HRVATSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VLASTA ŠĆURIĆ-ČUDOVAN

WEITERE UNTERSUCHUNGEN IN DER GESAMTHEIT (MF^2)
II. TEIL. KOMPLEX (VN)

Poseban otisak iz.

Rada 456 — Matematičke znanosti,
svezak 10

ZAGREB 1991

Rad Hrvatske akad. znan. umj. mat. [456] **10** (1991), 39—57

WEITERE UNTERSUCHUNGEN IN DER GESAMTHEIT (MF^2), II. TEIL KOMPLEX (VN)

Vlasta Ščurić-Čudovan

Abstract. The paper investigates the structures constituted by the rays of the *Niče*'s oriented complex and the points associated to those rays, assuming that these rays are associated to the points of two straight lines and resulting from some partition of a quadrics bundle into a one-parameter family (MF^2) of pencils (F^2) of quadrics.

Einleitung. Diese Arbeit ist eine Fortsetzung meiner gleichnamigen Arbeit, I Teil [21]. Die Untersuchungen werden im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum P^3 durchgeführt.

Ein Bündel $/F^2$ von Quadriken ist bekanntlich durch drei nicht in einem Büschel liegende Quadriken bestimmt und es besteht aus ∞^2 Quadriken, die ebenfalls ∞^2 Flächenbüschel bilden. Jede Quadrik befindet sich in ∞^1 dieser Flächenbüschel. Durch das Bündel $/F^2$ ist auch ein Bündel $(F^2$ der Polräume dieser Flächen bestimmt. Im Bündel $/F^2$ gibt es ∞^1 Kegelflächen mit den Spitzen auf einer Kurve k^6 6. Ordnung. Die einem beliebigen Punkt $M \in k^6$ konjugiert zugeordneten Punkte bezüglich des Bündels $(F^2$ bilden eine Gerade m, die eine Trisekante der Kurve k^6 ist [2], [4], [11], [19], [20].

Der erwähnte Punkt $M \in k^6$ ist die Spitze einer Kegelfläche $M^2 \subset /F^2$. Eine beliebige Fläche des Bündels $/F^2$ bestimmt mit M^2 ein Flächenbüschel $/F^2/$. Alle solchen ∞^1 Büschel $/F^2/$ bilden eine Menge, die als *Gesamtheit* $/MF^2/$ Bezeichnet wird.

Der Punkt $M \in k^6$ ist als Spitze der gemeinsamen Kegelfläche M^2 aller Büschel $/F^2/ \subset /MF^2/$ der gemeinsame Eckpunkt aller ∞^1 Polartetraeder der Polarraumbüschel $(F^2) \subset (MF^2)$. Je drei übrige Eckpunkte eines jeden dieser Tetraeder liegen in je einer Ebene des Büschels $[m]$. Da die Ebenen dieses Büschels $[m]$ und die Büschel $/F^2/ \subset /MF^2/$ bijektiv sind, erhält man dadurch eine einparametrige Familie $/MF^2/$ dieser Büschel $/F^2/$ [19], [21].

Durch jedes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ sind bekanntlich vier Komplexe bestimmt u. zw.: der *Reye*-sche tetraedrale Komplex 2. Grades oder der Komplex (TK) [3], [8], [9], [11], [16], [17], [19], [21], der *Majcen*sche Komplex 3. Grades oder der Komplex (MK) [1], [5], [8], [9], [12], [15], [17], [19], [21], der orientierte *Niče*-sche Komplex 8. Grades oder der Komplex (VN) [7], [10], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [20] und der Normalenkomplex 8. Grades [6].

In dieser Arbeit wird unser Augenmerk auf die Untersuchungen jener Gebilde gerichtet, die durch die Strahlen des Komplexes (VN) gebildet werden.

Diese Strahlen werden durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und auf gewisse Weisen den Punkten einer beliebigen Geraden g, bzw. den Punkten einer Geraden g_k zugeordnet. Dabei ist die Gerade g_k konjugiert zur Geraden g bezüglich der erwähnten Kegelfläche M^2 und enthält den Punkt $M \in k^6$. Genauso wie im [19], [20], [21] wird unser Interesse, außer auf allgemeine Resultate *immmer* darauf gerichtet sein, für einen jeden Strahl des Komplexes (VN) festzustellen, welchem Punkt er zugeordnet ist und durch welches der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ er bestimmt wird. Dadurch wird auch die gewünschte feinere Struktur der Gebilde erreicht.

Die den Punkten der beliebigen Geraden g konjugiert zugeordneten Punkte bezüglich des Bündels $(F^2$ bilden bekanntlich eine Raumkurve g^3 3. Ordnung [11]. Wird indessen eine den Punkt $M \in k^6$ enthaltende Gerade g_k betrachtet, dann entartet solche Raumkurve 3. Ordnung in einen Kegelschnitt g_k^2 in der Ebene (M, g) und in die Gerade m, die genau dem Punkt M konjugiert zugeordnet ist [19], [21].

C. DER ORIENTIERTE NIČESCHE STRAHLKOMPLEX ODER KOMPLEX (VN)

Ein dem beliebigen Punkt T zugeordneter und durch ein Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ bestimmter Strahl t des Komplexes (TK) sei durch $t = \varphi(T)/(F^2) \subset \subset (MF^2)$ bezeichnet [19], [21].

Eine von dem Punkt T an den Strahl t gelegte Senkrechte ist ein, durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmter Strahl o des Komplexes (VN). Der Punkt T wird der Punkt I des Strahles o genannt und sein Schnittpunkt mit dem Strahl t als Punkt Z bezeichnet. Die Punkte I und Z sind die Berührpunkte des Strahles o mit zwei Flächen dieses Büschels $/F^2/$. Ein beliebiger Raumpunkt T ist der Punkt I für einen und der Punkt Z jener drei Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte I auf dem Strahl t liegen [13].

Durch $o = \psi(T)/(F^2) \subset (MF^2)$ wird kürzer bezeichnet, daß ein dem Punkt T durch das Büschel (F^2) zugeordneter Strahl o des Komplexes (VN) seinen Punkt I im Punkt T hat.

In dieser Arbeit werden jene Strahlen des Komplexes (VN) betrachtet, die durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte I bzw. Punkte Z längs einer Geraden g bzw. g_k liegen. Dabei ist die Gerade g eine beliebige und g_k eine auf beschriebene Weise ihr zugeordnete Gerade. Von der Singularität des Punktes $M \in g_k$ wird, wie in [21], abgesehen, da er als Singularpunkt $M \in k^6$ in [19] und [20] betrachtet wurde.

a) **Die Strahlen des Komplexes (VN) mit den Punkten I auf der Geraden g**

Die Strahlen $o = \psi(T)/(F^2)\ \forall T \in g$ bilden bekanntlich eine Regelfläche 6. Grades. Die Punkte Z dieser Strahlen bestimmen eine Kurve z^5 5. Ordnung auf jenem Hyperboloide, dem die Erzeugenden eines Regulus die Strahlen $t = \varphi(T)/(F^2)\ \forall T \in g$ sind [13].

Die Strahlen $t = \varphi(T)/\forall(F^2) \subset (MF^2)\ \forall T \in g$ sind die Erzeugenden je eines Regulus der Hyperboloide H^2 eines Büschels $/H^2/$. Die Grundkurve 4. Ordnung dieses Büschels zerfällt in die erwähnte Kurve g^3 und in die Gerade g_k. Die beiden Schnittpunkte T_{k1} und T_{k2} der Geraden g_k und der Kurve g^3 sind die Spitzen der beiden singulären Kegelflächen des Büschels $/H^2/$ ([21] Satz A 3).

Die Strahlen $o = \psi(T)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ $\forall T \in g$ bilden demnach eine Gesamtheit von ∞^1 Flächen 6. Grades und bestimmen eine Kongruenz (K, I_g), während die kontinuierlich verbundenen Kurven z^5 auf diesen Flächen und den Hyperboloiden des Büschels $/H^2/$, eine Fläche (Z, I_g) bestimmen.

Das Problem derselben Kongruenzstrahlen und derselben Fläche (Z, I_g) könnte man noch von einem anderen Standpunkt aus betrachten.

In [21] Satz A 4 wurde gezeigt: Die Strahlen

$$t = \varphi(T)/\forall (F^2) \subset (MF^2) \text{ für festen } T \in g$$

bilden ein Strahlbüschel (T_k) $(T_k \in g^3)$ in der Ebene (T_k, g_k). Dabei sind die Punkte T und T_k konjugiert zugeordnet bezüglich des Bündels $(F^2$. Die von dem Punkt T an die Strahlen des Büschels (T_k) legbaren Senkrechten o, schneiden diese Strahlen in Punkten eines Kreises, der ebenfalls den Büschelscheitelpunkt T_k enthält. Dieser Kreis ist, der Definition nach, eine Menge der Punkte Z von Strahlen

$$o = \psi(T)/\forall (F^2) \subset (MF^2) \text{ für festen } T \in g.$$

Ändert der Punkt $T \in g$ seine Stellung, ändert sich der ihm zugeordnete Punkt $T_k \in g^3$ und die Ebene (T_k, g_k) des Strahlbüschels (T_k), die zu dem Ebenenbüschel $[g_k]$ gehört. Die Punkte der Reihe (g) und die Ebenen des Büschels $[g_k]$ sind daher bijektiv.

Werden alle Punkte $T \in g$ als die Punkte I der Strahlen des Komplexes (VN) in Betracht gezogen, liegt in jeder Ebene des Büschels $[g_k]$ je ein Büschel (T_k) $(T_k \in g^3)$ von erwähnten Strahlen des Komplexes (TK) und je ein Kreis der Punkte Z von Strahlen des Komplexes (VN). Alle diese nichtabbrechend verbundenen Kreise in den Ebenen des Büschels $[g_k]$ bilden die besagte Fläche (Z, I_g) auf der die Kurve g^3 als eine einfache Kurve liegt.

Die Gerade g_k liegt ebenfalls auf der Fläche (Z, I_g). Um festzustellen ob diese Gerade auf der Fläche (Z, I_g) eine einfache oder eine mehrfache Gerade ist wird das Entstehen dieser Fläche noch von einem Standpunkt aus betrachtet.

Ein beliebiger Punkt $G_k \in g_k$ wird mit allen Punkten der Kurve g^3 verbunden. Auf Grund der Untersuchungen in [21] sind die Punkte der Geraden g, dann die Erzeugenden der Kegelfläche (G_k, g^3) und damit die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bijektiv zugeordnet. Einem beliebigen Punkt $T \in g$ ist nämlich, genau ein Punkt $T_k \in g^3$ bezüglich $(F^2$ konjugiert zugeordnet und die Verbindungsgerade T_kG_k ist als ein Strahl des Komplexes (TK) eine Erzeugende genau eines Hyperboloides $H^2 \subset /H^2/$, das durch genau ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt wird. Die von den Punkten $T \in g$ an die zugeordneten Erzeugenden der Kegelfläche (G_k, g^3) gelegten Senkrechten schneiden diese in Punkten Z jener Strahlen des Komplexes (VN), die die Punkte I längs der Geraden g haben.

Alle auf diese Weise erhaltenen nichtabbrechend verbundenen Punkte Z bilden auf der Kegelfläche (G_k, g^3) eine Kurve z^x, die im Punkt G_k einen einfachen bzw. einen mehrfachen Punkt haben kann. Da der Punkt $G_k \in g_k$ ein beliebiger ist, wird seine Einfach- bzw. Mehrfachheit auch die Einfach- bzw. Mehrfachheit der Geraden g_k auf der Fläche (Z, I_g) bestimmen.

Betrachtet sei eine der Kegelflächen (G_k, g^3) 3. Grades und auf ihr die Kurve z^x der unbekannten Ordnung x. Die Fernebene schneidet die Erzeugenden dieser Kegelfläche in einer Kurve 3. Ordnung mit dem zweifachen Punkt im Fernpunkt G_{ku} der Geraden g_k, da sie die zweifache Erzeugende $G_k T_{k1}$ und $G_k T_{k2}$ dieser Kegelfläche ist. Die den Punkten dieser Fernkurve, bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p, hüllen eine Kurve 3. Klasse mit einer zweifachen Tangente p_n ein. Die Ebenen, die durch die Punkte der Geraden g und durch die ihnen bijektiv zugeordneten Tangenten p der Kurve 3. Klasse aufgespannt sind, bilden auf Grund des bekannten Chaslesschen Korrespondenzprinzips eine Hülltorse 4. Klasse. $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4)$. Zwei Ebenen dieser Torse sind zueinander paralelle Ebenen (T_i, p_n) $T_i \in g$ $(i = 1, 2)$. Die Ebenen der Hülltorse 4. Klasse und die ihnen bijektiv zugeordneten Erzeugenden der Kegelfläche (G_k, g^3) 3. Grades schneiden sich in den Punkten einer Kurve 7. Ordnung. $(1 \cdot 3 + + 1 \cdot 4 = 7)$. Diese Kurve ist die gesuchte Kurve z^x und damit ist ihre Ordnung $x = 7$ bestimmt.

Alle auf analoge Weise erhaltenen Kurven z^7 auf allen Kegelflächen (G_k, g^3) für $\forall G_k \in g_k$ erzeugen die besagte Fläche (Z, I_g). Die Gerade g_k ist gemeinsame zweifache Erzeugende aller dieser Kegelflächen (G_k, g^3), da sie als zweifacher Strahl des Komplexes (TK) durch

$$g_k = \varphi(T_i)/(F_i^2) \subset (MF^2), \qquad T_i \in g^2 \wedge T_i \in g \qquad (i = 1, 2)$$

definiert wurde. /[21] Satz A 2/.

Auf allen Kurven z^7 befinden sich dieselbe zwei Punkte $G_{zi} \in g_k$ $(i = (1, 2)$ als die Punkte Z jener zwei Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte I in den Punkten $T_i \in g$ $(i = 1, 2)$ sind. Diese Strahlen sind durch die erwähnten Büschel $(F_i^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und liegen in den paralellen Ebenen (T_i, p_n) $(i = 1, 2)$. Ersichtlich ist: die Punkte $G_{zi} \in g_k$ sind keine Singulärpunkte dieser Geraden g_k.

Liegt die Spitze G_k der Kegelfläche (G_k, g^3) im Punkt $T_{ki} \in g_k \wedge T_{ki} \in g^3$ $(i = 1, 2)$ entsteht kein wesentlich neuer Fall. Die Kegelfläche (G_k, g^3) zerfällt in die Singular-Kegelfläche 2. Grades des Flächenbüschels $/H^2/$ und in ein Strahlbüschel (T_{ki}) der Strahlen

$$t = \varphi(T_i)/\forall (F^2) \subset (MF^2) \qquad T_i \in g \qquad (i = 1, 2).$$

Diese Büschel (T_i) liegen in verschiedenen Ebenen des Büschels $[g_k]$. /[21] Sätze A 1.—A 6./.

Die Z-Punktskurve z^7 zerfällt im Fall dieser zerfallenen Kegelfläche (T_{ki}, g^3) $(i = 1, 2)$ in eine Kurve z^5 5. Ordnung auf der erwähnten Kegelfläche 2. Grades und in einen Kreis auf den Strahlen des Büschels (T_{ki}). Die Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte Z die Kurve z^5 bilden, haben die Punkte I längs der Geraden g und alle sind durch das Büschel $(F_i^2) \subset (MF^2)$ $(i = 1, 2)$ bestimmt. Die andere Menge wird von den Strahlen $o = \varphi(T_i)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ $T_i \in g$ $(i = 1, 2)$ gebildet und ihre Punkte Z erzeugen den Kreis k_i^2 $(i = 1, 2)$. Jener dieser beiden Kreise, der auf den Strahlen (TK) des Büschels (T_{k1}) liegt, enthält den Büschelscheitelpunkt $T_{k1} \in g_k$ und den Punkt $G_{z1} \in g_k$, während die Kurve z^5 5. Ordnung an der Kegelfläche 2. Grades, ebenfalls mit dem Scheitelpunkt in T_{k1}, nebst den Punkt T_{k1} noch den Punkt $G_{z2} \in g_k$ enthält. Ändern sich die Indizes 1 und 2 haben wir den zweiten Kreis in Betracht gezogen. Auch die Punkte $T_{ki} \in g_k$ $(i = 1, 2)$ sind daher keine Singulärpunkte der Geraden g_k.

Ein Singularpunkt der Geraden g_k könnte nur noch der Punkt M sein, für den aber vorausgesetzt wurde: in dieser Arbeit wird von der Singularität des Punktes $M \in g_k$ abgesehen. Das Problem des Punktes $M \in k^6$ als eines singulären Raumpunktes kann in [19] und [20] nachgelesen werden.

Die Vielfältigkeit eines beliebigen Punktes $G_k \in g_k$ und damit der Geraden g_k an der Fläche (Z, I_g) wird mittels einer den Punkt G_k enthaltender Ebene bestimmt. Diese Ebene schneidet die Kegelfläche (G_k, g^3) dritten Grades außer in der Spitze G_k in noch drei Erzeugenden und die Kurve z^7 7. Ordnung in sieben Punkten. Da an jeder dieser drei Erzeugenden, die als Strahlen des Komplexes (TK) den Punkten der Geraden g zugeordnet sind, je ein ihr zugeordneter Punkt Z liegt, können die übrigen vier Schnittpunkte mit der Kurve z^7 nur in den Punkt G_k fallen. Der beliebige Punkt $G_k \in g_k$ und die Gerade g_k sind infolgedessen auf der Fläche (Z, I_g) vierfach.

Diese Tatsache kann auch auf folgende Weise nachgeweisen werden. Jene vier Strahlen der Kongruenz (K, I_g), die den Punkt Z im beliebigen Punkt $G_k \in \in g_k$ haben, werden zum Geradenbüschel (G_k) der Ebene (G_k, g) gehören. Die Ferngerade q_u dieser Ebene wird von den uneigentlichen Punkten der Büschelgeraden gebildet. Die den Punkten der Geraden q_u zugeordneten Polaren p_1 bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden ein uneigentliches Strahlbüschel (P_1). Die Punkte der Geraden g und die Erzeugenden der Kegelfläche (G_k, g^3) sind bekanntlich zueinander bijektiv. Die uneigentlichen Punkte der Erzeugenden dieser Kegelfläche bilden eine Kurve 3. Ordnung und die diesen Punkten zugeordneten Polaren p_2 bezüglich des absoluten Kegelschnittes hüllen eine Kurve 3. Klasse ein. Durch jeden beliebigen Punkt der Geraden q_u führen daher drei Polaren dieser Klassenkurve. Somit gibt es auf der Geraden q_u zwei Punktreihen. Während einem jeden Punkt $Q \in g_u$ der ersten Reihe genau ein Punkt Q_1 als der Schnittpunkt der Geraden q_u mit der zugehörigen Polaren p_1 zugeordnet ist, sind jedem Punkt der zweiten Reihe, den drei Polaren p_2 enthalten, drei Punkte der ersten Reihe zugeordnet. Infolgedessen und des Chaslesschen Korrespondenzprinzips geschieht es viermal $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4)$, daß die zugeordneten Punkte dieser zwei Punktreihen auf der Geraden q_u zusammenfallen. Die Verbindungsgeraden dieser vier uneigentlichen Punkte von q_u mit dem Punkt $G_k \in g_k$ sind die gesuchten durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (VN), mit den Punkten I auf der Geraden q_u und dem gemeinsamen Punkt Z im beliebigen Punkt $G_k \in g_k$.

Der Punkt $M \in g_k$ bildet, als ein regulärer Punkt dieser Geraden, keine Ausnahme. Die Punkte I jener Strahlen des Komplexes (VN), die den Punkt Z im Punkt $M \in k^6$ haben und die durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind, bilden eine Fläche I_M 4. Ordnung. ([20] Satz D 7). Die Gerade g durchsetzt diese Fläche I_M in vier Punkten, die die Punkte I jener Strahlen des Komplexes (VN) sind, deren Punkte Z sich im Punkt M befinden.

Die Fläche (Z, I_g) ist daher eine solche Fläche auf der die vierfache Gerade g_k eingebettet ist und jede Ebene des Ebenenbüschels $[g_k]$ schneidet sie außer in der vierfachen Geraden g_k in noch einem Kreis. Eine solche Fläche könnte nur von 6. Ordnung sein. Auf ihr muß der absolute Kegelschnitt als eine einfache Kurve liegen, da jede Ebene des Büschels $[g_k]$ zwei absolute Kreispunkte enthält. Ein Bestandteil der Fläche (Z, I_g) ist überdies die Kurve g^3 3. Ordnung, als eine einfache Kurve.

Es ist nicht uninteressant die Ordnung 6 der Fläche (Z, I_g) durch die Ordnung x ihrer Schnittkurve z^x mit einer *beliebigen Ebene* R einzusehen. Diese Ebene schneidet ebenfalls die Hyperboloide $H^2 \subset /H^2/$ in einem Kurvenbüschel $/h^2/$. ([21] Satz A 3). Drei Grundpunkte dieses Büschels $/h^2/$ liegen in den Schnittpunkten mit der Kurve g^3 und der vierte Punkt liegt auf der Geraden g_k. Auf jedem dieser Hyperboloide der durch genau ein $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt ist, liegt eine Kurve z^5 5. Ordnung, die durch die Punkte Z von Strahlen

$$o = \psi(T)/(F^2) \subset (MF^2) \qquad \forall T \in g \qquad \text{bestimmt ist.}$$

Alle diese Kurven z^5 auf allen $H^2 \subset /H^2/$ bilden, wie schon bemerkt, die Fläche (Z, I_g).

Die Ordnung x der Schnittkurve z^x wird durch die Anzahl von Schnittpunkten dieser Kurve mit irgend-einem Kegelschnitt $h^2 \subset /h^2/$ in der Ebene R bestimmt. Auf dem ausgewählten Kegelschnitt h^2 befinden sich: seine fünf Schnittpunkte mit der betreffenden Kurve z^5, dann drei Schnittpunkte der Ebene R mit der Kurve g^3, da diese Kurve auf der Fläche (Z, I_g) eine einfache Kurve ist und der vierfache Punkt der Kurve z^x im Schnittpunkt mit der Geraden g_k. Der gewählte Kegelschnitt h^2 hat infolgedessen mit der Kurve z^x $12 (= 5 + 3 + 4)$ gemeinsame Punkte so daß die Ordnung x der Kurve z^x und dadurch die Ordnung der Fläche (Z, I_g) gleich sechs ist, wie behauptet.

Die sechs Durchstoßpunkte der Fläche (Z, I_g) mit der *Geraden* g werden auf folgende Weise betrachtet:

Die Punkte der Geraden g und die Ebenen des Büschels $[g_k]$ sind bekanntlich bijektiv. Die Punkte der Geraden g bilden eine Reihe n_1, während die Schnittpunkte mit den, diesen Punkten zugeordneten Ebenen des Büschels $[g_k]$ auf der Geraden g eine neue Reihe n_2 bestimmen. Da ebenfalls diese zwei Reihen bijektiv sind werden auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzipps zwei $(1 \cdot 1 + + 1 \cdot 1 = 2)$ Ebenen E_i $(i = 1, 2)$ des Büschels $[g_k]$ ihnen zugeordnete Punkte K_i $(i = 1, 2)$ der Geraden g enthalten.

Betrachtet sei eine der beiden diesen Ebenen z. B. E_1, die den Punkt $K_1 \in g$ enthält. In ihr liegt die Gerade g_k und ein Büschel (T_k) $T_k \in g^3$ von Strahlen $t = = \varphi(K_1)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ $K_1 \in g$. Die von dem Punkt K_1 an diese Büschelstrahlen legbaren Senkrechten sind die Strahlen $o = \psi(K_1)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$. Die Schnittpunkte von zugeordneten Strahlen der Büschel (T_k) und (K_1) bilden bekanntlich einen Kreis, bestehend aus den Punkten Z der Strahlen o. Ein Strahl k_1 des Büschels (T_k) enthält den Punkt $K_1 \in g$. Dieser Strahl ist durch ein Büschel $(F^2_{s1}) \subset (MF^2)$ bestimmt. Die von dem Punkt K_1 an den Strahl k_1 legbare Senkrechte ist ein Strahl $o_1 = \psi(K_1)/(F^2_{s1}) \subset (MF^2)$. Der Punkt Z dieses Strahles o_1 liegt daher im denselben Punkt K_1.

Außer diesem in der Ebene E_1 liegenden Strahl o_1 gibt es noch ein Büschel (K_1) jener Strahlen des Komplexes (VN), die auf den Strahl k_1 senkrecht gelegt sind und deren Punkte I und Z im Punkt K_1 zusammenfallen.

Ale Strahlen $o = \psi(K_1)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ $K_1 \in g$ bilden daher eine reduzible in zwei Strahlbüschel (K_1) zerfallene Kegelfläche. Die Ebene des einen Büschels (K_1) ist $E_1 \equiv (K_1, g_k)$. Die Punkte Z dieser Strahlen bilden den erwähnten Kreis und genau ein Strahl ist durch ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt. Die Ebene des anderen Büschels (K_1) steht senkrecht auf dem Strahl $k_1 \equiv T_k K_1$. Alle diese (VN)-Strahlen sind ebenfalls wie der Strahl k_1 des (TK)-Komplexes, durch dasselbe Büschel $(F^2_{s1}) \subset (MF^2)$ bestimmt. Die Punkte I und Z fallen bei diesen Strahlen in K_1 zusammen.

Analog kann die Ebene E_2, der Punkt $K_2 \in g$ und Büschel (F^2_{s2}) betrachtet werden.

Ein solcher Fall in dem die Strahlen des Komplexes (VN), die durch ein Büschel (F^2) bestimmt sind, ein Büschel (T) jener Strahlen bilden, deren Punkte I und Z im Büschelscheitelpunkt zusammenfallen, entsteht genau dann wenn dieser Scheitelpunkt T auf der Grundkurve k^4 des entsprechenden Büschels (F^2) liegt. [13] Diese (VN)-Komplexstrahlen sind die Senkrechten auf jener Tangente t der Grundkurve, die in T die Kurve k^4 berührt und als Strahl $t = \varphi(T)/(F^2)$ bestimmt wird.

Da im Fall der Gesamtheit (MF^2) die Kegelfläche M^2 die gemeinsame Fläche aller Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ist, liegen auf ihr die Grundkurven aller dieser Flächenbüschel $/F^2/$. Die beliebige Grade g durchsetzt im algebraischen Sinn diese Kegelfläche M^2 in zewi Punkten, die genau die Punkte K_i $(i = 1, 2)$ sein sollen. Die Geraden k_i werden die Tangenten der betreffenden Grundkurven k^4_i der Büschel (F^2_{si}) mit den Berührpunkten K_i $(i = 1, 2)$ sein.

Die Gerade g soll daher die Fläche (Z, I_g) 6. Ordnung außer in den Punkten K_i $(i = 1, 2)$ in noch vier Punkten Z_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ durchsetzen.

Auf der Geraden g werden mithin vier jener Punkte I_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ liegen, deren zugeordnete Strahlen t_j des Komplexes (TK) die Gerade g senkrecht in Punkten Z_j schneiden und vermutlich durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt werden. Die uneigentlichen Punkte dieser Strahlen t_j werden auf jener Polaren p_g liegen, die dem Fernpunkt T_u der Geraden g bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnet ist.

Die einem beliebigen Punkt $K \in g$ zugeordneten Strahlen $t = \varphi(K)/\forall (F^2) \subset$ $\subset (MF^2)$ bilden bekanntlich ein Strahlbüschel (K_k) $K_k \in g^3$ in der Ebene (K_k, g_k). Genau ein Strahl dieses Büschels (K_k) schneidet die Gerade g und genau ein Strahl schneidet die Gerade p_g. Fallen beide dieser Strahlne in einem Strahl t_j zusammen, dann wird er senkrecht die Gerade g schneiden. Dieser Schnittpunkt wird ein Punkt Z_j der Geraden g als einen Strahl des Komplexes (VN) mit dem Punkt I in einem der Punkte I_j.

Die Strahlen t_j des Komplexes (TK) werden unter den gemeinsamen Transversalen der Geraden g, g_k und p_g sein. Alle solchen Transversalen sind die Erzeugenden eines Regulus eines hyperbolischen Paraboloides, während die Geraden g, g_k und p_g dem anderen Regulus angehören.

Eine dieser Transversalen wird ein Strahl t_j genau dann sein, wenn sie noch die Kurve g^3 schneidet. Die Kurve g^3 durchsetzt das Paraboloid in sechs Punkten, deren zwei in Schnittpunkten T_{ki} $(i = 1, 2)$ von g_k und g^3 sind. [21] Die übrigen vier Schnittpunkte liegen auf jenen Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides, die als Strahlen t_j des Komplexes (TK) den vier bestimmten Punkten $I_j \in g$ $(j =$ $= (1, 2, 3, 4)$ zugeordnet und durch völlig bestimmte Flächenbüschel $(F^2) \subset$ $\subset (MF^2)$ verordnet sind. Zwei Stralhen t_j werden im allgemeinen nicht durch dasselbe Flächenbüschel bestimmt. Ein Strahl t_j ist nämlich durch jenes Flächenbüschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt, durch welches jener Hyperboloid H^2 bestimmt ist, dessen Erzeugende der Strahl t_j wird. Würden zwei unter vier Strahlen z. B. t_1 und t_2 durch dasselbe Büschel (F^2) bestimmt, müßten sie gemeinsame Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides und des betreffenden Hyperboloides H^2 darstellen was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Jede der Geraden t_j ($j = 1, 2, 3, 4$) schneidet die Gerade g in den Punkten Z_j senkrecht. Die Punkte $I_j \in g$ sind die Punkte I und die Punkte $Z_j \in g$ die Punkte Z jener vier Strahlen des Komplexes (VN), die mit der Geraden g zusammenfallen.

SATZ C 1. *Die beliebige Gerade g ist ein vierfacher Strahl des Komplexes (VN); der im Allgemeinen durch vier verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt ist.*

Die uneigentliche Ebene schneidet die Fläche (Z, I_g) 6. Ordnung in einer Kurve 6. Ordnung, die in den absoluten Kegelschnitt und in noch vier Geraden zerfällt.

Eine dieser Geraden, die mit z_u^1 bezeichnet wird, ist die Menge von Punkten Z jener uneigentlichen Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte I im uneigentlichen Punkt T_u der Geraden g sind. Die Strahlen $t = \varphi(T_u)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$ bilden ein Strahlbüschel (T_{ku}) $T_{ku} \in g^3$ in der Ebene (T_{ku}, g_k), wobei bekanntlich die Punkte T_u und T_{ku} bezüglich $(F^2$ konjugiert zugeordnet sind. Die den Fernpunkten der Büschelstrahlen (T_{ku}) zugeordneten Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes, bilden ein uneigentliches Strahlbüschel und seine Strahlen spannen mit dem Punkt T_u immer dieselbe uneigentliche Ebene. Diese schneidet die Strahlen des Büschels (T_{ku}) in ihren uneigentlichen Punkten, die als Punkte Z von Strahlen des Komplexes (VN), die Gerade z_u^1 bilden und die den Punkt I im Punkt T_u haben. Da z_u^1 die uneigentliche Gerade der Ebene (T_{ku}, g_k) ist, schneiden sich z_u^1 und g_k im uneigentlichen Punkt G_{ku} der Geraden g_k.

Die drei übrigen uneigentlichen Geraden der Fläche (Z, I_g) kann man folgendermaßen einsehen.

Die Kurve g^3 durchsetzt die uneigentliche Ebene in drei Punkten P_{kui} ($i = 1, 2, 3$), die zu drei Punkten $P_i \in g$ ($i = 1, 2, 3$) bezüglich $(F^2$ konjugiert zugeordnet sind. In jeder von drei Ebenen (P_{kui}, g_k) liegt je ein Büschel (P_{kui}) ($i = 1, 2, 3$) von zueinander paralellen Strahlen $t = \varphi(P_i)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$. Je einer dieser Büchelstrahlen $t \equiv (P_{kui}, G_{ku})$ ($i = 1, 2, 3$) enthält als ein uneigentlicher Strahl lauter uneigentliche Punkte. Die diesen Punkten, zugeordneten Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden je ein uneigengliches Strahlbüschel (P_{pi}) ($i = 1, 2, 3$). Die Ebenen, die durch den Punkt $P_i \in g$ und durch die Polaren p des zugeordneten Büschels (P_{pi}) aufgespannt sind, bilden ein Ebenenbüschel $[P_i, P_{pi}]$ ($i = 1, 2, 3$) und schneiden den Strahl (P_{kui}, G_{ku}) in jedem seiner Punkte. Dieser Strahl wird daher eine Menge von Punkten Z jener Strahlen (VN) sein, deren Punkte I im Punkt $P_i \in g$ sind. Jede der drei Geraden (P_{kui}, G_{ku}) ist eine uneigentliche Gerade der Fläche (Z, I_g).

Daraus werden noch einige weitere Eigenschaften der Fläche (Z, I_g) ersichtlich.

Eine beliebige Ebene des Büschels $[g_k]$ schneidet bekanntlich die Fläche (Z, I_g) außer in der vierfachen Geraden g_k in noch einem Kreis.

In jeder von drei Ebenen (P_{kui}, g_k) $P_{kui} \in g^3$ ($i = 1, 2, 3$) zerfällt ein solcher Kreis in die uneigentliche Gerade (P_{kui}, G_{ku}) und in noch eine eigentliche Gerade, die näher betrachtet werden soll.

Die besagten zueinander paralellen Strahlen des Büschels (P_{kui}) der Ebene (P_{kui}, g_k) haben alle den gemeinsamen uneigentlichen Punkt P_{kui} ($i = 1, 2, 3$). Diesem Punkt ist eine Polare p_i des Büschels (P_{pi}) bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnet. Die Verbindungsebene dieser Polaren p_i und des Punktes

$P_i \in g$ schneidet alle Strahlen des Büschels (P_{kui}) in Punkten Z von Strahlen $o = \psi(P_i)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$ $(i = 1, 2, 3)$. Der Z-Punktkreis in der Ebene (P_{kui}, g_k) zerfällt daher in zwei Geraden, die sich im Schnittpunkt der Geraden (P_{kui}, G_{ku}) und p_i ebenfalls schneiden.

Auf der Fläche (Z, I_g) sind auch die Kreispunkte eingebettet.

Entartet in einer Ebene des Büschels $[g_k]$ der bekannte Z-Punktkreis in zwei isotrope Geraden 1. Art, wird der reelle Schnittpunkt dieser Geraden ein Kreispunkt der Fläche (Z, I_g) sein. Dies geschieht genau dann, wenn die Verbindungsgerade TT_k, $T \in g$, $T_k \in g^3$ senkrecht an die Ebene (T_k, g_k) des Büschels $[g_k]$ gelegt wird, wobei die Punkte T und T_k bezüglich $(F^2$ konjugiert zugeordnet sind.

Die Anzahl der Kreispunkte der Fläche (Z, I_g) ist daher gleich der Anzahl der senkrechten Verbindungsgeraden TT_k auf die zugeordneten Ebenen (T_k, g_k). Alle Verbindungsgeraden der bijektiv zugeordneten Punktreihen (g) und (g^3) bilden auf Grund des Chaslesschen Prinzips eine Regelfläche B^4 4. Grades $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4)$. Die uneigentlichen Punkte dieser Fläche bilden eine Kurve 4. Ordnung und die, diesen Punkten bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p hüllen eine Kurve 4. Klasse ein. Die Fernebene schneidet die Ebenen des Büschels $[g_k]$ in einem uneigentlichen Strahlbüschel (G_{ku}) $G_{ku} \in g_k$. Diesen Punkt G_{ku} enthalten daher vier Polaren p, die mit vier Strahlen des Büschels (G_{ku}) übereinstimmen. Infolgedessen gibt es vier Erzeugenden der Fläche B^4, die senkrecht zu vier Ebenen des Büschels $[g_k]$ gelegt sind. In diesen vier Ebenen zerfällt der Kreis der Punkte Z in je zwei isotrope Geraden 1. Art und ihre reellen Schnittpunkte sind *vier Kreispunkte* $K_k \in g^3$ der Fläche (Z, I_g).

Auf der Fläche (Z, I_g) liegen außer der vierfachigen Spitze $M \in k^6 \wedge M \in g_k$ der Kegelfläche $M^2 \subset /F^2$ noch acht Spitzen von acht Kegelflächen des Bündels $/F^2$. Diese Spitzen sind acht Schnittpunkte der Kurven g^3 und k^6 ([21] Satz 1.). Zum Unterschied der in [19] und [20] betrachteten Geraden m, die eine Trisekante der Kurve k^6 ist, wird die beliebige Gerade g im allgemeinen keinen Punkt der Kurve k^6 enthalten. Die Gerade g durchsetzt inzwischen jene Regelfläche 8. Grades deren Erzeugenden die Trisekanten m_n der Kurve k^6 sind, in acht Punkten $T_n \in g$ $(n = 1, \ldots, 8)$. Die diesen Punkten konjugiert zugeordneten Punkte bezüglich des Bündels $(F^2$ sind acht in Satz 1 erwähnten Schnittpunkte der Kurven g^3 und k^6. Infolgedessen sind diese Schnittpunkte die Punkte Z jener Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte I in Punkten $T_n \in g$ liegen.

Alle Strahlen $o = \psi(T)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$ für $\forall T \in g$ bilden die besagte *Kongruenz* (K, I_g).

Die *Ordnung* der Kongruenz (K, I_g) ist durch die Anzahl jener ihrer Strahlen bestimmt, die einen beliebigen Raumpunkt S enthalten. Da ein jeder solcher Strahl die Gerade g schneiden muß, werden uns nur jene Strahlen interessieren, die in der Ebene (S, g) liegen. Die Punkte Z dieser Strahlen liegen auf der Schnittkurve k_z 6. Ordnung der Ebene (S, g) mit der Fläche (Z, I_g). Der vierfache Punkt dieser Kurve k_z liegt im Schnittpunkt G_{ks} mit der Geraden g_k. Die Ebene (S, g) schneidet ebenfalls das Ebenbüschel $[g_k]$ in einem Strahlbüschel (G_{ks}) $G_{ks} \in g_k$. Auf jedem dieser Strahlen befinden sich je zwei Punkte Z, die demselben Punkt der Geraden g als dem Punkt I zugeordnet sind und der erwähnte vierfache Punkt Z im Punkt $G_{ks} \in g_k$. Einem beliebigen Punkt Z der Kurve k_z ist dagegen genau ein Punkt I der Geraden g zugeordnet. Eine Ausnahme bildet nur der Punkt G_{ks}, der ein Punkt Z von jenen vier verschiedenen Strahlen des Komplexes (VN) ist, deren Punkte I auf der Geraden g liegen. Da im allgemeinen der Punkt S als ein beliebiger Punkt der Ebene (S, g) keinen dieser vier Strahlen enthalten wird, werden auch diese Strahlen bei Bestimmung der Ordnung der Kongruenz (K, I_g) keine Rolle spielen. Unter den Punkten der Geraden g und den Punkten der Kurve k^6 6. Ordnung besteht daher eine $(2 - 1)$-deutige Zuordnung. Auf Grund des Chaslesschen Prinzips folgt: Die Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punkte hüllen eine Kurve 8. Klasse ein $(2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 8)$. Den beliebigen Punkt S enthalten somit acht Strahlen der Kongruenz (K, I_g) und sie ist 8. Ordnung.

Die *Klasse* der Kongruenz (K, I_g) ist durch die Anzahl jener Strahlen dieser Kongruenz bestimmt, die in einer beliebigen Ebene S liegen. Diese Ebene S schneidet die Gerade g in einem Punkt T_s. Uns werden nur jene Kongruenzstrahlen interessieren, die diesen Punkt $T_s \in g$ enthalten. Alle Strahlen $o = \psi(T_s)/\forall (F^2) \subset \subset (MF^2)$, $T_s \in g$ bilden bekanntlich eine Kegelfläche 2. Grades und die Punkte Z dieser Strahlen bilden einen Kreis. Die Ebene S enthält deshalb zwei Kegelerzeugenden, die der Kongruenz (K, I_g) zugehören. Dadurch ist die Klasse zwei dieser Kongruenz bestimmt.

SATZ C 2. *Die Strahlen des Komplexes (VN), die durch die Büschelreihe $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte I auf der beliebigen Geraden g liegen, bilden eine Kongruenz (K, I_g) 8. Ordnung und 2. Klasse. Die Gerade g ist ein vierfacher Strahl dieser Kongruenz. Die Punkte Z dieser Strahlen bilden eine sphärische Fläche (Z, I_g) 6. Ordnung. Diese Fläche bilden:*

a) ∞^1 Kreise, die in den Ebenen des Ebenenbüschels $[g_k]$ liegen, wobei jeder Punkt der Geraden g_k als Punkt Z vierfach ist;

b) ∞^1 Kurven z^5 5. Ordnung auf den Hyperboloiden H^2 des Büschels $/H^2/$; [13], [21].

c) ∞^1 Kurven z^7 7. Ordnung auf den Kegelflächen (G_k, g^3) $G_k \in g_k$.

Dabei sind die Punkte desselben Kreises, der in einer Ebene des Büschels $[g_k]$ liegt, durch a l l e $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und e i n e m Punkt I der Geraden g zugeordnet; die Punkte einer Kurve z^5 5. Ordnung sind durch e i n Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und der P u n k t r e i h e (g) zugeordnet, während k e i n e zwei Punkte einer Kurve z^7 7. Ordnung durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und demselben Punkt $T \in g$ zugeordnet sind. Auf der Fläche (Z, I_g) liegt außer der einfachen Kurve g^3 3. Ordnung, die vierfache Gerade g_k als eine Menge von vierfachen Punkten Z, den Punkt $M \in g_k$ einschließend. Auf der Kurve $g^3 \subset (Z, I_g)$ liegen vier Kreispunkte dieser Fläche und die acht Schnittpunkte mit der Kernkurve k^6 des Bündels $(F^2$. Auf der Geraden g liegen zwei solche Punkte der Fläche (Z, I_g), die die Punkte Z jener Büschel von Strahlen (VN) sind, die in denselben Punkten Punkte I haben. Die uneigentliche Kurve von (Z, I_g) zerfällt in den absoluten Kegelschnitt und in vier, den uneigentlichen Punkt der Geraden g_k enthaltende Geraden.

Bemerkung. Es wäre sinnvoll einen Vergleich von den Eigenschaften der Fläche (Z, I_g) 6. Ordnung mit den Eigenschaften jener Fläche (Z, I_m) 3. Ordnung zu ziehen, die in [20] betrachtet wurde. Obwohl beide Flächen von den Punkten Z jener Strahlen des Komplexes (VN) gebildet werden, deren Punkte I auf einer Geraden liegen, haben sie wesentlich verschiedene Eigenschaften.

b) Die Gerade g_k als eine Menge der Punkte I von Strahlen des Komplexes (VN)

Die Gerade $g_k = \varphi(G)/\forall(F^2) \subset (MF^2)\ \forall G \in g_k^2$ ist ein ∞^1-deutiger Strahl des Komplexes (TK) [21]. Der Kegelschnitt g_k^2 liegt in der Ebene (M, g) und schneidet die Gerade m in einem Punkt. Die fünf Schnittpunkte der Ebene (M, g) mit der Kernkurve k^6 des Bündels $/F^2$, bestimmen g_k^2 vollkommen. Der übergebliebene sechste Schnittpunkt mit der Kurve k^6 ist der Punkt $M \in k^6$ [19].

Der Kegelschnitt g_k^2 wird außerdem als eine Menge jener Punkte betrachtet, die den Punkten der Geraden g_k bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiert zugeordnet sind. Die Kurve 3. Ordnung solcher konjugiert zugeordneten Punkte zerfällt im Fall der Geraden $g_k \ni M$ in den Kegelschnitt g_k^2 und in die Gerade m als eine Menge jener Punkte, die dem Punkt M zugeordnet werden.

Jede Gerade der Ebene (M, g) ist ein zweifacher Strahl des Komplexes (TK), der zu zwei Punkten der Geraden g_k zugeordnet ist und durch zwei verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt ist. Einer der Schnittpunkte eines Strahles (TK) mit der Kurve g_k^2 zeigt welchem Punkt der Geraden g_k dieser Strahl zugeordnet ist und der andere Schnittpunkt zeigt durch welches Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ er bestimmt ist u. zw. durch die Zuordnung der Punkte der Reihen (g_k) und (g_k^2) bezüglich des Bündels $(F^2$ bzw. durch den Schnittpunkt der Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ mit der Kurve g_k^2. [19], [21] Satz A 7.

Alle ein Büschel (G) $G \in g_k^2$ bildenden Strahlen des Komplexes (TK) in der Ebene (M, g) sind entweder als die, genau *einem* Punkt $G_k \in g_k$ bezüglich *aller* Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ zugeordneten, oder als die, *allen* Punkten der Geraden g_k zugeordneten und durch genau *ein* Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (TK) aufzufassen [21]. Satz A 8.

Ein beliebiger Punkt $G_k \in g_k$ sei ein Punkt I der Strahlen des Komplexes (VN). Die Strahlen $t_k = \varphi(G_k)/\forall(F^2) \subset (MF^2)$ bilden ein Büschel (G) $G \in g_k^2$ in der Ebene (M, g). Dabei sind die »zweiten« Schnittpunkte der Strahlen des Büschels (G) mit der Kurve g_k^2 und die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bijektiv zugeordnet. Die von dem Punkt G_k an die Strahlen (G) gelegten Senkrechten sind die Strahlen des Komplexes (VN). Sie schneiden die Strahlen (G) des Komplexes (TK) in den Punkten Z auf einem Kreis der ebenfalls den Punkt G enthalten muß.

Jedem Punkt $G_k \in g_k$ als dem Punkt I wird somit je ein Kreis der Punkte Z in der Ebene (M, g) zugeordnet. Es stellt sich die Frage nach der Vielfachheit der Punkte der Ebene (M, g) die als solche Punkte Z angesehen werden.

Um dieses Problem zu lösen, wird ein beliebiger Punkt S der Ebene (M, g), als ein Scheitelpunkt des Büschels (S) jener Strahlen des Komplexes (TK) betrachtet, die zu allen Punkten $G_k \in g_k$ zugeordnet sind und die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt werden. Jeder Strahl dieses Büschels wird bekanntlich ein zweifacher Strahl des Komplexes (TK) sein. [21] Satz A 7.

Die Fernebene schneidet die Strahlen des Büschels (S) in Punkten der uneigentlichen Geraden s_u dieser Ebene. Dabei ist jeder ihrer Punkte zweideutig. Die den Punkten der Geraden s_u zugeordneten Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes, bilden ein uneigentliches Büschel (P). Unter den Punkten der Geraden g_k und den Polaren des Büschels (P) besteht eine $(1 - 2)$-deutige Zuordnung, da jedem Punkt der Geraden g_k je ein Strahl des Komplexes (TK) als Strahl des Büschels (S) und dadurch je eine Polare p zugeordnet ist, während einer jeden

Polaren p auf beschriebene Weise zwei Punkte der Geraden g_k entsprechen. Die Ebenen, die durch die Punkte $G_k \in g_k$ und durch die ihnen zugeordneten Polaren p aufgespannt sind, bilden eine Hülltorse 3. Klasse (d. h. $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$). Je zwei Ebenen dieser Torse werden zueinander paralell. Jede Ebene der Hülltorse schneidet den ihr zugeordneten Strahl des Büschels (S) im Punkt Z eines Strahles des Komplexes (VN), dessen Punkt I im bestimmten Punkt der Geraden g_k liegt. Alle solche Punkte Z bilden demnach und auf Grund des *Chasles*schen Korrespondenzprinzips eine ebene Kurve z^4 4. Ordnung ($1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4$). Auf einem beliebigen Strahl $s \subset (S)$ liegen zwei dieser Punkte Z, die auf beschriebene Weise genau dem Strahl s zugeordnet sind, während die übrigen zwei Schnittpunkte mit der Kurve z^4 in S liegen. Die Kurve z^4 hat daher im Punkt S den zweifachen Punkt.

Da der Scheitelpunkt S ein beliebiger Punkt der Ebene (M, g) ist, wird jeder Punkt dieser Ebene, als der Punkt Z jener Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte I auf der Geraden g_k liegen und die durch $\forall\,(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind, zweifach sein.

In [20] wurde bewiesen, daß in ähnlichen Betrachtungen der Menge der Punkte Z jener Strahlen des Komplexes (VN), die die Punkte I auf der Geraden m_k haben und die durch $\forall\,(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind, jeder Punkt der Ebene (M, m) ebenfalls der Punkt Z von zwei Strahlen (VN) wird. Dieses Problem wurde aber auf andere Weise gelöst.

Alle jene Strahlen o des Komplexes (VN), deren Punkte I auf der Geraden g_k liegen und deren Punkte Z die zweifache Ebene (M, g) bilden, wobei $o = \psi\,(G_k)/\forall\,(F^2) \subset (MF^2)$ und $\forall G_k \in g_k$ sind, bilden eine Kongruenz (K, I_{gk}). Die Ordnung und Klasse von (K, I_{gk}) wird analog wie in [20] bestimmt. Es folgt:

SATZ C 3. *Jene Strahlen des Komplexes* (VN), *die durch alle Büschel* $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ *bestimmt sind und deren Punkte I längs der Geraden* g_k *liegen, wobei der Punkt* $M \in g_k$ *als ein regulärer Punkt dieser Geraden aufzufassen ist, bilden eine Kongruenz* (K, I_{gk}) *4. Ordnung. und 2 Klasse. Je vier dieser einen Raumpunkt enthaltenden bzw. je zwei in einr beliebigen Ebene liegenden Strahlen der Kongruenz* (K, I_{gk}) *sind durch verschiedene Büschel* $(F^2) \subset (MF^2)$ *bestimmt. Die Punkte Z aller dieser Strahlen bilden die zweifache Ebene* (M, g), *während die Gerade* g_k *als eine Menge von Punkten I dieser Kongruenzstrahlen eine* ∞^1*-deutige ist.*

c) Die Gerade g als eine Menge der Punkte Z von Strahlen des Komplexes (VN)

Ein beliebiger Raumpunkt T ist bekanntlich der Punkt Z jener drei Strahlen des Komplexes (VN), die durch ein Büschel (F^2) bestimmt sind und deren Punkte I auf dem Strahl $t = \varphi\,(T)/(F^2)$ liegen [13].

Die den Punkten der Geraden g zugeordneten Strahlen $t = \varphi\,(T)/(F^2) \subset \subset (MF^2)$ $\forall T \in g$ sind die Erzeugenden eines Regulus eines in *Ca*) erwähnten einschaligen Hyperboloides H^2. [21] *A a*). Auf jeder dieser Erzeugenden liegen je drei Punkte I von drei Strahlen des Komplexes (VN), deren zugeordnete Punkte Z sich in demselben Punkt $T \in g$ befinden. Alle solche auf einem Hyperboloide liegenden Punkte I bilden eine Raumkurve i^7 7. Ordnung [13].

Je eine solche Kurve i^7 liegt auf jedem der Hyperboloide $H^2 \subset /H^2/$, die durch alle $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind. Alle diese unabbrechend verbundenen Kurven i^7 bilden eine Fläche (I, Z_g), deren Ordnung und einige ihrer Eigenschaften bestimmt werden sollen.

Ein Bestandteil der Fläche (I, Z_g) wird bestimmt die Gerade g_k sein, Die einem beliebigen Punkt $G_k \in g_k$ zugeordneten Strahlen $t = \varphi(G_k)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ bilden den bekannten Strahlbüschel (G) $G \in g_k^2$ in der Ebene (M, g) und die von dem Punkt G_k an die Büschelstrahlen gelegten Senkrechten schneiden diese in den Punkten eines Kreises, den die Gerade g im algebraischen Sinn in zwei Punkten schneidet. Der beliebige Punkt $G_k \in g_k$ ist daher ein Punkt I von genau zwei jener Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte Z auf der Geraden g liegen. Diese beiden Strahlen (VN) werden durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt u. zw. durch jene, durch welche die zugeordneten Strahlen t des Komplexes (TK) bestimmt sind. [21] Satz A 7. Da der zweifache Punkt $G_k \in g_k$ ein beliebiger ist, wird ebenfalls die Gerade g_k auf der Fläche (I, Z_g) zweifach sein.

Die Kurve g^3 liegt auch auf der Fläche (I, Z_g) als eine einfache. Ein dem beliebigen Punkt $T_k \in g^3$ bezüglich $(F^2$ zugeordneter Punkt ist ein Punkt $T \in g$. Die Verbindungsgerade T_kT wird ein durch ein $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmter Strahl des Komplexes (VN) genau dann sein, wenn ihn ein durch dasselbe (F^2) bestimmter und dem Punkt T_k zugeordneter Strahl des Komplexes (TK) senkrecht schneidet.

Da die Strahlen $t = \varphi(T_k)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ für festen $T_k \in g^3$, ein Strahlbüschel (T) in jener Ebene durch den Punkt M bilden, die dem Punkt T_k bezüglich der Kegelfläche M^2 polarzugeordnet ist, wird genau ein Strahl dieses Büschels (T) auf die Gerade T_kT senkrecht gelegt. Der beliebige Punkt $T_k \in g^3$ wird daher der Punkt I genau eines Strahles (VN) sein, dessen Punkt Z auf der Geraden g liegt und die Kurve g^3 is eine einfache Kurve der Fläche (I, Z_g).

Die Ordnung der Fläche (I, Z_g) wird durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer *beliebiger Geraden* e bestimmt.

Ein Strahl o der Menge von Strahlen $o_e = \psi(E)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ für $\forall E \in e$ schneidet senkrecht, der Definition der Strahlen (VN) nach, den zugeordneten Strahl der Menge $t_e = \varphi(E)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ für $\forall E \in e$ in dem Punkt Z dieses Strahles o. Beide zugeordneten Strahlen (o, t) sind demselben Punkt $E \in e$ zugeordnet und durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt. Unter allen (o, t) Strahlenpaaren werden genau jene in Betracht gezogen, die sich auf der Geraden g schneiden, d. h. genau jene Strahlen o werden betont, deren Punkte Z sich auf der Geraden g befinden.

Um diese Strahlen o bestimmen zu können, werden die bekannten Arbeitsweisen angewendet.

Die Strahlen $t = \varphi(T)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ $\forall T \in g$ bilden die Erzeugenden je eines Regulus der Hyperboloide $H^2 \subset /H^2/$. Die Grundkurve dieses Hyperboloidenbüschels $/H^2/$ zerfällt in die Kurve g^3 und in die Gerade g_k. [21], Satz A 3. Die denselben Punkten $T \in g$ zugeordneten und bezüglich der Kegelfläche M^2, als einer gemeinsamen Fläche aller Büschel $/F^2/ \subset /MF^2/$ bestimmten Polarebenen, bilden das bekannte Ebenenbüschel $[g_k]$. Jede dieser Ebenen schneidet bekanntlich die Kurve g^3 außer in zwei gemeinsamen Punkten mit der Geraden g_k in noch je einem Punkt.

Die beliebige Gerade e durchsetzt jeden der Hyperboloide H^2 des Büschels $/H^2/$ in je zwei Punkten. Jeder Punkt $E \in e$ liegt aber genau auf einem Hyperboloid H^2 und in einer Ebene des Büschels $[g_k]$, da die beliebige Gerade e der Voraussetzung nach, keine gemeinsamen Punkte mit der Grundkurve $g^3 + g_k$ des Büschels $/H^2/$ haben kann. Ein dem beliebigen Punkt $E \in e$ zugeordneter Strahl des Komplexes (TK) soll durch dasselbe $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sein, durch den das Hyperbolid $H^2 \ni E$ bestimmt wurde und jenen Punkt T der Geraden g enthalten, der der Ebene (g_k, E) polarzugeordnet wird bezüglich der Kegelfläche M^2.

Die den Punkten der Geraden e konjugiertzugeordneten Punkte bezüglich $(F^2$ bilden ebenfalls eine Raumkurve e^3 3. Ordnung. Dabei sind die Punkte der Reihen (e) und (e^3), dann (e) und (g) und damit (g) und (e^3) bijektiv zugeordnet. Die Verbindungsgeraden der zugeordneten Punkte dieser Reihen (g) und (e^3) sind die Strahlen der Menge $t_e = \varphi(E)/\forall (F^2) \subset (MF^2)\ \forall E \in e$, wobei durch dasselbe Büschel (F^2) je zwei Strahlen t_e bestimmt werden. Auf Grund dessen und des Chaslesschen Korresponderzprinzips folgt: Alle solchen Strahlen t_e bilden eine Regelfläche E^4 4. Grades $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4)$, mit der einfachen Leitgeraden g.

Die Ordnung der Fläche (I, Z_g) kann infolgedessen unter Anwendung der üblichen Methoden bestimmt werden.

Die Fernebene schneidet die Fläche E^4 in einer Kurve 4. Ordnung. Die den Punkten dieser Kurve zugeordneten Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden eine Kurve 4. Klasse. Die Punkte der Reihe (e) und die Tangenten p dieser Klassenkurve sind bijektiv zugeordnet. Die Verbindungsebene dieser zugeordneten Elemente bilden eine Hülltorse 5. Klasse $(1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 5)$.

Die Ebene dieser Hülltorse schneiden die ihnen bijektiv zugeordneten Erzeugenden der Fläche E^4 4. Ordnung, auf Grund das *Chasles*schen Prinzips, in einer Kurve z^9 9. Ordnung $(1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 9)$. Diese Kurve wird von den Punkten Z jener Strahlen des Komplexes (VN) gebildet, die die Punkte I auf der Geraden e haben. Eine beliebige Ebene des Büschels $[g]$ schneidet diese Z-Punktskurve z^9 in 9 Punkten und die Fläche E^4, außer in der Leitgeraden g in noch drei Erzeugenden. Da auf jeder dieser Erzeugenden je ein diesem Strahl zugeordneter Punkt Z liegt, sollen die übrigen sechs Schnittpunkte mit der Kurve z^9, genau an der Geraden g liegen.

Die Gerade g enthält daher je sechs Punkte Z jener Strahlen des Komplexe- (VN), deren Punkt I auf einer beliebigen Geraden e liegen. Die Gerade e durchs setzt infolgedessen die Fläche (I, Z_g) in sechs Punkten, woraus die Ordnung 6 dieser Fläche bestimmen wird.

Die Fläche (I, Z_g) kann man noch von einem anderen Standpunkt aus betrachten. Die einem beliebigen Punkt $T_g \in g$ zugeordneten Strahlen $t_g = \varphi(T_g)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ bilden das bekannte Strahlbüschel (T_k), $T_k \in g^3$ in der Ebene (T_k, g_k) des Ebenenbüschels $[g_k]$. Keine zwei Strahlen des Büschels (T_k) sind durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt. Auf einem beliebigen dieser Büschelstrahlen liegen je drei Punkte I jener drei Strahlen (VN), deren gemeinsamer Punkt Z im Punkt $T_g \in g$ liegt und die durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind. Alle nichtabbrechend verbundenen Punkte I an allen Strahlen des Büschels (T_k) bilden eine Kurve i^x, die zusammen mit der zweifachen Geraden g_k die Schnittkurve der Ebene (T_k, g_k) mit der Fläche (I, Z_g) bestimmt. Da der Punkt $T_g \in g$ ein beliebiger ist, wird die Ordnung dieser Schnittkurve ebenfalls die Ordnung der Fläche (I, Z_g) bestimmen.

Die Ordnung x der Kurve i^x wird festgestellt durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden s der Ebene (T_k, g_k). Die Strahlen t_g des Büschels (T_k) schneiden die Gerade s. Damit sind die Punkte T_s der Reihe (s) und die Büschel (F^2) der Büschelreihe (MF^2) bijektiv zugeordnet. Die den Punkten $T_s \in s$ konjugiert zugeordneten Punkte bezüglich $(F^2$ bilden eine Raumkurve s^3 3. Ordnung und die Strahlen $t_s = \varphi(T_s)/\forall (F^2) \subset (MF^2)\ \forall T_s \in s$ eine Kegelfläche (T_g, s^3) 3. Grades, mit der Spitze $T_g \in g$.

Dem Schnittpunkt T_{sgk} der Geraden s und g_k wird bezüglich $(F^2$ ein Punkt $G_{sg} \in g^2$ zugeordnet, der ebenfalls ein Schnittpunkt der Kurve s^3 mit der Ebene (M, g) wird. Die dem Punkt $T_{sgk} \in s$ selbst zugeordneten und durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (TK) bilden ein Strahlbüschel (G_{sg}) in der Ebene (M, g). Der gemeinsame Bestandteil der Kegelfläche (T_g, s^3) und des Büschels (G_{sg}) ist die Verbindungsgerade (T_g, G_{sg}).

Die den Punkten der Geraden s zugeordneten, die Gerade g schneidenden und durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen des Komplexes (TK) bilden daher eine Regelfläche S^4 4. Grades, analog dem Fall mit der Fläche E^4, nur die Fläche S^4 zerfällt in die Kegelfläche (T_g, s^3) 3. Grades und in das Strahlbüschel (G_{sg}).

Die Z-Punktkurve der Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte I an der Geraden s und die Punkte Z an der Kegelfläche (T_g, s^3) bzw. am Strahlbüschel (G_{sg}) liegen, wird auf übliche Weise, aber getrennt betrachtet.

Die uneigentliche Kurve der Kegelfläche (T_g, s^3) ist 3. Ordnung und die diesen Punkten zugeordneten Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes hüllen eine Kurve 3. Klasse ein. Die bijektiv zugeordneten Punkte der Reihe (s) und die Polaren p spannen die Ebenen einer Hülltorse 4. Klasse auf. Die bijektiv zugeordneten Erzeugenden der Kegelfläche (T_g, s^3) und die Ebenen dieser Hülltorse 4. Klasse schneiden sich senkrecht in Punkten einer Kurve z^7 7. Ordnung $(3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7)$. Diese Kurve wird von den Punkten Z jener Strahlen des Komplexes (VN) gebildet, deren Punkte I auf der Geraden s liegen. Eine beliebige Ebene der Geraden g schneidet die Kegelfläche (T_g, s^3) in drei Erzeugenden und die Kurve z^7 in sieben Punkten. Da auf jeder von drei Erzeugenden als den Strahlen des Komplexes (TK) je einer dieser Punkte Z liegt, sollen in den Punkt $T_g \in g$ die übrigen vier Punkte Z fallen.

Die diesen vier Punkten $Z \in g$ zugeordneten vier Punkte $I \in s$ werden die Schnittpunkte der Geraden s mit der Kurve i^x darstellen und die Ordnung $x = 4$ dieser Kurve i^x festlegen.

Die von dem Punkt G_{sgk} an die Strahlen des Büschels (G_{sg}) gelegten Senkrechten schneiden bekanntlich diese in Punkten eines Kreises in der Ebene (M, g). Zwei dieser Punkte liegen als Punkte Z an der Geraden g und die diesen Punkten Z zugeordneten Punkte I fallen in den Punkt $G_{sgk} \in g_k \wedge G_{sgk} \in s$.

An der Geraden s liegen daher ebenfalls sechs $(4 + 2)$ Punkte I jener Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte Z sich auf der Geraden g befinden und die Ordnung sechs der Fläche (I, Z_g) ist damit bekräftigt. Das die Gerade g_k auf der Fläche (I, Z_g) eine zweifache wird, ist daraus ebenfalls ersichtlich.

Die Strahlen des Komplexes (VN), deren Punkte Z an der Geraden g liegen, bilden eine *Kongruenz* (K, Z_g). Die *Ordnung* und *Klasse* diser Kongruenz wird auf ähnliche Weise durchgeführt, wie dies in [20] $D\ d)$ für die Kongruenz (K, Z_m) getan wurde. Nur die Zeichen m, m_k, M_k und T_m ändern sich in g, g_k, G_k und T_g.

SATZ C 4. *Die Strahlen des Komplexes* (VN) *die durch die Büschelreihe* $(F^2) \subset (MF^2)$ *bestimmt sind und deren Punkte* Z *auf der Geraden* g *liegen, bilden eine Kongruenz* (K, Z_g) 10. *Ordnung und* 4. *Klasse. Die Gerade* g *ist ein vierfacher Strahl auch dieser Kongruenz* (*Satz C* 1). *Die unabbrechend verbundenen Punkte* I *von diesen Strahlen bilden eine Fläche* (I, Z_g) 6. *Ordnung. Diese Fläche wird gebildet von:*

a) ∞^1 *Kurven* 4. *Ordnung, die in den Ebenen des Ebenenbüschels* $[g_k]$ *liegen, wobei jeder Punkt der Geraden* g_k *ein zweifacher ist;*

b) ∞^1 *Kurven* i^7 7. *Ordnung auf den Hyperboloiden* $H^2 \subset /H^2/$ [13], [21].

Die Kurve g^3 *ist eine einfache Kurve der Fläche* (Z, I_g) und die Gerade g_k ist auf ihr eine zweifache Gerade. *Die Gerade* g *ist als eine Menge von Punkten* Z *von Strahlen der Kongruenz* (K, Z_g) 3. ∞^1*-deutig.*

d) Die Gerade g_k als eine Menge von Punkten Z von Strahlen des Komplexes (VN)

Die Gerade g_k soll eine Menge von Punkten Z jener Strahlen des Komplexes (VN) sein, die durch alle $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt werden. Die Punkte I dieser Strahlen liegen auf den Strahlen t des Komplexes (TK) $t = \varphi(T)/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ $\forall T \in g_k$ in der Ebene (M, g). [21] Satz A 7, A 8.

Da aber die Gerade g_k den Punkt $M \in k^6$ enthält und dieser Punkt als eine Menge von Punkten Z von Strahlen (VN) in [20] D *a*) betrachtet wurde, wird in weiteren Untersuchungen von der Singularität des Punktes $M \in g_k \wedge M \in k^6$ abgesehen. Im Endresultat werden die Ergebnisse aus [20] D *a*) doch im Betracht gezogen.

In [13] wurde gezeigt: Die I-Punktskurve i^7 7. Ordnung der Strahlen des Komplexes (VN), die durch ein Büschel (F^2) bestimmt sind und deren Punkte Z auf einer Geraden liegen, die einen Eckpunkt des Poltetraeders dieses Büschels enthält, zerfällt in zwei ebene Kurven 4. und 3. Ordnung. Die Ebene der Kurve 4. Ordnung enthält den betreffenden Eckpunkt des Poltetraeders, während die Ebene der Kurve 3. Ordnung die übrigen drei Tetraedereckpunkte enthält.

In unserem Fall liegen die Punkte Z von Strahlen des Komplexes (VN) längs der Geraden g_k. Diese Strahlen werden durch alle $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt und alle erwähnten Kurven i^4 4. Ordnung liegen in der Ebene (M, g). Es stellt sich die Frage, genauso wie im ähnlichen Fall in [20] D *e*), wo jene Strahlen des Komplexes (VN) betrachtet wurden, deren Punkte Z auf der Geraden $m_k \ni M$ liegen, ob alle diese Kurven i^4 die ganze Ebene (M, g) decken und wenn dies der Fall ist, wird ein beliebiger dieser Punkte I einfach oder mehrfach sein?

Die Antwort auf diese Frage würde teilweise in den Untersuchungen in [20] D *e*) gegeben. Es ist nämlich möglich fast alle Ergebnisse aus [20] D *e*) auf unseren Fall zu übertragen. Dabei sollen die Zeichen m, m_k, m_k^2 durch g, g_k, g_k^2 umbezeichnet werden.

Bemerkung. Die Trisekante m der Kernkurve k^6 6. Ordnung des Bündels $/F^2$ und eine beliebige Gerade g unterscheiden sich wesentlich als jene Geraden, welchen Punkten durch $\forall (F^2) \subset (MF^2)$ die Strahlen des Komplexes (VN) zugeordnet werden. Vgl. [20] D *a*) *b*) *d*). Unter der Geraden m_k und g_k, die den Geraden m und g konjugiertzugeordneten Geraden bezüglich der Kegelfläche $M^2 \subset$

$\subset /F^2$ darstellen und die beiden die Spitze M dieser Kegelfläche enthalten, wobei der Punkt M ebenfalls der gemeinsame Eckpunkt aller ∞^1 Poltetraeder der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ wird, gibt es im Gegenteil keine wesentlicher Unterschiede, besonders im Sinne der Untersuchungen in [20] und in diesem Kapitel *d*).

SATZ C 5. *Die durch die Büschelreihe* $(F^2) \subset (MF^2)$ *bestimmten Strahlen des Komplexes* (VN), *deren Punkte* Z *in einem beliebigen Punkt* $G_k \in g_k$ *liegen, bilden eine Kegelfläche* 4. *Grades mit der Spitze in* G_k, *während die Punkte* I *dieser Strahlen eine Kurve* i^4 4. *Ordnung in der Ebene* (M, g) *bilden.*

SATZ C 6. *Die durch die Büschelreihe* $(F^2) \subset (MF^2)$ *bestimmten Strahlen des Komplexes* (VN), *deren Punkte* Z *längs der Geraden* g_k *liegen, bilden eine Kongruenz* (K, Z_{gk}) 10. *Ordnung und* 4. *Klasse. Jene dieser Strahlen, deren Punkte* Z *im Punkt* $M \in g_k$ *sind bilden eine Kongruenz* 4. *Ordnung und* 0. *Klasse und die Punkte* I *dieser Strahlen bilden eine Fläche* $\mathcal{I}_M$ 4. *Ordnung* ([20] Satz *D* 7.) *Die übrigen Strahlen diesere Kongruenz* (K, Z_{gk}) *bilden eine Kongruenz* 6. *Ordnung und* 4. *Klasse, während die zugeordneten Punkte* I *die zweifache Ebene* (M, g) *bilden.*

LITERATUR:

[1] *J. Majcen*, O posebnoj vrsti kubičnog kompleksa, Rad JAZU **155** (1903), 159—172.

[2] *V. Niče*, O svežnju ploha 2. reda, Rad HAZU **274** (1942), 163—169.

[3] *V. Niče*, Beiträge zum Büschel der *Reye*schen tetraedralen Strahlenkomplexe, Rad JAZU **325** (1961), 27—48.

[4] *V. Niče*, Über neue Eigenschaften der Büschel und der Bündel polarer Räume, Glasnik mat.-fiz. astr. **17** (1962), 189—204.

[5] *V. Niče*, Ergänzende Beiträge zum *Majcen*schen kubischen Strahlenkomplex, Rad JAZU **325** (1962), 107—125.

[6] *V. Niče*, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik mat.-fiz. astr. **18** (1963), 255—268.

[7] *V. Niče*, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU **331** (1965), 145—172.

[8] *V. Niče*, Die gemeinsamen Kongruenzen der vier Strahlkomplexe eines Polarraumbüschels, Rad JAZU **347** (1968), 193—220.

[9] *V. Niče*, Neue Beiträge zu den Eigenschaften eines Polarraumbündels, Glasnik Mat. **4** (**24**) (1969), 259—274.

[10] *V. Niče*, Zusätzliche Betrachtungen mit ergänzenden Sätzen über den Tangentialwegekomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU **349** (1970), 93—107.

[11] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, Leipzig 1910.

[12] *V. Ščurić-Čudovan*, Singulariteten des *Majcen*schen Strahlenkomplexes, Glasnik Mat. **3** (**23**) (1968), 117—139.

[13] *V. Ščurić-Čudovan*, Der orientierte *Niče*sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, I Teil, Rad JAZU **367** (1974), 151—205.

[14] *V. Ščurić-Čudovan*, Der orientierte *Niče*sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, II Teil, Rad JAZU **370** (1975), 57—91.

[15] *V. Ščurić-Čudovan*, Das (F_k^2) Flächenbüschel und eine Möglichkeit des Eintauchens des (MK) in den (VN) Komplex, Rad JAZU **374** (1977), 59—94.

[16] *V. Ščurić-Čudovan*, Die Kongruenzen der Involuterstrahlen eines durch das (F^2) Flächenbüschel bestimmten (VN) Komplexes, Rad JAZU **382** (1978), 65—90.

[17] *V. Ščurić-Čudovan*, Ergänzende Untersuchungen eines Büschels der homothetischen Flächen 2. Grades und einiger Komplexe, die durch dieses Büschel bestimmt werden, Rad JAZU **386** (1980), 5—34.

[18] *V. Ščurić-Čudovan*, Einige Eigenschaften des (VN) Komplexes eines (F^2) Büschels, Rad JAZU **396** (1982), 47—70.

[19] *V. Ščurić-Čudovan*, Einige Probleme die durch die Einteilung eines Bündels der Flächen 2. Grades in ∞^1 Büschel solcher Flächen entstanden sind, I Teil, Rad JAZU **403** (1983), 33—54.
[20] *V. Ščurić-Čudovan*, Einige Probleme die durch die Einteilung eines Bündels der Flächen 2. Grades in ∞^1 Büschel solcher Flächen entstanden sind, II Teil, Rad JAZU **421** (1986), 135—163.
[21] *V. Ščurić-Čudovan*, Weitere Untersuchungen in der Gesamtheit (MF^2), I Teil, Rad JAZU, **450** (1990), 9—21.

Angenommen in II. Abteilung
10. 11. 1989.

Geodätische Fakultät
41000 Zagreb, Kačićeva 26
Kroatien

Nastavak istraživanja u skupu (MF^2) II. dio. Kompleks (VN)

Vlasta Ščurić-Čudovan

Sadržaj

Rad je nastavak mog rada [21].

Sve kvadrike svežnja $(F^2$ razvrstane su u jednoparametarski skup (MF^2) pramenova (F^2), a zajednička ploha svih tih pramenova je stožac $M^2 \subset (F^2$ s vrhom u točki $M \in k^6$. Krivulju k^6 6. reda čine vrhovi svih stožaca svežnja $(F^2$.

Svakim od ∞^1 pramenova skupa (MF^2) određena su četiri kompleksa zraka.

U poglavlju *A* [21] obrađene su tvorevine što ih čine zrake kompleksa (TK) pridružene točkama po volji odabranog pravca g odnosno njemu s obzirom na stožac M^2 konjugirano pridruženog pravca $g_k \ni M$, a zrake su određene nizom pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$. U poglavlju *B* [21] obrađene su tvorevine što ih čine zrake *Majcen*ovog kompleksa, kojima se središnje točke nalaze na pravcu g odnosno g_k, a određene su istim nizom pramenova kvadrika.

U ovom radu — poglavlje *C* — istražene su tvorevine što ih čine zrake orijentiranog *Niče*ovog kompleksa ili kompleksa (VN) i njihove točke Z odnosno točke I, kad se točke I odnosno točke Z tih zraka nalaze na pravcu g odnosno pravcu g_k, a zrake su određene nizom pramenova kvadrika $(F^2) \subset (MF^2)$.

U *C* a) promatrane su zrake kompleksa (VN) kojima se točke I nalaze na po volji odabranom pravcu g. Pokazuje se da sve te zrake čine kongruenciju (K, I_g) 8. reda i 2. razreda. Pravac g je četverostruka zraka te kongruencije određena općenito s četiri različita pramena $(F^2) \subset (MF^2)$.

Točke Z zraka kongruencije (K, I_g) čine sferičnu plohu (Z, I_g) 6. reda, koja se sastoji iz:

a) ∞^1 kružnica, koje leže u ravninama pramena $[g_k]$, pri čemu je svaka točka pravca g_k kao točka Z četverostruka;

b) ∞^1 krivulja z^5 5. reda na hiperboloidima H^2 pramena $/H^2/$ [13], [21];

c) ∞^1 krivulja z^7 7. reda na stošcima (G_k, g^3) $\forall G_k \in g_k$, a krivulja g^3 je skup točaka konjugiranih pravcu g s obzirom na svežanj $(F^2$.

Pritom su točke iste kružnice, koje leže u nekoj ravnini pramena $[g_k]$ određene *svim* $(F^2) \subset (MF^2)$ i pridružene *jednoj* točki pravca g; točke jedne krivulje z^5 određene su *jednim* pramenom $(F^2) \subset (MF^2)$ i pridužene su *nizu* (g), dok ne postoje dvije točke iste krivulje k^7 koje su određene istim pramenom $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ odnosno koje su pridružene istoj točki niza (g).

Na plohi (Z, I_g) nalazi se osim jednostruke krivulje g^3 3. reda i četverostruki pravac g_k kao skup četverostrukih točaka Z. Na krivulji g^3 leže četiri kružne točke te plohe i osam sjecišta s krivuljom k^6. Na pravcu g nalaze se takve dvije točke K_i $(i = 1, 2)$ plohe (Z, I_g), koje su vrhovi pramenova onih zraka kongruencije $(K; I_g)$, kojima točke I i Z padaju zajedno u vrh K_i $(i = 1, 2)$ pramena.

Beskonačno daleka krivulja plohe (Z, I_g) raspada se u apsolutnu koniku i u četiri pravca, koji sijeku pravac g_k.

U C b) nalaze se točke I zraka kompleksa (VN) na pravcu g_k. Pokazuje se da sve takve zrake određene nizom pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$ čine kongruenciju (K, I_{gk}) 4. reda i 2. razreda. Po četiri od tih zraka, koje sadrže istu točku odnosno po dvije koje leže u istoj ravnini, određene su različitim pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$. Točke Z svih zraka te kongruencije čine dvostruku ravninu (M, g), a pravac g_k je kao skup točaka I ∞^1-značan. Točka $M \in g_k \wedge M \in k^6$ smatrana je regularnom točkom pravca g_k.

U C c) promatran je pravac g kao skup točaka Z zraka kompleksa (VN) određenih pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$. Pokazano je da takve zrake tvore kongruenciju (K, Z_g) 10. reda i 4. razreda. Pravac g je četverostruka zraka i te kongruencije. Neprekinuto povezane točke I tih zraka čine neku plohu (I, Z_g) 6. reda, koja se sastoji iz:

a) ∞^1 krivulja 4. reda, koje leže u ravninama pramena $[g_k]$, a svaka je točka pravca g_k dvostruka;

b) ∞^1 krivulja i^7 7. reda na hiperboloidima $H^2 \subset /H^2/$ [13], [21]. Krivulja g^3 je na plohi (I, Z_g) jednostruka, a pravac g_k dvostruk. Pravac g je kao skup točaka I zraka kongruencije (K, Z_g) $3 \cdot \infty^1$-značan.

U C d) pravac g_k je skup točaka Z zraka kompleksa (VN). Sve takve zrake kojima se točke Z nalaze u po volji odabranoj točki $G_k \in g_k$ a određene su nizom $(F^2) \subset (MF^2)$ čine stožastu plohu 4. stupnja s vrhom u točki G_k, dok točke I tih zraka čine krivulju i^4 4. reda u ravnini (M, g).

Sve zrake kompleksa (VN) određene nizom $(F^2) \subset (MF^2)$ kojima se točke Z nalaze duž pravca g_k čine kongruenciju (K, Z_{gk}) 10. reda i 4. razreda. One od tih zraka kojima se točke Z nalaze u točki $M \in g_k \wedge M \in k^6$ čine pritom kongruenciju 4 reda i 0. razreda, a njihove točke I određuju plohu $\mathcal{I}_M$ 4. reda [20] Stavak D 7. Preostale zrake čine kongruenciju 6. reda i 4. razreda, a njihove točke I čine dvostruku ravninu (M, g).

Primljeno u II. razredu
10. 11. 1989.