Mathematica Pannonica
7/1 (1996), 47 – 67

KLASSIFIKATIONSTHEORIE DER KEGELSCHNITTBÜSCHEL VOM TYP VI DER ISOTROPEN EBENE

Vlasta **Ščurić–Čudovan**

Universität im Zagreb, Fakultät für Geodesie, Kaciceva 26, 10000 Zagreb, Croatia

Herrn o. Univ. Prof. Dr. H. Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received November 1994

MSC 1991: 51 N 25, 53 A 04

Keywords: Isotropic plane, types of pencils of conics, curves of midpoints and focal points of a pencil.

Abstract:A real *affine* plane A_2 is called an *isotropic* plane I_2, if in A_2 a metric is induced by an absolute $\{f, F\}$ consisting of the line at infinity f of A_2 and a point $F \in f$. According to K. Strubecker on I_2 exists a 3-parameter group B_3 of *isotropic* motions. In this paper a complete classification of pencils of conics with two real double fundamental points is given. With respect to the group B_3 we construct normal forms for all main types and we study some subtypes. Finally we give an interpretation of some geometrical invariants, using the curve of midpoints at the curve of focal points of the pencil.

Einleitung

Diese Abhandlung ist eine Fortsetzung der Arbeiten [9], [10], [11], wobei auf die Abhandlungen [7], [8] und [16] Bezug genommen wird.

Die i.f. verwendeten Begriffsbildungen aus der *isotropen Geometrie* können in der Monographie [6], die Grundbegriffe über *Kegelschnittbüschel (KS-Büschel)* in der *projektiven Ebene* P_2 bzw. in der *affinen*

Ebene A_2 können in [2], [3], [5] und bezüglich der *euklidisch äquiformen* Geometrie in [3] nachgelesen werden. Eine reelle *affine Ebene* $A_2(\mathbb{R})$, welche über eine Absolutfigur $\{f, F\}$ — bestehend aus einer Geraden f als *absoluter Geraden* und einem Punkt $F \in f$ als *absolutem Punkt* — metrisiert wird, heißt eine *isotrope Ebene* $I_2(\mathbb{R})$. Die Geometrie dieser Ebene wurde vor allem von K. Strubecker (vgl. [13], [14] und [15]) entwickelt. Die ersten Untersuchungen über Kegelschnitte in I_2 stammen von N.M. Makarova [4] und K. Strubecker [14].

Wegen $I_2 \subset A_2 \subset P_2$ werden alle *affinen* bzw. *projektiven Eigenschaften* von Kegelschnittbüscheln — i.f. kurz als KS-Büscheln bezeichnet — aber auch anderer geometrischer Objekte benutzt werden, ohne daß darauf in jedem Einzelfall gesondert hingewiesen wird. Ein KS-Büschel ist bekanntlich durch zwei KS-e vollkommen bestimmt. Diese KS-e schneiden sich im algebraischen Sinn über dem Körper der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ in vier Büschelgrundpunkten A, B, C und D. Je nach Realität bzw. Vielfachheit dieser Grundpunkte und nach ihrer Lage zur Absolutfigur $\{f, F\}$ der *isotropen Ebene*, läßt sich eine Klassifikation der KS-Büschel in I_2 vornehmen. Da wir uns stets auf nicht ausgeartete KS-Büschel beschränken, d.h. keine Paare von Geradenbüscheln betrachten, gibt es genau neun Haupttypen von KS-Büscheln in I_2.

In [9] sind diese Büscheltypen definiert und jener Büscheltyp I betrachtet worden, der durch vier verschiedene reelle Grundpunkte gekennzeichnet ist, während in [10] und [11] jener Büscheltyp IV betrachtet wurde, der durch einen doppelt zählenden, reellen und zwei einfache reelle Büschelgrundpunkte bestimmt ist. Die Büscheltypen VIII und IX wurden in [7] und [8], der Büscheltyp VII in [16] untersucht.

In der vorliegenden Abhandlung werden die KS-Büschel vom Typ VI betrachtet. Da die Klassifikation mit Hilfe der *Mittelpunktskurve* m^2 2. Ordnung, der *Brennpunktskurve* k_f^3 3. Ordnung und nach der Lage der Geradenpaare des Büschels zueinander und zur Absolutfigur $\{f, F\}$ der *isortopen Ebene* vorgenommen wird, erhält man auch bei dem Büscheltyp VI eine Reihe von Büscheluntertypen, Büschelarten und Büschelfällen. Um einen konsequenten Aufbau sicherzustellen, wird beim Typ VI, ebenso wie auch bei der Untersuchung der anderen KS-Büschel eine Bezeichnung durch Indizes verwendet. Die Grobklassifikation, die den *Untertyp* bestimmt, wird durch den ersten Index gekennzeichnet, wobei die einzelnen Ziffern eine rein geometrische Deutung liefern. Eine feinere Klassifikation der einzelnen Untertype, die *Büschelart* bzw. den *Büschelfall* bezeichnet, wird durch den nächsten Index bzw. durch Buchstaben beschrieben.

Als *Fundamentalgruppe* legen wir stets die dreiparametrige *isotrope Bewegungsgruppe* $\mathcal{B}_3$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= c_1 + x \\ \overline{y} &= c_2 + c_3 x + y \end{aligned} \tag{1.1}$$

zugrunde [6]. Diese Gruppe ist bekanntlich eine spezielle Automorphismengruppe der Absolutfigur $\{f, F\}$, wobei nach Einführung von *projektiven Koordinaten* $\{x_0, x_1, x_2\}$ in $I_2 \subset P_2$ die Gerade f durch $x_0 = 0$ und F durch $F(0 : 0 : 1)$ erfaßt wird. Mit $\{x, y\}$ bezeichnen wir hier und im folgenden die zugehörigen *affinen Koordinaten* in I_2.

Der Büscheltyp VI

Von den vier verschiedenen reellen Büschelgrundpunkten A, B, C und D des allegemeinen Typs I, sind beim Büscheltyp VI je zwei als doppelt zählende unendlich benachbarte Grundpunkte zu betrachten. Diese Punkte seien $A = B$ und $C = D$, wobei die Punkte $A = B$ mit A und der Punkt $C = D$ mit C bezeichnet werde. Die beiden doppelt zählenden Büschelgrundpunkten A und C sind beim Typ VI reell. Während die vier Grundpunkte im Fall des Typs I die drei Büschelhauptpunkte K, L und M als die Eckpunkte des gemeinsamen Poldreiecks dieses KS-Büschel eindeutig bestimmen, verbleibt beim Typ VI nur der Punkt $K = AB \cap CD$ und die Gerade $g := ACLM$. Ein KS-Büschel mit zwei doppeltzählenden Grundpunkten besitzt bekanntlich unendlich viele gemeinsame Poldreiecke, die alle eine Ecke im Punkt K und die übrigen zwei Ecken auf der Geraden $g := AC$ haben (vgl. [3, 330–331]).

Die Geraden $t_1 := A, K$ bzw. $t_2 := C, K$ sind die gemeinsamen Tangenten aller Büschelkegelschnitte mit dem gemeinsamen Berührpunkt im Punkt A bzw. im Punkt C. Ein solcher Büscheltyp wird als ein *Berührbüschel* bezeichnet. Der Büscheltyp I enthält drei sich in den Büschelhauptpunkten schneidende Geradenpaare, die drei singulären KS-e dieses Büschels darstellen. Bei dem Büscheltyp VI verbleib ein Geraden-Tangentenpaar (t_1, t_2) und eine doppelt zählende Gerade $g := AC$. Die eigentliche Gerade g stellt eine *singuläre Parabel*, bzw. einen *reduziblen isotropen Kreis* dar, während das Geradenpaar (t_2, t_2), je nach der Lage der Punkte A, C und K eine *singuläre Parabel*, einen *reduziblen isotropen Kreis* bzw. eine *singuläre Hyperbel* bzw. eine *spezielle singuläre Hyperbel* darstellt (vgl. [9]).

AUFLISTUNG DER BÜSCHELUNTERTYPEN DES TYPS VI

Untertyp VI_1: Die Büschelgrundpunkte sind *eigentlich* und *keine* Verbindungsgerade dieser Punkte ist eine *isotrope* Gerade.

Untertyp VI_2: Genau *eine* der Verbindungsgeraden der *eigentlichen* Grundpunkte ist *isotrop*.

Untertyp VI_3: Ein Geradenpaar, d.h. die zwei Verbindungsgeraden der als eigentlich vorausgesetzen Grundpunkte ist *isotrop*.

Untertyp VI_4: *Einer* der doppelt zählenden Grundpunkte ist *uneigentlich* und *verschieden* vom *absoluten Punkt F*. *Keine* Verbindungsgerade der Grundpunkte ist *isotrop*.

Untertyp VI_5: Genau *einer* der doppelt zählenden Grundpunkte ist *uneigentlich* und vom Punkt F verschieden, die gemeinsame Tangente durch den anderen *eigentlichen* doppelt zählenden Grundpunkt ist *isotrop*.

Die Untertypen, die mit den Indizen 6, 7, 8, 10, 11 und 12 bei den Typen I bzw. IV gekennzeichnet sind, können beim Typ VI nicht auftereten.

Untertyp VI_9: Genau *einer* der doppelt zählenden Grundpunkte ist *uneigentlich* und fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen. Die gemeinsame Tangente aller KS-e mit dem Berührpunkt F ist eine *eigentliche isotrope* Gerade.

Untertyp VI_{13}: Genau *einer* der doppelt zählenden Grundpunkte ist *uneigentlich* und vom Punkt F verschieden. Die gemeinsame Tangente aller KS-e mit dem Berührpunkt in diesem Punkt ist *uneigentlich*. *Die andere gemeinsame Tangente ist keine isotrope Gerade.*

Untertyp VI_{14}: Die andere gemeinsame Tangente aller KS-e des Untertyps VI_{13} ist *eigentlich* und *isotrop*.

Untertyp VI_{15}: Genau *einer* der doppelt zählenden Grundpunkte fällt in den *absoluten Punkt F*, die gemeinsame Tangente in die *absolute Gerade f*. Der andere Grundpunkt ist *eigentlich*.

Untertyp VI_{16}: Die *beiden* doppeltzählenden Grundpunkte sind *uneigentlich*, verschieden vom Punkt F, die gemeinsamen Tangenten t_1 und t_2 sind *eigentlich*.

Untertyp VI_{17}: Einer der beiden *uneigentliechen* Grundpunkte des Untertyps VI_{16} fällt mit dem absoluten Punkt F zusammen; *eine* der beiden gemeinsamen *eigentlichen* Tangenten ist daher *isotrop*.

Ein KS-Büschel vom Typ VI mit *eigentlichen Grundpunkten kann ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel* — in [9–11] als Fall a) bezeichnet —, oder ein *Parabel-Büschel*, aber nie ein *Hyperbel-Büschel* sein (vgl. [3, 391, 398]; [9–11]).

Die KS-e eines Ellipsen-Hyperbel-Büschels bestimmen auf der absoluten Geraden f eine hyperbolische Involution. Diese enthält sowohl reelle als auch konjugiert-komplexe Punktepaare und zwei reelle Fixpunkte. Infolgedessen enthält das Büschel unendlich viele reelle Hyperbeln, unendlich viele reelle Ellipsen und zwei reelle Parabeln. Die Menge der Ellipsen wird von der Menge der Hyperbeln durch die beiden Parabeln getrennt. Eine spezielle Hyperbel der isotropen Ebene trennt die Hyperbeln 1. Art von den Hyperbeln 2. Art.

Die Klassifikation der KS-Büschel von Typ VI wird zusätzlich mit Hilfe der *Mittelpunktskurve* m^2 und der *Brennpunktskurve* k_f^3 vorgenommen. Die Mittelpunkte aller KS-e eines KS-Büschel bilden eine *Mittelpunktskurve* m^2 2. Ordung. Da diese Kurve im allgemeinen außer den drei Büschelhauptpunkten noch die beiden Parabelfernpunkte und die drei Mittelpunkte jener sechs Strecken enthält, die durch die Büschelgrundpunkte bestimmt sind, zerfällt beim Büscheltyp VI diese Kurve m^2 stets in die Verbindungsgerade AC und in die Verbindungsgerade des Mitelpunktes der Strecke $\overline{AC}$ mit dem Hauptpunkt $K = t_1 \cap t_2$ (vgl. [3, 339], [7–11], [16]).

Die *isotropen* Brennpunkte der Büschelkegelschnitte bilden im allgemeinen eine Kurve k_f^3 3. Ordung; diese ist durch die vier Grundpunkte, die drei Hauptpunkte, die beiden Parabelfernpunkte, den absoluten Punkt F und durch jenen Punkt P, der bezüglich des Büschels dem Punkt F konjugiert zugeordnet ist, ausreichend bestimmt. Bei dem Büscheltyp VI liegen zwei der Hauptpunkte stets auf der Verbindungsgeraden der Grundpunkte A und C. Folglich zerfällt die *isotrope Brennpunktskurve* k_f^3 bei dem Typ VI stets in die Gerade AC und in einen KS k_f^2, der auch weiter zerfallen kann (vgl. [7–11], [16]).

Der Büscheluntertyp VI_1

DER BÜSCHELFALL VI_{1a}

Durch eine geeigente *isotrope Bewegung* kann man erreichen, daß einer der doppelt zählenden eigentlichen Punkte, z.b. A in den Ursprung $U(0,0)$ und die Tangente t_1 in die x-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems fällt. Der Punkt A erhält dann die Koordinaten $A(0,0)$ und der eigentliche Punkt C die Koordinaten $C(c_1, c_2)$, mit $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Setz man $\varphi = c_2 : c_1$, dann besitzen die Geraden $g := AC$; $t_1 := (A = B)K$; $t_2 := (C = D)K$ $(K = t_1 \cap t_2)$ die Gleichungen $g \ldots y - \varphi x = 0$, $t_1 \ldots y = 0$, $t_2 \ldots y - c_2 - \alpha\,(x - c_1) = 0$, wobei α der *isotrope Neigungswinkel* der Geraden t_2 ist.

Die Gleichung eines KS-Büschels vom Typ VI erhält man durch

$$\mu g^2 + \lambda t_1 t_2 = 0 \tag{2.1}$$

bzw. mit $\frac{\lambda}{\mu} = \nu$ als

$$g^2 + \nu t_1 t_2 = 0. \tag{2.2}$$

Als *Normalform* des Büscheluntertyps VI_1 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\equiv (y - \varphi x)^2 + \nu y[(y - c_2) - \alpha(x - c_1)] = 0 \quad \text{bzw.} \\ \mathcal{F} &\equiv y^2 - 2\varphi xy + \varphi^2 x^2 + \nu(y^2 - c_2 y - \alpha xy + \alpha c_1 y) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Satz 1. *Ein Berührbüschel vom Untertyp* VI_1 *ist im allgemeinen durch drei Invarianten* $\{c_1, c_2, \alpha\}$ *bis auf isotrope Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Mittels $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ bestimmt man die Gleichung der *Mittelpunktskurve* m^2 zu

$$(y - \varphi x)[(2\varphi - \alpha)y - \alpha\varphi x + (\alpha - \varphi)c_2] = 0, \tag{2.4}$$

die hier in die Gerade $g := AC$ und in die Gerade

$$m_1 \ldots y - \frac{\alpha\varphi}{2\varphi - \alpha}x + \frac{c_2(\alpha - \varphi)}{2\varphi - \alpha} = 0$$

mit dem Fernpunkt $M_1(0 : (2\varphi - \alpha) : \alpha\varphi)$ zerfällt. Die Mittelpunkte M_ν der KS-e besitzen die Koordinaten

$$M_\nu\left(\frac{(c_2 - \alpha c_1)(2\varphi + \nu\alpha)}{(2\varphi - \nu\alpha)^2}, \quad \frac{2\varphi^2(c_2 - \alpha c_1)}{(2\varphi - \nu\alpha)^2}\right),$$

wobei ν der Büschelparameter ist. Die *isotrope Brennpunktskurve* k_f^3

3. Ordung besteht aus jenen Punkten der Büschelkegelschnitte, deren Tangenten *isotrop* sind. Aus $\mathcal{F} = 0$ und $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0$ findet man die Gleichung k_f^3

$$(2.5)\quad (y - \varphi x)[\alpha\varphi x^2 + (\alpha - 2\varphi)xy + (c_2 - \alpha c_1)\varphi x + (c_2 - \alpha c_1)y] = 0,$$

die in die Gerade $g \ldots y - \varphi x = 0$ und in einen KS k_f^2 zerfällt. Die Fernpunkte dieses KS-es sind die Punkte $H_1 = F\ (0 : 0 : 1)$ und $H_2 = M_1$. Die Kurve k_f^2 ist daher eine *spezielle Hyperbel* mit dem Mittelpunkt

$$M\left(\frac{c_2 - \alpha c_1}{2\varphi - \alpha}, \quad \frac{(c_2 - \alpha c_1)(2\varphi + \alpha^2\varphi)}{2\varphi - \alpha}\right).$$

Die *Parabeln* p_1 bzw. p_2 dieses Büschels ergeben sich für $\nu_1 = 0$ bzw. $\nu_2 = \frac{4\varphi(\varphi - \alpha)}{\alpha^2}$ zu

$$(2.6)\qquad p_1 \ldots (y - \varphi x)^2 = 0$$

bzw.

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &p_2 \ldots (\alpha - 2\varphi)[(\alpha - 2\varphi)y^2 + 2\alpha\varphi xy] + \\ &+ \varphi^2\alpha^2x^2 - 4\varphi(\varphi - \alpha)(c_2 - \alpha c_1)y = 0, \end{aligned}$$

wobei der Fernpunkt von p_2 in H_2 liegt.

Die spezielle *Büschel-Hyperbel* h_s erhält man für $\nu = -1$ zu

$$(2.8)\qquad h_s \ldots (2\varphi - \alpha)xy - \varphi^2x^2 + (\alpha c_1 - c_2)y = 0$$

mit den Fernpunkten $F(0 : 0 : 1)$ und $H_n(0 : 2\varphi - \alpha : \varphi^2)$ und dem Mittelpunkt

$$M_{sh}\left(\frac{c_2 - \alpha c_1}{2\varphi - \alpha}, \quad \frac{2\varphi^2(c_2 - \alpha c_1)}{(2\varphi - \alpha)^2}\right).$$

Ersichtlich ist die Gerade $(2\varphi - \alpha)x = c_2 - \alpha c_1$ eine gemeinsame *isotrope* Asymptote der Hyperbeln k_f^2 und h_s.

Satz 2. *Ein allgemeines Berührbüschel vom Untertyp* VI_1 *ist ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel, bei dem eine der beiden Parabeln aus der doppelt zu zählenden Verbindungsgeraden der Doppelpunkte* A *und* C *besteht. Diese Gerade ist ein Bestandteil der Mittelpunkts- und Brennpunktskurve. Die Mittelpunkte aller KS-e liegen auf einer Geraden, die isotropen Brennpunkte liegen auf einer speziellen Hyperbel.*

Die Abbildung 1 zeigt ein Kegelschnittbüschel dieses Typs.

Abb. 1.

DER BÜSCHELFALL VI_{1c}

Die einzige reguläre Parabel des Büscheltyps VI_{1a} artet im Fall VI_{1c} in ein *paralleles* Geradenpaar aus. Diese Geraden sind genau die Tangenten t_1 und t_2. Durch eine *isotrope Bewegung* kann die Tangente t_1 in die x-Achse und der Punkt A in den Ursprung $U(0,0)$ des Standardkoordinatensystems gelegt werden. Der Punkt C enthält dann die Koordinaten $C(c_1, c_2)$, mit $c_1 \neq 0$ und $c_2 \neq 0$; die Tangente t_2 wird durch $t_2 \ldots y - c_2 = 0$, die anderen Geraden t_1 und g werden durch $t_1 \ldots y = 0$, $g \ldots y - \varphi x = 0$ mit $\varphi = c_2 : c_1$ beschrieben.

Als *Normalform* eines KS-Büschel im Fall VI_{1c} erhält man

$$\mathcal{F} \equiv (y - \varphi x)^2 + \nu y(y - c_2) = 0. \tag{2.9}$$

Satz 3. *Ein Berührbüschel* VI_{1c} *vom Untertyp* VI_1 *ist durch zwei Invarianten* $\{c_1, c_2\}$ *bis auf isotrope Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = g \cdot m_1$

$$(y - \varphi x)(c_2 - 2y) = 0 \tag{2.10}$$

besteht aus den Mittellinien der singulären Parabeln g^2 und (t_1, t_2), da alle reguläre KS-e dieses Büschels ihre Mittelpunkte im Schnittpunkt $M = g \cap m_1$, $M(0,5c_1; 0,5c_2)$ besitzen. Die *isotrope Brennpunktskurve*

$k_f^3 = g \cdot k_f^2$

$$(y - \varphi x)(2\varphi xy - c_2 y - \varphi c_2 x) = 0 \tag{2.11}$$

besteht aus der Geraden g und einer speziellen Hyperbel k_f^2 mit den Fernpunkten $F(0 : 0 : 1)$ und $K(0 : 1 : 0)$, und dem Mittelpunkt $M(0,5c_1; 0,5c_2)$.

Satz 4. *Ein KS-Büschel des Falls* VI_{1c} *besteht aus konzentrischen Ellipsen, Hyperbeln 1. Art, Hyperbeln 2. Art und einer speziellen Hyperbel. Der gemeinsame Mittelpunkt dieser KS-e ist der Schnittpunkt der Geraden* g *mit der Mittellinie* m_1 *des Geradenpaares* (t_1, t_2). *Dieser ist auch der Mittelpunkt der speziellen Hyperbel* k_f^2, *die die isotropen Brennpunkte der Büschelkegelschnitte trägt.*

Die singulären Parabeln p_1 bzw. p_2 dieses KS-Büschels erhält man für $\nu = 0$, bzw. für $\nu = \infty$. Die spezielle Hyperbel $h_s \ldots \varphi^2 x^2 - 2\varphi xy + c_2 y = 0$ ergibt sich für $\nu = -1$.

Die Abbildung 2 zeigt diesen Büscheltyp.

Abb. 2

DER BÜSCHELFALL VI_{1s}

Nun seien die *eigentlichen Linienelemente* (A, t_1) und (C, t_2) des Falls VI_{1a} so gewählt, daß sie bezüglich des Standardkoordinatensystems die Koordinaten bzw. die Gleichungen $A(-a,0)$, $C(a,0)$ mit $a \neq 0$ bzw. $g \dots y = 0$, $t_1 \dots y + \alpha(x+a) = 0$, $t_2 \dots y - \alpha(x-a) = 0$ besitzen. Dabei ist α bzw.$-\alpha$ der Neigungswinkel der Tangente t_1 bzw. t_2. Als *Normalform* dieses Büschels erhält man

(2.12) $$\mathcal{F} \equiv y^2 + \nu(y^2 + 2\alpha ay - \alpha^2 x^2 + \alpha^2 a^2) = 0.$$

Die *Mitelpunktskurve*

(2.13) $$m^2 \dots xy = 0$$

besteht aus der Mittelpunktsgeraden $y = 0$, während die anderen KS-e ihre Mittelpunkte M_ν auf der *isotropen* Geraden $m \dots x = 0$, mit den Koordinaten $M_\nu\left(0, \frac{-\nu a\alpha}{1+\nu}\right)$ besitzen. wobei ν der Büschelparameter ist. Die *Brennpunktskurve* $k_f^3 = yk_f^2$

(2.14) $$y(\alpha x^2 - ay - \alpha a^2) = 0$$

besteht aus der Geraden $y = 0$, die zu dem Geradenpaar (g,g) gehört, und aus einem parabolischen Kreis k_f^2 durch die Grundpunkte A und C und den Schnittpunkt $K(0,-a\alpha)$ der Tangente t_1 und t_2. Die Brennpunkte B_f, $B_f \in k_f^2$ besitzen die Koordinaten $B_{f,1,2}\left(\pm\frac{a}{\sqrt{1+\nu}}, \frac{-\nu a\alpha}{1+\nu}\right)$, mit ν als Büschelparameter. Sie sind reell für $-1 < \nu < +\infty$. Man erhält für $\nu = -1$ den parabolischen Kreis

(2.15) $$p_1 \dots \alpha x - 2ay - \alpha a = 0,$$

für $\nu = 0$ die singuläre Parabel $p_2 \dots g^2 = 0$, das Geradenpaar (t_1, t_2) für $\nu = \infty$, die Ellipsen für $-1 < \nu < 0$, die Hyperbeln 1. Art für $0 < \nu < \infty$ und die Hyperbeln 2. Art für $-\infty < \nu < -1$.

Satz 5. *Ein Berührbüschel vom Büschelfall* VI_{1s}, *in dem eine der beiden Parabeln ein isotroper Kreis ist, und bei dem die Büschelgrundtangenten* t_1 *und* t_2 *mit der doppelt zählenden Geraden* $g := AC$ *gleiche isotrope Winkel mit verschieden Vorzeichen bilden, ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{a, \alpha\}$ *eindeutig bestimmt. Dieses KS-Büschel ist ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel. Die Mittelpunkte aller regulären KS-e liegen auf einer isotropen Geraden* m *durch den Schnittpunkt* $K = t_1 \cap t_2$ *der Tangenten* t_1, t_2. *Die Brennpunkte der Büschel KS-e liegen auf einem parabolischen Kreis. Eine beliebige, mit der doppelt zählenden Geraden* g *parallele Gerade, schniedet die KS-e dieses Berührbüschels in zwei Punkten, die gleichen Abstand von der Geraden* m *besitzen.*

DIE BÜSCHELART $\mathrm{VI}_{1,1}$

Berüht die reguläre Parabel des Falls VI_{1a} die absolute Gerade f genau im absoluten Punkt F, dann ist diese Parabel ein *isotroper* *parabolischer Kreis*. Um die Gleichung dieses isotropen Keises bzw. die *Normalform* des KS-Büschels zu bestimmen, suchen wir ausgehend von (2.3) jenen Büschelkegelschnitt k, der F enthält. Man findet zunächst die Bedingung $\nu = -1$, womit sich für k die Gleichung

$$(2.16) \qquad (2\varphi - \alpha)xy - \varphi^2 x^2 - (c_2 - \alpha c_1)y = 0$$

einstellt. Damit (2.16) ein parabolischer Kreis wird, muß k im Punkt F die absolute Gerade f berühren. Dies liefert noch die Bedingung $2\varphi - \alpha = 0$ und damit die Gleichung des *isotropen Kreises* p_2 zu

$$(2.17) \qquad \varphi^2 x^2 - c_1 y = 0.$$

Als *Normalform* eines KS-Büschels der Art $\mathrm{VI}_{1,1}$ erhält man

$$(2.18) \qquad \mathcal{F} \equiv (y - \varphi x)^2 + \nu y(y - 2\varphi x + c_2) = 0.$$

Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = g \cdot m_1$ bzw. die *Brennpunktskurve* $k_f^3 = = g \cdot k_f^2$ besitzen die Gleichungen

$$(2.19) \qquad m^2 \ldots (y - \varphi x)(2x - c_1) = 0$$

$$(2.20) \qquad k_f^3 \ldots (y - \varphi x)(2\varphi^2 x^2 - \varphi c_2 x - c_2 y) = 0.$$

Die Mitelpunktskurve m_1 ist eine *isotrope Gerade*, wobei die Mittelpunkte M_ν der KS-e durch $M_\nu\left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2(1+\nu)}\right)$, mit ν als Büschelparameter, festgelegt werden. Die *Brennpunktskurve* k_f^2 berührt die absolute Geade f im Punkt $F(0:0:1)$ und ist daher ein *isotroper Kreis*.

Satz 6. *Ein KS-Büschel der Art* $\mathrm{VI}_{1,1}$ *in dem die reguläre Parabel ein isotroper parabolischer Kreis ist, ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{c_1, c_2\}$ *eindeutig bestimmt. Dieses KS-Büschel ist ein Ellipsen-Hyperbel-Büschel. Die Mittelpunkte aller regulären KS-e liegen auf einer isotropen Geraden. Die isotropen Brennpunkte dieser KS-e gehören einem isotropen Kreis an.*

Der Büscheluntertyp VI_2

Genau eines der *eigentlichen Linienelemente* (A, t_1) bzw. (C, t_2) besitzt eine *isotrope* Tangente. Es sei die Tangente $t_1 := (A = B)K$ *isotrop*. Durch eine *isotrope Bewegung* kann man erreichen, daß der doppelt zählende Grundpunkt A in dem Ursprung $U(0,0)$ des zugrundegelegten Koordinatensystem fällt. Durch eine weitere isotrope Bewegung kann man erreichen, daß der andere doppelt zählende Grundpunkt C auf der x-Achse liegt und die Koordinaten $C(c_1, 0)$ mit $c_1 \neq 0$ erhält. Der Neigungswinkel der Tangente t_2 sei α. Die Geraden g, t_1, t_2 erhalten dann die Gleichungen

$$g \ldots y = 0, \quad t_1 \ldots x = 0, \quad t_2 \ldots y - \alpha(x - c_1) = 0.$$

In üblicher Weise erhält man als *Normalform* eines Berührbüschels des Untertyps VI_2

$$\mathcal{F} \equiv x[y - \alpha(x - c_1)] + \nu y^2 = 0. \tag{2.21}$$

Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = gm_1$ hat die Form

$$y[y - \alpha(2x - c_1)] = 0, \tag{2.22}$$

so daß die Mittelpunkte M_ν der KS-e auf der Geraden m_1 die Koordinaten $M_\nu\left(\frac{2c_1\alpha\nu}{4\alpha\nu+1}, \frac{-c_1\alpha}{4\alpha\nu+1}\right)$ erhalten. Die *isotrope Brennpunktskurve* $k_f^3 = gt_1k_f^1$

$$xy[y - 2\alpha(x - c_1)] = 0 \tag{2.23}$$

trägt die isotropen Brennpunkte der regulären KS-e auf der Geraden k_f^1. Die reguläre Parabel

$$p \ldots 4\alpha xy - 4\alpha^2x^2 + 4\alpha c_1x - y^2 = 0 \tag{2.24}$$

stellt sich für $\nu = -\frac{1}{4\alpha}$, die singuläre Parabel $y^2 = 0$ für $\nu = \infty$ ein.

Abb. 3

Satz 7. *Ein KS-Büschel des Untertyps* VI_2 *ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{c_1, \alpha\}$ *eindeutig bestimmt. Die regulären KS-e dieses Büschels sind Ellipsen, Hyperbeln* 1. *Art und eine Parabel. Alle diese KS-e besitzen eine gemeinsame isotrope Tangente und* *einen gemeinsamen Berühr- und Brennpunkt; dieser ist der doppelt zu zählende Grundpunkt auf dieser Tangente. Die Mittelpunkte bzw. die anderen isotropen Brennpukte der regulären KS-e liegen auf zwei zueinander parallelen Geraden, die sich im uneigentlichen Mittel- und isotropen Brennpunkt der singulären Parabel schneiden. Diese Parabel ist niemals ein isotroper Kreis.*

Der Untertyp VI_3

DIE BÜSCHELART $\mathrm{VI}_{3,1}$

Bei dieser Art sind die *beiden Linienelemente* (A, t_1), (C, t_2) eigentlich und die isotropen Geraden t_1 und t_2 schneiden sich im absoluten Punkt $F(0:0:1)$. Mit $g \dots y = 0$, $t_1 \dots x + a = 0$, $t_2 \dots x - a = 0$ lautet die *Normalform* dieses Büchels

(2.25) $$\mathcal{F} \equiv x^2 - a^2 + \nu y^2 = 0.$$

Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = gm_1$ lautet $yx = 0$. Alle reguläre KS-e dieses Büschels besitzen den gemeinsamen Mittelpunkt im Schnittpunkt $U(0,0)$ von g und m_1. Die *Brennpunktskurve* k_f^3 artet in

(2.16) $$(x + a)(x - a)y = 0$$

aus. Diese Geraden bestehen aus den Brennpunkten der singulären KS-e, da alle reguläre KS-e ihre isotropen Brennpunkte in den Grundpunkten A und C besitzen.

Satz 8. *Ein Berührbüschel der Büschelart* $\mathrm{VI}_{3,1}$ *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{a\}$ *eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus konzentrischen, konfokalen, koaxialen Ellipsen und speziellen Hyperbeln. Die Parabeln dieses Büschels zerfallen in die doppelt zählende Gerade* g *bzw. in die beiden isotropen Büscheltangenten, die als Geradenpaar* (t_1, t_2) *den singulären isotropen Kreis darstellen.*

DIE BÜSCHELART $\mathrm{VI}_{3,2}$

Bei dieser Art ist die doppelt zählende Gerade g *isotrop*, da die Büschelgrundpunkte A und C *parallel* sind. Mit $g \dots x = 0$, $t_1 \dots y = 0$, $t_2 \dots y - c - \alpha x = 0$ erhält man als *Normalform* dieses Büschels

(2.27) $$\mathcal{F} \equiv x^2 + \nu y(y - \alpha x - c) = 0.$$

Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = gm_1$

$$x(2y - \alpha x - c) = 0 \tag{2.28}$$

enthält die Mittelpunkte der Doppelgeraden $g^2 = 0$, während die Mittelpunktsgerade m_1 durch die bekannten Punkte $K = t_1 \cap t_2$, $P = 0,5d\ (\overline{AC})$ und den uneigentlichen Parabelmittelpunkt P_n ausreichend besitmmt ist. Diese Mittelpunkte M_ν besitzen die Koordinaten $M_\nu\left(\frac{2c\nu\alpha}{4\nu\alpha+1}, \frac{-c\alpha}{4\nu\alpha+1}\right)$ mit ν als Büschelparameter. Die *Brennpunktskurve* k_f^3 zerfällt in die Geraden

$$x^2(2y - \alpha x - c) = 0. \tag{2.29}$$

Satz 9. *Ein KS-Büschel* $\mathrm{VI}_{3,2}$ *ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{c, \alpha\}$ *eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus Ellipsen, Hyperbeln 2. Art und einer regulären Parabel, während die doppelt zählende isotrope Verbindungsgerade der Büschelgrundpunkte als singulärer isotroper Kreis betrachtet werden kann. Die Mittel- und Brennpunkte aller regulären KS-e liegen auf derselben Geraden durch den Punkt* $K = t_1 \cap t_2$ *und den uneigentlichen Mittel- und Brennpunkt der regulären Büschelparabel.*

DER BÜSCHELFALL $\mathrm{VI}_{3,2c}$

Ein Unterfall von $\mathrm{VI}_{3,2}$ entsteht genau dann, wenn die reguläre Parabel dieser Art in das *parallele* Geradenpaar (t_1, t_2) ausartet. Mit $t_1 \dots y + a = 0$, $t_2 \dots y - a = 0$, $g \dots x = 0$ erhält man als *Normalform* dieses Büschels

$$\mathcal{F} \equiv x^2 + \nu(y^2 - a^2) = 0 \tag{2.30}$$

Die *Mittelpunktskurve* m^2 zerfällt in die beiden Geraden $g \dots x = 0$ und $s \dots y = 0$. Alle reguläre KS-e haben den gemeinsamen Mittelpunkt im Schnittpunkt $M(0,0)$ der Geraden g und s. Die *isotrope Brennpunktskurve* $k_f^3 \dots x^2 y = 0$ zerfällt in die doppelt zählende isotrope Gerade $g \dots x = 0$ und in die Gerade $s \dots y = 0$, auf der die isotropen Brennpunkte der regulären KS-e liegen.

Die reduziblen Parabeln dieses Büschels erhält man für $\nu = 0$ bzw. $\nu = \infty$, die Ellipsen für $\nu > 0$, die Hyperbeln, die durchwegs von 2. Art sind, für $\nu < 0$.

Satz 10. *Ein Berührbüschel des Falls* $\mathrm{VI}_{3,2c}$ *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine Invariante* $\{a\}$ *eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus konzentrischen Ellipsen und Hyperbeln 2. Art, während die beiden reduziblen Parabeln zu den Geradenpaaren* (t_1, t_2) *und* (g, g) *ausarten. Alle reguläre KS-e haben einen gemeinsamen isotropen Durchmesser AC, während sich die anderen, bezüglich dieser KS-e zu ihm* *konjugierten Durchmesser auf der Mittellinie s des Tangentenpaares (t_1, t_2) befinden. Die KS-e dieses Büschels werden durch isotrope Spiegelungen an dieser nichtisotropen Durchmessergeraden s aufeinander abgebildet.*

Der Untertyp VI_4

Es sei nun (A, t_1) ein *Linienelement* mit dem *uneigentlichen* Punkt A, der verschieden von dem absoluten Punkt F ist und der Geraden $t_1 \neq f$. (C, t_2) sei ein *eigentliches Linienelement* mit der *nichtisotropen* Geraden t_2.

Durch eine *isotrope Bewegung* kann man erreichen, daß die Tangente t_1 in die x-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems fällt und der Punkt A die *projektiven* Koordinaten $A(0:1:0)$ annimt. Weiters kann $C(0, c)$ mit $c \neq 0$ erreichen. Die Geraden g, t_1 und t_2 erhalten dann die Gleichungen $g \ldots y - c = 0$, $t_1 \ldots y = 0$, $t_2 \ldots y - \alpha x - c = = 0$ mit α als Neigungswinkel der Tangente t_2. Als *Normalform* eines KS-Büschel des Untertyps VI_4 erhält man

$$\mathcal{F} \equiv (y-c)^2 + \nu y(y - \alpha x - c) = 0. \tag{2.31}$$

Dieses KS-Büschel besteht aus *Hyperbeln* 1 und 2. Art. Diese trennt eine *spezielle Hyperbel* $\alpha xy - cy + c^2 = 0$, die für $\nu = -1$ gewonnen wird. Alle diese Hyperbeln besitzen eine gemeinsame Asymptote t_1 mit dem uneigentlichen Berührpunkt im Grundpunkt A. Die beiden Parabeln bestehen aus doppelt zu zählenden Geraden g. Das Geradenpaar (t_1, t_2) stellt eine singuläre Hyperbel dar. Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = gt_1$ zerfällt in

$$(y-c)y = 0 \tag{2.32}$$

wobei die Gerade $t_1 \ldots y = 0$ als die gemeinsame Asymptote aller Hyperbeln auch ihre Mittelpunkte M_ν mit den Kordinaten $M_\nu\left(-\frac{c(\nu+2)}{\alpha\nu}, 0\right)$ trägt. Als *Brennpunktskurve* $k_f^3 = gk_f^2$ findet man

$$(y-c)[\alpha xy - c(y - \alpha x - c)] = 0. \tag{2.33}$$

Die *isotropen Brennpunkte* der Hyperbeln des Büschels VI_4 liegen auf einer *speziellen Hyperbel* k_f^2 mit den Fernpunkten $F(0:0:1)$ und $A(0:1:0)$. Ihr Mittelpunkt ist $M_{kf}\left(\frac{c}{2\alpha}, -\frac{c}{2}\right)$.

Satz 11. *Ein Berührbüschel des Untertyps* VI_4 *ist bis auf isotrope Bewegungen durch zwei Invarianten* $\{c, \alpha\}$ *eindeutig bestimmt. Dieses Büschel ist ein Hyperbelbüschel, das aus Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art sowie einer speziellen Hyperbel besteht. Die beiden Parabeln sind zu die doppelt zählende Gerade* g *entartet. Alle Hyperbeln haben eine gemeinsame*

Asymptote, die Mittelpunkte dieser Hyperbeln trägt. Die isotropen Hyperbelbrennpunkte liegen auf einer speziellen Hyperbel.

Abb. 4

Der Büscheluntertyp VI_5

Nun sei (A, t_1) ein *Linienelement* mit dem *uneigentlichen* Punkt $A \neq F$ und der Geraden $t_1 \neq f$, und (C, t_2) ein *eigentliches isotropes Linienelement.*

Dieses Untertyp unterscheidet sich von VI_4, da alle Hyperbeln dieses Büschels eine gemeinsame *isotrope Tangente* t_2, mit dem gemeinsamen eigentlichen Brennpunkt in C besitzen. Die Büschelhyperbeln sind daher von 1. Art.

Durch *isotrope Bewegungen* ist es möglich die Tangente t_1 in die x-Achse und die Tangente t_2 in die y-Achse des zugrundelegten Koordinatensystems zu legen. Der Punkt A nimmt dann die Koordinaten $A(0:1:0)$, der Punkt C die Koordinaten $C(0, c)$, mit $c \neq 0$ an. Als *Normalform* dieses Büschels stellt sich

(2.34) $$\mathcal{F} \equiv (y - c) + \nu xy = 0$$

ein. Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = gt_1$ enthält die Mittelpunkte $M_\nu\left(\frac{2c}{\nu}, 0\right)$ der Hyperbeln auf der Tangenten t_1 mit ν als Büschelparameter. Die

Brennpunktskurve k_f^3

(2.35) $$(y-c)x(y+c)=0$$

trägt die Hyperbelbrennpunkte $B_\nu\left(\frac{4c}{\nu},-c\right)$ auf der Geraden $g\ldots y+$ $+c=0$.

Satz 12. *Ein KS-Büschel des Untertyps* VI_5 *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{c\}$ *eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht nun aus Hyperbeln* 1. *Art, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen nichtisotropen Tangente liegen. Alle Hyperbeln besitzen eine gemeinsame isotrope Tangente mit einem gemeinsamen Brennpunkt im eigentlichen Grundpunkt, während die anderen Brennpunkte auf einer, mit der Geraden g parallelen Geraden liegen.*

Der Untertyp VI_9

Es sei (A,t_1) ein *Linienelement* mit dem *uneigentlichen* Grundpunkt $A=F$ und der Geraden $t_1\neq f$; (C,t_2) sei ein *eigentliches nicht isotropes Linienelement.*

Alle reguläre KS-e dieses Büschels sind *spezielle Hyperbeln* mit dem gemeinsamen Brennpunkt in $A=F$ und mit der gemeinsamen Asymptote t_1, auf der die Mittelpunkte dieser Hyperbeln liegen. Mit $A(0:0:1)$, $C(c,0)$, $c\neq 0$ und $g\ldots x-c=0$, $t_1\ldots x=0$, $t_2\ldots y=0$ ergibt sich als *Normalform* dieses Büschels

(2.36) $$\mathcal{F}\equiv(x-c)^2+\nu xy=0.$$

Die *Mittelpunktskurve* zerfällt in die beiden isotropen Geraden (g,t_1), mit t_1 als Hyperbelmittelpunktsmenge $M_\nu\left(0,\frac{2c}{\nu}\right)$ und ν als Büschelparameter. Die *Brennpunktskurve* zerfällt in die doppelt zählende isotrope Gerade g und in die Gerade t_1, die den reduziblen KS-e zugeordnet ist. Alle reguläre KS-e, d.h. die speziellen Hyperbeln haben gemeinsamen Brennpunkt in $A=F$.

Satz 13. *Ein Berührbüschel des Untertyps* VI_9 *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine Invariante* $\{c\}$ *eindeutig bestimmt. Die regulären KS-e dieses Büschels sind spezielle Hyperbeln mit den Mittelpunkten auf der gemeinsamen isotropen Tangente, die gleichzeitig die gemeinsame Asymptote dieser Hyperbeln ist. Die anderen Asymptoten besitzen die Richtung* $\frac{1}{\nu}$, *mit* ν *als Büschelparameter.*

Der Untertyp VI_{13}

Nun sei (A,t_1) ein *uneigentliches Linienelement* bestehend aus der absoluten Geraden $t_1=f$ und dem Punkt $A\neq F$. Das *Linienelement*

(C, t_2) sei *eigentlich*. Keine der *eigentlichen* Verbindungsgeraden der Grundpunkte sei *isotrop*. Da alle reguläre KS-e dieses Büschels die absolute Gerade f in einem Punkt $A \neq F$ berühren, besteht ein KS-Büschel VI_{13} aus *homothetischen Parabeln*.

Durch eine *isotrope Bewegung* kann man die *eigentliche* Tangente t_2 in die x-Achse und den Grundpunkt C in den Ursprung des zugrundegelegten Koordinatesystems legen. Die Grundpunkte A und C erhalten dann die Koordinaten $A(0:1:a)$ mit $a \neq 0$, $C(0,0)$. Die Geraden g, t_1 und t_2 besitzen in *projektiven* Kordinaten die Gleichungen

$$g \ldots x_2 - ax_1 = 0, \quad t_1 \ldots x_0 = 0, \quad t_2 \ldots x_2 = 0.$$

Als *Normalform* dieses Büschels erhälte man somit in *projektiven* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv (x_2 - ax_1)^2 + \nu x_0 x_2 = 0 \tag{2.37}$$

bzw. in *affinen* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv (y - ax)^2 + \nu y = 0. \tag{2.38}$$

Die *Mittelpunktskurve* $m^2 = gt_1$ besteht aus Punkten, die als Mittelpunkte der Geradenpaare (g, g) bzw. (t_1, t_2) aufgefaßt werden können. Alle reguläre KS-e dieses Parabelbüschels besitzen ihre Mittelpunkte im Fernpunkt $A \in f$. Die *Brennpunktskurve* $k_f^3 = gt_1 k_f^1$

$$(x_2 - ax_1)x_0(x_2 + ax_1) = 0 \tag{2.39}$$

enthält außer der Brennpunktsmenge der Geradenpaare noch die Brennpunkte B_ν von Parabeln auf der Geraden k_f^1. Sie werden durch $B_\nu\left(\frac{\nu}{4}, -\frac{a\nu}{4}\right)$ mit ν als Büschelparameter beschreiben.

Satz 14. *Ein Berührbüschel des Untertyps* VI_{13} *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante* $\{a\}$ *eindeutig bestimmt. Die regulären KS-e dieses Büschels sind homothetische Parabeln mit dem gemeinsamen Mittel- und Brennpunkt im Grundpunkt* $A \in f$. *Die anderen Brennpunkte dieser Parabeln liegen auf einer, den anderen Brennpunkt enthaltenden Geraden.*

Der Untertyp VI_{14}

Die gemeinsame *eigentliche* Tangente t_2 des Untertyps VI_{13} sei eine *isotrope* Gerade. Auch dieses Büschel besteht aus homothetischen *Parabeln* mit dem gemeinsamen Mittel- und Brennpunkt im Punkt $A \in f$, die noch zusätzlich eine gemeinsame *isotrope Tangente* mit dem eigentlichen Berühr- und Brennpunkt C besitzen. Mit $A(0:1:0)$, $C(0,0)$, und $g \ldots x_2 = 0$, $t_1 \ldots x_0 = 0$, $t_2 \ldots x_1 = 0$ lautet die *Normalform* dieses Büschels in *projektiven* Koordinaten

(2.40) $$\mathcal{F} \equiv x_2^2 + \nu x_0 x_1 = 0$$
bzw. in *affinen* Koordinaten
(2.41) $$\mathcal{F} \equiv y^2 + \nu x = 0.$$
Die *Mittepunktskurve* $m^2 = gt_1$ gehört den singulären KS-en dieses Büschels an. *Die isotrope Brennpunktskurve* $k_f^3 = gt_1t_2$ zerfällt in die Brennpunktsmenge der Geradenpaare (g, g), (t_1, t_2).
Satz 15. *Ein KS-Büschel des Untertyps* VI_{14} *ist bis auf isotrope Bewegungen invariantenfrei bestimmt. Seine regulären KS-e sind homothetische Parabeln mit noch einem gemeinsamen Brennpunkt in dem eigentlichen Doppelgrundpunkt. Die nichtisotrope Gerade* $g := AC$ *ist eine Symmetrieachse dieses Büschels. Durch eine isotrope Spiegelung an dieser Geraden werden die Parabeln auf sich abgebildet.*

Der Untertyp VI_{15}

Nun sei (A, t_1) das *absolute Linienelement* (F, f) und (C, t_2) ein *eigentliches Linienelement*, mit t_2 als einer *nichtisotropen* Geraden. Alle reguläre KS-e dieses Büschels sind *isotrope Kreise*. Als *Normalform* dieses KS-Büschels erhält man in *projektiven* Koordinaten
(2.42) $$\mathcal{F} \equiv x_1^2 + \nu x_0 x_2 = 0$$
bzw. in *affinen* Koordinaten
(2.43) $$\mathcal{F} \equiv x^2 + \nu y = 0.$$
Man erhält unschwer den
Satz 16. *Ein KS-Büschel des Untertyps* VI_{15} *ist bis auf isotrope Bewegungen invariantenfrei bestimmt. Die Regulären KS-e des Büschels sind isotrope parabolische Kreise, die eine gemeinsame eigentliche nicht isotrope Tangente mit dem gemeinsamen eigentlichen Berührpunkt im doppelt zu zählenden Büschelgrundpunkte besitzen. Eine beliebige zu dieser Tangente parallele Gerade schneidet einen beliebigen dieser Kreise in zwei Punkten, deren Abstände von jener isotropen Geraden, die durch den eigentlichen Büschelgrundpunkte festgelegt ist, gleich sind.*

Der Untertyp VI_{16}

(A, t_1) bzw. (C, t_2) seien zwei *Linienelmente* mit den *uneigentlichen* Punkten $A \neq F$, $C \neq F$ und den *eigentlichen* Geraden t_1 bzw. t_2.

Die regulären KS-e sind dann *homothetische Hyperbeln* 1. und 2. Art mit den Geraden t_1 und t_2 als *gemeinsamen Asymptoten*. Der Schnittpunkt $K = t_1 \cap t_2$ ist der gemeinsame Mittelpunkt aller KS-e.

In üblicher Weise erhält man als *Normalform* dieses KS-Büschels in *projektiven* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv x_0^2 + \nu x_2(x_2 - cx_1) = 0 \tag{2.44}$$

bzw. in *affinen* Koordinaten

$$\mathcal{F} \equiv 1 + \nu(y^2 - cxy) = 0. \tag{2.45}$$

Die *isotrope Brennpunktskurve* $k_f^3 = ggk_f^1$ zerfällt in die doppelt zählende Gerade g und in die Gerade

$$k_f^1 \dots y - 0,5cx = 0. \tag{2.46}$$

Die Brennpunkte B_ν auf dieser Geraden besitzen die Koordinaten $B_\nu\left(\pm\frac{2}{c\sqrt{\nu}}, \pm\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$ mit ν als Büschelparameter. Man erhält für $\nu > 0$ Hyperbeln 1. Art und für $\nu < 0$ Hyperbeln 2. Art. Die doppelt zählende Gerade g, die als spezielle Hyperbel fungiert ergibt sich für $\nu = 0$.

Satz 17. *Ein KS-Büschel des Untertyps* VI_{16} *ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine Invariante* $\{c\}$ *eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus konzentrischen, homothetischen Hyperbeln* 1. *und* 2. *Art. Beide Tangenten* t_1 *und* t_2 *sind die gemeinsamen Asymptoten aller Hyperbeln. Ihre Brennpunkte liegen auf einer Geraden durch den Mittelpunkt* $K = t_1 \cap t_2$, *die den isotropen Winkel dieser Geraden halbiert.*

Der Untetyp VI_{17}

Der *uneigentliche* Grundpunkt A des Untertyps VI_{16} sei der *absolute* Punkt $A = F$. Dies ist ein spezieller Fall der Untertype VI_9 und VI_{16}. Da alle Hyperbeln dieses KS-Büschels eine gemeinsame *isotrope Asymptote* besitzen, sind sie durchwegs spezielle Hyperbeln mit noch einer gemeinsamen Asymptote und dem gemeinsamen Mittelpunkt im Schnittpunkt K dieser Asymptoten.

Durch geeignete *isotrope Bewegungen* kann man erreichen, daß die Asymptote t_1 in die y-Achse und die Asymptote t_2 in die x-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems fällt. Die Punkte A und C werden durch $A(0:0:1)$, $C(0:1:0)$ und die Geraden g, t_1 und t_2 durch $g \dots x_0 = 0$, $t_1 \dots x_1 = 0$, $t_2 \dots x_2 = 0$ beschrieben. Die *Normalform* des Büschels VI_{17} lautet dann in projektiven Koordinaten:

$$\mathcal{F} \equiv x_0^2 + \nu x_1 x_2 = 0 \tag{2.47}$$

bzw. in *affinen* Kordinaten

$$\mathcal{F} \equiv 1 + \nu xy = 0. \tag{2.48}$$

Die isotrope *Brennpunktskurve*

$$k_f^3 \dots x_0^2 x_1 = 0 \tag{2.49}$$

gehört den singulären KS-en (g, g) und (t_1, t_2) an, da alle spezielle Hyperbeln den gemeinsamen Brennpunkt im absoluten Punkt $A = F$ besitzen.

Satz 18. *Ein Berührbüschel des Untertyps* VI_{17} *ist bis auf isotrope Bewegungen invariantenfrei bestimmt. Die regulären KS-e dieses Büschels sind homothetische, konzentrische, spezielle Hyperbeln.*

Literatur

[1] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume I, Bibliographisches Institut Mannheim, 1976.

[2] CESAREC, R.: Analitička geometrija u ravnini, Školska knjiga, Zagreb, 1957.

[3] HEFFTER, L. und KOEHLER, C.: Lehrbuch der analytischen Geometrie I, Teubner–Verlag, Leipzig–Berlin, 1905.

[4] MAKAROVA, H.M.: Ebenenkurven zweiter Ordnung in der parabolischen Geometrie ≪ Problemen der differentialen und nichteuklidischen Geometrie ≫ (russisch), Utschenie Zapiski MGPI im Lenina (1963), 222–251.

[5] NIČE, V.: Uvod u sintetičku geometriju, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[6] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg–Verlag, Braunschweig–Wiesbaden, 1987.

[7] SACHS, H.: Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I, *Sitzber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **196** (1987), 337–375.

[8 SACHS, H.: Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene II, *Sitzber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* (In Vorbereitung).

[9] ŠČURIĆ–ČUDOVAN, V.: Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I, *Rad JAZU* **450** (1990), 41–51.

[10] ŠČURIĆ–ČUDOVAN, V. und SACHS, H.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene I, *Rad HAZU* **470** (1995), 119–137.

[11] ŠČURIĆ–ČUDOVAN, V. und SACHS, H.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene II, *Rad HAZU* (im Druck).

[12] ŠČURIĆ–ČUDOVAN, V.: Eine Kennzeichnung der speziellen Hyperbel der isotropen Ebene, *Sitzber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **201** (1992), 111–115

[13] STRUBECKER, K.: Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene, *Archiv d. Math.* **3** (1952), 145–153.

[14] STRUBECKER, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene, *Math-Naturwiss. Unterricht* **15** (1962), 297–306, 343–351, 385–394.

[15] STRUBECKER, K.: Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf Ebene Ausgleichsprobleme, *Sitzber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **192** (1983), 497–559.

[16] SZIROVICZA, V.: Die Berührkegelschnittbüschel der isotropen Ebene mit konjugiert-komplexen Grundpunkten, *Rad HAZU* **470** (1995), 13–34.