribution and density.

Industrial design and CAGD of non-homogeneous hyperpatches on the base of their creative representations can lead to more complex results with respect to their applicability in simulation of some physical processes as magnetism, electricity, heating, pressure or deformations of solids, where the possibility to control the distribution of the interior solid points appears.

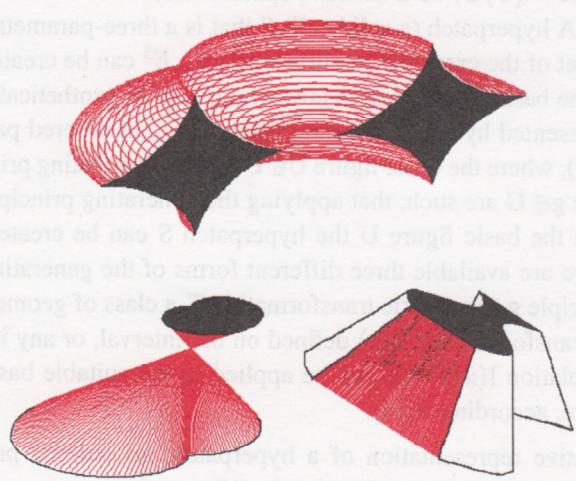


Fig. 1

In the first two types of the hyperpatch creative representations the created hyperpatches are homogeneous, and there can be distinguished several types of created solids with respect to the different types of generating principles in the form of the classes of geometric transformations. In the

Fig. 1 there are illustrations of some solids generated by different classes of geometric transformations, a solid of revolution created from the basic region with the boundary in an asteroidal curve, a conical solid created from the region with the boundary in the form of a Limaçon of Pascal subdued to the class of scalings with the centre in the conical solid vertex, while the scaling ratio $h > 1$. Frustum of the conical solid is created from the basic curve segment in the form of the sinusoidal curve segment subdued to a class of translations, and scalings with the given centre and the ratio $h < 1$.

In these two types of the created hyperpatches the intrinsic geometry is defined implicitly by the basic figure and the generating principle, and hyperpatch intrinsic geometric properties can be calculated from their analytic representations by means of the differential geometry. The partial derivatives of the vector function representing analytically the created hyperpatch with respect to all three variables and the mixed partial derivatives of the second and the third order can be used to determine the coefficients of the first and the second fundamental forms of the created hyperpatch, and the density of distribution of the hyperpatch interior points.

The analytic representation of a hyperpatch – solid cell S is a vector function

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w), h(u, v, w))$$

defined on the region $\Omega = [0, 1]^3$ (where x, y, z, h are homogeneous coordinate functions of three variables that are at least C^3 continuous on the region Ω , while the partial derivatives of the function $h(u, v, w)$ with respect to the all three variables u, v, w are equal to 0 on $[0, 1]^3$), which is a local homeomorphic mapping of the region Ω on the hyperpatch S . Composite solids can be obtained as compositions of several elementary hyperpatches – solid cells.

There exist 3 isoparametric systems of surface patches (exactly one of the parameters u, v, w is constant) forming a net of isoparametric surface patches of a hyperpatch. Boundary surface patches (facets) correspond to the constant values of parameters equal to 0 or 1. If there are two of the parameters u, v, w equal to some constant values, we can speak about isoparametric curve segments of a hyperpatch, if the values are equal to 0 or 1, about boundary isoparametric curve segments (edges). Two isoparametric surface patches from different systems intersect in an isoparametric curve segment, two isoparametric curve segments from different systems intersect in a hyperpatch point. In the hyperpatch point there are all three parameters constant and we denote them as parametric (curvilinear) coordinates of the hyperpatch point. Points with parametric coordinates (not) equal to 0 or 1 are (interior) exterior points of the hyperpatch (in details in [2], [5]).

A hyperpatch boundary according to [2] consists of 6 boundary surface patches – face surfaces of a hyperpatch, 12 boundary curve segments – edge curves of a hyperpatch, and 8 corner points – vertices of a hyperpatch.

3 Hyperpatches created by classes of geometric transformations

Let the hyperpatch S be created from a basic figure in the form of a surface patch U analytically represented by the point function

$$\mathbf{p}(u, v) = (\xi(u, v), \psi(u, v), \zeta(u, v), \eta(u, v))$$

defined on the region $\Phi = [0, 1]^2$, where ξ, ψ, ζ, η are homogeneous coordinate functions of two real variables that are at least C^3 continuous on the region Φ (while the partial derivatives of the coordinate function $\eta(u, v)$ with respect to the both variables u and v are equal to zero on Φ), which is a local homeomorphic mapping of the region Φ on the surface patch U.

Geometric transformation that can be applied as a generating principle to the basic figure in the form of a hyperpatch is represented by a regular square matrix of rank 4 with real numbers as its elements

$$\mathbf{T} = (a_{ij}) \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Analytic representation of the class of geometric transformations that is a suitable generating principle applicable to the basic figure in the form of a surface patch is a matrix function derived from the matrix T in the form

$$\mathbf{T}(w) = (a_{ij}(w)) \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3, 4,$$

which is a continuous function of one real variable defined on the interval $I = [0, 1]$, with the values in the set of all regular square matrices with real elements representing single geometric transformations.

Analytic representation of the created hyperpatch is a point function

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) &= \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}(w) \\ &= (\xi(u, v), \psi(u, v), \zeta(u, v), \eta(u, v)). \mathbf{T}(w). \end{aligned}$$

defined and differentiable on the region $\Omega = \Phi \times I = [0, 1]^3$.

Partial derivatives and the total differentials of the point function are in forms

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u(u, v, w) &= \mathbf{p}_u(u, v). \mathbf{T}(w) \\ &= (\xi_u(u, v), \psi_u(u, v), \zeta_u(u, v), 0). \mathbf{T}(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_v(u, v, w) &= \mathbf{p}_v(u, v). \mathbf{T}(w) \\ &= (\xi_v(u, v), \psi_v(u, v), \zeta_v(u, v), 0). \mathbf{T}(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_w(u, v, w) &= \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}'(w) \\ &= (\xi(u, v), \psi(u, v), \zeta(u, v), \eta(u, v)). \mathbf{T}'(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv + \mathbf{r}_w dw \\ &= \mathbf{p}_u(u, v). \mathbf{T}(w) du + \mathbf{p}_v(u, v). \mathbf{T}(w) dv + \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}'(w) dw \\ &= (\mathbf{p}_u(u, v) du + \mathbf{p}_v(u, v) dv). \mathbf{T}(w) + \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}'(w) dw \\ &= d\mathbf{p}. \mathbf{T}(w) + \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}'(w) dw, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uv}(u, v, w) &= \mathbf{p}_{uv}(u, v). \mathbf{T}(w) \\ &= (\xi_{uv}(u, v), \psi_{uv}(u, v), \zeta_{uv}(u, v), 0). \mathbf{T}(w), \\ \mathbf{r}_{uw}(u, v, w) &= \mathbf{p}_u(u, v). \mathbf{T}'(w) \\ &= (\xi_u(u, v), \psi_u(u, v), \zeta_u(u, v), 0). \mathbf{T}'(w), \\ \mathbf{r}_{vw}(u, v, w) &= \mathbf{p}_v(u, v). \mathbf{T}'(w) \\ &= (\xi_v(u, v), \psi_v(u, v), \zeta_v(u, v), 0). \mathbf{T}'(w), \\ \mathbf{r}_{uvw}(u, v, w) &= \mathbf{p}_{uv}(u, v). \mathbf{T}'(w) \\ &= (\xi_{uv}(u, v), \psi_{uv}(u, v), \zeta_{uv}(u, v), 0). \mathbf{T}'(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{r} &= \mathbf{r}_{uu} du^2 + \mathbf{r}_{vv} dv^2 + \mathbf{r}_{ww} dw^2 \\ &\quad + 2\mathbf{r}_{uv} du dv + 2\mathbf{r}_{uw} du dw + 2\mathbf{r}_{vw} dv dw \\ &= \mathbf{p}_{uu}(u, v). \mathbf{T}(w) du^2 + \mathbf{p}_{vv}(u, v). \mathbf{T}(w) dv^2 \\ &\quad + \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}''(w) dw^2 + 2\mathbf{p}_{uv}(u, v). \mathbf{T}(w) du dv \\ &\quad + 2\mathbf{p}_u(u, v). \mathbf{T}'(w) du dw + 2\mathbf{p}_v(u, v). \mathbf{T}'(w) dv dw \\ &= (\mathbf{p}_{uu}(u, v) du^2 + 2\mathbf{p}_{uv}(u, v) du dv \\ &\quad + \mathbf{p}_{vv}(u, v) dv^2) \mathbf{T}(w) + 2(\mathbf{p}_u(u, v) du dw \\ &\quad + \mathbf{p}_v(u, v) dv dw). \mathbf{T}'(w) + \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}''(w) dw^2 \\ &= d^2\mathbf{p}. \mathbf{T}(w) + 2d\mathbf{p}. \mathbf{T}'(w) + \mathbf{p}(u, v). \mathbf{T}''(w) dw^2. \end{aligned}$$

4 Interpolation hyperpatches

In the modeling of interpolation hyperpatches, the analytic representation of a tri-cubic hyperpatch is in a form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) &= \mathbf{a}_{333} u^3 v^3 w^3 + \mathbf{a}_{332} u^3 v^3 w^2 + \dots + \mathbf{a}_{100} u + \mathbf{a}_{000} \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 F_i(u) F_j(v) F_k(w) \mathbf{b}_{ijk} \quad \text{for } (u, v, w) \in [0, 1]^3 \end{aligned}$$

where $F_i(u), F_j(v), F_k(w)$ are cubic interpolation polynomials.

Geometric coefficients \mathbf{b}_{ijk} define explicitly geometric properties of the hyperpatch and they form a three-dimensional matrix of the type $4 \times 4 \times 4$, the map of the hyperpatch. The elements of this map are quadruples of homogeneous coordinates of the hyperpatch points (real points in ∞E^3), tangent vectors to the hyperpatch edges, twist vectors to the hyperpatch faces, and vectors defining the distribution of points inside the hyperpatch – density vectors (points in ∞E^3 at infinity).

Let the basic figure of a hyperpatch be an ordered grid of 64 real points in ∞E^3 . The basic grid of points defines implicitly also the curvature of edges and faces, and density of the hyperpatch, i. e. distribution of the interior points.

Analytic representation of the created hyperpatch is a point function

$$\mathbf{r}(u, v, w) = \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ijk} F_i(u) F_j(v) F_k(w)$$

for $(u, v, w) \in [0, 1]^3$.

The first partial derivatives of the point function are in the forms

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta u}(u, v, w) = \mathbf{r}_u(u, v, w) = \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ijk} F'_i(u) F_j(v) F_k(w),$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta v}(u, v, w) = \mathbf{r}_v(u, v, w) = \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ijk} F_i(u) F'_j(v) F_k(w),$$

$$\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta w}(u, v, w) = \mathbf{r}_w(u, v, w) = \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ijk} F_i(u) F_j(v) F'_k(w)$$

and determine for the curvilinear coordinates $(a, b, c) \in [0, 1]^3$ tangent vectors to the isoparametric curve segments in the regular point $P(a, b, c) = \mathbf{r}(a, b, c)$.

The mixed second partial derivatives of the point function are in the forms

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta u \delta v}(u, v, w) &= \mathbf{r}_{uv}(u, v, w) \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ijk} F'_i(u) F'_j(v) F_k(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta u \delta w}(u, v, w) &= \mathbf{r}_{uw}(u, v, w) \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ijk} F'_i(u) F_j(v) F'_k(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta v \delta w}(u, v, w) &= \mathbf{r}_{vw}(u, v, w) \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{ijk} F_i(u) F'_j(v) F'_k(w) \end{aligned}$$

and determine for the curvilinear coordinates $(a, b, c) \in [0, 1]^3$ the twist vectors to the isoparametric surface patches in the regular point $P(a, b, c)$.

The mixed third partial derivative of the point function is in the form

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 \mathbf{r}}{\delta u \delta v \delta w}(u, v, w) &= \mathbf{r}_{uvw}(u, v, w) \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_{ijk} F'_i(u) F'_j(v) F'_k(w) \end{aligned}$$

and determines for the curvilinear coordinates $(a, b, c) \in [0, 1]^3$ the density vector in the regular point $P(a, b, c)$.

The total differentials of the point function are in forms

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_{ijk} (F'_i(u) F_j(v) F_k(w) \\ &\quad + F_i(u) F'_j(v) F_k(w) + F_i(u) F_j(v) F'_k(w)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 \mathbf{r} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 B_{ijk} (F''_i(u) F_j(u) F_k(w) d^2 u \\ &\quad + F_i(u) F''_j(v) F_k(w) d^2 v + F_i(u) F_j(v) F''_k(w) d^2 w \\ &\quad + 2(F'_i(u) F'_j(v) F_k(w) dudv + F'_i(u) F_j(v) F'_k(w) dudw \\ &\quad + F_i(u) F'_j(v) F'_k(w) dv dw) + F'_i(u) F'_j(v) F'_k(w) dudvdw). \end{aligned}$$

5 Hyperpatch first differential form

We can describe geometrically not only the boundary of the hyperpatch as a three-dimensional region in the extended Euclidean space E^3 , but also the geometry of the hyperpatch interior points.

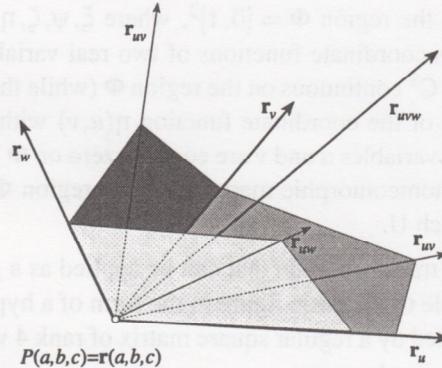


Fig. 2

At any regular point $\mathbf{r}(a, b, c) = P(a, b, c)$ of the hyperpatch there is defined a unique tangent trihedron Γ^{abc} formed by the three tangent planes to the isoparametric surface patches of the hyperpatch in this point (Fig. 2). Each of the tangent planes is defined by two tangent vectors to the isoparametric curve segments in their common point $P(a, b, c)$

$$\begin{aligned} \tau_{uv}(\mathbf{r}_u(a, b, c), \mathbf{r}_v(a, b, c)), \\ \tau_{uv}(\mathbf{r}_u(a, b, c), \mathbf{r}_w(a, b, c)) \tau_{uv}(\mathbf{r}_v(a, b, c), \mathbf{r}_w(a, b, c)). \end{aligned}$$

The tangent planes intersect in the common regular point $P(a, b, c)$, each two of them having a pierce line in the tangent line to the isoparametric curve segment

$$\tau_{uv} \cap \tau_{uw} = t_u, \tau_{uv} \cap \tau_{vw} = t_v, \tau_{uw} \cap \tau_{vw} = t_w.$$

Twist vectors $\mathbf{r}_u(a, b, c), \mathbf{r}_v(a, b, c), \mathbf{r}_w(a, b, c)$ to the isoparametric surface patches characterize implicitly their geometric shape, curvature, convexity or concavity.

Any change in the hyperpatch interior point distribution is reflected in the change of the density vector $\mathbf{r}_{uvw}(a, b, c)$. This geometric characteristics will be denoted as density of the interior point distribution. In some applications the density vectors in the vertices of the hyperpatch are defined directly in the hyperpatch basic figure as the geometric coefficients b_{ijk} , and define thus the interior points distribution implicitly. The density vectors in the interior points can be explicitly calculated from the third mixed partial derivative of the hyperpatch point function.

Definition 1.

Density of the interior point distribution is defined by the density function

$$\mathbf{r}_{uvw}(u, v, w) = (x_{uvw}(u, v, w), y_{uvw}(u, v, w), z_{uvw}(u, v, w), 0)$$

that is a vector function defined on the region $\Omega = [0, 1]^3$. Value of the density function in the hyperpatch regular point $P(a, b, c)$ is the density vector oriented towards the interior of the tangent trihedron.

Loci of the density function expresses the homogeneity of the interior point distribution with respect to the coordinate planes. Constant density function defines a homogeneous distribution in the hyperpatch with respect to all coordinate axes.

Definition 2.

Let $\mathbf{e}^1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}^2 = (0, 1, 0, 0)$ and $\mathbf{e}^3 = (0, 0, 1, 0)$ be the unit vectors in the direction of the coordinate axes. The scalar product

$$s^i = \mathbf{r}_{uvw}(u, v, w) \cdot \mathbf{e}^i, \quad i = 1, 2, 3$$

is denoted as the ratio of the hyperpatch homogeneity with respect to the coordinate plane $(\mathbf{e}^j \mathbf{e}^k)$, $i \neq j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3$. For $s^i = \text{const}$ we speak about homogeneous distribution with respect to the coordinate plane $(\mathbf{e}^j \mathbf{e}^k)$. Hyperpatch is said to be homogeneous, if it is homogeneous with respect to all coordinate planes.

Definition 3.

Hyperpatch first differential form denoted as $\Phi_1(u, v, w)$ is the square of the first total differential of the hyperpatch analytic representation, the point function

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w), h(u, v, w))$$

at least C^3 continuous on the region $\Omega = [0, 1]^3$

$$\Phi_1(u, v, w) = (d\mathbf{r})^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv + \mathbf{r}_w dw)^2.$$

Hyperpatch first differential form can be expressed as the sum of the first fundamental forms $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_1(u, w)$, $\varphi_1(v, w)$ of the hyperpatch 3 isoparametric surface patches subtracted by the sum of the first fundamental forms of the hyperpatch isoparametric curves $\varphi = \mathbf{r}_u^2 du^2 + \mathbf{r}_v^2 dv^2 + \mathbf{r}_w^2 dw^2$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, v, w) &= (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv + \mathbf{r}_w dw)^2 = \\ &= (\mathbf{r}_u^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2) \\ &\quad + (\mathbf{r}_u^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \mathbf{r}_w du dw + \mathbf{r}_w^2 dw^2) \\ &\quad + (\mathbf{r}_v^2 dv^2 + 2\mathbf{r}_v \mathbf{r}_w dv dw + \mathbf{r}_w^2 dw^2) \\ &\quad - (\mathbf{r}_u^2 du^2 + \mathbf{r}_v^2 dv^2 + \mathbf{r}_w^2 dw^2) \\ &= \varphi_1(u, v) + \varphi_1(u, w) + \varphi_1(v, w) - \varphi. \end{aligned}$$

Let us denote coefficients of the uv -isoparametric surface patch first fundamental form by $E = \mathbf{r}_u^2$, $F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v$, $G = \mathbf{r}_v^2$, and similarly coefficients of the uw -isoparametric surface patch first fundamental form by $E = \mathbf{r}_u^2$, $F^* = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_w$, $G^* = \mathbf{r}_w^2$, and coefficients of the vw -isoparametric surface patch first fundamental form by $G = \mathbf{r}_v^2$, $F^{**} = \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w$, $G^* = \mathbf{r}_w^2$.

Then we can write the following formula

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, v, w) &= -(Edu^2 + Gdv^2 + G^*dw^2) \\ &\quad + (Edu^2 + 2Fdudw + Gdw^2) \\ &\quad + (Edv^2 + 2F^*dudw + G^*dw^2) \\ &\quad + (Gdv^2 + 2F^{**}dvdw + G^*dw^2). \end{aligned}$$

The discriminant of the hyperpatch first differential form is a positive number expressed in a hyperpatch regular point as the value of the determinant

$$D = \det \begin{pmatrix} E & F & F^* \\ F & G & F^{**} \\ F^* & F^{**} & G^* \end{pmatrix} = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w]^2,$$

where $[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w]$ is the mixed triple scalar product of the first partial derivatives of the hyperpatch point function with respect to the variables u, v, w .

The first differential form of the hyperpatch created from the basic surface patch by the class of geometric transformations can be calculated as

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r})^2 &= (d\mathbf{p} \cdot \mathbf{T}(w) + \mathbf{p}(u, v) \cdot \mathbf{T}'(w)dw)^2 \\ &= (d\mathbf{p} \cdot \mathbf{T}(w))^2 + 2d\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}(u, v) \cdot \mathbf{T}(w) \cdot \mathbf{T}'(w)dw \\ &\quad + (\mathbf{p}(u, v) \cdot \mathbf{T}'(w)dw)^2 \\ &= \varphi_1(u, v) \cdot \mathbf{T}^2(w) \\ &\quad + 2\sqrt{\varphi_1(u, v)} \mathbf{p}(u, v) \cdot \mathbf{T}(w) \cdot \mathbf{T}'(w)dw \\ &\quad + \mathbf{p}^2(u, v) \cdot \mathbf{T}'^2(w)dw^2. \end{aligned}$$

6 Volume and density of distribution of the interior points

The volume of the hyperpatch represented analytically by the point function

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w), h(u, v, w))$$

defined and at least C^3 continuous on the region $\Omega = [0, 1]^3$, is the value of the triple integral

$$V = \iiint_{\Omega} \sqrt{D(u, v, w)} dudvdw = \iiint_{\Omega} |(\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w)| dudvdw$$

where $D(u, v, w)$ is the function of the discriminant of the hyperpatch first differential form.

The mixed triple scalar product of the tangent vectors to the isoparametric curve segments in the regular point of the

hyperpatch can be expressed in the following forms

$$s = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w] = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w = [\mathbf{r}_v \mathbf{r}_w \mathbf{r}_u]$$

$$= (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w) \cdot \mathbf{r}_u = [\mathbf{r}_w \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = (\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v$$

and can be calculated from the coefficients of the first fundamental forms of related surface patches determined by pairs of the isoparametric curve segments of the hyperpatch, $\varphi_1(u, v), \varphi_1(u, w), \varphi_1(v, w)$ (Fig.3).

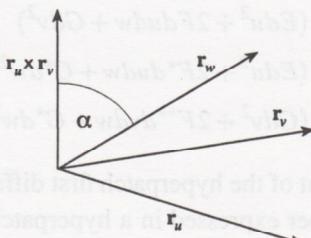


Fig. 3

The angle that forms the vector product of tangent vectors \mathbf{r}_u and \mathbf{r}_v (normal vector to the isoparametric surface patch) with the third tangent vector \mathbf{r}_w is denoted α , while

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

$$\alpha = |\angle(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w)|, \quad \cos \alpha = \frac{s}{\sqrt{EG - F^2} \cdot \sqrt{G^*}}.$$

The similar relations are valid also for other two tangent vectors and their related angles β and γ with the vector products $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w$ and $\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u$

$$|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w| = \sqrt{GG^* - F^{**2}},$$

$$\beta = |\angle(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w, \mathbf{r}_u)|, \quad \cos \beta = \frac{s}{\sqrt{GG^* - F^{**2}} \cdot \sqrt{E}},$$

$$|\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u| = \sqrt{EG^* - F^{*2}},$$

$$\gamma = |\angle(\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)|, \quad \cos \gamma = \frac{s}{\sqrt{EG^* - F^{*2}} \cdot \sqrt{G^*}}.$$

We can calculate (for $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2}$)

$$h = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma}$$

$$= \frac{1}{s^2} ((EG - F^2)G^* + (GG^* - F^{**2})E + (EG^* - F^{*2})G)$$

$$= \frac{1}{s^2} (3EGG^* - G^*F^2 - EF^{**2} - GF^{*2})$$

and express the mixed triple scalar products s for the calculation of the hyperpatch volume V in the case of the nonzero value of h

$$|s| = \sqrt{\frac{(3EGG^* - G^*F^2 - EF^{**2} - GF^{*2})}{h}},$$

$$h = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma},$$

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |s| dudvdw.$$

Changing the position of the point on the hyperpatch for variable curvilinear coordinates $(u, v, w) \in \Omega = [0, 1]^3$ we receive a function in three variables defined on Ω . If the value of angle α, β , or γ equals to 0 or π , we speak about weakly dense distribution of points in the direction of the concerned tangent vector.

For the constant values of all angles $\alpha = \beta = \gamma = 0$ or π , and therefore constant function $h(u, v, w) = 3$, the mixed triple scalar product of the tangent vectors to the isoparametric curve segments of the hyperpatch can be calculated from the expression

$$s = \sqrt{\frac{(3EGG^* - G^*F^2 - EF^{**2} - GF^{*2})}{3}}$$

$$= \sqrt{EGG^* - \frac{1}{3}(G^*F^2 + EF^{**2} + GF^{*2})}$$

and we speak about weakly dense distribution of hyperpatch interior. Geometric interpretation is obvious: if all angles are of the same zero value, the tangent vectors form an orthogonal reper, and the tangent trihedron is rightangled.

For the extreme values $\alpha, \beta, \gamma = \frac{\pi}{2}$ the number h streams to infinity, $\lim_{h \rightarrow \infty} s = 0$, and we speak about dense distribution of points in the direction of the related tangent vector.

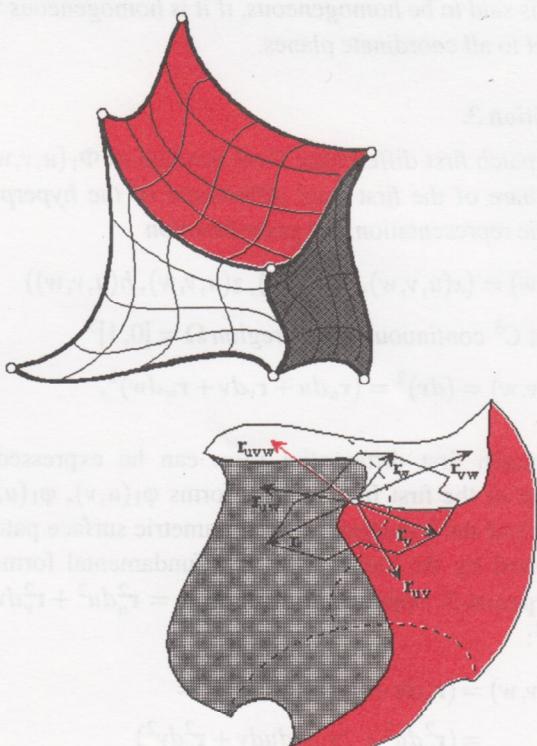


Fig. 4

In the Fig.4 there is an illustration of the Bezier approximation hyperpatch determined by the grid of $4 \times 4 \times 4$ real points in the space. An interpolation hyperpatch created

from the basic grid of 8 real corner points – vertices, 24 tangent vectors to the isoparametric boundary curve segments – edges, 24 twist vectors to the boundary isoparametric surface patches – facets and 8 density vectors in the

vertices determining the distribution of the interior points in the neighbourhood of the corresponding vertices is illustrated, while the data vectors (tangent, twist and density) are depicted in the figure in one of the vertices.

References

- [1] MANTYLA, M.: *An Introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press, 1988
- [2] MORTENSON, M.: *Geometric Modeling*, John Wiley and Sons, New York, 1985
- [3] VELICOVÁ, D.: *Geometry of Solid Interpolation*, Proceedings of the 12th Spring Conference on Computer Graphics, Bratislava 1996, Slovakia
- [4] VELICOVÁ, D.: *Interpolation of Solids*, Proceedings of the 7th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, Cracow 1996, Poland
- [5] VELICOVÁ, D.: *Geometric Modelling of Hyperpatches*, KoG 2, Zagreb, 1997

Daniela Velichová

Dept. of Maths, Mechanical Eng. Faculty
Slovak Technical University
Námestie Slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia
tel: +421 7 3596 394, fax: +421 7 749
e-mail: velichov@sjf.stuba.sk

Originelle wissenschaftliche Arbeit

Angenommen 28. 12. 1999.

GERT MEINL

Schließungssätze an Dreiecken im Umfeld des Satzes von WALLACE-SIMSON

Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Gerhard Geise zum 70. Geburtstag gewidmet

Zaključni teoremi o trokutu u području Wallace–Simsonovog teorema

SAŽETAK

Smatra se ([4]) da je Wallace–Simsonov teorem jedan od najljepših na području geometrije trokuta. Osobitu važnost ima u ravninskoj kinematici ([2,5]) gdje na način koji ne nalazimo nigdje drugdje u literaturi potiče raspravu o nekim klasičnim, ali i novim teoremitima. Rad se bavi nekim istaknutim točkama i krivuljama koje nastaju zrcaljenjem točke na stranicama trokuta.

Ključne riječi: Wallace–Simsonov teorem, homologni položaji, polarni trokut

Closure Theorems at Triangles in the Sphere of WALLACE–SIMSON Theorem

ABSTRACT

The WALLACE–SIMSON theorem is considered ([4]) as one of the most beautiful theorems in the field of Geometry of triangles. Especially its importance for plane kinematics ([2,5]) is the starting point for discussing some classical but also new theorems in the sphere of the WALLACE–SIMSON theorem so far not found in any literature. The paper deals with some characteristic points and curves, if we reflect a point at the sides of a triangle.

Key words: Wallace–Simson theorem, homological positions, polar triangle

MSC: 51N20, 53A17

Gegeben seien in der Euklidischen Ebene ein Dreieck $P_{12}P_{23}P_{31}$ und ein Punkt X . Die Spiegelung von X an den Seiten des Dreiecks liefert die Punkte X_1, X_2, X_3 . Interpretiert man das Dreieck $P_{12}P_{23}P_{31}$ als Poldreieck dreier Lagen einer bewegten Ebene ([2,5]), so sind X_1, X_2, X_3 homologe Punktlagen. Der Punkt X heißt *Grundpunkt* dieser homologen Punktlagen (Bild 1). Der Mittelpunkt X^* des Kreises k durch die Lagen X_1, X_2, X_3 ist der zu X *isogonale* Punkt bezüglich des Poldreiecks.

Satz 1 (WALLACE–SIMSON):

Genau für die Punkte X des Umkreises k eines Poldreiecks $P_{12}P_{23}P_{31}$ gilt: Die homologen Lagen X_1, X_2, X_3 sind kollinear.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 entartet der Kreis k durch die homologen Lagen zu einer Geraden $w := k$, der sogenannten WALLACE–Geraden¹ zum Punkt X (Bild 2).

Alle WALLACE–Geraden eines Dreiecks bilden ein Gerauenbüschel durch den Höhenschnittpunkt H .

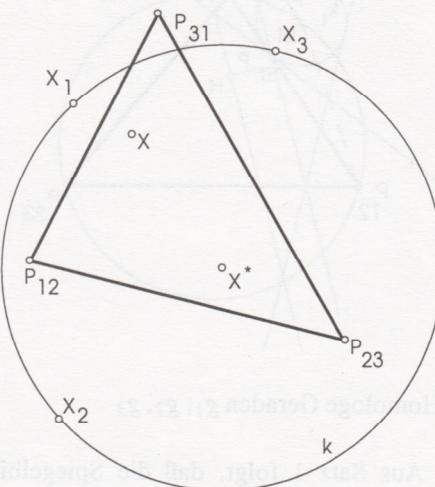
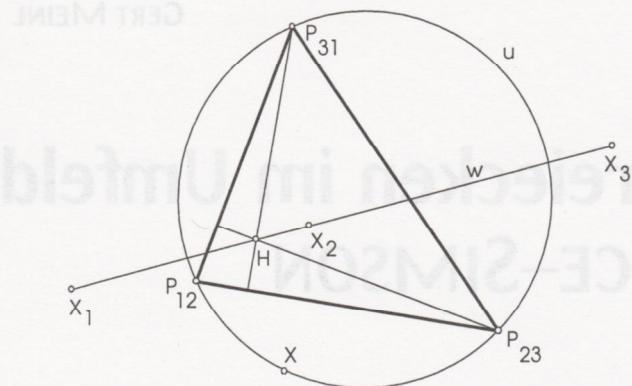


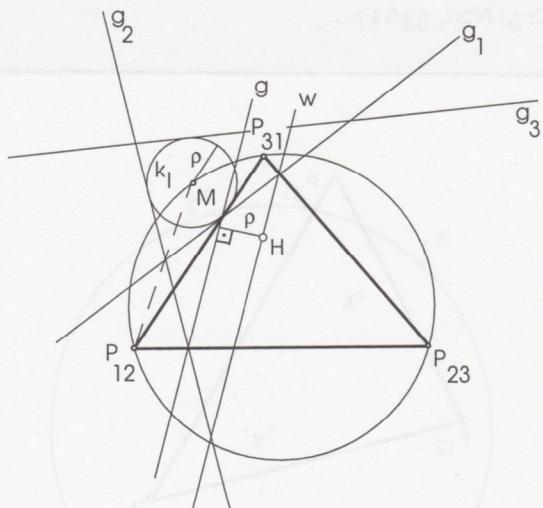
Bild 1: Homologe Punkte X_1, X_2, X_3

¹ In der ursprünglichen Fassung des Satzes ([8]) wird als WALLACE–Gerade die zu w parallele Verbindungsgerade der Lotfußpunkte von X auf die Dreiecksseiten bezeichnet.

Bild 2: WALLACE-Gerade w zum Punkt X **Satz 2:**

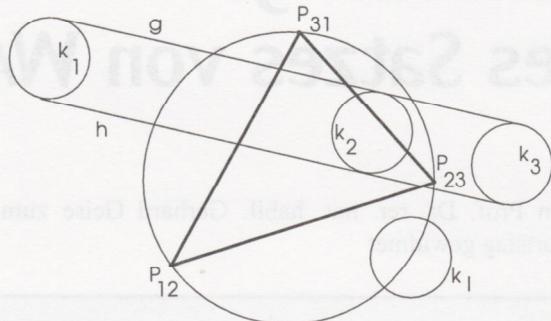
Spiegelt man eine Gerade g an den Seiten des Poldreiecks $P_{12}P_{23}P_{31}$ (Bild 3), dann gilt für das durch g_1, g_2, g_3 bestimmte Dreiseit homologer Geraden:

- (I) Der Radius ρ des Inkreises k_I des Dreiseits ist gleich dem Abstand von g zum Höhenschnittpunkt H .
- (II) Der Inkreismittelpunkt M des Dreiseits liegt auf dem Umkreis des Poldreiecks. Die WALLACE-Gerade w zum Punkt M ist die zu g parallele Gerade durch H .
- (III) M ist Perspektivzentrum des Poldreiecks und des Dreiseits.

Bild 3: Homologe Geraden g_1, g_2, g_3

Beweis. Aus Satz 1 folgt, daß die Spiegelbilder einer WALLACE-Geraden w sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt M auf dem Umkreis schneiden. Für eine zu w im Abstand ρ parallele Gerade folgen genau die Aussagen (I) und (II). Schließlich sind die zur Schar der zu w parallelen Geraden gehörenden Spiegeldreiseite zentrisch ähnlich mit Ähnlichkeitszentrum M . Die Eckpunkte der Spiegeldreiseite liegen notwendig auf den Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte des Dreiecks mit M und es folgt (III).

Sei k_I ein beliebiger Kreis mit Radius ρ und Mittelpunkt auf dem Umkreis des Poldreiecks. Die gemeinsamen Tangenten g und h an die homologen Lagen k_1, k_2, k_3 des Kreises k_I sind genau jene Grundgeraden, deren Dreiseite homologer Lagen k_I als Inkreis besitzen (Bild 4).

Bild 4: Grundgeraden g und h , deren homologe Lagen einen Kreis k_I berühren.

Für $\rho = 0$ sind g und h mit der WALLACE-Geraden zum Punkt M identisch. Die Ermittlung jener Grundgeraden, deren Inkreise ihrer homologen Lagen einen vorgegebenen Radius besitzen bzw. eine beliebig gewählte Gerade berühren, ist elementar.

Im weiteren sind alle Kreise k durch homologe Punktlagen gesucht, die einen konstanten Radius besitzen bzw. mit einem beliebig vorgegebenen Punkt inzidieren. Sind e_{12}, e_{23}, e_{31} die Abstände des zu X isogonalen Punktes X^* zu den entsprechenden Eckpunkten des Poldreiecks, r der Radius des Kreises k (mit Mittelpunkt X^*) durch X_1, X_2, X_3 und p^2 die Potenz von X^* bezüglich des Poldreiecksumkreises k_u , so gilt die folgende Idendität ([1,5])

$$e_{12} e_{23} e_{31} = p^2 r. \quad (1)$$

Aus (1) folgt, daß alle Grundpunkte X zu Umkreisen homologer Lagen mit konstantem Radius auf einer trizirkularen Kurve 6. Grades, der sogenannten R_1 -Kurve [5], liegen. Insbesondere enthält die R_1 -Kurve mit jedem Punkt X auch dessen isogonalen Punkt X^* .

Für die R_1 -Kurve wies ALT [1] eine Realisierung als Koppelkurve eines Gelenkvierecks nach. Es soll nunmehr gezeigt werden, daß dieselbe Kurve punktweise als Schnitt entsprechender Kreise zweier Kreisbüschel konstruiert werden kann.

Da X, X_i, X_j jeweils auf Kreisen um P_{ij} liegen, gilt wegen des Zentriwinkelsatzes für die Winkel in Bild 5

- $\angle X P_{12} P_{23} = \angle X X_1 X_2 =: \alpha_1,$
- $\angle X P_{12} P_{31} = \angle X X_2 X_1 =: \alpha_2,$
- $\angle X P_{23} P_{31} = \angle X X_2 X_3 =: \beta_1,$
- $\angle X P_{23} P_{12} = \angle X X_3 X_2 =: \beta_2,$
- $\angle X P_{31} P_{12} = \angle X X_3 X_1 =: \gamma_1,$
- $\angle X P_{31} P_{23} = \angle X X_1 X_3 =: \gamma_2.$

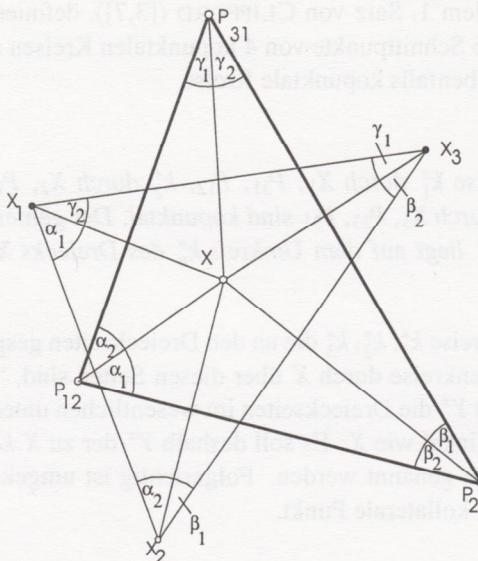


Bild 5

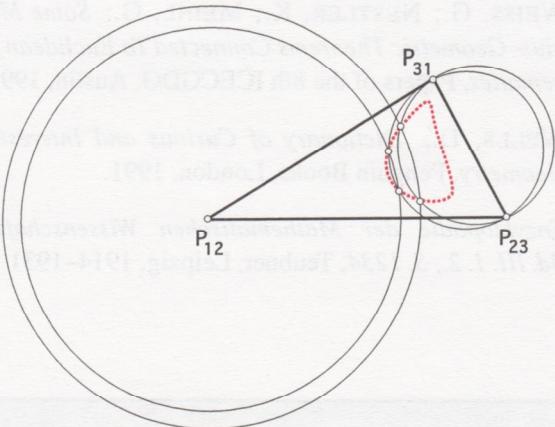
Für die homologen Lagen X'_1, X'_2, X'_3 aller Grundpunkte X' auf dem Kreis durch X, P_{23}, P_{31} gilt dann

$$\angle X'_2 X'_3 X'_1 = \angle X_2 X_3 X_1 = \beta_2 + \gamma_1 = \text{const.}$$

Läuft dagegen X' auf dem Kreis durch X mit Mittelpunkt P_{12} , so ist $X'_1 X'_2$ eine Sehne konstanter Länge desselben Kreises zum Zentriwinkel $2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Ein fest gewählter Radius r des Kreises durch X'_1, X'_2, X'_3 ordnet jedem Kreis $\beta_2 + \gamma_1 = \text{const.}$ über $P_{23}P_{31}$ in eindeutiger Weise einen Kreis um P_{12} mit Radius R gemäß

$$R \cos(\beta_2 + \gamma_1) = r \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

zu. Die (reellen) Schnittpunkte einander zugeordneter Kreise sind genau die gesuchten Grundpunkte (Bild 6).

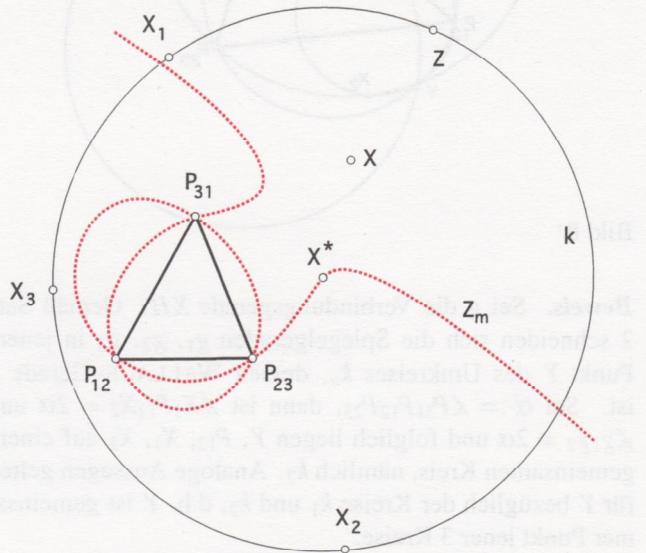
Bild 6: Punktweise Erzeugung der R_1 -Kurve mittels zweier Kreisbüschel

Ersetzt man in (1) r durch den Abstand $\text{dist}(X^*, Z)$, wobei Z ein beliebiger festgewählter Punkt sei, dann ist (1) genau für jene Punkte X^* erfüllt, die Mittelpunkte von mit Z inzidierenden Spiegeldreiecksumkreisen sind. Es erweist sich dabei (1) als Gleichung 5. Grades. Die Eckpunkte des Poldrei-

ecks sind Singularitäten der Lösungsquintik (Bild 7), welche Z_m -Kurve genannt werden soll.

Für $Z = H$ zerfällt die Kurve Z_m in die Ferngerade und eine Quartik mit genau 3 reellen, in die Ecken des Poldreiecks fallenden isolierten Punkten. Es sind also die WALLACE–Geraden (im Sinne der Möbius–Geometrie) die einzigen Kreise durch homologe Punktlagen, welche mit H inzidieren.

Bei welchen Lagen von Z spaltet sich eine eigentliche Gerade von der Z_m ab, d.h. wann existiert ein mit Z inzidierendes Kreisbüschel? Eine solche Gerade ist in trivialer Weise jede Poldreiecksseite. Man wähle für Z den gegenüberliegenden Pol oder dessen Spiegelpunkt bezüglich dieser Seite. Im ersten Fall zerfällt die Restquartik in ein Paar konjugiert komplexer Geraden durch den Pol und in den mit H inzidierenden Kreis durch die beiden übrigen Pole.

Bild 7: Z_m -Kurve und Mittelpunkt X^* eines mit Z inzidierenden Kreises k durch homologe Punkte.

Bemerkung 1: Jeder (reelle) Fernpunkt der Z_m ist ‘‘Mittelpunkt’’ einer WALLACE–Geraden durch Z . Für $Z \neq H$ existiert damit genau ein Fernpunkt der Z_m mit einer zur WALLACE–Geraden HZ normalen Asymptote. Sei a_Z die Asymptote der Z_m und Z^* der Schnittpunkt von a_Z und HZ . Experimentell kann gezeigt werden, daß Z der Schnittpunkt der Asymptote der Z_m^* mit HZ ist. Ein geometrischer Beweis des involutorischen Charakters der Abbildung $\iota : Z \rightarrow \iota(Z) := a_Z \cap Hz$ der Punkte auf einer WALLACE–Geraden HZ ist nicht bekannt.

Bemerkung 2: Indem man sukzessive die homologen Lagen X_1, X_2, X_3 als neues Poldreieck zum selben festgewählten Grundpunkt X wählt, wird ein iterativer Prozeß erklärt, der eine Folge von Dreiecken liefert [6], die aus 3 Serien untereinander ähnlicher Dreiecke besteht. Gemäß der in Bild 5 dargestellten Winkelverhältnisse erhält man nämlich nach jeweils 3 Schritten ein zum Ausgangsdreieck ähnliches Dreieck.

Ein weiterer eng mit WALLACE–Geraden verknüpfter Satz ist folgender

Satz 3:

Die Kreise k_1 durch X_2, X_3, P_{23} , k_2 durch X_3, X_1, P_{31} und k_3 durch X_1, X_2, P_{12} sind kopunktal. Der gemeinsame Punkt Y liegt auf dem Umkreis k_u des Dreiecks $P_{12}P_{23}P_{31}$ (Bild 8).

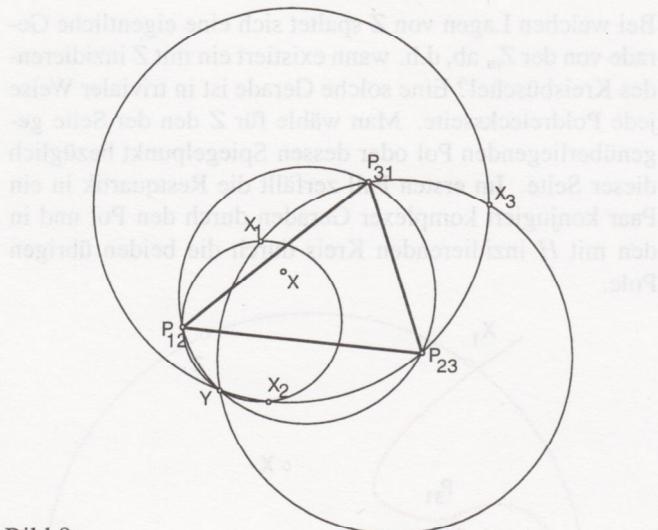


Bild 8

Beweis. Sei g die Verbindungsgerade XH . Gemäß Satz 2 schneiden sich die Spiegelgeraden g_1, g_2, g_3 in jenem Punkt Y des Umkreises k_u , dessen WALLACE–Gerade g ist. Sei $\alpha := \angle P_{31}P_{12}P_{23}$, dann ist $\angle X_1P_{12}X_2 = 2\alpha$ und $\angle g_1g_2 = 2\alpha$ und folglich liegen Y, P_{12}, X_1, X_2 auf einem gemeinsamen Kreis, nämlich k_3 . Analoge Aussagen gelten für Y bezüglich der Kreise k_1 und k_2 , d.h. Y ist gemeinsamer Punkt jener 3 Kreise.

Bemerkung 3: Satz 3 wird in [7] ohne Beweis erwähnt. Insbesondere fehlt dort der Zusammenhang des gemeinsamen Punktes Y mit der WALLACE–Geraden XH .

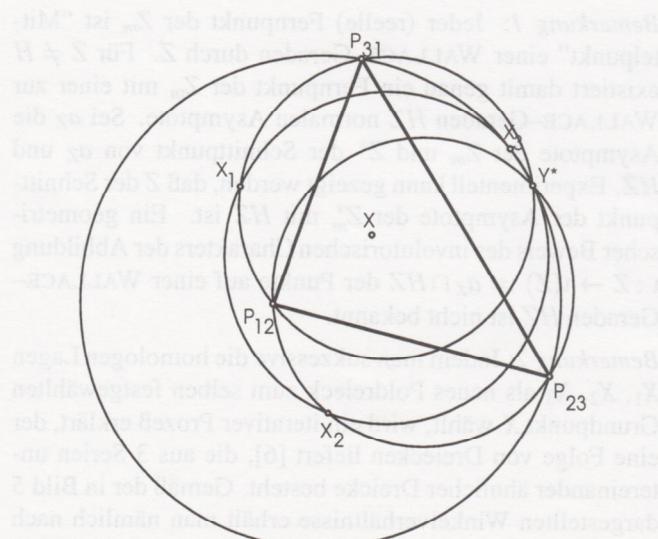


Bild 9

Gemäß dem 1. Satz von CLIFFORD ([3,7]), definieren die übrigen 6 Schnittpunkte von 4 kopunktalen Kreisen noch 4 weitere ebenfalls kopunktale Kreise.

Satz 4:

Die Kreise k_1^* durch X_1, P_{31}, P_{12} , k_2^* durch X_2, P_{12}, P_{23} und k_3^* durch X_3, P_{23}, P_{31} sind kopunktal. Der gemeinsame Punkt Y^* liegt auf dem Umkreis k_u^* des Dreiecks $X_1X_2X_3$ (Bild 9).

Da die Kreise k_1^*, k_2^*, k_3^* die an den Dreieckseiten gespiegelten Sehnenkreise durch X über diesen Seiten sind, „sieht“ der Punkt Y^* die Dreieckseiten im wesentlichen unter demselben Winkel wie X . Es soll deshalb Y^* der zu X *kollaterale* Punkt genannt werden. Folgerichtig ist umgekehrt X der zu Y^* *kollaterale* Punkt.

Literatur

- [1] ALT, H.: *Zur Synthese der ebenen Mechanismen*, ZAMM, 1 (1921), 373–398.
- [2] BOTTEMA, O.; ROTH, B.: *Theoretical Kinematics*, Dover Publications Inc., New York, 1979.
- [3] COXETER, H. S. M.: *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser Verlag, 1963.
- [4] FLADT, K.: *Analytische Geometrie Spezieller Flächen*, Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt/M., 1962.
- [5] LICHTENHELD, W.: *Konstruktionslehre der Getriebe*, Akademie–Verlag, Berlin, 1961.
- [6] WEISS, G.; NESTLER, K.; MEINL, G.: *Some Möbius–Geometric Theorems Connected To Euclidean Kinematics*, Papers of the 8th ICECGDG, Austin, 1998.
- [7] WELLS, D.: *Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, London, 1991.
- [8] *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. III. 1. 2., S. 1234, Teubner, Leipzig, 1914–1931

Dr. Gert Meinl

Technische Universität Dresden

Willersbau, Zi.–Nr. C9,

Zellescher Weg 12–14, 01069 Dresden

tel: 4632877, fax: 4636927

e-mail: meinl@math.tu-dresden.de

Stručni rad

Prihvaćeno 15. 10. 1999.

Pramen konika zadan pomoću jedne dvostrukih i dviju jednostrukih realnih točaka

Conic Section Pencil Given by a Double Point and Two Single Real Points

ABSTRACT

The algorithm is presented for the determination of coefficients in the equation of the type IV conic section pencils when the pencil is given by three base points one of which is a double point. In order to work with the points in infinity, the homogeneous coordinates are introduced. The approach is illustrated by several examples.

Key words: conic section pencil, homogeneous coordinates, computer graphics

Pramen konika zadan pomoću jedne dvostrukih i dviju jednostrukih realnih točaka

SAŽETAK

Prikazan je algoritam za određivanje koeficijenata u jednadžbi pramena konika tipa IV kad je pramen zadan s tri točke od kojih je jedna dvostruka. Da bi se moglo radići s neizmerno dalekim točkama uvedene su homogene koordinate. Postupak je ilustriran s nekoliko primjera.

Ključne riječi: pramen konika, homogene koordinate, računalna grafika

MSC: 51N99

1. Uvod

Pramen konika općenito je određen s četiri realne i različite točke A, B, C i D . Pramen konika tipa IV (Šćurić i Sachs, 1995, 1997) karakteriziran je svojstvom da se temeljne točke C i D podudaraju. Tom dvostrukom točkom prolazi zajednička tangenta svih konika pramena.

MILJENKO LAPAIN

Primenjivo je i za pramen konika zadan pomoću jedne dvostrukih i dviju jednostrukih realnih točaka. U ovome radu je predstavljen algoritam za određivanje koeficijenata u jednadžbi pramena konika tipa IV, kada je pramen zadan s tri točke od kojih je jedna dvostruka i zajedničkom tangentom svih konika pramena. Postupak se temelji na primjeni homogenih koordinata kako bi se i neizmerno daleke točke ravnine mogle analitički obuhvatiti posve analogno kao i točke u konačnosti.

Grafički prikaz pramena konika može se učinkovito ostvariti primjenom računala i priključenog uređaja za crtanje. Matematička osnova razvijenog softvera opisana je u radu (Lapaine 1997). U ovome radu daje se algoritam za računanje koeficijenata u jednadžbi pramena konika tipa IV, ako je pramen zadan s tri točke (od kojih je jedna dvostruka) i zajedničkom tangentom svih konika pramena. Postupak se temelji na primjeni homogenih koordinata kako bi se i neizmerno daleke točke ravnine mogle analitički obuhvatiti posve analogno kao i točke u konačnosti.

2. Pramen konika

Neka su

$$F(x, y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$G(x, y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0, \quad (2.2)$$

jednadžbe dviju konika. Za proizvoljni $\mu \in R$ sastavimo izraz

$$H(x, y) = F(x, y) + \mu G(x, y). \quad (2.3)$$

Polinom H je oblika

$$H(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad (2.4)$$

gdje smo označili

$$a = a_1 + \mu a_2, \dots, f = f_1 + \mu f_2. \quad (2.5)$$

Za svaki pojedini $\mu \in R$, izraz

$$H(x, y) = F(x, y) + \mu G(x, y) = 0 \quad (2.6)$$

je jednadžba konike ako je barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule. Ako je $a = b = c = 0$ tada se radi o specijalnim, ali jednostavnim slučajevima (Lapaine, 1997).

Za zadane realne brojeve $a_1, b_1, \dots, f_1, a_2, b_2, \dots, f_2$ i $\mu \in R$ skup svih konika obuhvaćenih jednadžbom (2.6) naziva se pramenom konika. Konike pomoću kojih je pramen definiran i kojima odgovaraju jednadžbe

$$F(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad G(x, y)$$

nazivaju se osnovnim konikama pramena.

Za svaki čvrsti $\mu \in R$ jednadžba (2.4) predstavlja jednu kružnicu pramena ili u specijalnom slučaju prazan skup. Jedan način određivanja tipa konike s mogućnošću grafičkog prikazivanja pomoću računala objašnjen je u radu (Lapaine i Jovičić 1996).

3. Pramen konika zadan pomoću jedne dvostrukе i dviju jednostrukih realnih točaka

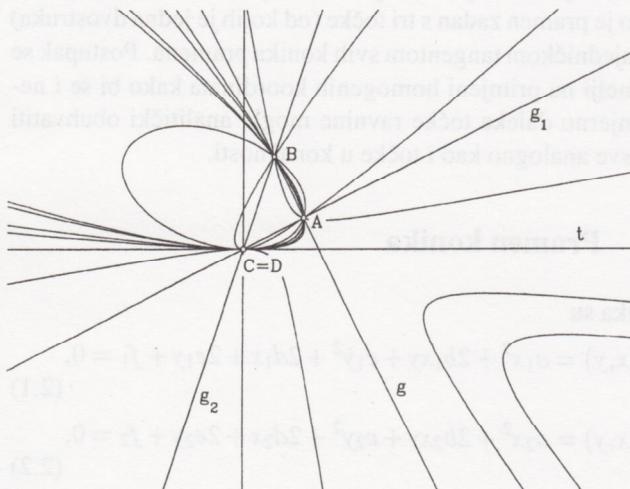
Ako su zadane četiri točke $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, u ravnini, od kojih nikoje tri nisu kolinearne, te ako je

$$g_{ik} = a_{ik}x + b_{ik}y + c_{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad (3.1)$$

jednadžba pravca P_iP_k , tada je jednadžbom

$$g_{12}g_{34} + \mu g_{13}g_{24} = 0 \quad (3.2)$$

predočen pramen konika kojem su točke P_i temeljne. Sve konike pramena prolaze točkama P_i (Cesarec 1957).



Slika 1: Pramen konika tipa IV

Neka su sada zadane tri nekolinearne točke A , B i C i neka je t bilo koji pravac koji prolazi točkom C , ali ne sadrži točke A i B . Označimo pravac kroz točke A i B sa g , pravac kroz točke A i C sa g_1 , te pravac kroz točke B i C sa g_2 (vidi sliku 1). Ako su

$$t = 0, \quad g = 0, \quad g_1 = 0 \quad \text{i} \quad g_2 = 0 \quad (3.3)$$

jednadžbe navedenih pravaca, tada je

$$g_1g_2 + \mu gt = 0 \quad (3.4)$$

jednadžba pramena konika kojem su A , B i C temeljne točke, a t zajednička tangenta svih konika pramena. Zaista, točka A je temeljna točka pramena jer leži na prvcima g i g_1 , točka B je temeljna jer leži na prvcima g i g_2 , a točka C je temeljna jer je sjecište pravaca t i g_1 (g_2). Za svaki zadani μ jednadžba (3.4) predstavlja jednu koniku pramena. Za točku (x, y) koja je zajednička proizvoljnoj konici pramena i pravcu $t(x, y) = 0$ mora biti

$$g_1(x, y)g_2(x, y) = 0, \quad (3.5)$$

što vrijedi samo za točku koja je istovremeno na prvcima t i g_1 ili t i g_2 . Dakle, radi se o točki C . Odатle zaključujemo da je pravac t zajednička tangenta svih konika pramena jer sa svakom konikom ima samo jednu zajedničku točku. Ta zajednička točka C naziva se dvostrukom temeljnom točkom pramena. Može se također reći i da je pramen zadan s četiri točke od kojih su dvije pale zajedno.

4. Homogene kartezijeve koordinate u ravnini

Pod homogenim kartezijevim koordinatama točke $P(x, y)$ podrazumijevamo uređenu trojku realnih brojeva (x_0, x_1, x_2) za koje je

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}. \quad (4.1)$$

Iz definicije slijedi da homogene koordinate (x_0, x_1, x_2) nisu jednoznačno određene pomoću nehomogenih (x, y) , jer ih još možemo pomnožiti bilo kojim realnim brojem različitim od nule, a da ipak daju iste vrijednosti x i y . Tako npr. za $x = 3$, $y = 2$ imamo $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, ali i $x_0 = 2$, $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ itd.

Ako je $x_0 = 0$, a x_1 i x_2 različito od nule, tada je $x = \infty$ i $y = \infty$, tj. ta je točka neizmjereno daleka točka ravnine i leži na spojnici ishodišta koordinatnog sustava s točkom (x_1, x_2) . I baš zbog toga, što su neizmjereno daleke točke ravnine karakterizirane time da im je homogena koordinata jednaka nuli, uvodimo homogene koordinate. Tako možemo te osobite točke ravnine analitički svladavati jednakom kao i točke u konačnosti (Cesarec 1957). Na primjer, neizmjereno daleka točka osi x ima homogene koordinate $(0, 1, 0)$, a ona na osi y $(0, 0, 1)$.

Uobičajena oznaka za homogene koordinate je $(x_0 : x_1 : x_2)$, ali u ovome radu će se rabiti (x_0, x_1, x_2) jer se radi o uređenoj trojci brojeva, a ne o produženom razmjeru. Osim toga, takav zapis je identičan onome koji se upotrebljava pri programiranju.

Trojka $(0, 0, 0)$ nema značenja i isključuje se iz razmatranja.

5. Jednadžba pramena konika zadanog pomoću jedne dvostrukе i dviju jednostrukih realnih točaka i homogene koordinate

Neka su pomoću homogenih koordinata zadane tri točke

$$\begin{aligned} A & (x_{0A}, x_{1A}, x_{2A}) \\ B & (x_{0B}, x_{1B}, x_{2B}) \\ C & (x_{0C}, x_{1C}, x_{2C}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Može se vidjeti da se jednadžba pravca g koji prolazi točkama A i B može napisati u obliku

$$g_x x + g_y y + g_z = 0 \quad (5.2)$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} g_x &= \begin{vmatrix} x_{2B} & x_{2A} \\ x_{0B} & x_{0A} \end{vmatrix}, \\ g_y &= - \begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1A} \\ x_{0B} & x_{0A} \end{vmatrix}, \\ g_z &= \begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1A} \\ x_{2B} & x_{2A} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Analogno imamo za pravac g_1 koji prolazi točkama C i A

$$g_{1x}x + g_{1y}y + g_{1z} = 0, \quad (5.4)$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} g_{1x} &= \begin{vmatrix} x_{2A} & x_{2C} \\ x_{0A} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ g_{1y} &= - \begin{vmatrix} x_{1A} & x_{1C} \\ x_{0A} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ g_{1z} &= \begin{vmatrix} x_{1A} & x_{1C} \\ x_{2A} & x_{2C} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

kao i za pravac g_2 koji prolazi točkama C i B

$$g_{2x}x + g_{2y}y + g_{2z} = 0, \quad (5.6)$$

uz označke

$$\begin{aligned} g_{2x} &= \begin{vmatrix} x_{2B} & x_{2C} \\ x_{0B} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ g_{2y} &= - \begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1C} \\ x_{0B} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ g_{2z} &= \begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1C} \\ x_{2B} & x_{2C} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pravac t prolazi točkom C , a njegov smjer neka određuje pomoćna točka T s homogenim koordinatama

$$T = (x_{0T}, x_{1T}, x_{2T}). \quad (5.8)$$

Jednadžba pravca t koji prolazi točkama C i T tada glasi

$$t_x x + t_y y + t_z = 0, \quad (5.9)$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} t_x &= \begin{vmatrix} x_{2T} & x_{2C} \\ x_{0T} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ t_y &= - \begin{vmatrix} x_{1T} & x_{1C} \\ x_{0T} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ t_z &= \begin{vmatrix} x_{1T} & x_{1C} \\ x_{2T} & x_{2C} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

U 3. poglavlju ustanovili smo da je

$$g_1 g_2 + \mu g_t = 0 \quad (3.4)$$

jednadžba pramena konika kojem su A , B i C temeljne točke, a t zajednička tangenta svih konika pramena. Pomoću relacija (5.1)–(5.10) može se izvesti da je $g_1 g_2$ oblika

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= F(x, y) \\ &= a_1 x^2 + 2b_1 xy + c_1 y^2 + 2d_1 x + 2e_1 y + f_1, \end{aligned} \quad (5.11)$$

uz označke

$$\begin{aligned} a_1 &= g_{1x} g_{2x} & b_1 &= \frac{1}{2}(g_{1x} g_{2y} + g_{1y} g_{2x}) \\ c_1 &= g_{1y} g_{2y} & d_1 &= \frac{1}{2}(g_{1x} g_{2z} + g_{1z} g_{2x}) \\ e_1 &= \frac{1}{2}(g_{1y} g_{2z} + g_{1z} g_{2y}) & f_1 &= g_{1z} g_{2z}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Analogno, g_t je oblika

$$\begin{aligned} g_t &= G(x, y) \\ &= a_2 x^2 + 2b_2 xy + c_2 y^2 + 2d_2 x + 2e_2 y + f_2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

uz označke

$$\begin{aligned} a_2 &= g_{xt} & b_2 &= \frac{1}{2}(g_{xt} g_{ty} + g_{yt} g_{tx}) \\ c_2 &= g_{yt} & d_2 &= \frac{1}{2}(g_{xt} g_{tz} + g_{zt} g_{tx}) \\ e_2 &= \frac{1}{2}(g_{yt} g_{tz} + g_{zt} g_{ty}) & f_2 &= g_{zt}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pomoću izvedenih formula možemo sastaviti program za računalo koji na temelju zadanih točaka A , B , C i T određuje koeficijente u jednadžbi pramena

$$\begin{aligned} F(x, y) + \mu G(x, y) &= a_1 x^2 + 2b_1 xy + c_1 y^2 + 2d_1 x + 2e_1 y + f_1 + \\ &+ \mu(a_2 x^2 + 2b_2 xy + c_2 y^2 + 2d_2 x + 2e_2 y + f_2) = 0. \end{aligned}$$

6. Primjeri

Prethodna su razmatranja izvedena početkom 1990-ih radi izrade crteža za rad Klassifikationstheorie der Kegelschnitte vom Typ IV der Isotropen Ebene, II, V. Ščurić i H. Sachsa koji je objavljen 1997.

Za proučavanje geometrije izotropne ravnine može se upotrijebiti npr. monografija H. Sachsa (1987). Budući da računala početkom 1990-ih nisu imala ugrađeno poznavanje geometrije izotropne ravnine, a koliko mi je pozato nemaju ni danas, trebalo se nekako snaći, odnosno pojedine jednadžbe „prevesti“ na jezik geometrije euklidske ravnine. U tu je svrhu, na temelju u ovome radu prikazanih formula, bio sastavljen odgovarajući potprogram za računalo u Basicu, koji polazeći od zadanih homogenih koordinata točaka A , B , C i T određuje koeficijente u jednadžbi prpadnog pramena konika. Postupak se temelji na primjeni homogenih koordinata kako bi se i neizmjerno daleke točke ravnine mogle analitički obuhvatiti analogno kao i one u

konačnosti. Točka C je dvostruka točka, a točka T je pomoćna točka koja zajedno s točkom C definira zajedničku tangentu svih konika pramena.

Nakon što su bili izračunani koeficijenti u jednadžbi pramena, primjena odgovarajućeg programa omogućila je grafičko prikazivanje pramena (Lapaine 1997). Postupak se odvija na taj način da se najprije za svaku krivulju pramena izračunaju koordinate niza uzastopnih točaka. Primor se gustoća točaka uzduž pojedine krivulje i gustoća krivulja u pramenu mogu interaktivno regulirati. Gustoća točaka uzduž pojedine krivulje bira se tako da se pri iscrtavanju ne primijeti izlomljenošć linije, ali da se istovremeno prevelikom gustoćom ne preoptereće memorija i vrijeme izvođenja. Gustoća krivulja u pramenu određuje se odabirom koraka parametra na taj način da na slici ne bude previše linija te time slika nečitljiva i na djelovima zacrnjena, ali da se istovremeno prikaže sve karakteristične krivulje pramena.

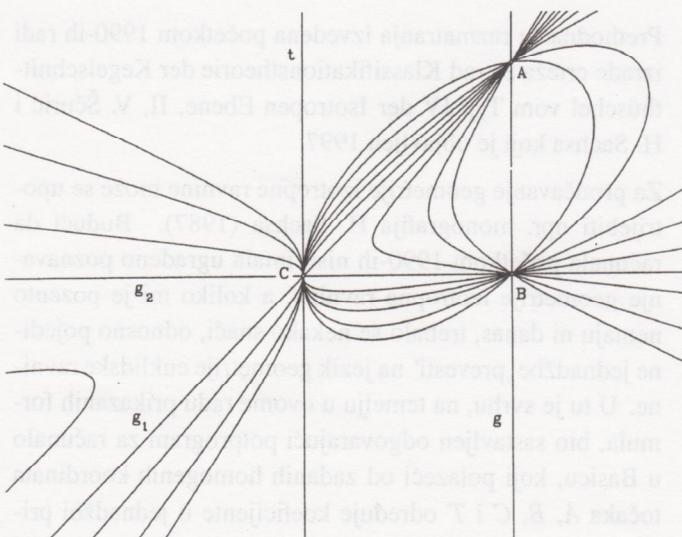
Nakon što smo zadovoljni s prikazom na ekranu monitora, slika se sprema u .DXF zapisu kako bismo je mogli učitati u AutoCAD te dalje uređivati. Tu se prvenstveno misli na opis slike, eventualno brisanje suvišnih elemenata te zadanje boje, odnosno debljine onih linija koje na slici želimo istaknuti.

Primjeri koji slijede označeni su u skladu s radom (Ščurić i Sachs, 1997).

Primjer 1.: Pramen tipa IV₃

Zadane su točke u homogenim koordinatama $A(1,4,4)$, $B(1,4,0)$, dvostruka točka $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $T(1,0,1)$. Jednadžba pramena je:

$$xy - y^2 + \mu(x^2 - 4x) = 0.$$

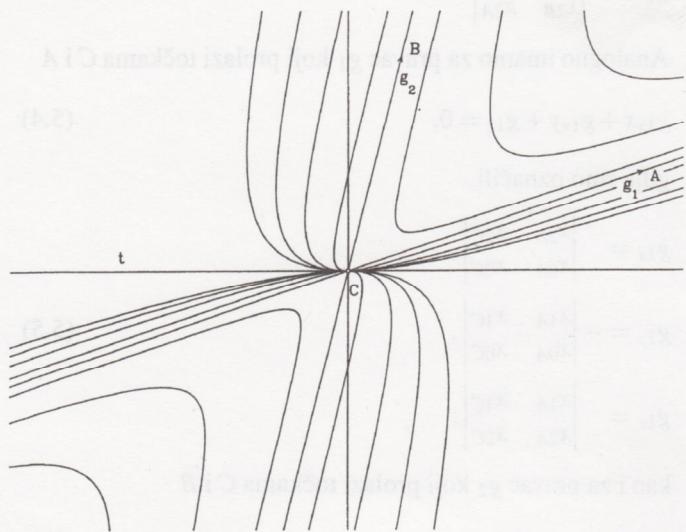


Slika 2: Pramen tipa IV₃

Primjer 2.: Pramen tipa IV_{4,1,1}

Zadane su točke u homogenim koordinatama $A(0,3,1)$, $B(0,1,4)$, dvostruka točka $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$$4x^2 - 13xy + 3y^2 + \mu y = 0.$$

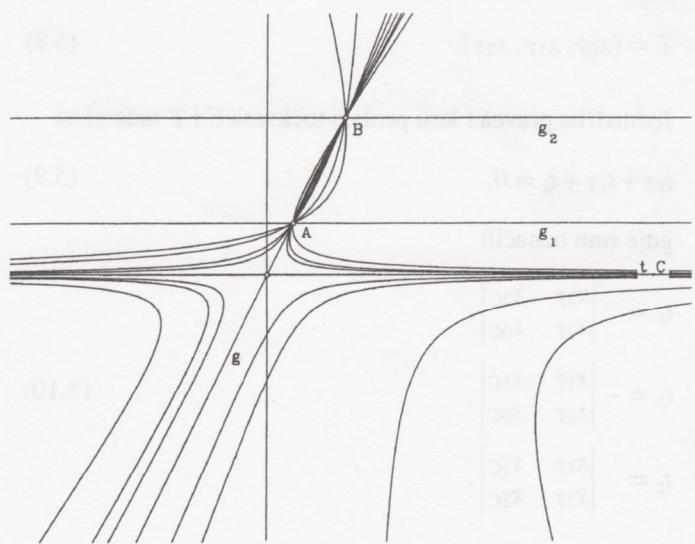


Slika 3: Pramen tipa IV_{4,1,1}

Primjer 3.: Pramen tipa IV_{4,2}

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1,1,2)$, $B(1,3,6)$, dvostruka točka $C(0,1,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$$y^2 - 8y + 12 + \mu(2xy - y^2) = 0.$$

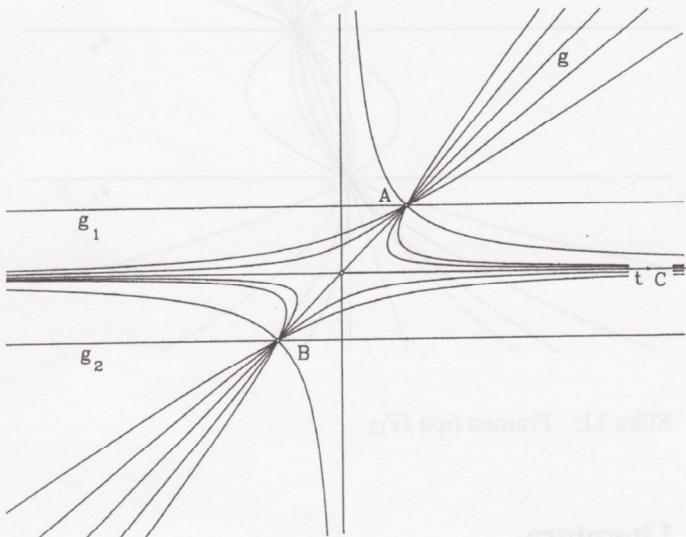


Slika 4: Pramen tipa IV_{4,2}

Primjer 4.: Pramen tipa IV_{4,2k}

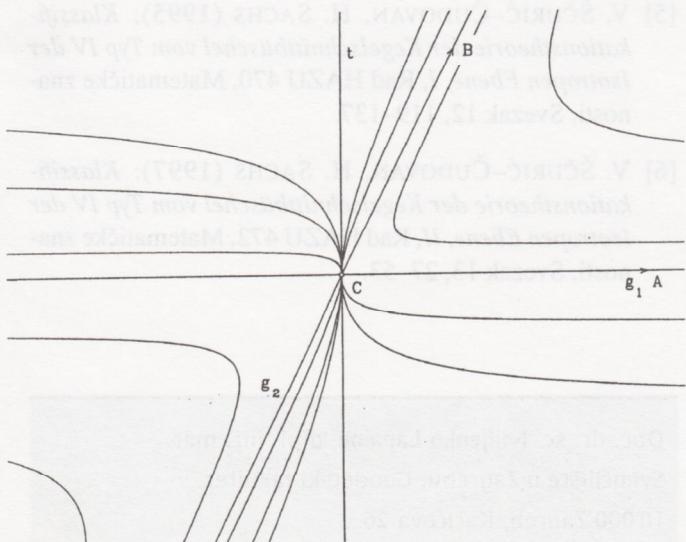
Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, -1)$, dvostruka točka $C(0, 1, 0)$ i pomoćna točka $T(1, 1, 0)$. Jednadžba pramena je:

$$y^2 - 1 + \mu(xy - y^2) = 0.$$

Slika 5: Pramen tipa IV_{4,2k}**Primjer 5.: Pramen tipa IV_{5,1}**

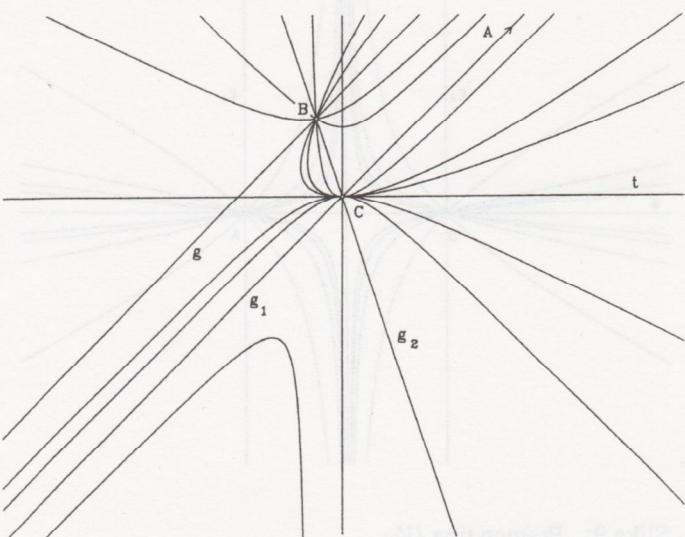
Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0, 1, 0)$, $B(0, 1, 2)$, dvostruka točka $C(1, 0, 0)$ i pomoćna točka $T(1, 0, 1)$. Jednadžba pramena je:

$$2xy - y^2 + \mu x = 0.$$

Slika 6: Pramen tipa IV_{5,1}**Primjer 6.: Pramen tipa IV₇**

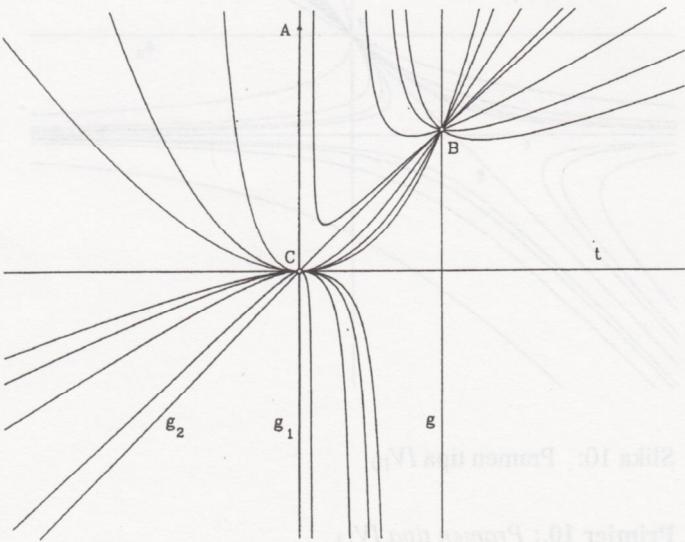
Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0, 1, 1)$, $B(1, -0.5, 1.5)$, dvostruka točka $C(1, 0, 0)$ i pomoćna točka $T(1, 1, 0)$. Jednadžba pramena je:

$$3x^2 - 2xy - y^2 + \mu(xy - y^2 + 2y) = 0.$$

Slika 7: Pramen tipa IV₇**Primjer 7.: Pramen tipa IV₈**

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0, 0, 1)$, $B(1, 2, 2)$, dvostruka točka $C(1, 0, 0)$ i pomoćna točka $T(1, 1, 0)$. Jednadžba pramena je:

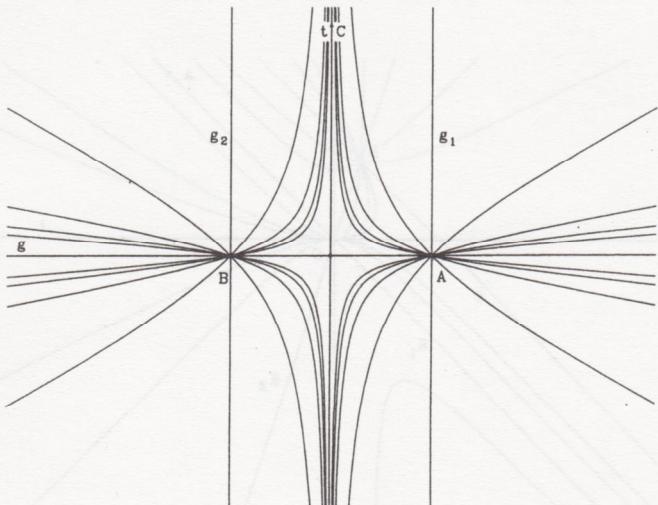
$$x^2 - xy + \mu(xy - 2y) = 0.$$

Slika 8: Pramen tipa IV₈

Primjer 8.: Pramen tipa IV_{9k}

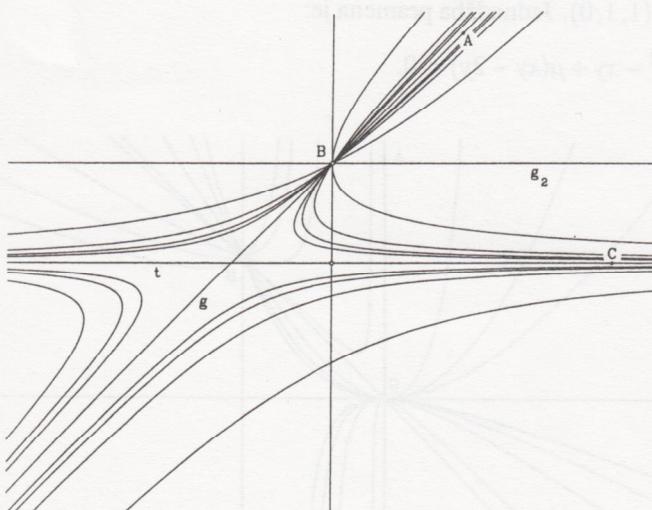
Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1, 2, 0)$, $B(1, -2, 0)$, dvostruka točka $C(0, 0, 1)$ i pomoćna točka $T(1, 0, 1)$. Jednadžba pramena je:

$$x^2 - 4 + \mu xy = 0.$$

Slika 9: Pramen tipa IV_{9k}**Primjer 9.: Pramen tipa IV₁₀**

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0, 1, 1)$, $B(1, 0, 2)$, dvostruka točka $C(0, 1, 0)$ i pomoćna točka $T(1, 1, 0)$. Jednadžba pramena je:

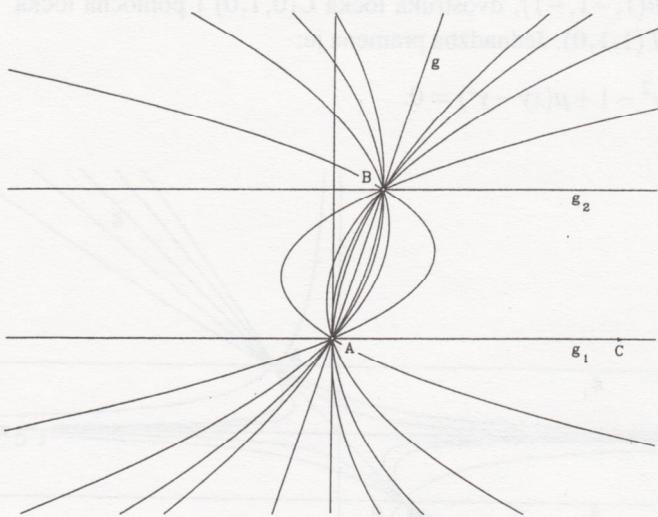
$$y - 2 + \mu(xy - y^2 + 2y) = 0.$$

Slika 10: Pramen tipa IV₁₀**Primjer 10.: Pramen tipa IV₁₃**

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 3)$, dvostruka točka $C(0, 1, 0)$ i pomoćna točka

$T(0, 0, 1)$. Jednadžba pramena je:

$$y^2 - 3y + \mu(3x - y) = 0.$$

Slika 11: Pramen tipa IV₁₃**Literatura**

- [1] R. CESAREC (1957): *Analitička geometrija linearne i kvadratnog područja, I dio.*, Školska knjiga, Zagreb.
- [2] M. LAPAINE (1997): *Grafički prikaz pramena konika pomoću računala*, KoG 2, 43–47.
- [3] M. LAPAINE, D. JOVIČIĆ (1996): *Grafički prikazi konika pomoću računala*, KoG 1, 19–26.
- [4] H. SACHS (1987): *Ebene Isotrope Geometrie*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden.
- [5] V. ŠČURIĆ-ČUDOVAN, H. SACHS (1995): *Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der Isotropen Ebene, I*, Rad HAZU 470, Matematičke znanosti, Svezak 12, 119–137.
- [6] V. ŠČURIĆ-ČUDOVAN, H. SACHS (1997): *Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der Isotropen Ebene, II*, Rad HAZU 472, Matematičke znanosti, Svezak 13, 27–53.

Doc. dr. sc. Miljenko Lapaine, dipl. inž. mat.
Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet,
10 000 Zagreb, Kačićeva 26
tel.: 45 61 273, faks.: 48 28 081
e-mail: mlapaine@public.srce.hr

Professional paper
Accepted 31. 10. 1999.

DAGMAR SZARKOVÁ

A New Approach to the Computer Aided Calculation of Points on the Envelope Helical Surface Characteristics

A New Approach to the Computer Aided Calculation of Points on the Envelope Helical Surface Characteristics

ABSTRACT

Presented calculations and the choice of variables $u, v \in [0, 1]$ as curvilinear on the given basic surface φ enable the creation of a versatile programme for the graphical processing of the characteristics not only of the envelope helical, but also rotational surface Φ defined by the basic rotational surface φ . Basic surface φ can be generated from the basic curve c determined by (1) applying a class of revolutions about the coordinate axis x defined by the matrix $T_R(v)$, for $v \in [0, 1]$ (2), that is positioned in the space by the transformation T (3). The envelope helical surface Φ can be created by helical movement of the points on the characteristics. The axis o of the helical movement located into the coordinate axis z is the axis of the surface Φ .

Key words: envelope surface, envelope helical surface, envelope rotational surface, characteristics, meridian section, creative space

An envelope surface Φ is the envelope of a 1-parametric system of surfaces created by a continuous movement of a basic surface φ .

Characteristics is a curve segment along which the envelope surface Φ touches the basic surface φ .

The same envelope surface Φ can be created by the continuous movement of characteristics. (Detailed description of envelope surfaces can be found in Velichová [3].)

Let us deal with an envelope helical surface Φ created by a helical movement (the movement is a class of geometric transformation concatenated from a revolution movement

Novi pristup numeričkom računaju točaka na lukovima dodira ovojnici helikoidne plohe

SAŽETAK

Izloženi proračuni i izbor varijabli $u, v \in [0, 1]$ za krivolinski koordinate na danoj temeljnoj plohi φ omogućuju stvaranje široko primjenjivog programa za grafičko procesuiranje lukova dodira, kako za ovojnici helikoidne plohe tako i za racionalnu plohu Φ određenu temeljnom plohom φ . Temeljna ploha φ može biti generirana iz temeljne krivulje c (1) kao klasa rotacija oko koordinatne osi x , definirana matricom $T_R(v)$ za $v \in [0, 1]$ (2), koja je u prostoru smještena pomoću transformacije T (3). Ovojnica helikoidne plohe Φ može nastati helikoidnim gibanjem točaka luka dodira. Os o helikoidnog gibanja, smještena na koordinatnu os z , ujedno je i os plohe Φ .

Ključne riječi: ovojnica, ovojnica helikoidne plohe, ovojnica racionalne plohe, luk dodira, meridijanski presjek, prostor stvaranja

MSC: 65D17

about the axis o and a translation movement in the direction of the vector collinear to the axis o of revolution) of a basic surface φ . An envelope rotational surface is a special type of the envelope helical surface with the helical movement pitch $|z_v|$ (z_v is the translation vector corresponding to the angle of revolution equal to 2π) equal to zero.

In the paper (Szarková [2]), the helical and rotational surface Φ created from the conical or cylindrical surface φ were discussed. In the present paper, the basic surface φ will be a rotational surface created by revolving a plane curve segment located in the xz -plane about the coordinate

axis x . We will work in the creative space with the homogeneous coordinates (in correspondence with Qiulin [1]).

By the helical movement of the spherical surface G we create the envelope surface called Archimedean serpentine. The characteristics is a principal circle h , that is the intersection of the basic spherical surface G and the plane ξ perpendicular to the tangent line to the helix (trajectory of the movement) of the surface G centre S .

Let G be a spherical surface from a set of spherical surfaces, that are tangent to the defined rotational surface φ in parallel circles. Let k be the tangent parallel circle on G . Intersection points ${}^1M, {}^2M$ of circles h and k are points of the characteristics e (Fig. 1.).

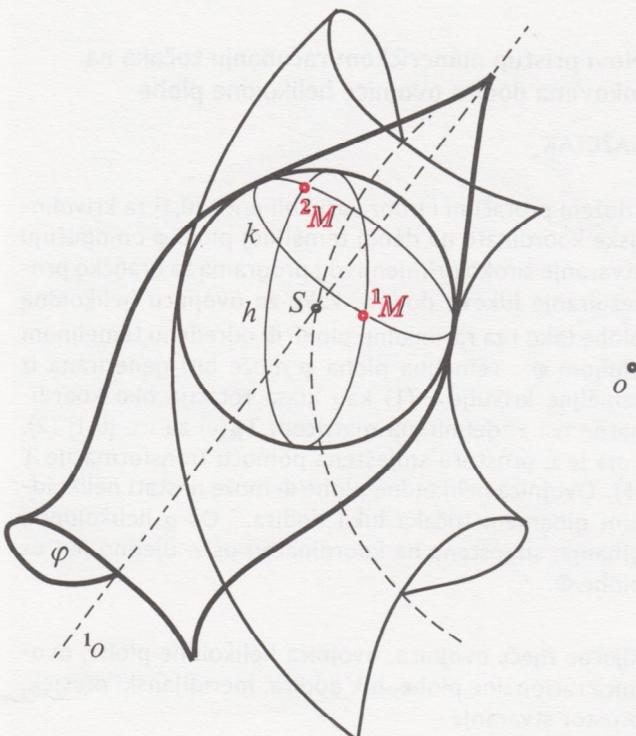


Fig. 1

Any rotational surface φ with the axis 1o in general position can be transformed in such way that the axis of revolution will be in one of the coordinate axis and vice versa.

Let us create the basic surface in the basic position as the surface φ' with the axis ${}^1o'$ generated from the basic curve c located in the xz -plane, and defined by the vector function

$${}^1\mathbf{r}(u) = (x(u), 0, z(u), 1) \quad \text{for } u \in [0, 1] \quad (1)$$

applying a class of revolutions about the coordinate axis x defined by the matrix $\mathbf{T}_R(v)$,

$$\mathbf{T}_R(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi v & \sin 2\pi v & 0 \\ 0 & -\sin 2\pi v & \cos 2\pi v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{for } v \in [0, 1]. \quad (2)$$

Let φ' is positioned in the space by the transformation \mathbf{T} (3),

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{oy} \cdot \mathbf{T}_{oz} \cdot \mathbf{T}_p$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & 0 \\ x_p & y_p & z_p & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where \mathbf{T}_{oz} is the revolution about the coordinate axis z by the angle α ,

\mathbf{T}_{oy} is the revolution about the coordinate axis y by the angle β ,

\mathbf{T}_p is the translation with the direction vector $\mathbf{v} = (x_p, y_p, z_p, 0)$.

The basic surface is now moved from the basic position φ' and located to the general position φ in the space determined by the chosen constant values of $\alpha, \beta, \mathbf{v}$.

To simplify the results, the whole scene will be transformed by the transformation \mathbf{T}' (in the transposed form) (4) so that we could work with the rotational surface φ' , with the axis ${}^1o'$ congruent to the coordinate axis x :

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T}_p \cdot \mathbf{T}_{oz} \cdot \mathbf{T}_{oy} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\beta c_\alpha & -s_\alpha & -x_p c_\alpha c_\beta - y_p s_\alpha c_\beta + z_p s_\beta \\ -s_\beta & c_\beta & 0 & x_p s_\beta - y_p c_\beta \\ c_\beta s_\alpha & s_\alpha s_\beta & c_\alpha & -x_p c_\beta s_\alpha - y_p s_\alpha s_\beta + z_p c_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

where $s_\alpha = \sin \alpha$, $c_\alpha = \cos \alpha$, $s_\beta = \sin \beta$ and $c_\beta = \cos \beta$; \mathbf{T}' and \mathbf{T} are inverse transformations.

The axis o of the helical movement located into the coordinate axis z is the axis of the envelope surface Φ . Let the axis o be defined by the point $O(0, 0, 0, 1)$ and the direction vector $\mathbf{s}(0, 0, z_0, 0)$, where z_0 is the reduced pitch $z_0 = \frac{|z_v|}{2\pi}$.

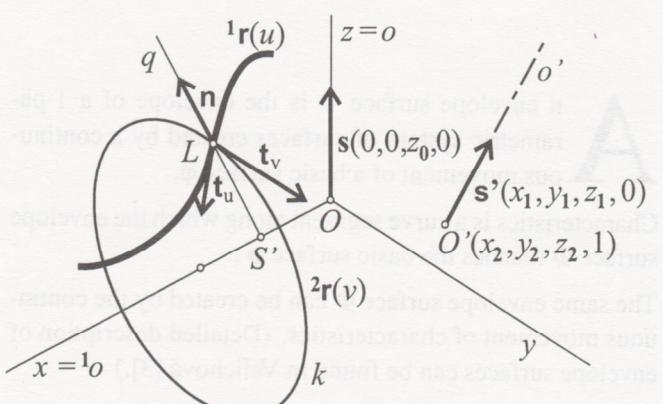


Fig. 2

The transformed axis o' will be defined by the point $O'(x_2, y_2, z_2, 1)$:

$$(x_2, y_2, z_2, 1) = (0, 0, 0, 1) \cdot \mathbf{T}'$$

and by the direction vector $\mathbf{s}'(x_1, y_1, z_1, 0)$:

$$(x_1, y_1, z_1, 0) = (0, 0, z_0, 0) \cdot \mathbf{T}'$$

The analytic representation of the parallel circle k on the surface φ' that is located in the plane parallel to the yz -plane and is incident to the point $L(u_0, 0) = \mathbf{r}(u_0) = (x(u_0), 0, z(u_0), 1)$, $u_0 \in [0, 1]$ on the basic curve c is in the form

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{r}(v) &= (x(u_0), r_k \cdot \sin(2\pi v), r_k \cdot \cos(2\pi v), 1) \\ &\text{for } v \in [0, 1], \end{aligned} \quad (5)$$

where the radius of the parallel circle $r_k = z(u_0)$.

The common tangent plane τ to the surface φ' and the auxiliary tangent spherical surface \mathbf{G} in the point L on the basic curve c will be determined by the tangent vector \mathbf{t}_u to the curve c in the point L and the tangent vector \mathbf{t}_v to the v -isoparametric curve on the surface φ' determined by the first derivative of the function (5) in the point L . Tangent plane direction vectors

$$\mathbf{t}_u = {}^1\mathbf{r}'(u_0) = (x'(u_0), 0, z'(u_0), 0), \quad \text{where } x'(u_0) \neq 0,$$

$$\mathbf{t}_v = {}^2\mathbf{r}'(0) = (0, 1, 0, 0),$$

define normal vector

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = (-z'(u_0), 0, x'(u_0), 0).$$

The normal line q with the direction vector \mathbf{n}

$$x = x(u_0) - z'(u_0) \cdot l$$

$$y = 0$$

$$z = z(u_0) + x'(u_0) \cdot l, \quad \text{for } l \in [-\infty, \infty], u_0 \in [0, 1]$$

intersects the coordinate axis x in the point S' , which is the centre of the auxiliary tangent spherical surface \mathbf{G}' :

$$S'(x_G, 0, 0, 1) = \left(\frac{x(u_0) \cdot x'(u_0) + z(u_0) \cdot z'(u_0)}{x'(u_0)}, 0, 0, 1 \right).$$

The point $S(x_S, y_S, z_S, 1)$ located on the axis 1o is defined by the transformation \mathbf{T} (3):

$$(x_S, y_S, z_S, 1) = (x_G, 0, 0, 1) \cdot \mathbf{T}$$

The tangent line to the helix, which is the trajectory of the point S movement, is parallel to the basic line on the direction conical surface located in the point $P(y_S, -x_S, 0, 1)$. (The construction can be found in Velichová [3].)

The tangent line to the helix in the point S can be determined by the direction vector $\mathbf{t}(-y_S, x_S, (-1)^i \cdot z_0, 0)$. Constant value $i = 1$ is valid for the clockwise and $i = 2$ for the anticlockwise helical movement.

By the transformation \mathbf{T}' (4) of the vector \mathbf{t} we can obtain the coordinates of the direction vector $\mathbf{t}'(x_t, y_t, z_t, 0)$ of the tangent line to the helix of the point S' with axis o'

$$(x_t, y_t, z_t, 0) = (-y_S, x_S, (-1)^i \cdot z_0, 0) \cdot \mathbf{T}'.$$

Centre S' is incident to the plane ξ perpendicular to the vector \mathbf{t}' , and is determined implicitly by the equation

$$x_t \cdot (x - x_G) + y_t \cdot y + z_t \cdot z = 0.$$

Plane ξ intersects the parallel circle k (6) located in the plane μ'/μ (7)

$$(x - x(u_0))^2 + z^2 = z(u_0)^2 \quad (6)$$

$$x = x(u_0) \quad (7)$$

in the points ${}^1M'$, ${}^2M'$ of the constructed characteristics e' on the surface φ' . Their coordinates are defined as follows

$$j_x' = x(u_0)$$

$$j_y' = \frac{-x_t(x(u_0) - x_G)}{y_t} - z_t \cdot j_t \quad (8)$$

$$j_z' = y_t \cdot j_t, \quad \text{for } j = 1, 2; u_0 \in [0, 1].$$

The parameter j_t can be calculated from the quadratic equation (9) that is the solution of the equations (6)–(8)

$$\begin{aligned} t^2(y_t^2 + z_t^2) + t \left(2 \frac{x_t \cdot z_t(x(u_0) - x_G)}{y_t} \right) \\ + \left(\frac{-x_t(x(u_0) - x_G)}{y_t} \right)^2 - (z(u_0))^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

for the value $y_t \neq 0$.

If $D = ((z(u_0))^2(y_t^2 + z_t^2) - x_t^2(x(u_0) - x_G)^2)$ is a negative number, the points of the characteristics do not exist.

For $D \geq 0$

$$j_t = \frac{x_t \cdot z_t(x(u_0) - x_G) \pm y_t \sqrt{D}}{y_t(y_t^2 + z_t^2)} \quad \text{for } j = 1, 2; u_0 \in [0, 1].$$

It is necessary to eliminate the case of the tangent line to the helix of the point S' determined by the direction vector \mathbf{t}' that is located in the xz -plane.

By transformation \mathbf{T} (3) of the point $M'(x', y', z', 1)$ of the characteristics e' on the surface φ' we can obtain the coordinates of the point $M(x_M, y_M, z_M, 1)$ of the characteristics e

$$(x_M, y_M, z_M, 1) = (x', y', z', 1) \cdot \mathbf{T}.$$

The shape of the envelope surface can be better comprehended by its meridian section than by the characteristics, which is usually a space curve segment. Coordinates of the point $M^*(x^*, y^*, z^*, 1)$ located on the meridian section in the xz -plane can be obtained from the coordinates of the

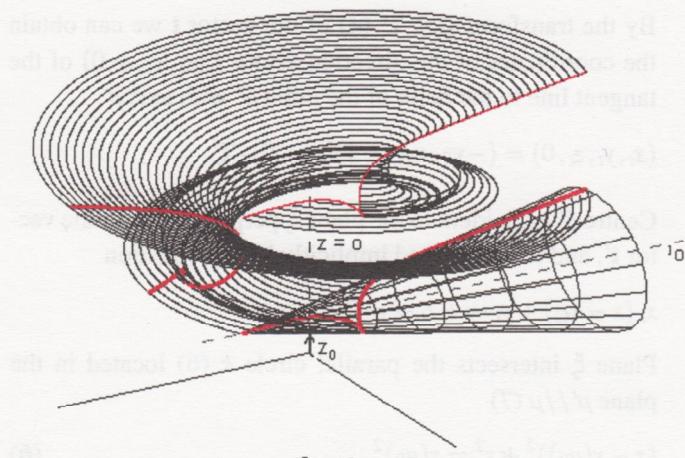


Fig. 3

point $M(x_M, y_M, z_M, 1)$ on the characteristics, as the solutions of the following equations

$$\begin{aligned}x^* &= \pm \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \\y^* &= 0 \\z^* &= z_M + (-1)^i \cdot \omega \cdot z_0\end{aligned}$$

where ω is the directed angle of the revolution about the axis o to the xz -plane oriented in the helical movement direction and constant value $i = 1$ is valid for the clockwise and $i = 2$ for the anticlockwise helical movement.

If the surface Φ is a rotational conical or cylindrical surface, then we can create the envelope surface Φ by the presented method, but also by the method published in the paper (Szarková [2]). Graphical processing of the helical envelope surfaces created from the rotational surfaces by the two given different methods can be compared on illustrations in figures 3 and 4 presented in the paper (Szarková [2]) and figures 4 and 5 presented in this paper.

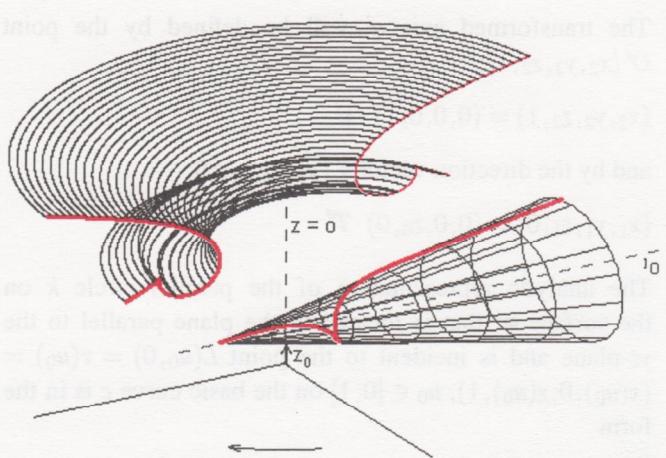


Fig. 4

In the paper (Szarková [2]) the created envelope helical surface Φ had been represented as the net of parts of characteristics in the Fig. 3, resp. as the net of meridian section segments in the Fig. 5. In this paper the same helical envelope surface Φ is represented as the net of helices that are trajectories of some points on characteristics in the Fig. 3 and on meridian section in the Fig. 4.

In the Fig. 5 the characteristics and the meridian section of the envelope helical surface Φ determined by the basic rotational surface φ with the basic curve in a cissoid is illustrated. The envelope helical surface created from the basic rotational surface φ with the basic curve in a Witch of Agnési is represented as the net of helices that are trajectories of the points on characteristics in the Fig. 6.

The formulas for the calculations are a bit complicated, but the computer processing is very fast. The general advantage of the computer approach to the given problematic dwells in its creative access. The interactive access available for the constructor helps him to realise the design of the elabo-

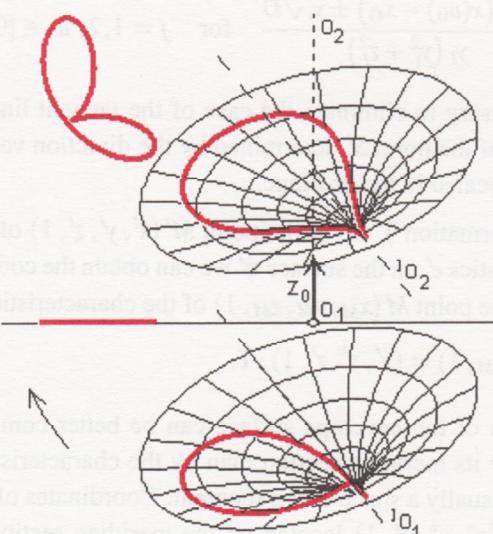


Fig. 5

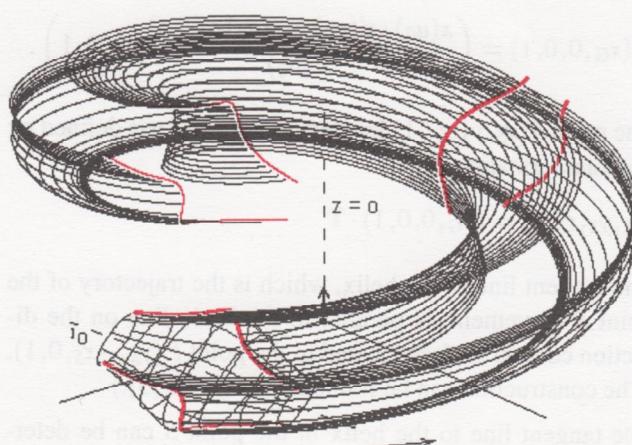


Fig. 6

rating machines in a short time, as it provides the possibility to fix the generating surface of the created envelope surface into the desired position. It is possible to exclude efficiently those positions, in which the envelope surface cannot be created (does not exist) or is of an unsuitable design.

Presented figures are examples of the characteristics, the meridian section and the basic surface ϕ of the envelope surface Φ projected in the Monge projection method and Axonometry and visualised as outputs of the programme (written by the author) on the screen.

References

- [1] QIULIN, D.; DAVIES, B. J.: *Surface Engineering Geometry for Computer-Aided Design and Manufacture*, 1. ed., Chichester, Ellis Horwood Limited 1987, 340 p.

[2] SZARKOVÁ, D.: *Computer Aided Calculation of Characteristics Points of Some Envelope Helical Surfaces*, KoG, 2, pp. 49–51.

[3] VELICOVÁ, D.: *Constructional geometry I, II*, 1. ed., Bratislava, Vydavatelstvo STU 1997, 81, 98 p.

Dagmar Szarková

Department of Mathematics

Mechanical Engineering Faculty

Slovak Technical University

Námestie Slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovakia

tel.: +421 757 296 394, fax.: +421 752 926 626

e-mail: szarkova@sjf.stuba.sk

Stručni rad
Prihvaćeno 20. 12. 1999.

VINKO MANDEKIĆ-BOTTERI

O konstrukcijama zlatnih trokuta

On the Constructions of the Golden Triangles

ABSTRACT

This article proves that there exist the infinite number of the golden triangles ABC , with sides $AB = 1$ and $BC = (\sqrt{5} - 1)/2$. It is derived the inequality which must satisfy the angle at a vertex A of each of these triangles, and it is shown that two isosceles and two right golden triangles are between them.

Key words: golden section, golden triangle

O konstrukcijama zlatnih trokuta

SAŽETAK

Dokazuje se da postoji beskonačno mnogo zlatnih trokuta ABC sa stranicama $AB = 1$ i $BC = (\sqrt{5} - 1)/2$. Izvodi se nejednakost koju mora zadovoljavati kut pri vrhu A svakoga od tih trokuta, te pokazuje da među njima postoje dva jednakokračna i dva pravokutna zlatna trokuta.

Ključne riječi: zlatni rez, zlatni trokut

MSC: 51M15

1. Uvod

O zlatnom rezu nedavno je izasao članak [5] u MFL-u, a 1995. knjiga [1] poznatog matematičara Beutelspachera. Oba se autora dotiču i zlatnog trokuta. Među autorima koji su prvi, u svezi sa zlatnim rezom, promatrali zlatni trokut bili su V. E. Hoggatt, jr. i M. Bicknell u članku [2] i knjizi [3].

U ovome radu navode se dvije definicije zlatnih trokuta ([3,2]) te dokazuje da su one ekvivalentne.

Nadalje, daju se konstrukcije zlatnih trokuta kojima su poznate dvije stranice kojih je omjer jednak broju zlatnog reza.

2. Definicije i stavci o zlatnom trokutu

Kao što je uobičajeno, omjer $(1 + \sqrt{5})/2$ zlatnoga reza označavat ćemo sa Φ . (Na slici 1. crvenom je linijom istaknuta konstrukcija dužine AD čija je duljina $1/\Phi$.) Kako smo u Uvodu istaknuli, navodimo dvije ekvivalentne definicije

zlatnoga trokuta te dva stavka o njemu. Treba napomenuti da su te definicije i stavci u lijepoj analogiji s dobro poznatom definicijom i svojstvom zlatnoga pravokutnika.

Definicija 1. ([3])

Zlatni trokut je onaj kojemu je, kad se njemu sličan trokut ukloni iz njega, omjer njegove površine i površine preostalog trokuta jednak Φ .

Definicija 2. ([2])

Zlatni trokut je onaj trokut kojemu je omjer dviju stranica jednak Φ .

Stavak 1. ([2])

Zadan je omjer k dviju stranica trokuta a i b , $a/b = k > 1$. Trokut sa stranicom jednakom b može se ukloniti tako da trokut koji ostaje bude sličan početnom ako i samo ako je $k = \Phi$.

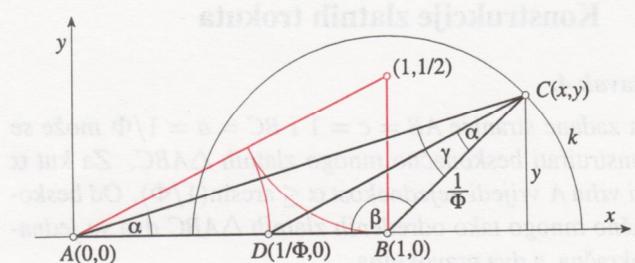
Stavak 2. ([2])

Zadan je omjer $k > 1$ dviju stranica trokuta. Trokut sličan početnomu možemo ukloniti tako da omjer površina početnog i preostalog trokuta bude jednak k ako i samo ako je $k = \Phi$.

Stavak 3.

Definicija 1. i Definicija 2. su ekvivalentne.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ zlatni prema definiciji 1., tj. kad se njemu sličan $\triangle CDB$ ukloni iz njega, omjer površine zlatnog $\triangle ABC$ i površine preostalog $\triangle ADC$ je Φ (slika 1.). Iz sličnosti $\triangle ABC$ i $\triangle CDB$ slijedi proporcionalnost njihovih stranica $AB : BC = BC : BD$.



Slika 1.

Budući da $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ imaju istu visinu y na stranicu AB , odnosno AD , može se napisati

$$\left(\frac{1}{2}AB \cdot y\right) : \left(\frac{1}{2}AD \cdot y\right) = \Phi,$$

što je ekvivalentno s $AB : AD = \Phi$.

Kako je $AB = AD + BD = AB/\Phi + BD$, to je

$$BD = AB(\Phi - 1)/\Phi.$$

Konačno je

$$AB : BC : BD = \Phi / (\Phi - 1) : BC : AB = \Phi^2 : BC : AB$$

i odatle $AB : BC = \Phi$.

Obratno, pretpostavimo da je $\triangle ABC$ zlatni prema definiciji 2., tj. $AB : BC = \Phi$.

Neka je točka D na stranici AB (slika 1.) takva da bude $AB : AD = \Phi$.

Pokazat ćemo da je $\triangle ABC$ sličan $\triangle CDB$.

Oba trokuta imaju zajednički kut β s vrhom u točki B , a osim toga vrijedi

$$BC : BD = AB : \Phi(AB - AD) = 1 / (\Phi - 1) = \Phi.$$

To znači da su $\triangle ABC$ i $\triangle CBD$ slični budući da imaju jedan zajednički kut i dva para razmernih stranica.

Pokazat ćemo još da je omjer površina $\triangle ABC$ i $\triangle ADB$ jednak Φ . Budući da $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ imaju istu visinu y na stranicu AB , odnosno AD , može se omjer njihovih površina napisati

$$\left(\frac{1}{2}AB \cdot y\right) : \left(\frac{1}{2}AD \cdot y\right) = AB : AD,$$

što je jednako Φ , jer smo tako postavili točku D .

Time je stavak 3. dokazan.

Posljedica 1.

Neka je $\triangle ABC$ zlatni. Točka D na stranici $AB = 1$ dijeli $\triangle ABC$ na dva trokuta, na $\triangle BCD$, koji je sličan $\triangle ABC$, i na $\triangle ADC$, za koji vrijedi $P_{\triangle ABC}/P_{\triangle ADC} = \Phi$ ako i samo ako je $AD = 1/\Phi$.

Dokaz. Ako je $AD = 1/\Phi$, onda sličnost $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ te jednakost $P_{\triangle ABC}/P_{\triangle ADC} = \Phi$ slijedi prema tijeku dokaza stavka 3.

Obratno,

$$P_{\triangle ABC}/P_{\triangle ADC} = [(AB \cdot y)/2]/[(AD \cdot y)/2] = 1/AD = \Phi, \text{ tj. } AD = 1/\Phi.$$

3. Konstrukcije zlatnih trokuta

Stavak 4.

Za zadane stranice $AB = c = 1$ i $BC = a = 1/\Phi$ može se konstruirati beskonačno mnogo zlatnih $\triangle ABC$. Za kut α pri vrhu A vrijedi nejednakost $\alpha \leq \arcsin(1/\Phi)$. Od beskonačno mnogo tako određenih zlatnih $\triangle ABC$ dva su jednakočršna, a dva pravokutna.

Dokaz. Smjestimo $\triangle ABC$ u Descartesov pravokutni koordinatni sustav xOy tako da vrh A bude u ishodištu, a vrh B jedinična točka na osi x (slika 1.). Točka D na stranici AB ima apscisu $1/\Phi$. Na temelju stavka 3. i posljedice 1. možemo zaključiti da za svaku točku C koja leži na gornjoj polukružnici kružnice k sa središtem u vrhu B i polujerom $1/\Phi$ vrijedi da je $\triangle ABC$ zlatni.

Očigledno je da vrh C može zauzeti beskonačno mnogo položaja na polukružnici od k i tako odrediti beskonačno mnogo zlatnih $\triangle ABC$.

Lako se uočava da vrijedi $\sin \gamma / \sin \alpha = 1 / (1/\Phi)$ pa stoga i

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \Phi. \quad (1)$$

Iz (1) proizlazi da je $\sin \alpha \leq 1/\Phi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Odatle je

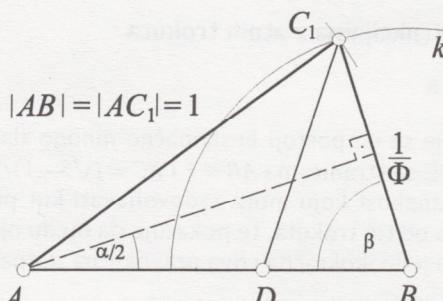
$$\alpha \leq \arcsin \frac{1}{\Phi} = \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 38^\circ 10' 22''. \quad (2)$$

Uočava se također da α ima najveću vrijednost kada je $\gamma = 90^\circ$ te da, prema [4, str. 78–79], vrijedi

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2\Phi}, \quad \cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}. \quad (3)$$

Istaknimo još i one pozicije točke C koje realiziraju jednakočršne i pravokutne zlatne trokute.

- a) Prvi jednakočrni zlatni $\triangle ABC_1$ (slika 2.) nastaje za $a = 1/\Phi$ i $b = c = 1$.



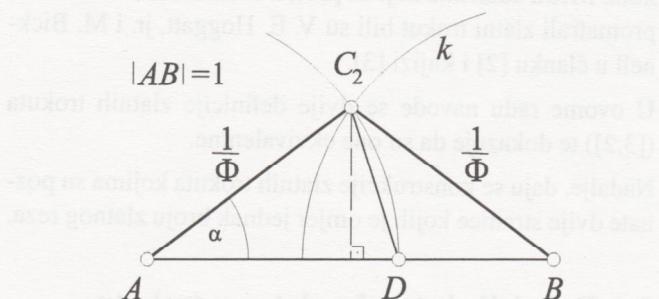
Slika 2.

Sa slike 2. lako se uočava da je $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\Phi}$, što prema (3) daje $\alpha/2 = 18^\circ$ i na kraju

$$\alpha = 36^\circ, \quad \beta = \gamma = 72^\circ.$$

To je dobro poznat jednakočrni zlatni trokut koji se javlja kod konstrukcije pravilnog deseterokuta, pri čemu je $\alpha_{10} = R/\Phi$.

- b) Drugi jednakočrni $\triangle ABC_2$ (slika 3.) nastaje za $a = b = 1/\Phi$ i $c = 1$.

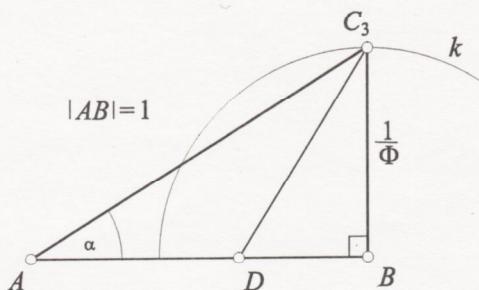


Slika 3.

Sada je $\alpha = \beta$ te sa slike 3. lako uočavamo da je $\cos \alpha = \Phi/2$, što prema (3) daje

$$\alpha = \beta = 36^\circ, \quad \gamma = 108^\circ.$$

c) Prvi pravokutni zlatni trokut ABC_3 nastaje za $\beta = 90^\circ$.



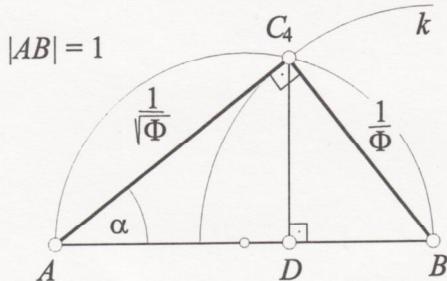
Slika 4.

Očito je $\tan \alpha = 1/\Phi = \cot \beta$, tj. $\alpha = \arctg \frac{1}{\Phi} \approx 31^\circ 43' 3''$.

Kako je $c = 1$, $a = 1/\Phi$, vrijedi

$$b = \sqrt{1 + \frac{1}{\Phi^2}} = \frac{\sqrt{\Phi + 2}}{\Phi}.$$

d) Drugi pravokutni zlatni trokut nastaje za $\gamma = 90^\circ$.



Slika 5.

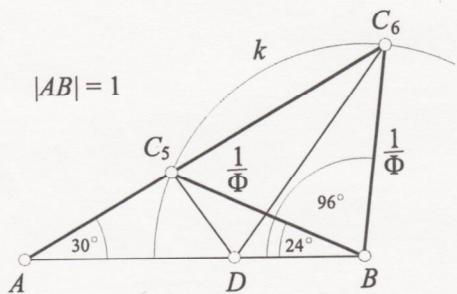
Kako smo već istaknuli u svezi s formulom (2), kut α poprima najveću moguću vrijednost $\arcsin \frac{1}{\Phi}$, a stranica b leži na tangenti iz vrha A na kružnicu k .

Uz $c = 1$, $a = 1/\Phi$ vrijedi

$$b = \sqrt{1 - \frac{1}{\Phi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}.$$

Time je stavak 4 dokazan.

Primjedba 1. Istaknimo tu još dva zlatna trokuta koji se lako konstruiraju. Zbog uvjeta (2) kut α može biti 30° . Tada dobivamo dva tupokutna zlatna trokuta ($\triangle ABC_5$ i $\triangle ABC_6$).



Slika 6.

Naime, prema (1) i (3) vrijedi $\sin(\beta + 30^\circ) = \frac{\Phi}{2}$, pa stoga $\beta + 30^\circ = 54^\circ$ ili $\beta + 30^\circ = 180^\circ - 54^\circ$, tj. $\beta_1 = 24^\circ$ ili $\beta_2 = 96^\circ$.

Primjedba 2. Ovisno o vrijednosti kuta α dobivamo sljedeće zlatne trokute:

- za svaki kut α za koji vrijedi

$$\arctg(1/\Phi) < \alpha < \arcsin(1/\Phi)$$

dobivamo jedan šiljastokutan i jedan tupokutan zlatni trokut,

- vrijednosti $\alpha = \arctg(1/\Phi)$ i $\alpha = \arcsin(1/\Phi)$ daju pravokutne zlatne trokute,
- za svaki kut α za koji je $\alpha < \arctg(1/\Phi)$ dobivamo dva tupokutna zlatna trokuta.

Primjeri za te tri mogućnosti:

$\triangle ABC_1$ i $\triangle ABC_2$ za prvu, uz izbor $\alpha = 36^\circ$,

$\triangle ABC_3$ i $\triangle ABC_4$ za drugu, uz $\alpha = \arctg(1/\Phi) \approx 31^\circ 43' 3''$ i $\alpha = \arcsin(1/\Phi) \approx 38^\circ 10' 22''$, te

$\triangle ABC_5$ i $\triangle ABC_6$ za treću mogućnost, uz izbor $\alpha = 30^\circ$.

Literatura

- [1] BEUTELSPACHER, A.; BERNARD, P.: *Der Goldene Schnitt*, 2. Auflage, Wissenschaftsverlag, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich, 1995.
- [2] BICKNELL, M.; HOGGATT, V. E. JR.: *Golden Triangles, Rectangles, and Cuboids*, Fibonacci Quarterly, 7, (1969, February), 73–91.
- [3] HOGGATT, V. E. JR.: *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Mifflin Company, 1969, USA.
- [4] VOROBJEV, N. N.: *Čisla Fibonači*, III. izd., Izdateljstvo Nauka, Moskva, 1969.
- [5] ŽUBRINIĆ, D.: *Božanski ili zlatni omjer*, Matematičko-fizički list, 1998/99, 65–75.

Vinko Mandekić-Botteri

Tekstilno-tehnološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10000 Zagreb, Pierottijeva 6
tel.: 4836–058, fax.: 4836–058
e-mail: vinko@zagreb.tekstil.hr

MILJENKO LAPAINE

Primjene AutoCAD mapa

Uvod

AutoCAD Map je Autodeskov program za izradu karata i GIS. On je nadgradnja AutoCAD-a, tako da uz poznate mogućnosti AutoCAD-a sadrži i posebne alate za kreiranje, održavanje, analiziranje i iscrtavanje karata. Posebno treba istaknuti mogućnost AutoCAD Mapa za povezivanje s bazama podataka. Objektima karte mogu se pridružiti elementi drugih skupova podataka.

AutoCAD Map omogućava brže i jednostavnije digitaliziranje karata. Digitalizirane karte koje su već kreirane s drugim softverom nije potrebno ponovno digitalizirati. Umjesto toga, mogu se učitati datoteke iz drugih GIS ili CAD programa ili programa za izradu karata.

Tematske se karte mogu generirati pomoću funkcija za pretraživanje. Pomoću topoloških funkcija karte postaju snažno sredstvo za analize i podrške odlučivanju. Pod topologijom se ovdje podrazumijeva skup prostornih odnosa između točaka, linija i poligona na karti. Može se reći da se s pomoću topologije kartama nadograđuje dodatna inteligencija. AutoCAD Map je namijenjen inženjerima, kartografiima, tehničarima, planerima i drugim osobama koje izrađuju, kreiraju, održavaju ili analiziraju karte. Uporabom AutoCAD Mapa mogu se stvarati, održavati i analizirati kartografske informacije u višestrukim AutoCAD-ovim crtežima i s njima povezanim vanjskim bazama podataka.

AutoCAD Map modernizira digitalnu kartografiju u projektiranju, uređivanju, analiziranju, prezentiranju i iscrtavanju karata.

AutoCAD Map u nastavi

AutoCAD Map je stigao na Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu 1997. godine u okviru donacije tvrtke Autodesk većem broju zagrebačkih fakulteta. U nastavi pojedinih predmeta na Geodetskom fakultetu već se više godina upotrebljava AutoCAD kao jedan od alata za crtanje s pomoću računala. Budući da je AutoCAD Map kartografska nadogradnja AutoCAD-a, uveden je od akad. god. 1997/98. u kolegij *Digitalna kartografija II*. Oba softvera studenti imaju prilike još bolje savladati putem seminarskih i diplomskih radova. Za potrebe nastave izrađen je i prvi priručnik za AutoCAD Map na hrvatskom jeziku: *Kartografija i AutoCAD Map*. Svrha mu je pružanje osnovnih znanja i davanje elementarnih uputa za rad.

Osim izvođenja redovite nastave, Zavod za kartografiju Geodetskog fakulteta povremeno organizira seminare o digitalnoj kartografiji i GIS-u za kolege iz prakse. U 1999. godini održana su u dva navrata sljedeća dva seminara:

1. *Uvod u digitalnu kartografiju i GIS*, namijenjen svima koji još nisu imali prilike upoznati ta nova područja. Seminar se sastojao od 15 sati predavanja. Teme su bile: prednosti i nedostaci digitalne kartografije, digitalizacija, prikazivanje reljefa, primjena daljinskih istraživanja u kartografiji te kartografija i GIS. Nekoliko predavanja o GIS-u izvedeno je uz upotrebu računalnog programa GeoCube. Sudionici seminara dobili su kopiju knjige N. Frančule: *Digitalna kartografija*.

2. *Digitalna kartografija i AutoCAD Map*, namijenjen je stručnjacima koji žele produbiti svoje znanje iz digitalne kartografije i naučiti osnove rada s programom AutoCAD Map. Seminar se sastojao od 30 sati nastave, od čega 10 sati predavanja i 20 sati vježbi na računalima. Teme predavanja bile su: uvod u AutoCAD Map, kartografski podaci, obrada rasterskih i vektorskih podataka, grafički programi, kartografski sustavi, kartografske projekcije, kartografska generalizacija, topografske i tematske karte. Sudionici seminara dobili su kopiju knjige N. Frančule: *Digitalna kartografija* i kopiju priručnika *Kartografija i AutoCAD Map*, što su ga sastavili M. Lapaine, N. Vučetić i D. Tutić.

Nastava se održavala u Računaonici opće namjene na Geodetskom fakultetu, a izvodili su je nastavnici i suradnici Zavoda za kartografiju: prof. dr. sc. Nedjeljko Frančula, doc. dr. sc. Miljenko Lapaine, dr. sc. Stjepan Frangeš, mr. sc. Nada Vučetić i Dražen Tutić, dipl. inž.

Seminari su prisustvovalo ukupno 40 polaznika. Svi oni dobili su za uspomenu svjedodžbu o pohađanju seminara. S obzirom na pokazano zanimanje, Zavod za kartografiju namjerava ponoviti seminare i iduće godine.

Primjene AutoCAD Mapa

Prema obavijesti iz časopisa *Geoinformatics*, 1999, Vol. 2, No. 6, str. 50, AutoCAD Map 3.0 bit će temelj novom linijskom informacijskom sustavu firme Telekom Austria AG, poznat pod imenom LISA. Kao zamjena za stari sustav koji je radio pod UNIX-om, AutoCAD Map 3.0 će se upotrijebiti za kreiranje,

uređivanje i upravljanje kartama koje igraju bitnu ulogu u poslovanju vodeće austrijske telekomunikacijske mreže. Za početak, postavit će se 140 instalacija koje će činiti temelj dvjema posebnim aplikacijama nazvanim *Schemaplan* i *Lageplan*.

Iz časopisa GEOEurope, 1999, Vol. 8, No. 9, str. 13, saznajemo da je portugalski državni ured za ribarstvo (Instituto General das Pescas) objavio rat ilegalnom ribarenju u svojim vodama. U središtu te akcije je integrirani pomorski sustav za motrenje i kontroliranje poznat kao SIFICAP, a utemeljen na AutoCAD Mapu. Novi sustav se upotrebljava za lociranje i praćenje plovila. Projekt se testira na 25 pokusnih položaja. Potpuna se primjena očekuje krajem 1999. godine s instalacijom na više od 600 portugalskih brodova. Uredaj nazvan "plava kutija" koji je postavljen na ribarskom brodu registrira položaj, smjer i brzinu plovila. Svakih desetak minuta podacima iz plave kutije se pristupa s udaljenog mjeseta. Te se podatke bilježi s pomoću AutoCAD Mapa, koji ih zatim šalje u standariziranom georeferenciranom formatu odgovarajućim institucijama.

Tematske karte

Topografske karte, zbog svoje široke namjene i ograničenih mogućnosti kartografskog prikaza, sadrže samo prikaz položaja i nekih svojstava općegeografskih objekata. Druga svojstva općegeografskih objekata (npr. starost, visina, namjena, trošnost zgrade i sl.) i mnogih drugih objekata iz prirodnog područja (npr. vrste i tipovi tla) ili iz područja ljudskog djelovanja (npr. industrijska i poljoprivredna proizvodnja) mogu biti prikazani samo na posebnim, tematskim kartama.

Tematske su karte kartografski prikazi najrazličitijih tema iz prirodnog i društvenog (privrednog, socijalnog i kulturnog) područja, koje su neposredno vezane za prostor. Kao okosnica za prikaz služi u pravilu pojednostavljena topografska karta, tzv. temeljna karta. Sredstvima kartografskog izražavanja moguće je na tematskim kartama pružiti informaciju o položaju u prostoru, rasprostranjenosti, pokretima i smjerovima pokreta, količinama, svojstvima, trajanju, učestalosti i odnosima objekata. Njima se mogu prikazati i fikcije, hipoteze, tendencije, mogućosti, projekti itd.

Tematske karte dobine su u našem stoljeću ogromno značenje zbog potrebe poznavanja i iskorištanja prirodnih datosti i optimalne organizacije brojnih ljudskih djelatnosti. Uz jednu topografsku kartu nekog područja može biti izvedeno na desetine tematskih karata.

Tematske karte služe za dopunu ili zamjenu nekog teksta. Takve interpretacijske ili demonstracijske karte, koje služe za bolje tumačenje ili očevidno dokazivanje neke tvrdnje, susreću se kako u znanstvenoj literaturi, tako i u novinama.

Velik broj tematskih karata može se grupirati na razne načine: po svojstvima objekata prikaza, po metodama

istraživanja, po oblicima i sredstvima prikaza i po tematskim područjima (Lovrić, 1988).

Pomoću AutoCAD Mapa mogu se izraditi diskretne i neprekidne tematske karte.

Diskretne tematske karte su takve tematske karte kod kojih svaka vrijednost spada u različitu, očiglednu kategoriju (npr. tip krova: kosi, ravni, složeni).

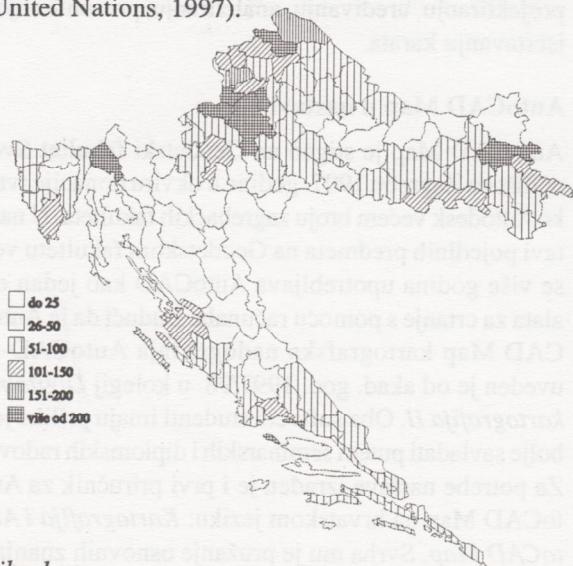
Neprekidne tematske karte su takve tematske karte kod kojih podaci padaju u neprekidni raspon vrijednosti (npr. vrijednost vlasništva: 100-150\$, 150-200\$, 200-250\$).

Polazište za izradu tematskih karata je pretraživanje. Za dobivanje informacija koje se žele priopćiti, pretraživanje se može zasnovati na temelju:

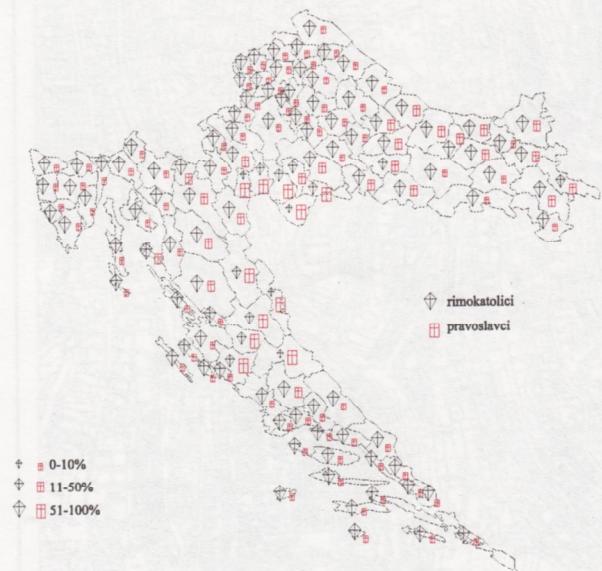
- položaja — geografskog protezanja
- svojstva — kao što je primjerice boja
- ili objektnih podataka — to su tekst i numerički podaci pridruženi objektima karte.

Pretraživanje se može spremiti, urediti i ponovno upotrijebiti. Objekti dobiveni pretraživanjem mogu se prikazati različitim bojama, vrstama linija i signaturama. AutoCAD Map može također generirati pripadne tumače znakova (legende).

Detaljniji opis izrade tematskih karata s pomoću AutoCAD Mapa može se naći na primjer u diplomskim radovima K. Borković (1998) i D. Markovice (1998). Borković je u okviru svog diplomskog zadatka trebala pomoću AutoCAD Mapa izraditi tematske karte o stanovništvu Hrvatske na temelju podataka o popisu stanovništva iz 1991. godine. U tu svrhu najprije je trebalo obaviti pripremne radove, a to znači sakupiti podatke o stanovništvu i podatke o granicama tadašnjih općina jer je popis stanovništva 1991. proveden na temelju ondašnjih teritorijalnih jedinica, općina. Diplomantica je svoje tematske karte radila po uzoru na poglavlje Primjene GIS-a za analiziranje stanovništva: Prikaz iz Nepala (Applications of GIS for population analysis: A demonstration from Nepal) iz knjige Geographical Information Systems for Population Statistics (United Nations, 1997).



Slika 1.
Gustoća stanovništva Hrvatske prema popisu iz 1991.



*Slika 2.
Odnos rimokatolika i pravoslavaca u Hrvatskoj
prema popisu stanovništva iz 1991. godine*

Od M. Lapainea dobila je podatke o granicama općina u digitalnom obliku. Podaci o stanovništvu preuzeti su iz Statističkog godišnjaka za 1992. Državnog zavoda za statistiku i drugih odgovarajućih publikacija. Prikupljene podatke o stanovništvu K. Borković unijela je pomoću programa Microsoft Access u za tu svrhu kreiranu bazu podataka. Podaci su spremljeni u formatu dBase III koji AutoCAD Map podržava. Postupci uređivanja granica općina u digitalnom obliku, kreiranja topologije, povezivanja vanjske baze podataka s topologijom i izrade tematskih karata s pomoću pretraživanja topologije detaljno su opisani u diplomskom radu (Borković, 1998). Dvije tematske karte stanovništva Hrvatske iz tog rada prikazane su na slikama 1 i 2.

Markovica (1998) u svom je diplomskom radu izradio kartu dijela grada Zagreba primjenom programskog paketa AutoCAD Map. Izvornik za izradu te karte bila je Osnovna državna karta dijela grada Zagreba iz 1969. godine u mjerilu 1:5 000 u analognom obliku. Da bi se dobila karta u digitalnom obliku skaniran je izvornik na skaneru CalComp Scan +III. Skanirani izvornik (slika 3) predstavlja je izvorni crtež za rad u AutoCAD Mapu. Nakon učitavanja i poboljšavanja skaniranog izvornika prešlo se na vektorizaciju osi ulica. Trebalo je izabrati karakteristične točke i stvoriti uličnu mrežu koja je kasnije proširena prema pojedinoj širini i važnosti ulica. Zatim su vektorizacijom stvarani površinski objekti te popunjavani određenim tonom boje. Cjelokupni posao detaljno je opisan u diplomskom radu (Markovica, 1998), a konačan rezultat prikazan je na slici 4 koja se nalazi na posljednjoj stranici korica ovoga časopisa.

Prema Markovici (1998), AutoCAD Map je odlično rješenje za dobivanje baze geometrijskih podataka i za njihovu obradu i analizu. Podaci se mogu relativno brzo obraditi, jer postoji mogućnost automatske obrade podataka (proširivanje ulica), ali vrlo je važno različite podatke svrstati u različite slojeve kako bi rad s njima bio ugodniji i pregledniji. Prilikom obrade moguće je pojedine slojeve, koji nisu nužno potrebni, privremeno isključiti.

Međutim, loša je strana slojeva ta što se oni ne mogu poredati jedan iznad drugoga onako kako bismo mi to željeli, nego se oni podaci koji se posljednji obrade nalaze iznad podataka koji su obrađeni prije njih. U tu svrhu AutoCAD Map ima na padajućem izborniku Tools Display Order četiri opcije koje služe za dovođenje objekata ili cijelih slojeva iznad ili ispod drugih. To ima smisla raditi samo prilikom iscrtavanja karte, no slika kakva je na ekranu nakon obrade s tim opcijama neće biti tako i pospremljena, već onako kako je izvorno i napravljena.

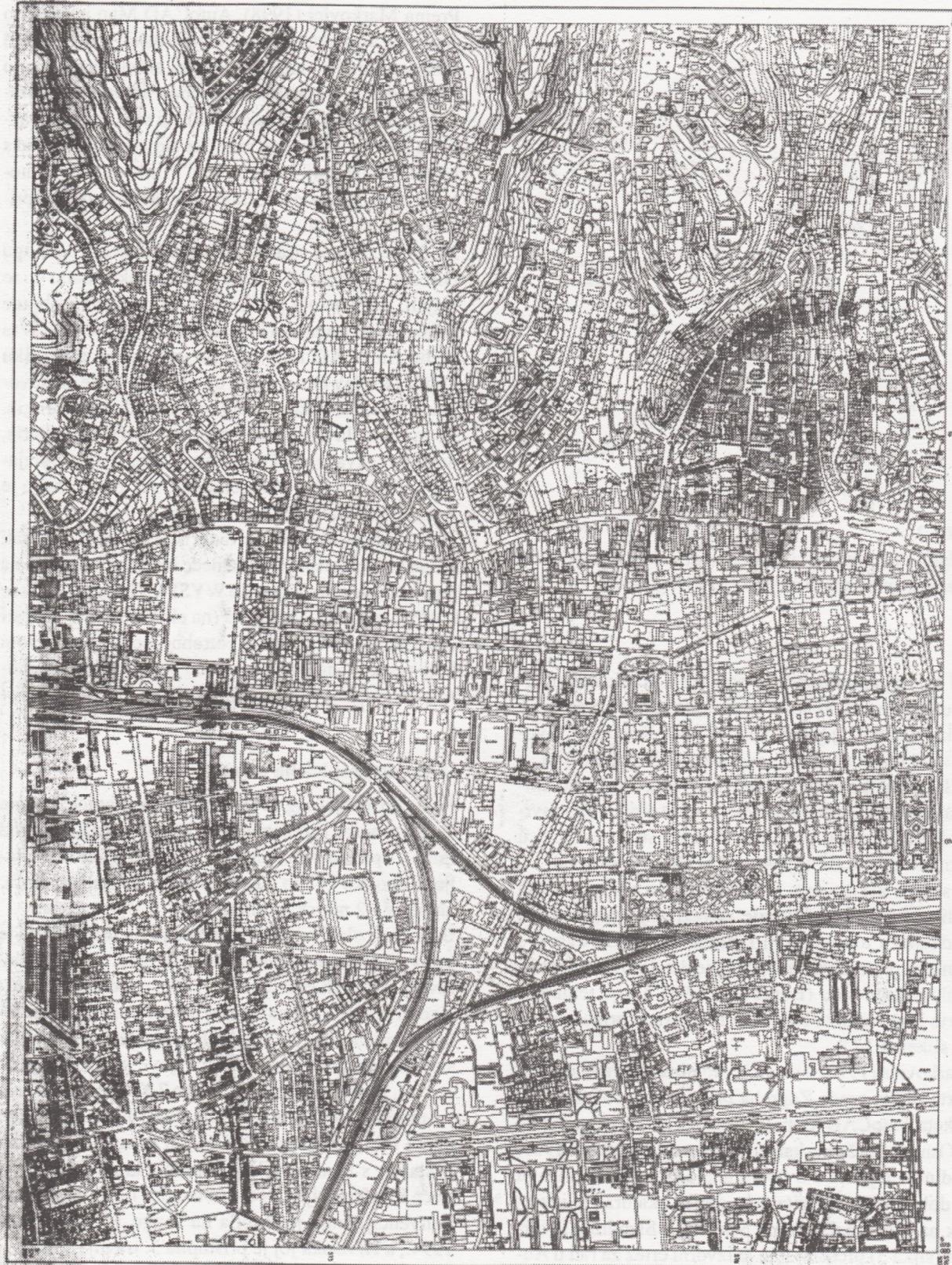
Osim toga, prilikom iscrtavanja boje koje smo odabrali i koje su iscrtane na ekranu neće biti tako iscrtane i na papiru, tj. ne vrijedi pravilo WYSIWYG (what you see is what you get — što vidiš (na ekranu) to ćeš i dobiti (na papiru)). Zbog toga je potrebno iscrtati paletu boja koje postoje (na papiru) za one boje koje ćemo upotrijebiti i prema njoj odabrati željene tonove boje.

Državna granica na moru

Pojas teritorijalnog mora ima svoje granice: prema kopnu granica je polazna crta (temeljna crta, osnovna linija), a prema pučini crta koja je od polazne crte udaljena onoliko koliko iznosi širina teritorijalnog mora, najčešće 12 morskih milja.

Bivša Jugoslavija bila je jedna od prvih država koja je prihvatala ravne polazne crte 1948. god. Taj je sustav ravnih polaznih crta proširen 1965. u jednu neprekidnu crtu, a bio je ocijenjen kao model ispravne i korektnе primjene ravnih polaznih crta. Mnoge države u svijetu učinile su pretjerane zahtjeve na ravne polazne crte, suprotno uputama članka 7 Konvencije o pravu mora iz 1982. Polazna crta bivše Jugoslavije nije nikad bila osporavana od drugih država i Hrvatska nastavlja s njenom primjenom. Na kraju zasjedanja treće Konferencije UN o pravu mora 1982. donijeta je konvencija koja je stupila na snagu 16. studenoga 1994., a Hrvatska joj je pristupila 5. travnja 1995.

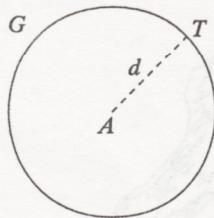
Službena kartografska projekcija za područje bivše Jugoslavije bila je Gauß-Krügerova projekcija pomoću koje je čitavo područje države bilo preslikano u tri zone. N. Frančula iz Zavoda za kartografiju Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu predložio je za karte sitnih mjerila Hrvatske Gauß-Krügerovu projekciju sa srednjim meridijanom $16^{\circ}30'$ (Frančula 1973). Da bi se smanjile linearne deformacije uveo je linearne mjerilo 0.9997 na srednjem meridijanu. Postavilo se pitanje bi li se ta projekcija mogla primijeniti



Slika 3. Kopija isječka Osnovne državne karte iz 1969. u mjerilu 1:5000

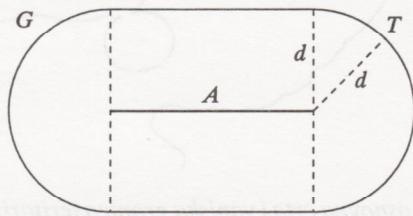
i pri određivanju vanjske granice teritorijalnog mora Hrvatske. Nakon izvršenog ispitivanja (Lapaine, Tuđnić 1999), analiza dobivenih rezultata pokazala je da razlika između duljine geodetske krivulje i duljine pravocrtnе spojnica u toj projekciji za duljine od 12 morskih milja nigdje ne prelazi 10 m. Dakle, za potrebe

određivanja vanjske granice teritorijalnog mora može se upotrijebiti dio pravca umjesto geodetske krivulje u izabranoj Gauß-Krügerovoj projekciji ukoliko nas zadovoljava točnost od 10 m. U nastavku izlaganja pretpostavlja se da je tako, i to omogućava rješavanje postavljenog problema u ravnini.



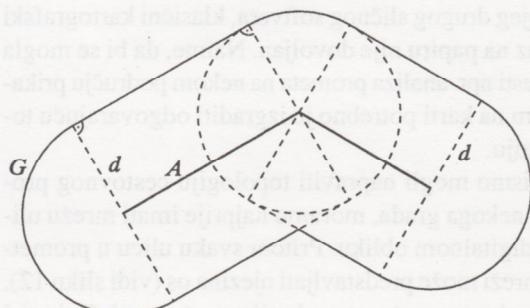
Slika 5.

Granica G teritorijalnog mora točke A



Slika 6.

Granica G teritorijalnog mora dužine A



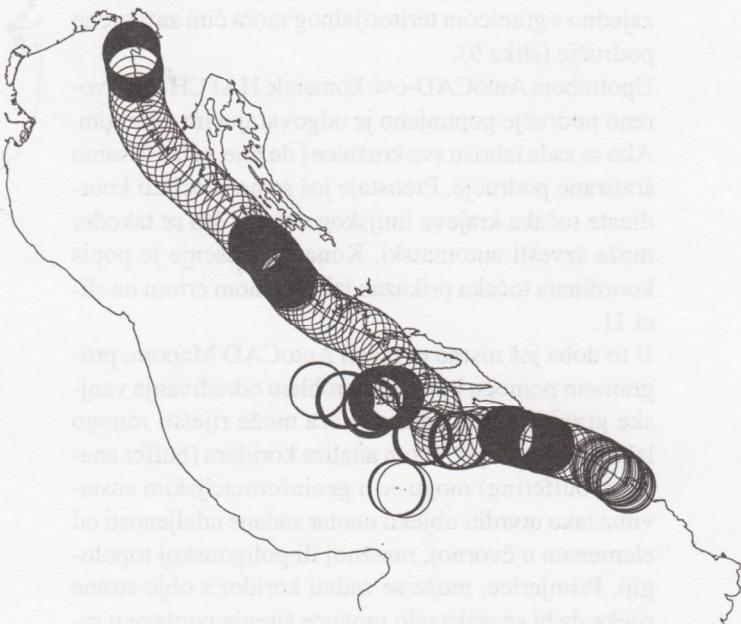
Slika 7.

Granica G teritorijalnog mora izlomljene crte A

Kad bi se osnovna crta sastojala od samo jedne točke A, tada bi granica G teritorijalnog mora bila kružnica sa središtem u točki A i s polumjerom d (slika 5). Kad bi osnovna crta bila dužina A, tada bi granica G njenog teritorijalnog mora bila krivulja koja se sastoji od dvije polukružnice i dvije dužine (slika 6). Kad bi osnovna crta bila izlomljena linija A sastavljena od dvije dužine, kao što je prikazano na slici 7, tada bi granica G njezinoga teritorijalnog mora bila složenija i sastojala se od dvije polukružnice, jednog kružnog luka i četiri dužine.

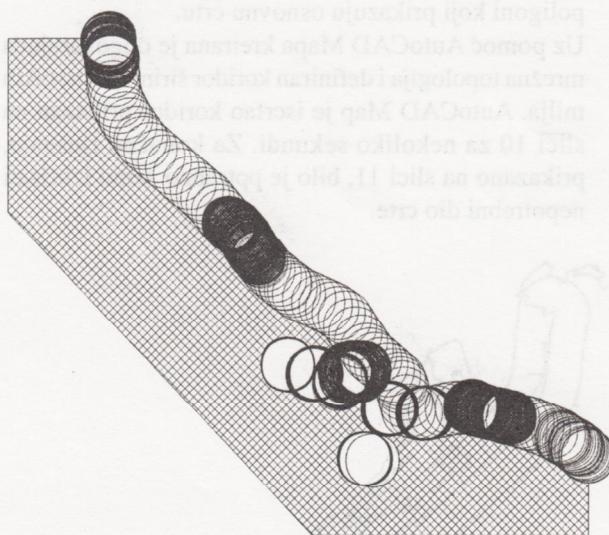
Zamislimo da je osnovna crta A izlomljena crta koja se sastoji od velikog broja segmenata. Granica G njezinoga teritorijalnog mora sastojat će se od kružnih luko-

va i dužina. Kružni lukovi imat će središte u točkama osnovne crte i polumjer d jednak zadanoj širini teritorijalnoga mora.



Slika 8.

Određivanje granice teritorijalnog mora pomoću AutoCAD-a



Slika 9.

Pomoćno područje ispunjeno šrafurom u AutoCAD-u

Popis točaka na hrvatskoj polaznoj crti, zajedno s nekoliko otoka koji leže izdvojeno te ih treba također uzeti u obzir, sadržavao je 850 točaka. Crta vanjske granice hrvatskoga teritorijalnog mora konstruirana je najprije u ravnini Gauß-Krügerove projekcije (detaljnije vidjeti u Tunjić i Lapaine, 1998). Crtanje kružnicu po kružnicu bilo bi zaista mukotrpan posao. Zahvaljujući AutoCAD-u i mogućnosti programiranja, sve kružnice i njihove tangente iscritane su automatski (slika 8).

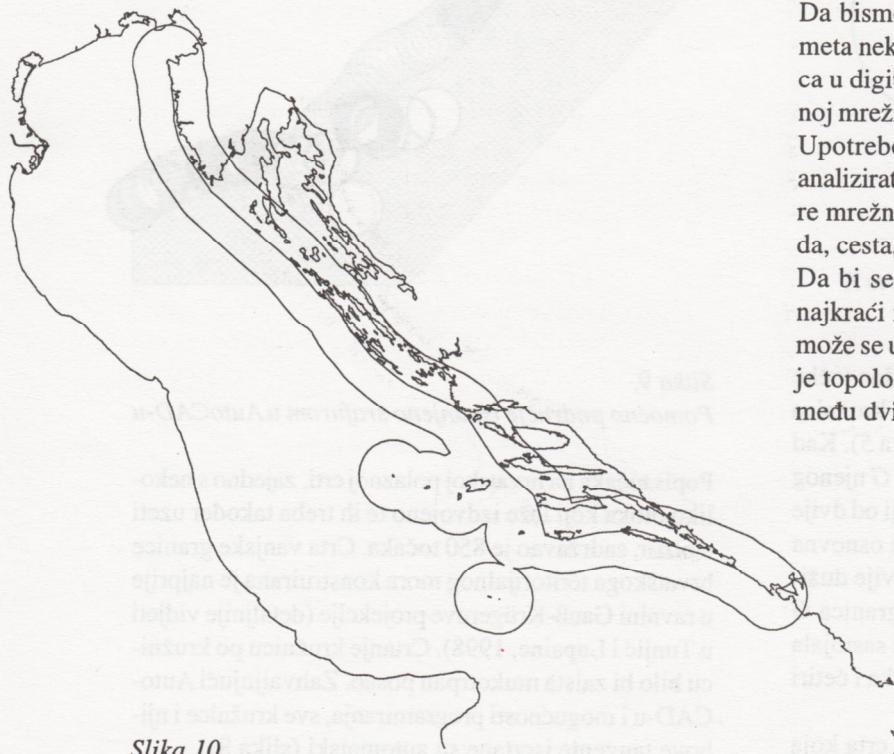
Sad je trebalo izbrisati sve one dijelove kružnica i dužina koji ne pripadaju vanjskoj granici. I to bi se mo-

glo napraviti ručnim radom uz veliku dozu strpljivosti. Da bi se to izbjeglo, jugoistočno od teritorijalnog mora povućena je pomoćna izlomljena crta tako da zajedno s granicom teritorijalnog mora čini zatvoreno područje (slika 9).

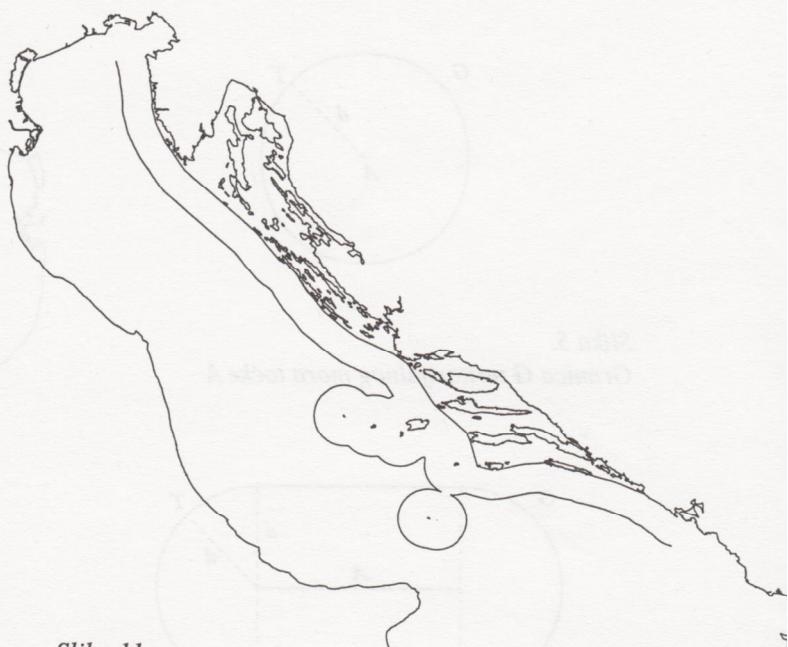
Upotrebom AutoCAD-ove komande HATCH to zatvoreno područje popunjeno je odgovarajućim uzorkom. Ako se sada izbrišu sve kružnice i dužine, ostat će samo šrafirano područje. Preostaje još samo pročitati koordinate točaka krajeva linijskog uzorka, što se također može izvesti automatski. Konačno rješenje je popis koordinata točaka prikazan izlomljenom crtom na slici 11.

U to doba još nismo ovladali AutoCAD Mapom, programom pomoću kojega se problem određivanja vanjske granice teritorijalnog mora može rješiti mnogo lakše. Naime, upotrebom analize koridora (buffer analysis, buffering) mogu se u geoinformacijskim sustavima lako utvrditi objekti unutar zadane udaljenosti od elemenata u čvornoj, mrežnoj ili poligonskoj topologiji. Primjerice, može se zadati koridor s obje strane rijeke da bi se prikazalo moguće širenje poplave u ravnini. Prema tome, određivanje granice teritorijalnoga mora može se interpretirati i kao konstrukcija koridora zadane širine oko mrežne topologije koju čine poligoni koji prikazuju osnovnu crtu.

Uz pomoć AutoCAD Mapa kreirana je odgovarajuća mrežna topologija i definiran koridor širine 12 morskih milja. AutoCAD Map je iscrtao koridor prikazan na slici 10 za nekoliko sekundi. Za konačno rješenje, prikazano na slici 11, bilo je potrebno samo izbrisati nepotrebni dio crte.



Slika 10.
Hrvatska osnovna crta i primjena mrežne topologije
s odgovarajućim koridorom



Slika 11.

Hrvatska osnovna crta i vanjska granica teritorijalnog mora

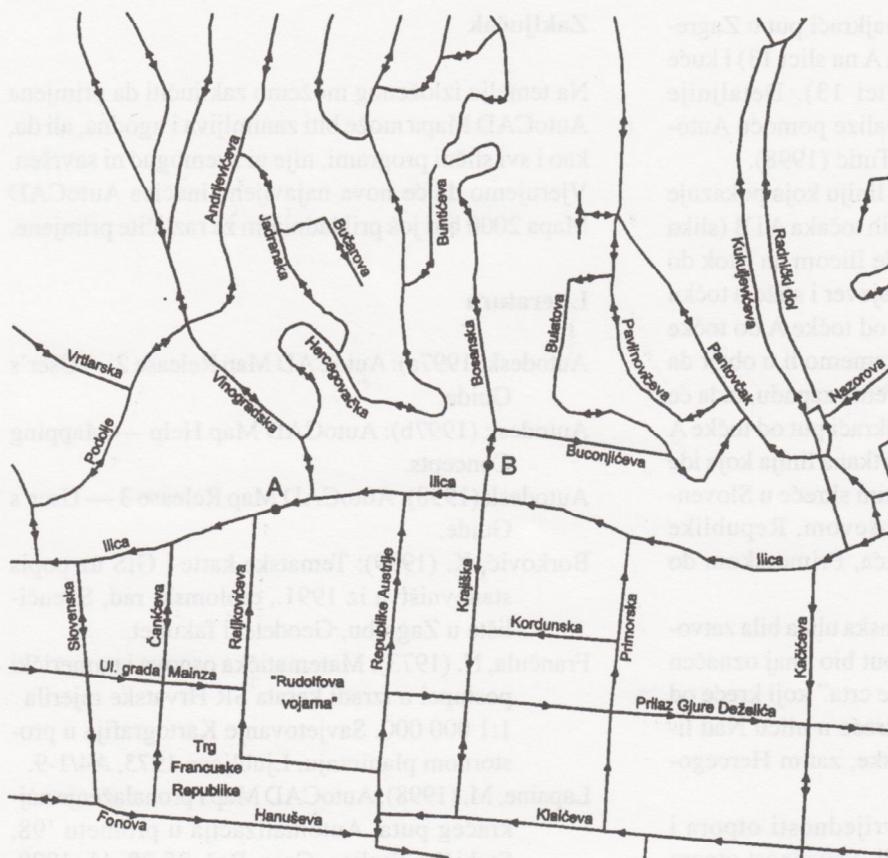
Određivanje najkraćeg puta

Prometnice se redovito prikazuju na topografskim, a vrlo često i na tematskim kartama. Međutim, za izvođenje različitih analiza uz pomoć AutoCAD Mapa ili kojeg drugog sličnog softvera, klasični kartografski prikaz na papiru nije dovoljan. Naime, da bi se mogla provesti npr. analiza prometa na nekom području prikazanom na karti potrebno je izgraditi odgovarajuću topologiju.

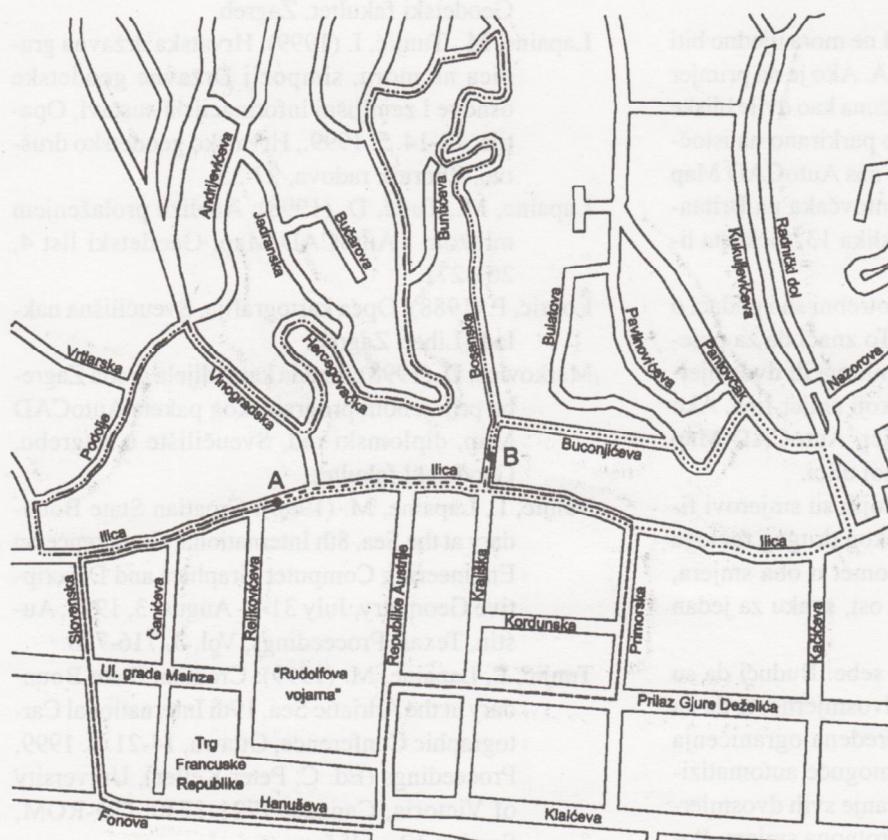
Da bismo mogli napraviti topologiju cestovnog prometa nekoga grada, moramo najprije imati mrežu ulica u digitalnom obliku. Pritom svaku ulicu u prometnoj mreži može predstavljati njezina os (vidi sliku 12). Upotrebom mrežne topologije možemo definirati i analizirati odnose između linearnih objekata. U primjeru mrežne topologije ubrajamo mreže ulica, naftovoda, cesta, električne mreže i dr.

Da bi se npr. za hitnu službu mogao brzo odrediti najkraći ili najbrži put između dvaju mjesta u gradu, može se upotrijebiti *analiza prolaznjem mrežom*, a to je topološka operacija koja računa najkraću stazu između dviju ili više točaka u mreži.

Mrežna topologija sadrži linearne elemente koji se spajaju u čvorovima. Kad se kreira mrežna topologija, podaci o vezama i njihovim odnosima spremaju se kao objektni podaci o svakoj vezi. Kao objektni podaci mogu se također spremiti podaci o orientaciji i propusnosti za svaku vezu u mreži. Nakon što se topologija kreira, ona se može analizirati. Detaljnije objašnjenje o kreiranju i uređivanju mrežne topologije za osi ulica opisali su Lapaine i Tutić (1998).



Slika 12.
Primjer ulične prometne mreže



Slika 13.
Nekoliko "najkracihih" putova koji spajaju točku A i B

Na presjecima triju ili više polilinija te na krajevima "slijepih" linija obavezno se nalaze čvorovi. Budući da je pronalaženje najkraćeg puta moguće samo između čvorova, početna i krajnja točka puta moraju biti u nekom od čvorova. Kako bi se omogućilo biranje početne i krajnje točke i negdje između križanja, potrebno je da i na tim mjestima budu čvorovi (npr. čvorovi se mogu staviti na mesta u ulici gdje se nalaze kućni brojevi ili na podjednakom razmaku ili na neki drugi način).

Nakon što je topologija kreirana, može se pregledati čvorove kreirane mrežnom, odnosno poligonskom topologijom. Kako bi se još bolje vidjeli čvorovi koji su dio mrežne topologije, može se promjeniti način kojim se točke što prikazuju čvorove pojavljuju na crtežu. Osim toga mogu se dobiti i različiti statistički pokazatelji o topologiji.

S AutoCAD Mapom može se analizirati mrežna topologija kako bi se izračunao najkraći put između dviju točaka ili odredila optimalna ruta na temelju vrijednosti smjera i propusnosti (otpora). Taj je postupak poznat kao pronalaženje najkraćeg puta (shortest path trace).

Može se izvesti i utvrđivanje područja određenog zadanim otporom (flood trace) u mreži. Tim se postupkom pronađi put od točke u svim smjerovima, uz zadavanje maksimalnog otpora, npr. moguće je naći sve restauracije unutar 10 minuta hoda od hotela ili sva stambena područja unutar 10 minuta vožnje od nekog novog trgovачkog središta. Moguće je također pronaći puteve prema svim čvorovima koji imaju neke zadane vrijednosti atributa.

Pretpostavimo da treba pronaći najkraći put u Zagrebu između kuće u Ilici 164 (točka A na slici 13) i kuće u Bosanskoj 3 (točka B na slici 13). Detaljnije objašnjenje o izvođenju takve analize pomoću AutoCAD Mapa opisali su Lapaine i Tutić (1998). Dobiveni crtež prikazuje crtkanu liniju koja pokazuje najkraći put između dviju izabralih točaka A i B (slika 13). Ta linija polazi iz točke A, ide Ilicom na istok do križanja s Bosanskim, skreće na sjever i stiže u točku B. To bi stvarno bio najkraći put od točke A do točke B kad bi Ilica bila dvosmjerna. Uzmemmo li u obzir da je Ilica jednosmjerna od istoka prema zapadu, tada će AutoCAD Map pokazati da je najkraći put od točke A do točke B onaj što ga prikazuje crtkana linija koja ide najprije Ilicom prema zapadu, zatim skreće u Slovensku, pa prolazi Fonovom, Hanuševom, Republike Austrije, Prilazom Gjure Deželića, Primorskog do Ilice i desno u Bosansku.

Međutim, kad bi primjerice Slovenska ulica bila zatvorena za promet, tada bi najkraći put bio onaj označen na slici 13 linijom "crti tri točkice crta" koji kreće od točke A Ilicom prema zapadu, skreće u ulicu Nad lipom, ide Podoljem do Vinogradske, zatim Hercegovačkom do Bosanske.

AutoCAD Map računa put iz vrijednosti otpora i smjerova spremljenih u topologiji. Vrijednost otpora može biti izražena količinom prometa, maksimalnom dopuštenom brzinom, strminom ili zavojitošću ulice itd., a smjer pokazuje je li ulica jednosmjerna ili dvosmjerna.

Najkraći put od točke A do točke B ne mora ujedno biti i najkraći put od točke B do točke A. Ako je na primjer Bosanska ulica u topologiji zabilježena kao dvije bliske jednosmjerne ulice i ako je vozilo parkirano na istočnoj strani Bosanske ulice, tada će nas AutoCAD Map usmjeriti preko Buconjićeve i Pantovčaka na Britanski trg, zatim u Ilicu do točke A (slika 13, točkasta linija).

Osim osi ulica, za svaku od njih potrebni su i podaci o dopuštenim smjerovima vožnje. To znači da za pojedinu ulicu treba znati je li jednosmjerna ili dvosmjerna, a ako je jednosmjerna, onda koji smjer ima. Ako se ulici posebno ne pridruži smjer, AutoCAD Map smatraće da se radi o dvosmjernoj ulici.

Problem dvosmjernih ulica kod kojih su smjerovi fizički odvojeni, ili kod kojih iz nekog drugog razloga nije dopušteno uključivanje u promet u oba smjera, može se riješiti uvođenjem dviju osi, svaku za jedan smjer.

Svako križanje treba rješavati za sebe. Budući da su neke ulice jednosmjerne, a neke dvosmjerne, te da na pojedinim križanjima postoje određena ograničenja skretanja, problem križanja nije moguće automatizirati. Također, nije rješenje pretvaranje svih dvosmjernih ulica u par jednosmjernih suprotnoga smjera. Prikazuje se da je sva jednostavna križanja (s tri ili četiri ulice) moguće obuhvatiti jedinstvenom shemom (Lapaine, Tutić 1998).

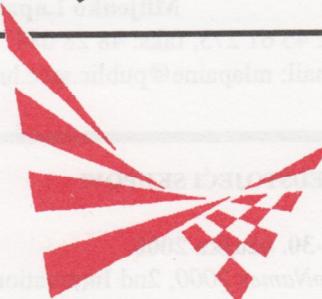
Zaključak

Na temelju izloženog možemo zaključiti da primjena AutoCAD Mapa može biti zanimljiva i ugodna, ali da, kao i svi slični programi, nije ni svemoguć ni savršen. Vjerujemo da će nova najavljeni inačica AutoCAD Mapa 2000 biti još prikladnjom za različite primjene.

Literatura

- Autodesk (1997a): AutoCAD Map Release 2 — User's Guide.
- Autodesk (1997b): AutoCAD Map Help — Mapping Concepts.
- Autodesk (1998): AutoCAD Map Release 3 — User's Guide.
- Borković, K. (1999): Tematske karte i GIS uz popis stanovništva iz 1991., diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
- Frančula, N. (1973): Matematička osnova i numerički postupci u izradi karata SR Hrvatske mjerila 1:1 000 000. Savjetovanje Kartografija u prostornom planiranju, Ljubljana 1973, A4/1-9.
- Lapaine, M. (1998): AutoCAD Map i pronalaženje najkraćeg puta. Automatizacija u prometu '98, Stubičke Toplice, Graz, Beč, 25-28. 11. 1998. Zbornik radova, 73-76.
- Lapaine, M., Vučetić, N., Tutić, D. (1999): Kartografija i AutoCAD Map, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Lapaine, M., Tunjić, I. (1999): Hrvatska državna granica na moru, simpozij Državne geodetske osnove i zemljjski informacijski sustavi, Opatija, 12-14. 5. 1999., Hrvatsko geodetsko društvo, Zbornik radova, 27-35.
- Lapaine, M., Tutić, D. (1998): Analiza prolaženjem mrežom i AutoCAD Map, Geodetski list 4, 261-271.
- Lovrić, P. (1988): Opća kartografija, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb.
- Markovica, D. (1998): Izrada karte dijela grada Zagreba primjenom programskega paketa AutoCAD Map, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
- Tunjić, I., Lapaine, M. (1998): Croatian State Boundary at the Sea, 8th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, July 31 — August 3, 1998, Austin, Texas, Proceedings, Vol. 3, 716-720.
- Tunjić, I., Lapaine, M. (1999): Croatian State Boundary at the Adriatic Sea, 19th International Cartographic Conference, Ottawa, 14-21. 8. 1999, Proceedings (Ed. C. Peter Keller), University of Victoria, Canada, 1721-1730; CD-ROM, Section 12, .pdf format.
- Vučetić, N. (1999): Kartografska generalizacija i AutoCAD Map. Rukopis. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Vijesti, izvješća i najave



GODIŠNJA SKUPŠTINA
HDKGIKG-A

U Vijećnici AGG fakulteta u Zagrebu održana je 27. 9. 1999. Godišnja skupština Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku.

Prema dnevnom redu slijedili su izvještaji predsjednice, tajnice, Izdavačkog savjeta i Nadzornog odbora. Predsjednica Društva izvjestila je o radu Društva i njegovih članova u proteklom razdoblju. Istaknula je da smo, djelujući preko Društva, pridonijeli zabrani uporabe knjige kao sveučilišnog udžbenika autorâ Petra i Igora Mitova. Naime, na sastanku Društva u veljači 1999. godine vrlo je opširno kritiziran taj udžbenik, te je zaključeno da se pošalju pisani prgovori na određene adrese, što je i učinjeno. O tome se može čitati u 3. broju KoG-a. Nadalje je predsjednica izvjestila o novom broju časopisa KoG, o stručnom sastanku Društva u lipnju i 5. znanstveno-stručnom kolokviju u rujnu 1999. Tajnica Društva dala je finansijsko izvješće. Istaknula je, da smo svojim aktivnostima — izdavanjem časopisa, organizacijom znanstveno-stručnih skupova te ostalim radom uspjeli dobiti finansijsku potporu Ministarstva znanosti i tehnologije. U 1998. dobili smo od Ministarstva sredstva za izdavanje časopisa KoG i organizaciju 4. znanstveno-stručnoga kolokvija. U 1999. su osim sredstava za izdavanje časopisa stigla i sredstva za djelatnost Udruge, odnosno,

Društva. Stalni je sponsor Građevinski fakultet (fotokopiranje, materijalni troškovi, HPT, kave, sokovi itd.), a povremeni i Arhitektonski fakultet (kave, sokovi).

Slijedila su zatim ostala izvješća, koja su jednoglasno prihvaćena.

Usvojen je plan rada Društva za sljedeću godinu, koji sadrži organizaciju tematskog skupa u veljači 2000. godine, stručnog sastanka u lipnju, znanstveno-stručnoga kolokvija u rujnu, izdavanje novog broja časopisa KoG te razmjenu časopisa.

Ivana Babić

5. ZNANSTVENO-STRUČNI KOLOKVIJ HDKGIKG-A

U Zagrebu je 27. i 28. rujna 1999. održan 5. znanstveno-stručni kolokvij Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku. Sponzori skupa bili su Građevinski i Arhitektonski fakultet. Skupu je prisustvovalo trideset sudionika iz Hrvatske, prof. dr. Hellmuth Stachel iz Austrije, te dr. Žiga Turk iz Slovenije.

Prvog su dana, nakon pozdrava predsjednice Društva prof. dr. Vlaste Šurić-Čudovan, održana sljedeća znanstvena i stručna predavanja:

- M. Lapaine: Primjena AutoCAD Mapa u konstruktivnoj geometriji i računalnoj grafici
- J. Beban-Brkić, I. Medved: Opća teorija centralnih ploha drugog reda uz podršku softvera Mathematica
- V. Szirovicza: Projektivno izvođenje potpuno cirkularnih krivulja 3. reda u izotropnoj ravnini
- K. Frel: Some Numerical Models of Fabric Structures
- S. Gorjanc: Klasifikacija nožišnih ploha (1,2) kongruencija
- H. Stachel: On the Tetrahedra in the Pentagondodecahedron
- A. Sliepčević: Afina analiza prame na konika u realnoj projektivnoj i izotropnoj ravnini

• Z. Božikov: O simetričnim dizajnima s parametrima $(9n+4, 3n+1, n)$. Od stručnih predavanja treba istaknuti rad koji je rezultat suradnje mr. J. Beban-Brkić i studenta I. Medveda, demonstratora na matematičkim predmetima na Geodetskom fakultetu u Zagrebu. Taj je rad nagrađen Rektorovom nagradom u 1999. godini. Prikazi rezultata znanstvenih i stručnih radova bili su na visokoj razini zahvaljujući, između ostalog, i sveobuhvatnoj uporabi računalne grafike. U tom se smislu može istaknuti izlaganje S. Gorjanc koja je, koristeći animaciju, prikazala reviju ploha čije je nastajanje klasičnim konstruktivnim postupcima vrlo teško predočiti.

I ovom znanstveno-stručnom kolokviju HDKGIKG-a prisustvovao je, kao gost, jedan poznati europski geometričar. Bio je to prof. dr. Hellmuth Stachel, redoviti profesor Tehničkih fakulteta u Beču, Grazu i Leobenu, dopisni član Austrijske akademije znanosti, potpredsjednik Međunarodnog društva za geometriju i grafiku, istaknuti urednik časopisa *Journal for Geometry and Graphics* te čovjek koji niz godina surađuje s hrvatskim geometričarima, podupire rad našega Društva i časopisa KoG. Autor je i nekrologa profesoru Stanku Bilinskemu kojeg je kao posebno izdanje nedugo objavila Austrijska akademija znanosti.

Vlasta Szirovicza

GEOMETRIETAGUNG

VORAU,

30. SVIBNJA-4. LIPNJA 1999.

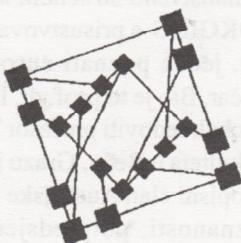
Od 30. svibnja do 4. lipnja 1999. održan je u slikovitom austrijskom gradiću Vorau europski znanstveni skup geometričara pod nazivom *Geometrietagung*. Pod vodstvom prof. dr. H. Voglera i prof. dr. O. Röschela, a uz potporu štajerske vladе, skup je organizirao i sufinancirao Tehnički univerzitet iz Graza. Skupu je prisustvovalo više od sedamdeset sudionika iz Austrije, Češke, Grčke, Hrvatske, Mađarske, Njemačke i Slovačke s pedesetak saopćenja. Hrvatsku je predstavljalo čak sedam sudionica, od toga pet

s-referatima: Sva su izlaganja bila popraćena mnoštvom pitanja i zanimljivim diskusijama. Izdvajamo dva referata što su ih održale članice Hrvatskog društva za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku:

- **Ana Sliepčević:** Konstruktion der vierfachen Brennpunkte zirkulärer Kurven dritter und vierter Ordnung
- **Vlasta Szirovicza:** Die vollständig zirkulären Kurven dritter Ordnung in der isotropen Ebene.

Održavanje sljedećeg sličanog skupa predviđeno je 2001. godine na istome mjestu.

Ana Sliepčević



**HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO
INŽENJERSKA SEKCIJA**
<http://www.math.hr/hmd>

Cilj Hrvatskoga matematičkog društva (HMD) je unapređivanje i promicanje matematičke znanosti, nastave matematike na svim razinama, primjene matematike u drugim disciplinama te unapređivanje društvenog položaja matematičara i matematike u cjelini.

Inženjerska se sekcija HMD-a bavi unapređivanjem i promicanjem do stignuća o primjenama matematike u drugim područjima i informiranjem o njima.

Prvi sastanak Inženjerske sekcije HMD-a, od kada je njen voditelj M. Lapaine, održan je u lipnju 1999. Rad sekcijske nastavio se na jesen te godine i od tada se sastanci održavaju neprekidno u pravilu svakog drugog četvrtka u mjesecu u vijećnicima AGG fakulteta u Kačićevoj 26 u Zagrebu. Osim obavijesti i dogovora o dalnjem radu, na programu je uvijek i jedno predavanje. U okviru prve skupine sastanaka održana

su ili su u pripremi sljedeća predavanja:

16. lipnja 1999.

Miljenko Lapaine: Matematika i geodezija

14. listopada 1999.

Jelena Beban-Brkić: Program Mathematica i plohe drugog reda

11. studenoga 1999.

Lidija Pletenac: Računalna geometrijska grafika na studiju tehnike

9. prosinca 1999.

Vladimir Hitrec: Čemu služi "radijan"?

13. siječnja 2000.

Juraj Hrnčević: Sustav sila

10. veljače 2000.

Juraj Hrnčević: Težiste

9. ožujka 2000.

Božica Hajsig: Grafički radovi iz Nacrte geometrije i perspektive - prošlost, sadašnjost, budućnost

13. travnja 2000.

Nenad Trinajstić, Sonja Nikolić: O brojevima

11. svibnja 2000.

Zlatko Drmač: Numerička simulacija - od teorije do algoritma

26. lipnja 2000.

Zajednički sastanak s Hrvatskim društvom za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku

Sažeci svih tih predavanja skupit će se i objaviti u posebnoj publikaciji. Sudjelovanje u radu Inženjerske sekcijske HMD-a omogućeno je svima, bez obzira bili članovi HMD-a ili ne. Nečlanovima HMD-a preporuča se da postanu članovi uplatom godišnje članarine od 120 kn na žiro račun 30102-678-79162. U iznos članarne uključeno je primanje jednog od časopisa koje društvo izdaje. Ukoliko želite primati obavijesti o radu i sastancima Inženjerske sekcijske, potrebno je voditelju dostaviti svoju adresu, po mogućnosti elektroničku (e-mail).

O sastancima Inženjerske sekcijske mogu se naći nove obavijesti na Internetu, na adresi Hrvatskoga matematičkog društva
<http://www.math.hr/hmd>

Radom Sekcija HMD-a rukovode Odbori na čijem se čelu nalaze voditelji sekcijske. Budući da je do sada sve poslove u vezi Inženjerske sekcijske vodio samo njen voditelj, ovo je ujedno poziv svima zainteresiranim za suradnju.

Miljenko Lapaine
tel.: 45 61 273, faks: 48 28 081
e-mail: mlapaine@public.srce.hr

PREDSTOJEĆI SKUPOVI

28.-30. ožujka 2000.

GeoNames 2000, 2nd International Symposium on Geographical Names, Frankfurt am Main, Germany

3.-6. travnja 2000.

Cartography and Navigation, 4th Geomatic Week, Barcelona, Spain

9.-11. svibnja 2000.

GEOBit, International Trade Fair for Spatial Information Technologies and Geo-Informatics, Leipzig, Germany

18.-21. svibnja 2000.

Dani geodeta, Hrvatsko geodetsko društvo, Pula, Hrvatska

22.-27. svibnja 2000.

For a Global Integration of Data and Geospatial Services, 2nd International Seminar on GEOMATICS 2000, Havana, Cuba

25.-26. svibnja 2000.

Modeliranje u znanosti, tehniči i društvu, Akademija tehničkih znanosti Hrvatske i Hrvatsko društvo za sustave, Rijeka, Hrvatska

25.-27. svibnja 2000.

3rd AGILE (Association of Geographic Information Laboratories in Europe) Conference on Geographic Information Science, Helsinki/Espoo, Finland

14.-16. lipnja 2000.

10th SEFI-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education, Miskolc, Hungary
<http://matsefi@gold.uni-miskolc.hu>

15.-16. lipnja 2000.

2nd Croatian Mathematical Congress, CMS (HMD), Zagreb
<http://www.math.hr/congress>

15.-17. lipnja 2000.

SDG Symposium Darstellende Geometrie, Technische Universität Dresden, Fachbereich Mathematik, Institut für Mathematik, Dresden, Germany
<http://www.math.tu-dresden.de/geo/>
 Tagungen

19.-23. lipnja 2000.

Computer Graphics International 2000, Nature, Time and People, MIRALab, University of Geneva, Switzerland
<http://www.miralab.unige.ch/cgi2000>

5.-7. srpnja 2000.

I. kongres nastavnika matematike, HMD, Zagreb

6.-8. srpnja 2000.

International IT Conference on Geo-Spatial Education, Department of Land Surveying and Geo-Informatics, Hong Kong

10.-14. srpnja 2000.

3ecm Barcelona 2000, Shaping the 21st century, Third European Congress of Mathematics, Barcelona, Španjolska
<http://www.iec.es/3ecm>

16.-23. srpnja 2000.

Geoinformation for all, 19th Congress of the International Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ISPRS), Amsterdam, The Netherlands

28.-31. srpnja 2000.

9th International Conference on Geometry and Graphics, Faculty of Engineering, Rand Afrikaans University, Johannesburg, South Africa.

27.-29. rujna 2000.

GIS Croatia 2000, konferencija i izložba u organizaciji GIS Foruma Hrvatskog informatičkog zabora, Zagreb i Osijek.

11.-13. listopada 2000.

InterGeo 2000, International Fachkongress und Fachmesse der Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie, ICC Berlin

1.-6. srpnja 2001.

19th International Conference on the History of Cartography, Madrid, Spain.

6.-10. kolovoza 2001.

Mapping the 21st Century, 20th International Cartographic Conference, Beijing International Convention Center, Beijing, China
<http://www.sbsm.gov.cn.icc2001/>

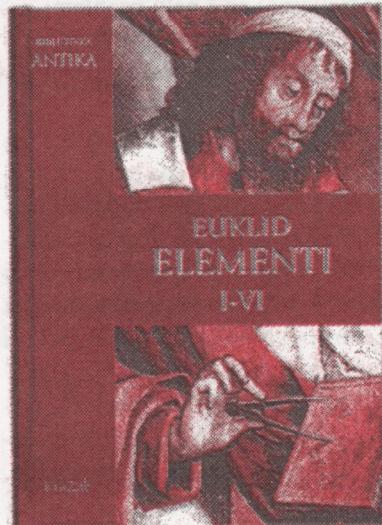
20.-28. kolovoza 2002.

International Congress of Mathematicians, Beijing, China
<http://www.cms.org.cn>

Prikazi

EUKLID**ELEMENTI I-VI**

Prijevod: Maja Hudoletnjak Grgić
Pogovor: Vladimir Volenec



Recenzenti: Boris Pavković, Mirko Polonijo, Josip Talanga

Izdavač: KruZak d.o.o.

Zastavnice 29, 10251 Hrvatski Leskovac

Telefon: (385 1) 65 78 565

CroNet: 098 235 527

e-mail: kruno.zakaria@zg.tel.hr

<http://www.kruzak.hr>

U proljeće prošle godine objavljen je prvi hrvatski prijevod prvih šest knjiga Euklidovih *Elementata*, djela koje po broju izdanja nadmašuje jedino Biblija. Taj je znanstveno-kulturni događaj popraćen tekstovima Mirka Polonija "Euklid na hrvatskom, konačno" (Zarez, 30. travnja 1999.) te Uroša Milutinovića koji, među ostalim, kaže: "...Elementi su tekst koji je ne samo stvorio, nego još stvara matematiku i znanost u najširem smislu, jer je od nastanka do danas bio i ostao izvor matematičkih ideja i standarda, inspiracija za nastanak cijelih područja matematike: geometrije (ili još bolje različitih geometrija), teorije prirodnih brojeva, teorije realnih brojeva, analize, logike i topologije..." (Jutarnji list, 10. lipnja 1999.).

Budući da se nedvojbeno može ustvrditi kako hrvatsko izdanje Euklidovih *Elementata* popunjava veliku prazninu u našoj prevoditeljskoj baštini, začuđuje činjenica da je taj potхват, koji je samo djelomice sufinciralo Ministarstvo kulture, uglavnom rezultat entuzijastičkog rada izdavača, prevoditeljice te nekolicine matematičara.

Na poraznu okolnost da društveni čimbenici nemaju sluha za objavljanje temeljnih djela svjetske znanosti (uključujući nova izdanja već objavljenih) nadovezuju se podaci o distribuciji i broju prodanih primjeraka knjige: do sada je od 1000 tiskanih primjeraka za javne knjižnice (ponovo Ministarstvo kulture) otkupljeno 150 knjiga, privatno je prodano pedesetak i dalje — ništa. Nijedna fakultetska knjižnica u Hrvatskoj, a na nekim su fakultetima *Elementi* obvezatna literatura, nije naručila makar jedan primjerak!

Euklidovi *Elementi* ukupno imaju trinaest knjiga. Što će nakon objavljanja prvih šest biti s preostalih sedam knjiga koje tek treba prevesti, urediti, tiskati? Je li moguće da će se Ministarstvo znanosti ponovo oglušiti na traženja Društva matematičara, izdavača i drugih?

Sonja Gorjanc

Uz suglasnost autora prenosimo cjelovit tekst Mirka Polonija objavljen u *Matematičko-fizičkom listu* 1/197, 1999./2000.

MIRKO POLONIJO

Euklidovi *Elementi* prevedeni na hrvatski!

U povijesti cjelokupne matematike nema matematičara ravna Euklidu. On sigurno nije najveći matematičar koji je ikada djelovao, mjereći njegov osobni doprinos znanosti. Dapače, vrlo je daleko od toga. Međutim, zacijelo je najveći učitelj matematike od kada matematike jest. Ne postoji matematičko djelo koje je sadržajem i načinom izlaganja imalo toliko velik značaj i utjecaj na daljnje izučavanje, poučavanje i razvoj matematike poput Euklidovih *Elementata*. Istodobno, gotovo da ne postoji matematičko djelo većeg utjecaja od Euklidovih *Elementata* na nematematičke znanosti.

Zato je za svaki jezik i one koji nime govore važno postojanje prijevoda Euklidovih *Elementata*, kao iskaz vlastite kulturne razine, ali i nužne potrebe upoznavanja najšireg čitateljstva s Euklidovom riječi. Prema tome, pojava prvog potpunog hrvatskog prijevoda prvih šest knjiga Euklidovih *Elementata* (dvije tisuće i tristo godina poslije Euklida!) izuzetan je dogadaj za našu znanost, obrazovanje i kulturu. Knjigu *Euklid, Elementi I-VI* izdala je nakladnička kuća Kruzak iz Zagreba u proljeće 1999.

Prevoditeljica Maja Hudoletnjak Grgić prihvatile se izazovnog, teškog i značajnog poduhvata. Prevodila je prema općepriznatoj najboljem izdanju grčkog teksta Euklidovih *Elementata*, onom koje je priredio povjesničar matematike I. L. Heiberg (1854.-1928.), objavljenom u Euklidovim sabranim djelima tiskanim u Leipzigu 1883.-1916. g.

Prevoditeljica je koristila i Heathov engleski prijevod.

Svoj je posao prevođenja *Elementata* izvrsno obavila, stvarajući jasan i čitljiv prijevod vjeran duhu hrvatskog jezika i grčkog izvornika. Ugovoru prijevoda Vladimir Volenec pregledno i zanimljivo piše o mjestu i ulozi Euklida i njegovih *Elementa-*

ta te komentira sadržaj prvih šest knjiga.

Euklidovi *Elementi* sadrže osnove gotovo cjelokupne grčke matematike do Euklidova vremena, a nastali su na temelju ranijih dostignuća drugih matematičara, izborom, obradom i sustavnim raspoređivanjem te starije građe, pri čemu su bez sumnje neki teoremi i dokazi originalno Euklidovi. Mnogi vrijedni sadržaji iz tog doba nisu uvršteni u *Elemente*. Npr. teorija čunosjećnica, koja je tada već dovoljno razvijena, matematička znanja nastala u rješavanju problema triksekcijske kute, podvostručenja kocke, Hipokratove kvadrature nekih neravnih likova, Hipokratovi "mjeseci" i drugo.

Vrijednost *Elementata* je u strogom logičkom slijedu izlaganja koje se odvija postupno, po potpuno određenoj shemi: definicije, postulati, aksiomi, tvrdnje (propozicije) i njihovi dokazi. Među teorema (propozicijama) su i neki problemi-zadaci čije se rješenje daje konstrukcijom ili pomoću aritmetičkog algoritma.

Tako su *Elementi* postali uzorom kako bi neka znanstvena teorija trebala biti oblikovana i podučavana. Utjecali su na shvaćanje pojma znanstvene teorije, njezinog zasnivanja i razvijanja, te na metodiku učenja. *Elementi* su stoljećima predstavljali zbornik nužnih temeljnih matematičkih znanja. Bili su osnovni, ponkad i jedini, u cijelini ili nekim svojim dijelom, udžbenik matematike. Njihovi tragovi su vidljivi i u suvremenoj nastavi geometrije. Istodobno, oni su bili izazov, povod i poticaj mnogim matematičkim spoznajama i razvoju novih teorija. Posebno moramo spomenuti otkriće postojanja neeuklidskih geometrija. Među matematičarima se nerijetko ističe i ponavlja da ni jedno djelo, s izuzetkom Biblije, nije nikad bilo tako široko i mnogobrojno koriš-

teno, proučavano, uređivano i izdavano poput *Elementata*, te da nema znanstvenog djela koje je izazvalo veći utjecaj na znanstvenu misao. Uz to, *Elementi* su izvor za poznavanje matematike od 6-4. st. pr. Kr.

Primjerak *Elementata* iz vremena njihova nastanka nije sačuvan. Usapoređujući različite prijepise, prema mišljenju povjesničara matematike raspoložemo s prilično jasnom slikom originalnog grčkog teksta. Ti su prijepisi obično nepotpuni, odnosno to su verzije s većim ili manjim izmjenama, nadopunama i komentariima. Posebno je važna verzija Teona iz Aleksandrije iz druge polovice IV. st., jedna od najstarijih sačuvanih, danas u knjižnici sveučilišta u Princetonu. Postoji nešto starijih prijepisa, Codex P u Vatikanskoj knjižnici, tek mjestimice različit od Teonova.

Pri tome ostaje pitanje je li sav tekst *Elementata* izvorni Euklidov rad, jer je vrlo vjerojatno da su pod njegovim vodstvom u stvaranju *Elementata* sudjelovali i učenici. Neki misle da je on bio na čelu tima matematičara koji su svi zajedno doprinosili pišući *Elemente* te da je taj rad nastavljen i nakon Euklidove smrti. Dakako, neki i Euklidovo postojanje smatraju upitnim, nudeći kao odgovor na pitanje autorstva *Elementata* rad grupe škole matematičara pod pseudonimom *Euklid*.

Zanimljivo je spomenuti da najstariji poznati prijevod *Elementata* na latinski nije s grčkog, već s arapskog jezika. Arapski prijevod *Elementata* završen je početkom 9. st., kad su već prevedena i mnoga druga djela grčkog matematičkog nasljeđa. Tada dolazi do snažnog razvoja i oblikovanja samostalne arapske matematičke misli. Oko 1120. g. javlja se prvi latinski prijevod cjelokupnih *Elementata*. S arapskog ih prevodi engleski znanstvenik Adelhard iz Batha (1075.-1160.).

Najstariji hrvatski znanstvenik i filozof Herman Dalmatin (12. st.) smatra se također prevoditeljem *Elemenata*. Njegov prijevod se čuva u pariškoj Nacionalnoj biblioteci, premda izgleda vjerojatnijim da je to ipak Hermanova revizija Adelhardova prijevoda. Jedan kasniji prijevod na latinski, talijanskog matematičara Campanusa iz Novare (u. 1296. g.), postat će predložak za prvo tiskano izdanje *Elemenata*, 1482. g. u Veneciji. Naglasimo da se primjeri ovog izdanja čuvaju i u Šibeniku (Samostan franjevaca konventualaca) i Zagrebu (Metropolitanska knjižnica). Nešto kasnije, 1505. g. u Veneciji se tiska i prvi latinski prijevod *Elemenata* s grčkog, a prva grčka tiskana verzija *Elemenata* objavljena je u Bazelu. S vremenom će se pojaviti prijevodi i na drugim jezicima (engleski — 1570.g. (potpuno izdanje *Elemenata*); njemački — 1562.g. (prvih šest knjiga); kineski — 1607.g. (prvih šest knjiga); ruski — 1739. g. (prvih osam knjiga); mađarski — 1865.g. (potpuno izdanje)). Među južnoslavenskim jezicima, prvo i do sada jedino potpuno izdanje toga djela izlazi na srpskom jeziku od 1949. do 1957.g., u prijevodu i s mnogobrojnim komentarima profesora beogradskog Univerziteta, ruskog matematičara Antona Bilimovića (1879.-1971.).

Pored *Elemenata*, Euklid je autor bar još desetak drugih radova. Nažalost, veoma je malo poznato o Euklidovoj biografiji, osim činjenice da je bio profesor Aleksandrijske akademije, osnovane oko 300. g. pr. Kr. Ta se godina najčešće navodi uz Euklidovo ime i njegove *Elemente*. Uzima se da je rođen oko 325. godine a umro oko 265. pr. Kr. Nije poznato ni mjesto rođenja (umro je u Aleksandriji), ni godine Euklidova rođenja i smrti, njegova narodnost, niti drugi podaci iz životopisa. Oko 400. godine pr. Kr. djelovao je filozof Euklid iz Megare, što je unesilo nove nesporazume. Valja naglasiti da u to doba ime Euklid nije bilo rijetko. Neke podatke o Euklidu dobivamo od Proklosa (410.-485.), posljednjeg velikog grčkog filozofa, ali ne zabo-

ravimo da on živi 700 godina nakon Euklida.

O Euklidu Aleksandrijskom traju tek dvije anegdote, dva Euklidu pripisana odgovora. Prvi je odgovor vladaru Ptolemeju o nepostojanju posebnog kraljevskog puta u geometriju, (navodi ga Proklos koji kao izvor uzima Arhimeda (287.-212. g. pr. Kr.)). Drugi je odgovor nekom učeniku na pitanje kakva mu je korist od naučene geometrije, kad Euklid poziva roba s nalogom da mladiću dade tri novčića, jer da ovaj želi imati dobit od naučenog.

Na akademiji u Aleksandriji Euklid je osnivač tzv. Aleksandrijske matematičke škole, a njegovi su posredni učenici Arhimed i Apolonije iz Perge (oko 262. - oko 190.g. pr. Kr.). Ovaj čuveni trostav obilježava vrhunac helenističke epohe matematike. Aleksandrijsku akademiju (sveučilište) zvanu Museion osniva Ptolemej, rodonačelnik dinastije Ptolemejevića, nakon što je po smrti Aleksandra Makedonskog (323. g. pr. n. e.) oko 306. g. pr. n. e. zavladao Egiptom, te odabrao Aleksandriju za glavni grad svoje države. Ptolemej gradi Museion, unutar kojeg će biti i velika biblioteka, te poziva i privlači učene ljude svoga doba pod okrilje akademije. Pretpostavlja se da tako i Euklid dolazi iz Atene za voditelja matematičkog dijela akademije, a po nekim autorima, cijelokupnog Museiona. Naime, vjeruje se da je u Ateni Euklid bio učenik Platonove akademije, filozofske škole što je osnovana 377. g. pr. Kr. Isto tako je neosporan utjecaj Aristotela na koncipiranje Euklidova djela.

Platon (427.-347 g. pr. Kr.) je autor nekih matematičkih radova (npr. opis regularnih (pravilnih) poliedara, tzv. Platonovih tijela, koja su bila znana od ranije). Međutim, njegov je značaj za razvoj matematike sadržan u njegovu shvaćanju matematike kao nužne i temeljne prepostavke razumijevanja svijeta. Priča se da je na vratima Platonove akademije stajao natpis: "Neka ne ulaze oni koji ne znaju geometriju". Takvim gledanjem Platon se otklonio od sofista i svoga učitelja Sokrata. Platon

i njegova škola postavljaju pitanja o prirodi i strukturi matematike, te nakon Talesa (640.-546 g. pr. Kr.) čine novi korak k racionalizaciji matematike, spoznajući i prihvaćajući apstraktни karakter matematičkih objekata. Ostvaruje se visok stupanj osamostaljenja matematike, naročito od filozofije i religije. Odvajajući matematiku od svijeta "realnosti", a uviđajući manjkavosti zaključivanja po analogiji i indukciji, platonova škola ističe važnost strogosti dokaza i deduktivnog pristupa. Upravo su to bitne karakteristike Euklidovih *Elemenata*.

Aristotel (384.-322 g. pr.Kr.), znatno više materijalist no što je to bio njegov učitelj Platon, ne stavlja u potpunosti matematičke objekte u područje ideja, već ih razmatra kao apstrakcije čiji se izravni korijen nalazi u realnom, fizičkom svijetu. Razjašnjavajući osnovne pojmove, nužne za istraživanje i razumijevanje tih apstrakcija, on dublje proniče u bit deduktivnog zaključivanja i aksiomskog pristupa, međusobno razlikujući definicije, aksiome, pretpostavke, tvrdnje, a problem egzistencije matematičkih objekata rješava konstruktivno. Postoji ono što se može konstruirati. Takav je matematički svjetonazor jasno uočljiv u Euklidovim počelima.

Euklidovi se *Elementi* sastoje od triнаest knjiga, kojima su kasnije pri-dodane još dvije knjige drugih autora.

Prve četiri knjige bave se planimetrijom i smatra se da su nastale na temelju radova Hipokrita s Hiosa (druga polovica 5. st. pr. Kr.).

Prva knjiga započinje nizom nužnih definicija koje su, dakako, intuitivnog karaktera, jer su iskazane u terminima fizičke realnosti, a kojima se definiraju osnovni geometrijski pojmovi i objekti. Postojanje ostalih objekata dokazuje se njihovom konstrukcijom. Upravo činjenica da se definiraju neki matematički pojmovi koji se kasnije ne javljaju ukazuje da Euklid preuzima dijelove iz ranijih tekstova. Zatim slijedi pet postulata (zahtjeva) koji pretpostavljaju mogućnost nekih elementar-

nih konstrukcija. Evo kako postulati glase u prijevodu Maje Hudoljetnjak Grgić:

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se ograničena dužina neprekinito produžuje u dužini.
3. I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednak.
5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Od posebnog je značaja posljednji, peti postulat, čija su formulačija i sadržaj godinama poticali matematičare da ga dokažu i tako smjeste u teoreme. Kao što je dobro poznato, ovaj dugogodišnji veliki trud rezultirao je otkrivanjem neeuklidske geometrije (C.F. Gauss (1777.-1855.), J. Bolyai (1802.-1860.), N. I. Lobačevski (1793.-1856.)). Spomenimo da i naš učenjak Federiko Grisogono (1472.-1532.) u svojim komentarima *Elemenata* u djelu *Speculum Astronomicum* podvrgava kritici Euklidovu definiciju paralela, dajući time prilog razrješavanju problema petog postulata. Nadalje, naši veliki znanstvenici Franjo Petrić (1529.-1597.) i Ruđer Bošković (1711.-1787.) daju svoje aksiomatizacije geometrije, različite od Euklidove. Važnu ulogu u istraživanju neeuklidske geometrije i njezine primjene u teoriji relativnosti imao je zagrebački profesor matematike Vladimir Varičak (1865.-1942.).

Nakon postulata navodi se pet aksio-ma (općih načela) koji su za razliku od postulata, primjenjivi, ne samo na geometriju, već na sveukupnu znanost (danas riječi "aksiom" i "postulat" uzimamo kao sinonime).

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednakne stvari, i cjeline su jednake.
3. Ako se jednakim stvarima oduzmu jednakne stvari, i ostaci su jednak.

4. Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.
5. Cjelina je veća od dijela.

Iako danas matematičari ovakav pristup shvaćaju kao prvi pokušaj u povijesti aksiomatizacije neke znanosti, Euklidovi će nasljednici cijeli niz stoljeća aksiome i postulate gledati znatno jednostavnije, kao nesumnjive i neporecive istine za opis osjetilnog svijeta.

Zatim slijedi 48 propozicija (teorema, tvrdnji, zadataka/konstrukcija) kojima se razmatraju osnovna svojstva trokuta, pravokutnika i paralelograma te uspoređuju njihove površine. Prva je propozicija konstrukcija jednakostrojnjeg trokuta zadane stranice. Posljednje dvije propozicije su Pitagorin poučak i njegov obrat. Po ovakvoj sintetičkoj shemi izlaganja pisane su i ostale knjige *Elemenata*. Ukupni je broj teorema 466.

U drugoj se knjizi izlaže tzv. geometrijska algebra, tj. izgrađuje geometrijski aparat za rješavanje problema koji se svode na kvadratne jednadžbe.

Treća je knjiga posvećena geometriji kružnica, a četvrta pravilnim poligonima. Vjeruje se da četvrta knjiga iznosi rad Pitagorinih učenika. Temeljem pete i šeste knjige *Elemenata*, kao i dvanaeste, smatraju se radovi Eudoksa iz Knida (oko 408.-oko 355. g. pr. Kr.). Prva od njih izučava opću teoriju proporcija (razmjera, omjera) veličina i u svojoj osnovi ekvivalentna je teoriji Dedekindovih prereza (četvrta definicija ove knjige predstavlja tzv. Arhimedov aksiom). Dobiveni rezultati primjenjuju se u idućoj, šestoj knjizi na planimetriju, posebno na sličnost figura.

Upravo je ovih prvih šest knjiga *Elemenata* stoljećima bilo osnovni geometrijski udžbenik, i zahvaljujući toj činjenici ponekad se Euklidovo djelo neopravdano veže samo uz geometriju. U anglosaksonskim zemljama se vrlo dugo umjesto nastavnog predmeta geometrije jednostavno govorilo "Euklid". Kad je sredinom šesdesetih godina ovog stoljeća došlo do snažnog pokušaja reformi-

ranja matematike, osobito geometrije, a nazivajući sve to modernizacijom matematike, jedan je od slogana bio "Dolje Euklid!".

Sedma, osma i deveta knjiga izlažu osnove teorije brojeva i prepostavlja se da se temelje na radovima Eudoksovog učitelja Arhita iz Tarentea (oko 428.-oko 365 pr. Kr.). Ova se prepostavka odnosi i na jedanaestu knjigu *Elemenata*. U ovim se knjigama uvodi teorija djejjivosti (tu je i čuveni Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja), dokazuje fundamentalni teorem aritmetike (jednočašnost razlaganja prirodnog broja na proste faktore), te beskonačnost skupa prostih brojeva. Također se izučavaju omjeri prirodnih brojeva, što je u biti ekvivalentno zasnivanju teorije racionalnih brojeva.

Na temelju ovih knjiga, u desetoj se uvode osnove klasifikacije kvadratnih i bikvadratnih iracionalnosti i neka pravila njihovih transformacija. Prepostavlja se da su podloga ove knjige, kao i trinaeste, rezultati Teeteta iz Atene (oko 410.-368. pr. Kr.).

Jedanaesta knjiga se bavi osnovama stereometrije, a u dvanaestoj knjizi određuju se, vjerojatno Eudoksovom, metodom ekshauštije (iscrpljivanja) omjeri površina dvaju kru-gova, omjeri obujmova piramide i prizme, stošca i valjka, dviju kugala, rješavajući tako niz problema za koje danas primjenjujemo granični postupak (limes). Istaknimo da u *Elementima* nema pojma mjere. Naprimjer, kaže se da je omjer dviju kugala (a ne njihovih obujmova!) jednak trostrukom omjeru njihovih promjera.

U trinaestoj knjizi konstruira se pet pravilnih poliedara (Platonova tijela) i dokazuje da drugih nema.

Spomenuli smo da su kasnije grčki matematičari Euklidovim *Elementima* pridodali još dvije kratke knjige znatno manjeg značaja, koje danas najčešće ulaze u izdanja *Elemenata*. To su četrnaesta o pravilnim poligonom koju se pripisuje Hipsiklu iz Aleksandrije (oko 180. g. pr. Kr.) i petnaesta o upisivanju poliedara,

jednih u druge, nastala u školi Isidora iz Mileta (6. st. pr. Kr.).

Osim *Elemenata* sačuvani su (ili se zna da su postojali) i drugi Euklidovi radovi. Knjiga pod latinskim nazivom *Data* nadopunjuje prvih šest knjiga *Elemenata* i bavi se opisivanjem uvjeta kada se neka matematička figura ili konfiguracija može smatrati danom. Naime, ispituje se koji elementi i relacije figuru opisuju tako da uvezši sve njih osim jednog, taj preostali biva potpuno određen. Poznat je takoder arapski prijevod Euklidovog traktata o dijeljenju figura.

Iz komentara Proklosa i Paposa (druga polovina 3. st.), koji su važni izvori za podatke o mnogim danas nesačuvanim matematičkim radovima, saznajemo da je Euklid napisao četiri knjige o čunosjećnicima (čiji je sadržaj koristio Apolonije iz Perge u svojim znamenitim knjigama o

konikama), dvije knjige o geometrijskim mjestima točaka na ploham, i tri knjige *Porizmi* čiji sadržaj do danas nije sasvim jasan. Misli se da su porizmi tvrdnje koje iskazuju uvjet što osigurava rješivost nekog problema, a da tada taj problem ima beskonačno mnogo rješenja. Nije sačuvano ni Euklidovo djelo *Pseudaria* o lažnim zaključivanjima u geometriji. Na kraju spomenimo da su ipak do nas došle *Phaenomena* u kojoj se Euklid bavi osnovama sferne geometrije zbog primjene u astronomiji, i *Optika* s elementarnim razmatranjima perspektive. Vjeruje se da je Euklid pisao i o počelima glazbe.

Euklidovi *Elementi* su skup knjiga od povijesnog i kulturnog značaja, ne samo za matematiku, već i za cijelokupno ljudsko znanje. Jedan je to od najviših vrhunaca u povijesti znanosti i dugogodišnji uzor, fantastič-

no postignuce jednog doba, jedne škole, civilizacije, svjetonazora, postignuce koje je ostavilo svoga dubokog traga do današnjih dana, bitno utječeći i određujući budućnost matematike, ali i drugih znanosti.

Na studiju matematike, Euklidovi *Elementi* su dio obvezatne literaturе, odnosno dijelom su udžbenik za kolegije Povijest matematike, Osnove geometrije i Metodika matematike.

Prijevodom prvih šest knjiga Euklidovih *Elementi* na hrvatski jezik naša kulturna i znanstvena javnost dobiva još jedan atribut pripadanja svjetskom kulturnom krugu. Dakako, uz čestitke prevoditeljici i izdavaču, svi očekujemo kako ćemo uskoro ugledati prijevod ostalih knjiga *Elemenata*.

Matematičko-fizički list 1/197, 1999./2000.

Prikazi Plückerova konoida u programu *Mathematica* 4.0

Neposredno pred zaključenje ovoga broja pojavio se problem, nedostajalo je teksta za dvije i pol stranice. Kao izraziti zagovornik primjene programa *Mathematica*, pri prikazivanju ploha euklidskoga prostora, odlučila sam krenuti od klasične slike Plückerova konoida, dane u knjizi *K. Fladt, A. Baur: Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven*, i razmotriti mogućnosti dobivanja sličnog prikaza pomoću programa *Mathematica*. Kako na fakultetskom računalu imam uredno i stručno instaliranu verziju 4.0, s kojom se zbog posla oko dovršavanja časopisa nisam stigla detaljnije baviti, vidjela sam to i kao priliku da otkrijem poneku novost za sebe. Nažalost, u grafičkim paketima nisam pronašla ništa novo, ali sam se zato stalno o nešto spoticala. Npr. za naredbu *N[r,n]* koja bi realni broj *r* trebala prikazati na *n* decimala, ne može se reći da radi. Inputi u 4.0 ne numeriraju se kao u 3.0 nego kao u verzijama 2.x (sve stare datoteke iz 3.0 moram preraditi). Pri nekim naredbama za crtanje pojavljuju se problemi oko imenovanja

boja, koje *Mathematica* nudi u svom *Helpu*. Pri spremanju grafika, za razliku od verzija 2 i 3, više se ne nudi ekstenzija ****.ai* (*Adobe Illustrator*) tako povoljna za komunikaciju s programima koji imaju vektorsklu grafiku (npr. *FreeHand*). Sve u sve mu, dok se za prijelaz s dvojke na trojku (bez obzira na to što kažu numeričari) svakako može reći da je bio ljubazan prema korisniku, čini mi se da je kod 4.0 to napušteno. No, bez obzira na to, grafika u *Mathematici* je i dalje dobra, pa se vraćam slici koju sam na početku spomenula.

Evo Fladtovog prikaza Plückerova konoida koji je inspirirao ovaj članak.

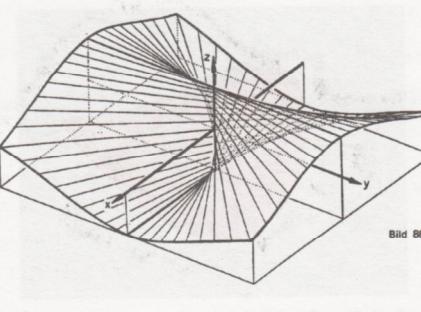


Bild 86

Plückerov je konoid pravčasta ploha 3. reda koja se u kartezijevom koordinatnom sustavu $O(x,y,z)$ zadovoljava jednadžbu

$$z = h \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}, \quad h \in R.$$

Koordinatna os z dvostruki je pravac tako zadane plohe, kuspidalne su točke $(0,0,-h)$ i $(0,0,h)$, a torzalni su pravci dani jednadžbama $(y=0, z=-h)$ i $(x=0, z=h)$.

Kako bi crteži koji slijede bili što vjerniji slici na monitoru, definiramo bojenje prikaza samo pomoću crvene i crne boje. Za to je potrebno učitati grafički paket *Colors*.

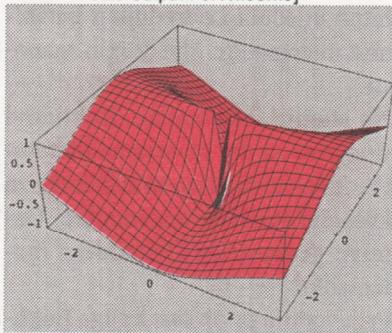
```
In[1]:= <<Graphics`Colors`
In[2]:= CrvenoCrno[RGBColor[r_,g_,b_]]:=
          RGBColor[2r,0,0]
          CrvenoCrno[GrayLevel[x_]]:=
          GrayLevel[x];
```

Plohe čije su jednadžbe oblika

$$z=f(x,y)$$

mogu se u *Mathematici* prikazati pomoću naredbe *Plot 3D*. Program iscrtava dva sistema ravinskih krivulja na plohi. Krivulje su paralelne s koordinatnim ravninama yz i xz . U našem slučaju, uz definiciju eksplicitnog oblika jednadžbe plohe, to izgleda ovako:

```
In[4]:= PluckerEx[h_][x_,y_]:= h(x^2+y^2)/(x^2+y^2)
In[5]:= Plot3D[PluckerEx[1][x,y],
{x,-3,3},{y,-3,3},
PlotPoints->{29,29},
ColorOutput->CrvenoCrno]
```



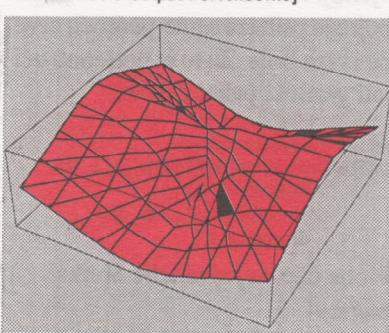
Out[5]= -SurfaceGraphics-

Problemi za crtanje nastaju u okolinama singularnih točaka plohe (točake na osi z), koje su ujedno i singularne točke ove parametrizacije. Oni se ne mogu se riješiti ni drugim odabirom brojeva za opciju *PlotPoints*, npr. *PlotPoints*->{30,30}, dapače grafički su više istaknuti. Za plohe čije se implicitne jednadžbe $F(x,y,z)=0$ ne mogu jednostavno svesti na oblik $z=f(x,y)$ Mathematica nudi crtanje pomoću tri sistema presjeka s ravninama paralelnim sa sve tri koordinatne ravnine, pomoću grafičkog paketa *ContourPlot3D*. Pogledajmo kako to izgleda u našem primjeru. Implicitni oblik jednadžbe Plückerova konoida je

$$z(x^2+y^2) - h(x^2-y^2) = 0, \quad h \in R,$$

pa se naredbe za crtanje mogu pisati na sljedeći način:

```
In[6]:= PluckerIm[h_][x_,y_,z_]:= z(x^2+y^2)-h*(x^2-y^2)
In[7]:= <<Graphics`ContourPlot3D`
In[8]:= ContourPlot3D[
PluckerIm[1][x,y,z],
{x,-3,3},{y,-3,3},{z,-1,1},
ColorOutput->CrvenoCrno]
```



Out[8]= -Graphics3D-

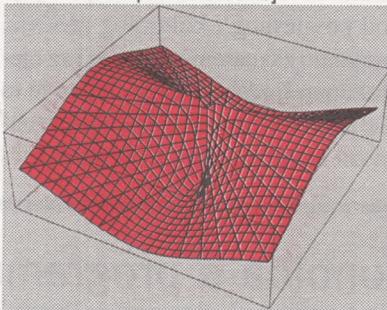
Intervencije u korake varijabli, koje će doprinijeti glatkoci prikaza barem u regularnim područjima, mogle bi se i ovdje postići pomoću opcije *PlotPoints*. Međutim, ovo je i prilika da pokažemo kako se u *Contour*-

Plot3D paketu koristi naredba *ListContourPlot3D*. Plohu ćemo najprije definirati kao listu 3D podataka.

```
In[9]:= plucker=
Table[Evaluate[PluckerIm[1][x,y,z]],
{z,-1,1,0.2},
{y,-3,3,0.2},
{x,-3,3,0.2}];
```

Pažnju valja obratiti na neuobičajeni redoslijed z , y , x . I ovdje je Mathematica 4.0 neljubazna prema korisniku. Naime, Mathematica 3.0 crtalala je i uz zapis $\{z,-1,1,0.2\}$, $\{y,-3,3,0.2\}$, $\{x,-3,3,0.2\}$ što verzija 4.0, čini se, neće ili program proračunava toliko da čekanje nije prihvatljivo. No, sada se prikaz Plückerova konoida može dobiti na sljedeći način:

```
In[10]:= ListContourPlot3D[plucker,
MeshRange -> {{-3,3}, {-3,3}, {-1,1}},
ColorOutput->CrvenoCrno]
```



Ponovno nije dobro u okolinama singulariteta i teško da se s ovom parametrizacijom plohe može napraviti nešto bolje.

No, ako sa kartezijevih koordinata (x,y,z) priđemo na polarne (t,u,z) dobivamo povoljne parametarske jednadžbe

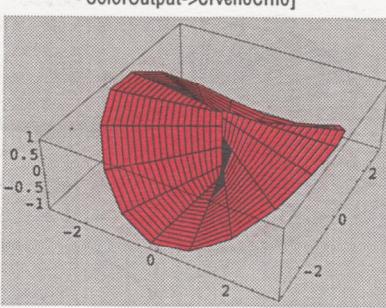
$$\begin{aligned} x(u,t) &= t \cos u, \\ y(u,t) &= t \sin u, \\ z(u,t) &= h \cos 2u. \end{aligned}$$

Definiramo li funkciju kao listu tih parametarskih jednadžbi

```
In[11]:= PluckerPar[h_][t_,u_]:= {t*Cos[u],t*Sin[u],h*Cos[2u]}
```

možemo pomoću naredbe *ParametricPlot3D* dobiti sljedeći prikaz:

```
In[12]:= ParametricPlot3D[
Evaluate[PluckerPar[1][t,u]],
{t,0,3},{u,0,2Pi},
ColorOutput->CrvenoCrno]
```

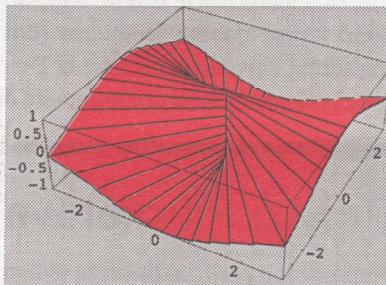


Out[12]= -Graphics3D-

Zbog odgovarajuće parametrizacije prikaz zadovoljava na cijelom području. Kako je u polarnom koordinatnom sustavu koordinatna ploha $t = \text{const.}$ valjak prikaz je ograničen prodornom krivuljom konida i valjka. Izrez plohe kao na ranijim slikama postići ćemo opcijom *PlotRange*. Za dodatnu finoću oblina te nagašavanje činjenice da je Plückerov konoid pravčasta ploha moramo intervenirati u korake varijabli. Takve mogućnosti imamo nakon učitanja grafičkog paketa *ParametricPlot3D*. Pomoću njega možemo dobiti sljedeći prikaz:

```
In[13]:= <<Graphics`ParametricPlot3D`
```

```
In[14]:= ParametricPlot3D[
Evaluate[PluckerPar[1][t,u]],
{t,0,4.5,4.5},{u,0,2Pi,Pi/24},
PlotRange->{{-3,3}, {-3,3}, {-1,1}},
ColorOutput->CrvenoCrno]
```



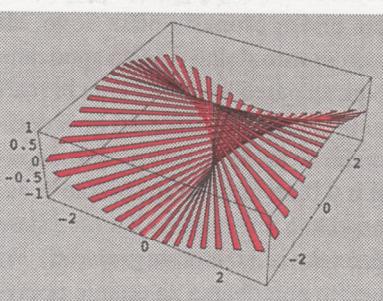
Out[14]= -Graphics3D-

Prikaz je dobar u okolinama singulariteta. Sada su problemi na rubovima. Njih ćemo kasnije prikriti s *ContourPlot3D* koji se na rubu tog izreza pokazao dobrim. Pogledajmo prije još neke prikaze plohe pomoću *ParametricPlot3D*.

Korištenjem naredbi *Show* i *Table*, te opcije *DisplayFunction* dobivamo i sljedeće slike.

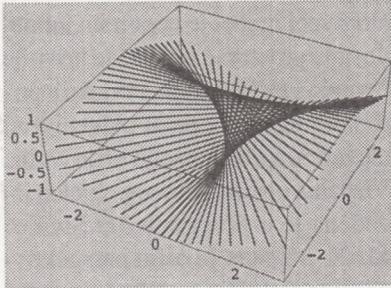
```
In[15]:= Show[
```

```
Table[
ParametricPlot3D[
Evaluate[PluckerPar[1][t,u]],
{u,i,i+Pi/90,Pi/90},{t,0,4.5,4.5},
DisplayFunction->Identity],
{i,0,2Pi,Pi/30}],
ColorOutput->CrvenoCrno,
PlotRange->{{-3,3}, {-3,3}, {-1,1}},
DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



Out[15]= -Graphics3D-

```
In[16]:= Show[
  Table[
    ParametricPlot3D[
      Evaluate[PluckerPar[1][t,u]],
      {t,0,4.5},DisplayFunction->Identity],
      {u,0,2Pi,Pi/48}],
    DisplayFunction->$DisplayFunction,
    PlotRange->({{-3,3},{-3,3},{-1,1}})]
```



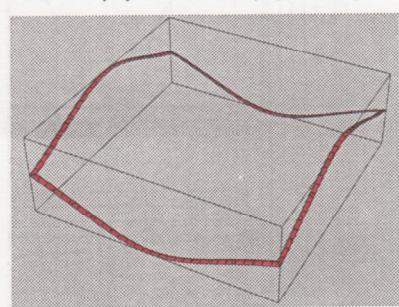
Out[16]= -Graphics3D-

Probleme na rubu nastojat ćemo prikriti iscrtavanjem rubnih dijelova ovog izreza na sljedeći način:

```
In[17]:= X[i_]:=Table[
  Evaluate[PluckerIm[1][x,y,z]],
  {z,-1,0.2},
  {y,-3,0.2},
  {x,i,i+0.1,0.1}];
```

```
In[18]:= Y[i_]:=Table[
  Evaluate[PluckerIm[1][x,y,z]],
  {z,-1,0.2},
  {y,i,i+0.1,0.1},
  {x,-3,0.2}];
```

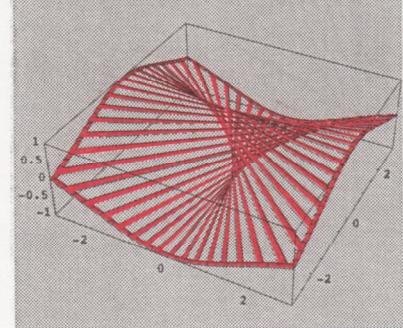
```
In[19]:= Show[
  Table[ListContourPlot3D[X[i],
    MeshRange->{{i,i+0.1},-3,3},{-1,1}},
    DisplayFunction->Identity],
    {i,-3,2,9,5,9}],
  Table[ListContourPlot3D[Y[i],
    MeshRange->{{-3,3},{i,i+0.1},-1,1}},
    DisplayFunction->Identity],
    {i,-3,2,9,5,9}],
  ColorOutput->CrvenoCrno,
  PlotRange->{{-3,3},{-3,3},{-1,1}},
  DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



Out[19]= -Graphics3D-

Povezivanjem dobivenih slika možemo doći do prikaza koji lijepo ističe osobine Plückerova konoida.

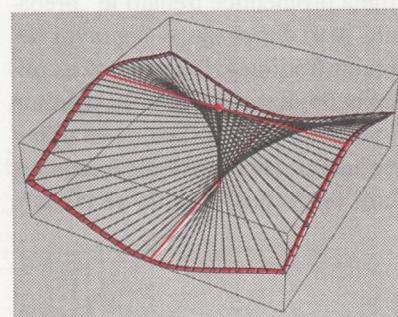
```
In[20]:= Show[%15,%19]
```



Out[20]= -Graphics3D-

Za dodatno iscrtavanje torzalnih pravaca, kuspidalnih točaka te isticanje neizoliranog dijela dvostrukoga pravca moramo učitati i grafički paket *Graphics3D*. Osobno mi je, u danim uvjetima, sljedeći prikaz Plückerova konoida najprikladniji.

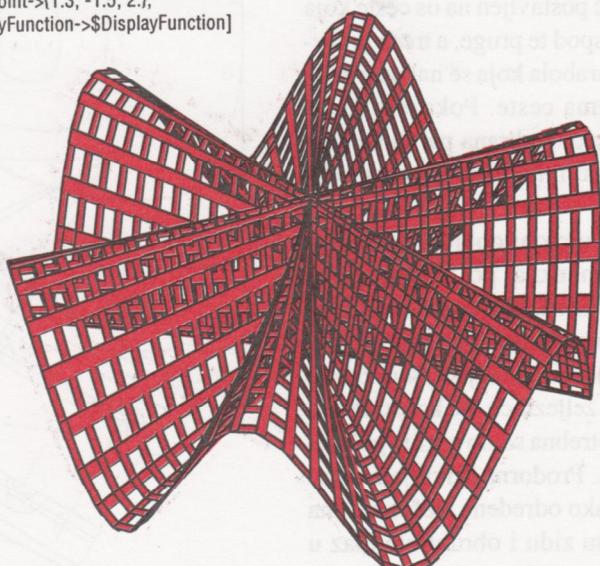
```
In[21]:= <<Graphics'Graphics3D'
In[22]:= Show[%19,%16,
  Graphics3D[{AbsoluteThickness[1],Red,
  Line[{{-3,0,1},{3,0,1}}],
  Line[{{0,-3,-1},{0,0,-1}}]},
  Graphics3D[{AbsoluteThickness[2],
  Line[{{0,0,-1},{0,0,1}}]},
  Graphics3D[
  {AbsoluteThickness[1],Red,
  AbsoluteDashing[{0.5,0.5}],
  Line[{{0,0,-1},{0,3,-1}}]}],
  Graphics3D[
  {AbsolutePointSize[5],Red,
  Point[{0,0,1}],Point[{0,0,-1}]}]]
```



Out[22]= -Graphics3D-

Sve dvostrukosti Plückerova konoida vrlo se jednostavno poopćuju na n -strukturi. Uz općenitiju definiciju i odgovarajućim kombiniranjem izloženih načina crtanja može se npr. dobiti ovakva zanimljiva slika plohe.

```
In[23]:= PluckerPolar[n_,h_][t_,u]:= {t*Cos[u],t*Sin[u],h*Cos[n*u]}
In[24]:= Show[
  Table[ParametricPlot3D[Evaluate[PluckerPolar[6,0.75][t,u]],
  {u,i+Pi/120,Pi/120},{t,0,2,2},DisplayFunction->Identity],[i,0,2Pi,Pi/40]],
  Table[ParametricPlot3D[Evaluate[PluckerPolar[6,0.75][t,u]],
  {u,0,2Pi,Pi/40},{t,i+0.05,0.05},DisplayFunction->Identity],[i,0,2,0.15]],
  ColorOutput->CrvenoCrno,
  Axes->None, Boxed->False,
  ViewPoint->{1.3,-1.5,2.},
  DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



Out[24]= -Graphics3D-

I na kraju, svakome koga zanimaju krivulje i plohe najtoplje preporučujem drugo izdanje odlične knjige

*Alfred Gray:
MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY of Curves and Surfaces with MATHEMATICA®*, CRC Press, 1998.

SONJA GORJANC

NAGRAĐENI STUDENTSKI RAD

Na Građevinskom fakultetu u Zagrebu za Rektorovu nagradu, u šk. god. 1998/99 natjecalo se jedanaest studenata, od kojih je čak troje nagrađeno. Na peto mjesto rangiran je rad iz područja primijenjene geometrije pod nazivom "Raskrižje u dvije razine — metoda slojnica" studenta Borisa Uremovića, pod mentorskim vodstvom mr. Vlaste Szirovicza, koji je dobio nagradu dekana. Svi su radovi bili izloženi ispred Vijećnice u Kačićevoj ulici 26.

BORIS UREMOVIĆ: Raskrižje u dvije razine — metoda slojnica

Ovaj rad je proizašao iz želje da se pokaže kako teorijsko znanje nacrtne i primjenjene geometrije može biti iznimno korisno i upotrebljivo pri rješavanju zadataka koji prividno nisu usko povezani s tom granom matematike.

Ako je raskrižje u dvije razine riješeno tunelom, portalni zid (ulaz i izlaz iz tunela) izведен je kao betonska nagnuta ravna ploha. Ovaj rad nudi novo rješenje: pravčastu plohu, koja je maksimalno prilagođena okolnom terenu. Navedena ploha 4. reda određena je ravnalicama: prva je pravac položen rubom planuma željezničke pruge, druga je vertikalni pravac postavljen na os ceste koja prolazi ispod te pruge, a treća je ravnica parabola koja se nalazi u razini planuma ceste. Pokazalo se da upravo tako izabrana parabola daje najprihvatljiviju zakrivljenost i oblik plohe.

Da bi se u plohi dobio otvor određenih dimenzija, poslužio je parabolički stožac, čija osnovica leži u ravnini paralelnoj s Π_2 , koja je udaljena (tlocrtno gledajući) 4 m od osi planuma željeznice. Za konstrukciju je bila potrebna samo gornja polovina stošca. Prodorna krivulja zadane plohe i tako određena stošca leži na portalnom zidu i obrubljuje ulaz u tunel. Unutrašnjost tunela nadsvode-

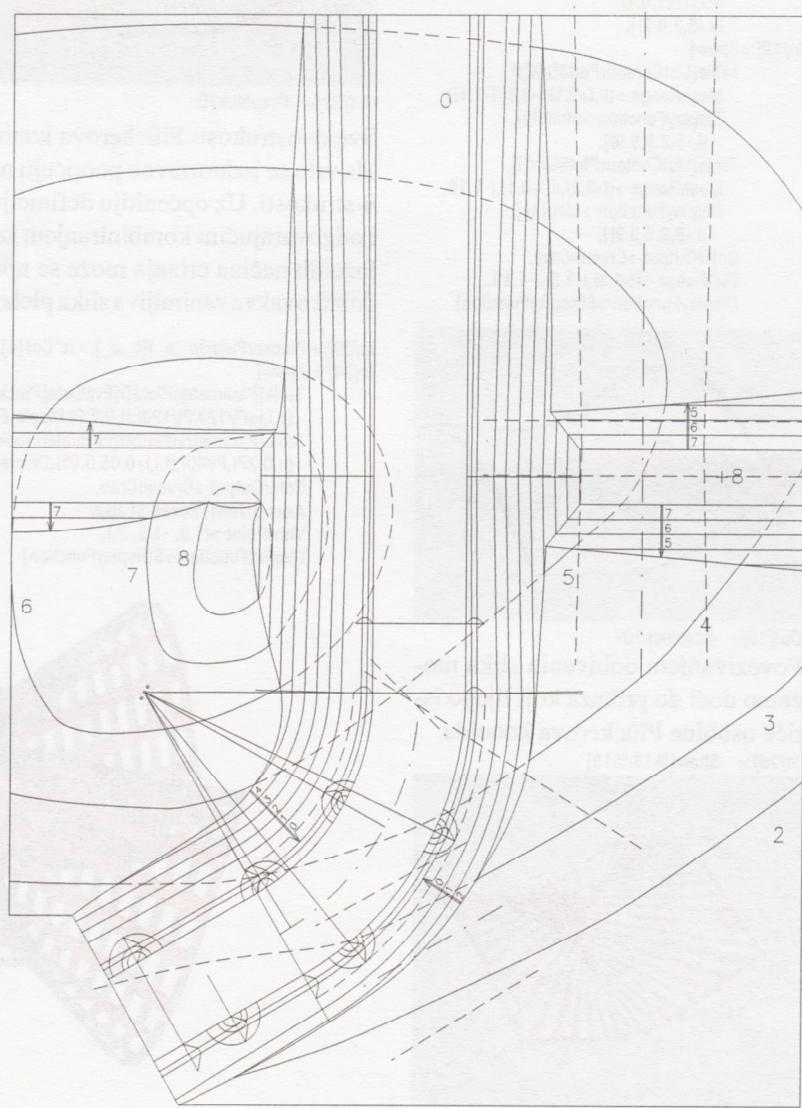
na je valjkastom plohom, čije izvodnice prolaze konstruiranim točkama prodorne krivulje.

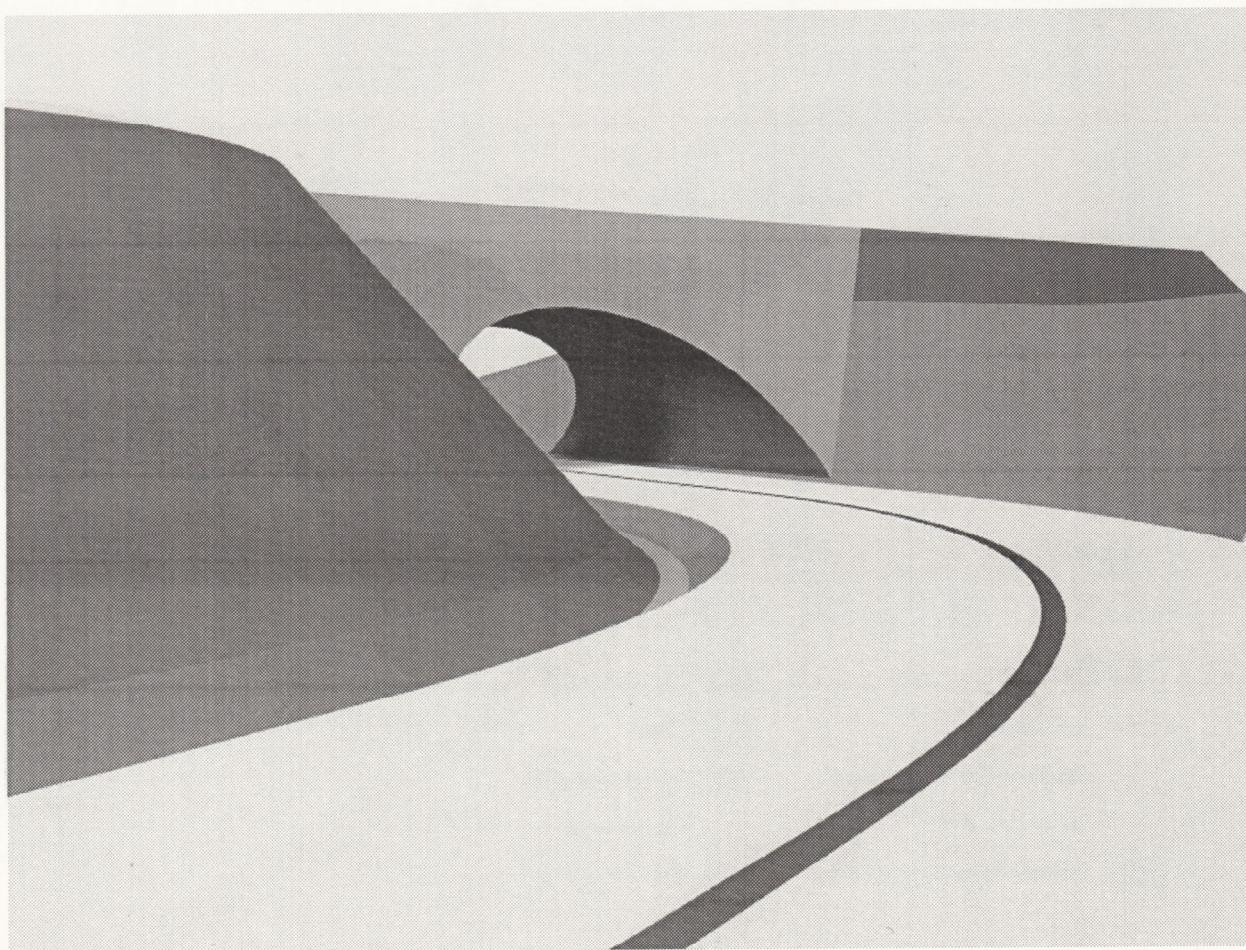
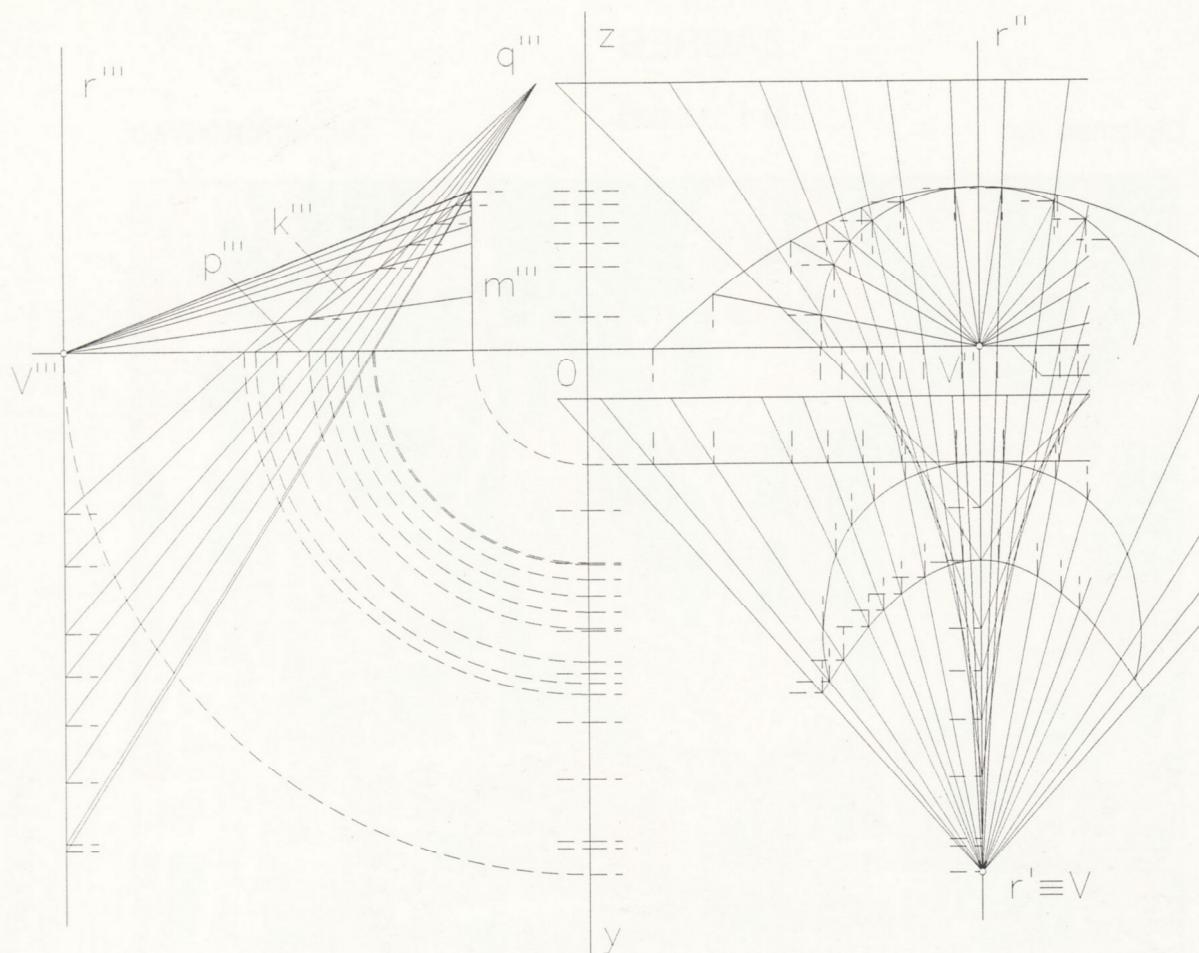
Rad je izведен na PC računalu uz uporabu programa AutoCAD 14 i njegovih mogućnosti za 3D prikaz. Zbog složenosti zadatka, student je morao posegnuti za dodatnom literaturom i savjetima stručnjaka, budući da se radilo o vrlo složenim plohami.

Naime, izrađeni tlocrt zemljjanog tijela prometnice trebalo je "prebaciti" u tri dimenzije, tj. napraviti virtualni trodimenzionalni prikaz objekta. Podizanjem slojnica usječnih i nasipnih ploha i ravnina na njihove kote dobiva se tzv. žičani model, koji može poslužiti da se između

njegovih bridova umetnu stranice. Dobiveni model je nepotpun jer nedostaju prostorne presječne krivulje ravnina i ploha nasipa i usjeka s prirodnim terenom, pa je najveći trud uložen za aproksimaciju tih krivulja. Vizualna obrada gotovog objekta izvedena je u programu 3D Studio-MAX, u kojem je osim perspektivne slike raskrižja s očištem iz zraka (snimka iz helikoptera) napravljena i animacija kretanja vozila po prometnici. Time je dana još jedna mogućnost uporabe takvog modela u praktične svrhe.

Vlasta Szirovicza





ZAGREB

Diplomski rad

M 1 : 15 000

Danijel Markovica



LEGENDA :

[Red square]	Javne zgrade	[Dark Green square]	Šume i parkovi
[Red square]	Stambene i poslovne zgrade	[Medium Green square]	Vrtovi
[Yellow square]	Stambene zgrade	[Light Green square]	Sportska igrališta
[Black square]	Industrijske površine, servisi	[Yellow square]	Glavne ceste
		[Light Yellow square]	Željezničke pruge

