JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VLASTA SZIROVICZA

VOLLKOMMEN ZIRKULÄRE FUSSPUNKTSKURVEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Poseban otisak iz:

Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, Knjiga 408; Matematičke znanosti, svezak 3

ZAGREB 1984

VOLLKOMMEN ZIRKULÄRE FUSSPUNKTSKURVEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Vlasta Szirovicza, Zagreb

Abstract. This paper shows the construction of pedals of curves in a hyperbolic plane and states the conditions for producing entirely circular curves. The relationship between the pedals and generalized quadratic inversion is established in the case when the absolute curve is taken as the basic conic of inversion.

Die zirkulären Kurven auf dem euklidischen Modell der projektiven Ebene nennen wir jene Kurven welche die absoluten Punkten der Ebene enthalten. Die einzige derartige Kurve der 2. Ordnung ist der Kreis. In der hyperbolischen Ebene ist eine Kurve zirkulär falls sie wenigstens einen Berührungspunkt mit der Absolute gemeinsam hat. Die Zahl der absoluten Berührungspunkte ist der Zirkularitätsgrad der Kurve. Die vollkommen zirkuläre Kurve der hyperbolischen Ebene nennen wir jene Kurve bei welcher der Zirkularitätsgrad ihrer Ordnung gleich ist [1]. In dieser Arbeit werden die Möglichkeiten sowie die Bedingungen für die Fusspunkterzeugung solcher Kurven untersucht. Es wird auch der Zusammenhang mit dem speziellen Fall der verallgemeinerten quadratischen Inversion gezeigt.

I

Die Fusspunktkurve einer gegebener Ebenekurve auf dem euklidischen Modell der projektiven Ebene bildet die Menge von allen Senkrechten der Fusspunkte die aus irgendeinem festhaltenden Punkt in ihrer Ebene auf die Tangenten dieser Kurve versenkt sind [2]. Diese Definition gilt auch in der nichteuklidischen Ebene, wo Senkrechtstehen mit Hilfe der absoluten Polarität definiert ist. Die weitere Betrachtungen werden auf die hyperbolische Ebene begrenzt, wo wir uns mit dem *Cayley-Klein*schen Modell dieser Ebene bedienen werden.

Es sei in der hyperbolischen Ebene eine Kurve k_n^m, m-ter Ordnung, n-ter Klasse gegeben, und auch irgendwelcher Fixpunkt P, welcher als Pol einer Fusspunkterzeugung genannt wurde. Die Punkte der Fusspunktkurve gegebener Kurve k_n^m werden als Schnittpunkte jeder Tangente der Kurve k_n^m und der Verbindungsgerade ihres absoluten Poles mit Pol P bestimmt. Alle diese Polen bestimmen die absolutpolare Kurve $\bar{k}^n$, die eine Kurve n-ter Ordnung ist. Nehmen wir nämlich durch einen Punkt O n Tangenten einer gegebenen Kurve, die absolute Polare o des Punktes O wird n absolute Polen dieser Tangenten enthalten, und das ist, wie wir wissen, die Ordnung einer ebener Kurve.

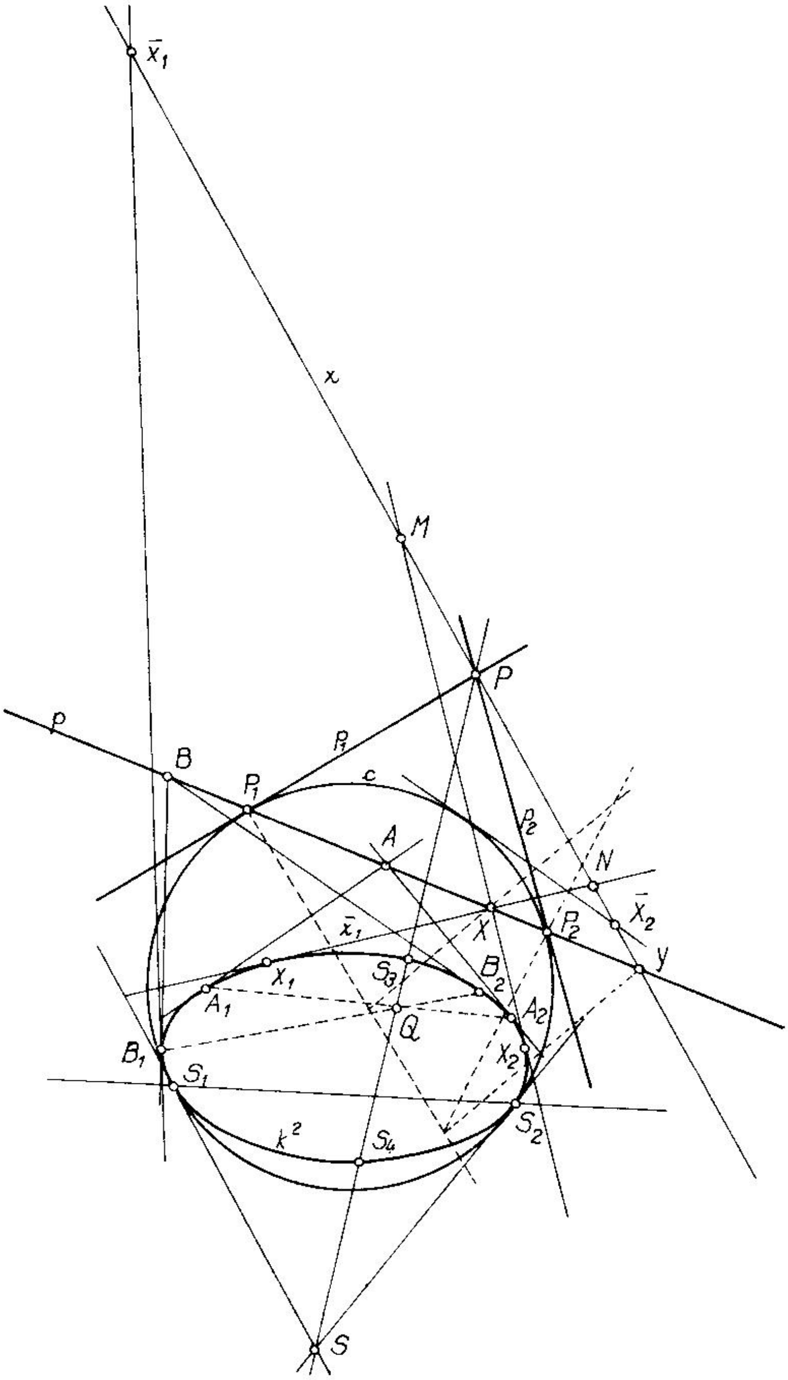
$\bar{x}_1$
x
M
P
p
B
P_1
p_1
c
p_2
A
N
$\bar{x}_1$
X
P_2
$\bar{X}_2$
y
X_1
S_3
B_2
A_1
A_2
Q
B_1
X_2
S_1
S_2
k^2
S_4
S

Abb. 1

Es sei k_N eine Fusspunktkurve einer gegebener Kurve k_n^m. Beweisen wir das k_N die Kurve $2n$-ter Ordnung ist. Zu diesem Zweck zeigen wir zuerst das die Ordnung der Fusspunktkurve eines Kegelschnittes eine Kurve 4. Ordnung ist.

Nehmen wir in der hyperbolischen Ebene irgend einen Fixpunkt P und ein Kegelschnitt k^2 (Abb. 1). Die Schnittpunkte der absoluten Polare p des Punktes P mit der Absolute c bezeichnen wir mit P_1 und P_2. Jede Gerade in der projektiven Ebene ist die Achse einer Involution auf dem gegebenen Kegelschnitt, so auch die Gerade p [4]. Die Schnittpunkte der Paare der anschliessenden Tangenten dieser Involution geben auf der Gerade eine Reihe welche mit (p_1) bezeichnet wird. Nehmen wir auf der Gerade p noch eine solche Reihe der Punkte (p_2) dass mit der Reihe (p_1) eine Involution der Gerade p gibt, welche die Punkte P_1 und P_2 als Doppelpunkte hat. Verbinden wir die Punktreihe (p_2) mit dem Punkt P, bekommen wir einen Büschel (P) der perspektiv zu dieser Reihe steht.

Mit dieser Konstruktion haben wir ein ein-zweideutiges Zuordnung der Leitgeraden des Büschels (P) und Tangenten des Kegelschnittes k^2 hergestellt, wesen Erzeugnis eine Kurve sein wird, wobei die Punkte P_1 und P_2 augensichtlich Doppelpunkte dieser Kurve sein werden. Senken wir ferner durch dem Punkt P die Tangenten auf dem Kegelschnitt k^2, so werden die Fusspunkte der Normalen auf diesen Tangenten in dem Punkt P sein. So ist der Punkt P ein Doppelpunkt der erzeugenden Kurve.

Nehmen wir jetzt irgendwelche Gerade $x \in (P)$ und ihr zugeordneten absoluten Pol X. Alle Geraden des Punktes X haben ihre absolute Polen auf der Leitgerade x, so gilt das auch für die zwei Tangenten des Kegelschnittes k^2 welche durch diesen Punkt durchgehen. Da der Schnittpunkt der Tangente des Kegelschnittes und Verbindungsgerade ihres absoluten Poles und dem Punkt P ein Punkt der Fusspunktkurve ist, so ist dieses ein-zweideutiges Erzeugung dem Fusspunkterzeugung identisch. Auf jeder Leitgerade x des Punktes P werden, ausser dem Doppelpunkt P, noch zwei Punkte der Kurve k_N liegen, so ist sie also die Kurve 4. Ordnung. Da die Kurve k_N^4 drei Doppelpunkte hat, so ist sie von Geschlecht Null. Man kann es leicht nachprüfen dass sie viermals den gegebene Grundkegelschnitt k^2 berührt.

Für die Kurve k_n^m wird der Punkt P ein n-facher Punkt der Fusspunktkurve k_N. Da man aus jeder der zwei Punkte P_1 und P_2 n Tangenten auf die Kurve k_n^m konstruieren kann, so sind auch diese Punkte n-fache Punkte der erzeugenden Kurve. Die Ordnung dieser Fusspunktkurve wird sich um 1 verkleinern wenn die absolute Polare des Punktes P die Tangente der gegebener Kurve k_n^m ist.

Am Ende nehmen wir irgendwelche Gerade g durch den Punkt P an. Sie schneidet die absolutpolare Kurve $\bar{k}^n$ der Kurve k_n in dem n Punkte. Es werden zu diesem Punkten in dem absoluten Polarität die n Tangenten der Kurve k_n entsprechen. Die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der Gerade g werden die n Punkte der Fusspunktkurve geben, so werden neben dem n-fachen Punkt P auf ihm $2n$ Punkte sein, was nach der Definition die Ordnung der Kurve ist.

Sei die gegebene Kurve ein Kreis der hyperbolischen Ebene. Ihre absolutpolare Kurve $\bar{k}^2$ ist evidentlich ein Kreis aus demselben Büschel der konzentrischen Kreise. Die Tangente die dem Kreis k^2 und der Absolute c gemein ist heisst die isotrope Asymptote [1]. Ihrer absolute Berührungspunkt ist ihr absoluter Pol. Dieser Punkt ist offenbar auch der absolute Berührungspunkt der erzeugender Fusspunktkurve, was für die Erzeugung des vollkommen zirkuläre Kurven wichtig ist.

Wir haben gezeigt dass die Fusspunktkurve des Kegelschnittes immer eine Kurve 4. Ordnung ist. Es werden von der Lage des Poles P zu der Absolute c und dem Kegelschnitt k^2 die Arten der drei Doppelpunkte der Kurve k_V^4 abhängen. Liegt der Pol P ausser oder inner der Absolute, so werden die Punkte P_1 und P_2

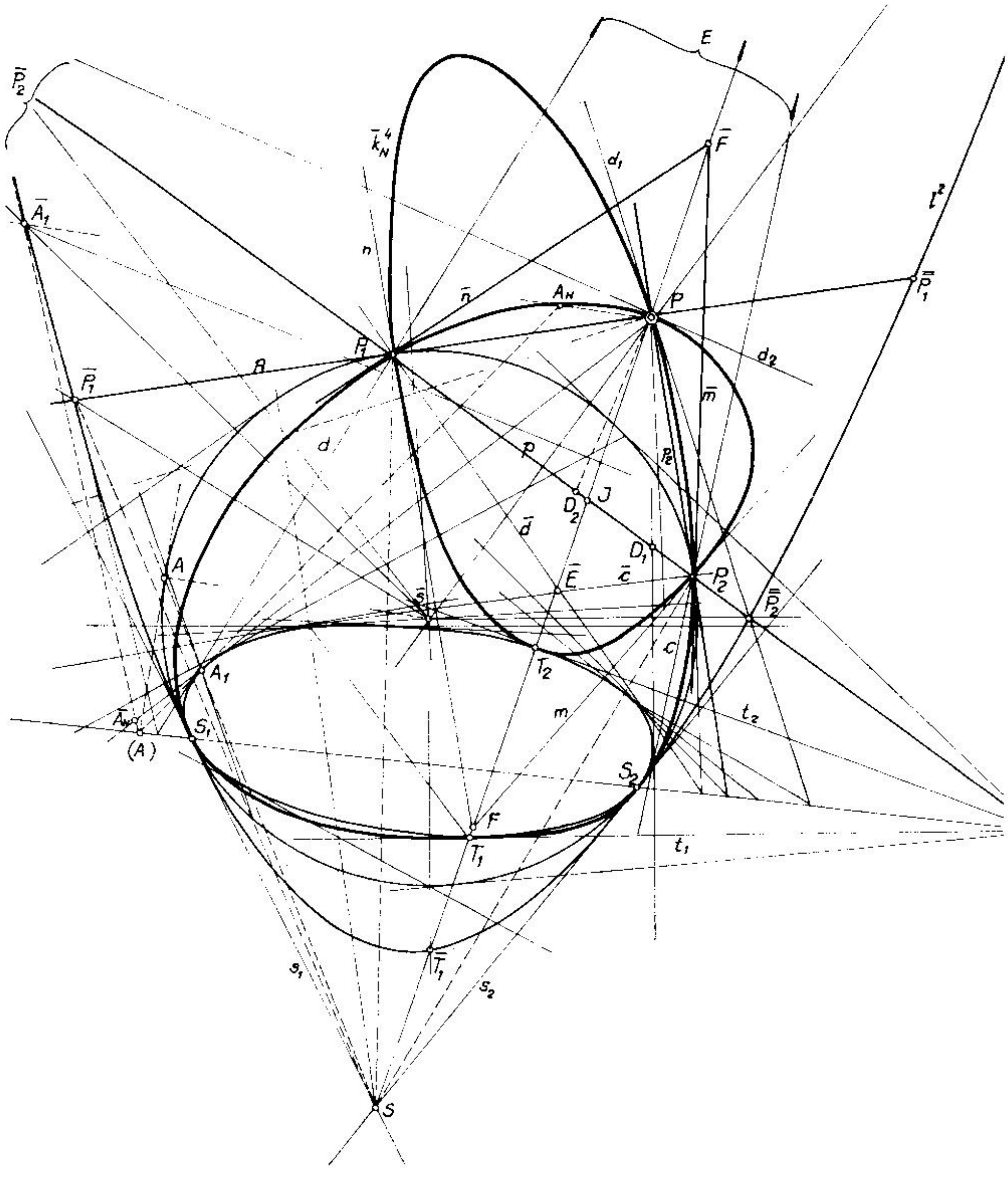

Abb. 2

die Knoten oder die isolierte Doppelppunkte sein (Abb. 2). In dem Punkt P wird der Knoten, ein isolierter Doppelpunkt oder die Spitze der 1. Art, was davon hängt ab, ob der Pol ausser, inner oder auf dem gegebenen Kegelschnitt k_2 liegt. In dem letzten Fall sind die Tangenten des Kegelschnittes k_2 durch den Pol P in die Gerade PS (S ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes) gefallen, so ist diese Gerade die Tangente in der Spitze 1. Art.

Die Spitze 1. Art der Kurve k_N^4 wird auch dann entstehen, wenn das gegebene Kegelschnitt k_2 zirkulär ist und eine der zwei Doppelpunkte P_1 und P_2 in den absoluten Berührungspunkt fällt.

Die absolute Polare p des Poles P kann auch die Tangente des gegebenen Kegelschnittes k_2 sein, aber in diesem Fall zerfällt die Fusspunktkurve k_N^4 auf die Gerade p und die Kurve k_N^3 welche eine Kurve 3. Ordnung von Geschlecht Null ist. Die Punkte P_1 und P_2 sind die einfachen Punkte der Kurve k_N^3, da auch die Gerade p durch sie geht.

In der hyperbolischen Ebene die Kurve m-ter Klasse hat $m(2m-1)$ Brennpunkte, weil sie als Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten dieser Kurve und der Absolute definiert sind [1]. Die Kurve, welche die absoluten Berührungspunkte enthält, hat in diesem Punkten die einfachen Brennpunkte und dazu noch eine Zahl von vielfachen Brennpunkten, was ausführlich in [1] bearbeitet ist.

Ein Kegelschnitt in der hyperbolischen Ebene kann zwei, einen oder keinen absoluten Berührungspunkt haben. Da die Kurve 2. Ordnung mit zwei absoluten Berührungspunkten keinen weiteren absoluten Punkt haben kann, so sind die Kreise die einzigen vollkommen zirkuläre Kurven 2. Ordnung in der hyperbolischen Ebene.

Weiters wünschen wir die Möglichkeiten und Bedingungen der vollkommen zirkulären Kurven höherer Ordnung nachprüfen, die man durch Fusspunkterzeugung bekommen kann. Soll die Fusspunktkurve k_N^4 eine vollkommen zirkuläre Kurve sein, so ist es notwendig dass der Kegelschnitt der sie herleitet, ein Kreis ist. Nehmen wir darum einen Hyperzykel k^2 der sich von lauter eigentlichen Punkten besteht. Die absolute Berührungspunkte seien S_1 und S_2 (Abb. 2). Es folgt aus vorigen Betrachtungen dass die Fusspunktkurve ausser der absoluten Berührungspunkte S_1 und S_2 noch zwei Doppelpunkte P_1 und P_2 mit der Absolute gemeinsam haben wird, welche auch die absoluten Berührungspunkte sein sollen. Ersichtlich ist es unmöglich in einen dieser zwei Punkte, die drei konsekutive Punkte zu haben, da in diesem Fall die Kurve noch einen vierten Schnittpunkt mit der Absolute gemein haben musste. So besteht die Kurve k_N^4 von lauter eigentlichen Punkten dann und nur dann, wenn der Pol auf der Absolute liegt und in diesen Punkt auch die Doppelpunkte P_1 und P_2 fallen. Der Punkt P ist also der doppelfache absolute Berührungspunkt, aber für die Kurve k_N^4 es ist ein dreifacher Punkt — ein Oskulationsknoten [3].

Auf der Abbildung 3 ist eine solche vollkommen zirkuläre Kurve 4. Ordnung mit einem Oskulationsknoten im Punkt P dargestellt.

Besteht der gegebene Hyperzykel von lauter uneigentlichen Punkte, bekommen wir in dem Pol P einen imaginären Oskulationsknoten. Nehmen wir für den gegebenen Kreis einen Horozykel, dann hat die erzeugende Fusspunktkurve k_N^4 zwei doppelfache absolute Berührungspunkte, so ist sie der bizirkulären Kurve der euklidischen Ebene analog zu betrachten.

Beweisen wir weiterhin dass die Kurve 3. Ordnung, die als Fusspunktkurve eines Kreises erzeugen ist, nicht als die vollkommen zirkuläre Kurve sein kann. Um eine Kurve 3. Ordnung zu bekommen, muss die absolute Polare p des Pols P die Tangente des gegebenen Kreises sein. Der Pol P soll auf der Absolute liegen, so ist seine Polare p die Tangente der Absolute. Dies bedeutet dass der gegebene Kreis mit der Absolute mehr als vier gemeinsame Punkte hat und das ist unmöglich.

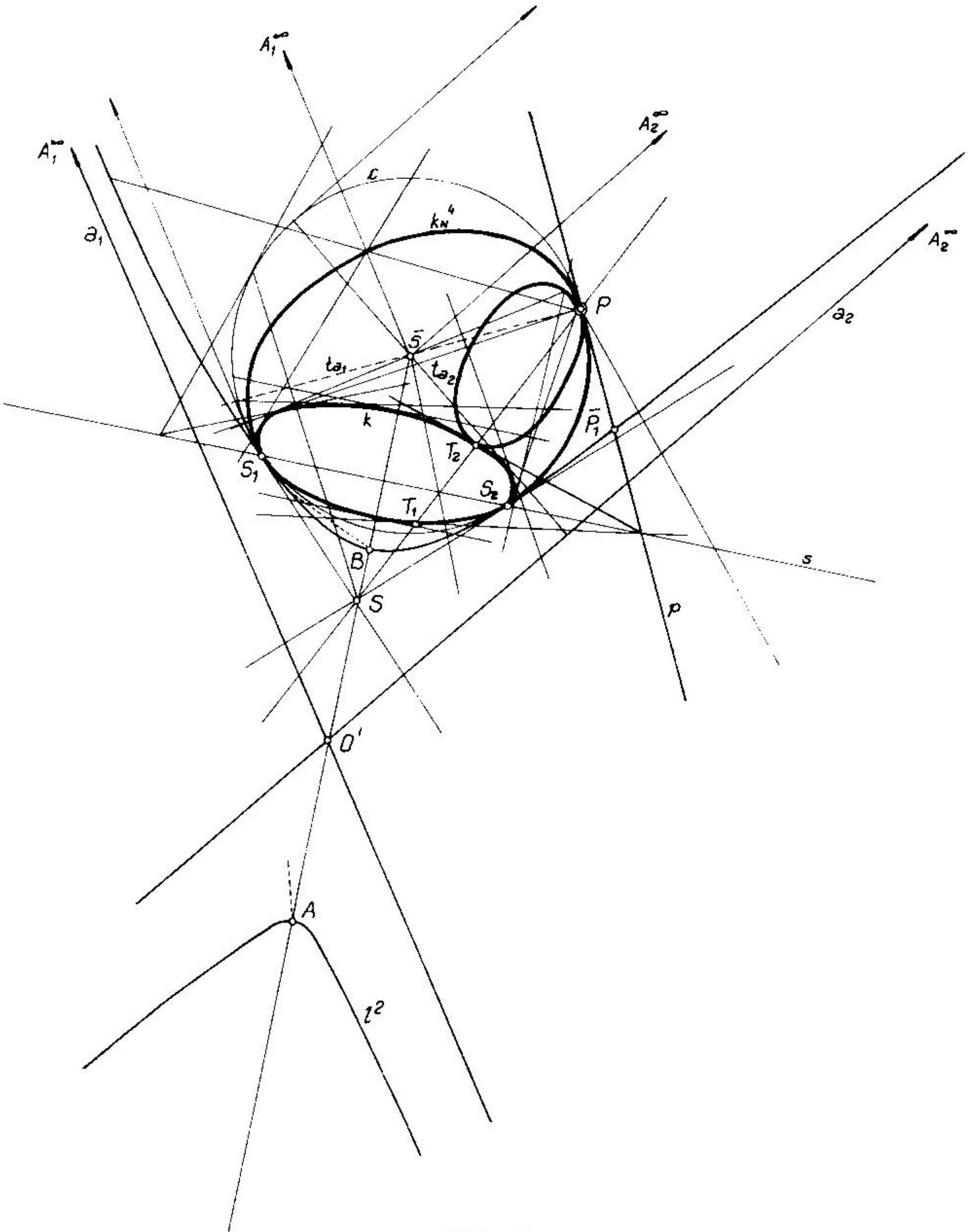

Abb. 3

Fällt der Pol P in einen der absoluten Berührungspunkte des gegebenen Kreises, die Fusspunktkurve 4. Ordnung wird auf den Kreis der konzentrisch zu den gegebenen steht und die doppelt gezählte Gerade p zerfallen.

Es soll eine vollkommen zirkuläre Kurve k_n^m gegeben sein mit der Bedingung $n > m$. Ihre Fusspunktkurve ist eine Kurve $2n$-ter Ordnung welche die gleiche m absoluten Berührungspunkte wie k_n^m hat. Nehmen wir als Pol P irgendwelchen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt. Die Schnittpunkte P_1 und P_2 seiner absoluten Polare p mit der Absolute werden die n-fachen Punkte der Fusspunktkurve sein, so wird sie mit der Absolute noch $2n—2m$ Schnittpunkte gemein haben. Diese Schnittpunkte kann man konstruktiv bekommen als die absoluten Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten der Kurve und Absolute, wo die isotrope Asymptoten ausgeschlossen sind.

Um in diesen Fall eine vollkommen zirkuläre Kurve k_N^{2n} zu bekommen ist notwendig dass $m=n$ und der Pol auf der Absolute liegt. Sei der Pol ausser der Absolute — wir haben bewiesen dass er ein n-faches Punkt der Fusspunktkurve ist — die Kurve sollte die Absolute in noch Paar Punkte schneiden, so wurde sie keine vollkommen zirkuläre Kurve sein. Die vollkommen zirkuläre Kurve k_N^{2n} hat n absolute Berührungspunkte und einen n-fachen Berührungspunkt im Pol P, so besteht sie aus lauter eigentlichen oder lauter idealen Punkte.

Nehmen wir weiters die n-zirkuläre Kurve k_n^m mit der Bedingung $n < m$. Diese Kurve wird n isotrope Asymptoten enthalten wie auch $2m—2n$ absolute Schnittpunkte. Weil diese Schnittpunkte keine absoluten Schnittpunkte der erzeugender Kurve bleiben und die allen gemeinsamen Tangenten der Kurve und der Absolute erschöpft sind, bekommen wir mit dem Pol auf der Absolute eine vollkommen zirkuläre Kurve k_N^{2n}.

Mit diesen Betrachtungen haben wir bewiesen es gilt:

SATZ 1. *Soll die Fusspunktkurve der gegebenen Kurve k_n^m eine vollkommen zirkuläre Kurve sein ist es notwendig und genügend das die Kurve k_n^m eine n-zirkuläre Kurve ist, $n \leq m$ und der Pol der Erzeugung auf der Absolute liegt.*

Die Untersuchung der manchen Eigenschaften der Fusspunktkurven auf dem Modell der hyperbolischen Ebene kann man auch konstruktiv ausführen. Aus der Definition der Herleitung folgt die Konstruktion der Tangenten in Doppelpunkt P und mit Nutzen den früher genannten Involution auf der Polare p kann man durch Harmonität die Tangenten auf beiden Zweigen in dem Doppelpunkte P_1 und P_2 bekommen (Abb. 2).

II

Wenden wir jetzt die bekannte verallgemeinerte quadratische Inversion auf das *Cayley-Klein*schen Modell so an dass die Absolute ist der Grundkegelschnitt des Inversion.

Die absolutpolare Kurve $\bar{k}^2$ des Hyperzykels k_2 (Abb. 2) nehmen wir als die erzeugende Kurve bei der Inversion wessen Pol P dem Pol des Fusspunkterzeugung gleich ist. Da die k^2 auch ein Hyperzykel ist, so ist sein Invers eine Kurve 4. Ordnung k_c^4 welche offensichtlich in demselben Punkten P_1 und P_2 wie auch $\bar{k}^2$ die absoluten Berührungspunkte haben wird. Vergeht der Hyperzykel $\bar{k}^2$ durch den Pol P des Inversion, so zerfällt sich die Kurve 4. Ordnung auf die Kurve 3. Ordnung und die absolute Polare p des Poles P. Das belehrt uns auf die Möglichkeit des Herrstellens einer Verbindung zwischen Fusspunkterzeugung und solcher spezieller Inversion was für jede Kurve der hyperbolischen Ebene gilt.

Es soll x eine Tangente von irgendwelcher Kurve k_n (n-ter Klasse) sein, ihre Berührungspunkt mit X und ihrer absolute Pol mit $\bar{X}$ bezeichnet. Der Punkt X_N der Fusspunktkurve k_N^{2n} der Kurve k_n ist der Schnittpunkt der Geraden $\bar{X}P$ mit der Tangente x (Abb. 4). Die absolutpolare Kurve der gegebenen Kurve k_n ist die Kurve n-ter Ordnung $\bar{k}^n$. Die Inverskurve von der Kurve $\bar{k}^n$ in Bezug auf demselben Pol P und die Absolute als der Grundkegelschnitt ist als k_c^{2n} bezeichnet. Der Inverspunkt X_c des Punktes $\bar{X}$ steht zu diesem Punkt konjugiert in Bezug auf den Grundkegelschnitt der Inversion c, so liegt er in dem Schnittpunkt ihres absoluten Polares x und der Leitgerade durch das Pol P. Der Punkt X_c ist in diesem Fall dem Punkt X_N identisch, so kann man aussagen:

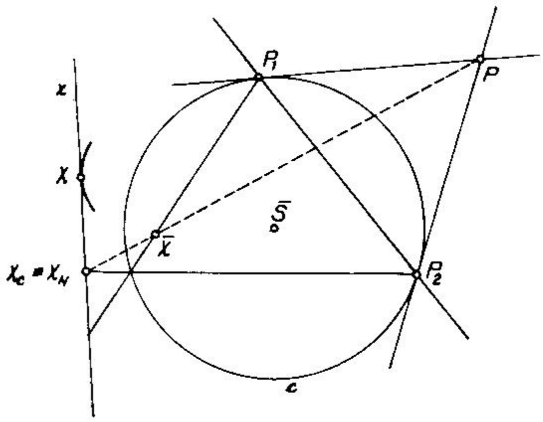

Abb. 4

SATZ 2. *Die Fusspunktkurve von irgendwelcher Kurve k in der hyperbolischen Ebene in Bezug auf Pol P ist der Kurve identisch, welche aus der absolutpolaren Kurve $\bar{k}$ der Kurve k mit Hilfe des allgemeinen quadratischen Inversion, die den gleichen Pol P hat und die Absolute als Grundkegelschnitt des Inversion erzeugen ist.*

Diese Verbindung ist nicht abhängig von dem Zirkularitätsgrad, so gilt sie auch für die vollkommen zirkuläre Kurven.

LITERATUR:

[1] *D. Palman*, Vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene, Glasnik Mat. fiz. astr. **14** (1959), 19—74.

[2] *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

[3] *K. Fladt*, Analytische Geometrie spezieller ebenen Kurven, Frankfurt/M, 1962.

[4] *V. Niče*, Deskriptivna geometrija I, Zagreb 1979.

Angenommen in II. Abteilung
21. 6. 1983.

Potpuno cirkularne krivulje u hiperboličkoj ravnini dobivene nožišnim izvođenjem

Vlasta Szirovicza, Zagreb

Sadržaj

Potpuno cirkularnom krivuljom u hiperboličkoj ravnini zovemo krivulju kod koje je broj apsolutnih dirališta jednak njenom redu.

U radu je prikazano nožišno izvođenje krivulja na *Cayley-Klein*ovom modelu hiperboličke ravnine. Dokazano je da je nožišna krivulja k_N neke krivulje k_n^m (m-tog reda, n-tog razreda) krivulja $2n$-tog reda, koja u polu izvođenja ima n-struku točku. Točke P_1 i P_2, koje su sjecišta apsolutne polare p pola P s apsolutom, su također n-struke točke krivulje k_N^{2n}.

Nožišnim izvođenjem može se dobiti potpuno cirkularna krivulja 4. reda. Dokazano je da se tim izvođenjem ne može dobiti potpuno cirkularna krivulja 3. reda. Poopćenjem razmatranja zaključili smo: Da bi nožišna krivulja k_N dane krivulje k_n^m bila potpuno cirkularna, nužno je i dovoljno da je krivulja k_n^m n-cirkularna, $n \leq m$, te da pol izvođenja leži na apsoluti.

Poopćena kvadratna inverzija može se povezati s nožišnim izvođenjem samo ako za temeljnu koniku inverzije uzmemo apsolutu. Dokazano je da vrijedi: Nožišna krivulja bilo koje krivulje k u hiperboličkoj ravnini u odnosu na pol P identična je krivulji dobivenoj iz apsolutno polarne krivulje $\bar{k}$ krivulje k poopćenom kvadratnom inverzijom uz isti pol P i apsolutu kao temeljnu koniku inverzije.

Primljeno u II. razredu
21. 6. 1983.