JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

EINIGE PROBLEME DIE DURCH DIE EINTEILUNG EINES BÜNDELS DER FLÄCHEN 2. GRADES IN ∞^1 BÜSCHEL SOLCHER FLÄCHEN ENTSTANDEN SIND, II TEIL

VLASTA ŠČURIĆ-ČUDOVAN

Zagreb

Poseban otisak iz:

Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, Knjiga 421; Matematičke znanosti, Svezak 5

ZAGREB 1986

EINIGE PROBLEME DIE DURCH DIE EINTEILUNG EINES BÜNDELS DER FLÄCHEN 2. GRADES IN ∞^1 BÜSCHEL SOLCHER FLÄCHEN ENTSTANDEN SIND, II TEIL

Vlasta Ščurić-Čudovan, Zagreb

Abstract. This paper considers the structures constituted by some sets of rays of the *Niče*'s oriented complex and the points associated to those rays which result from the partition of a bundle of quadrics into a one-parametric family of pencils of quadrics.

EINLEITUNG

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung meiner gleichnamigen Arbeit, 1. Teil [17]. Die Untersuchungen werden in einem solchen projektiven Raum P^3 durchgeführt, der auf dem Modell des euklidischen Raumes E^3 aufgebaut wird und den die Fernebene mit dem absoluten Kegelschnitt ergänzt.

Es sei ein allgemeines Flächenbündel $/F^2$ der Flächen 2. Grades gegeben. Durch ihn ist auch ein Bündel $(F^2$ der Polarräume dieser Flächen bestimmt. Die ∞^2 Flächen des Bündels $/F^2$ bilden auch ∞^2 Flächenbüschel $/F^2/$ und eine jede Fläche F^2 des Bündels $/F^2$ befindet sich in ∞^1 Flächenbüschel $/F^2/$. Die Grundkurven 4. Ordnung dieser Flächenbüschel decken die Fläche F^2 und haben acht gemeinsame (assoziierte) Punkte, die auch gemeinsame Punkte aller Flächen dieses Bündels sind und seine Grundpunkte bilden [13].

Die Scheitel-Mittelpunkte der Singulär-Kegelflächen des Bündels $/F^2$ bilden eine Raumkurve k^6 6. Ordnung. Die einem beliebigen Punkt $M \in k^6$ bezüglich der ∞^2 Polarräume der Flächen des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte bilden eine *Gerade m*, die die Trisekante der Kurve k^6 ist. [13].

In der Arbeit [17] ist eine Singulär-Kegelfläche M^2 mit dem Scheitelpunkt $M \in k^6$ hervorgehoben. Eine beliebige Fläche des Bündels $/F^2$ ordnet mit dieser Fläche M^2 ein Flächenbüschel $/F^2/$, und *alle* Flächen des Bündels $/F^2$ bestimmen mit der Fläche M^2 eine Gesamtheit $/MF^2/$. Diese Gesamtheit bilden jene ∞^1 Flächenbüschel $/F^2/$, deren einzige gemeinsame Fläche die Kegelfläche M^2 wird. Der Punkt $M \in k^6$ ist als Scheitelpunkt der gemeinsamen Kegelfläche M^2 aller Büschel $/F^2/ \subset /MF^2/$ auch der gemeinsame Eckpunkt aller Polartetraeder der Polarraumbüschel $(F^2) \subset (MF^2)$, u. zw. so, daß je drei der übrigen Eckpunkte jedes einzelnen Tetraeders in derselben Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ liegen. Eine beliebige Ebene dieses Ebenenbüschels $[m]$ schneidet nämlich die Kurve

k^6 in drei Punkten M_n ($n = 1, 2, 3$) auf der Geraden m und in noch drei Punkten, die die Eckpunkte eines von einem bestimmten Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ verordneten Polartetraeders sind.

Eine Ebene dieses Ebenbüschels $[m]$ ist die Ebene (M, m), die einem Singulärbüschel (F^2_M) solcher Flächen 2. Grades zugeordnet ist, die alle die Ebene (M, m) im Punkt M berühren. Der zugeordnete Polartetraeder dieses Büschels (F^2_M) artet in die zweifache Ebene (M, m) aus, während im Punkt M zwei Eckpunkte dieses »Tetraeders« zusammenfallen [13].

Da unter der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ und der Ebenen des Ebenenbüschel $[m]$ eine bijektive Zuordnung besteht, und da eine beliebige Gerade das Ebenenbüschel $[m]$ in einer Punktreihe druchsetzt, werden wir, je nach dem Fall, die Gesamtheit (MF^2) auch als eine Reihe der Büschel (F^2) betrachten [17].

Die der Geraden m bezüglich der Kegelfläche M^2 konjugiertzugeordnete Gerade ist eine den Punkt $M \in k^6$ enthaltende Gerade m_k, die eine Unisekante der Kurve k^6 ist [17].

Durch ein jedes der ∞^2 Polarraumbüschel (F^2) des Bündels $(F^2$ sind auch vier Komplexe bestimmt, u. zw. der *Reye*sche tetraedrale Komplex oder der Komplex (TK) 2. Grades [13], [17]; der *Majcen*sche Komplex oder der Komplex (MK) 3. Grades [2], [17]; der orientierte *Niče*sche Komplex oder der Komplex (VN) 8. Grades [9], [11], [15], [16] und der Normalenkomplex 8. Grades [8].

Betrachtet man alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$, wird es auch interessant jene Eigenschaften der erwähnten Komplexe zu untersuchen, die diese Gesamtheit (MF^2) verordnet. Da dieses Untersuchungsgebiet zu breit sein könnte, werden unsere Untersuchungen vorläufig auf nur streng begrenzte Aufgaben gerichtet werden. Wie im 1. Teil [17] dieser Arbeit, wo nur jene Strahlen des Komplexes (TK) und des Komplexes (MK) untersucht werden, die auf gewisse Weise nur bestimmten Gesamtheiten zugeordnet sind, werden auch in diesem 2. Teil jene Strahlen des orientierten *Niče*schen Komplexes betrachtet, die auf bestimmte Weise dem Punkt $M \in k^6$ und den Punkten der Geraden m und m_k zugeordnet sind. Dabei ist immer von größten Interesse festzustellen, welchem Punkt ein einzelner Strahl zugeordnet und durch welches der ∞^1 Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ er bestimmt ist.

D. DER ORIENTIERTE NIČESCHE STRAHLKOMPLEX ODER KOMPLEX (VN)

Definition. Ein durch ein Büschel (F^2) bestimmter und einem beliebigen Raumpunkt T zugeordneter Strahl t des Komplexes (TK) ist die Schnittgerade der dem Punkt T bezüglich der Polarräume der Flächen dieses Büschels (F^2) zugeordneten Ebenen. Eine aus dem Punkt T auf den Strahl t gelegte Senkrechte ist ein Strahl o des Komplexes (VN). Der Punkt T wird der Punkt I des Strahles o genannt, und sein Schnittpunkt mit dem Strahl t als Punkt Z bezeichnet. Die Punkte I und Z sind die Berührpunkte des Strahles o mit zwei Flächen dieses Büschels $/F^2/$. Ein beliebiger Raumpunkt ist der Punkt I für einen und der Punkt Z für drei komplanären Strahlen des Komplexes (VN).

Durch

$$o = \psi(T),/(F^2)$$

wird kürzer bezeichnet, daß der dem Punkt T bezüglich des Büschels (F^2) zugeordnete Strahl o des Komplexes (VN) seinen Punkt I im Punkt T hat. Diese Bezeichnung werden wir doch nicht folgerichtig, sondern dann verwenden, wenn damit geholfen wird, den Text zu verkürzen und klarer zu machen.

Eine solche Bemerkung gilt auch für den Zeichen

$$t = \varphi(T),/(F^2),$$

die bezeichnet, daß der Strahl t des Komplexes (TK), bezüglich des Büschels (F^2), dem Punkt T zugeordnet ist. [17]

Um den Text zu verkürzen, werden wir auch öfters anstatt der Ausdrücke »der Strahl des Komplexes (TK)«, und »der Strahl des Komplexes (VN) im gleichen Sinn nur »(TK) Komplexstrahl«, bzw. »(VN) Komplexstrahl« oder auch »Strahl (TK)«, »Strahl (VN)« verwenden.

a) Der Punkt $M \in k^6$ und die (VN) Komplexstrahlen

In [15] wurde gezeigt, daß für eine beliebige Gerade s einer Seitenebene des Polaritetraeders eines Büschels (F^2)

$$s = \varphi(A),/(F^2) \text{ Geltung hat,}$$

wobei der Punkt A der erwähnten Tetraederseitenebene gegenüberliegender Eckpunkt dieses Tetraeders ist.

Ebenso wurde gezeigt, daß für eine, den Punkt A enthaltende Gerade r

$$r = \psi(A),/(F^2) \text{ gilt,}$$

wobei, wie bekannt, der Punkt A der Punkt I des (VN) Strahles r wird und dessen Punkt Z im Schnittpunkt mit der erwähnten gegenüberliegenden Tetraederseitenebene liegt.

Da der Punkt M der gemeinsame Eckpunt einer Gesamtheit der durch die Büschelreihe $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Polartetraeder ist, und da diesem Eckpunkt M die gegenüberliegenden Seitenebenen dieser Tetraeder ein Ebenenbüschel $[m]$ bilden, folgt, daß eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade r in jedem ihren Punkt je eine dieser Ebenen durchsetzt. Dabei ist keine Ausnahme auch der Punkt $M \in r$, als der Durchstoßpunkt der Geraden r mit der Ebene (M, m). Wie bekannt, im Fall des Singulärflächenbüschels (F^2_M) artet der zugehörige Polartetraeder in die zweifache Ebene (M, m) aus, während im Punkt M zwei seine Eckpunkte zusammenfallen. Der Strahl r ist als der (VN) Komplexstrahl, der durch (F^2_M) bestimmt ist, zweideutig, und seine Punkte I und Z fallen in den Punkt M.

Daraus folgt, daß die Gerade r ein solcher ∞^1-deutiger (VN) Komplexstrahl ist, den die Büschel (F^2) der Reihe (MF^2) bestimmen. Der Punkt M ist sein ∞^1-deutiger Punkt I, während die Punkte Z längs dieses Strahles r liegen.

Es gilt also:

$$r = \Psi(M),/\forall\,(F^2) \subset (M F^2),\ r \ni M \ \textit{und}$$

SATZ D1. *Eine beliebige dem Strahlbündel $\{M\}$ angehörige Gerade ist ein solcher durch die Büschelreihe (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmter ∞^1-deutiger (VN) Komplexstrahl, der den ∞^1-deutigen Punkt I im Punkt M hat, während die Punkte Z längs dieses Strahles liegen. Dabei besteht unter der Punktreihe $Z \in r$ und der Büschelreihe $(F^2) \subset (MF^2)$ eine bijektive Zuordnung.*

Ein viel interessanterer Fall entsteht dann, wenn jene durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (VN) betrachtet werden, deren *Punkte Z im Punkt M liegen.*

Es ist bekannt, daß jene durch *ein* Büschel (F^2) bestimmten Strahlen (VN), die den Punkt Z in einem Tetraedereckpunkt, z. B. M, des zugehörigen Polartetraeders $MBCD$ haben, die Erzeugenden einer Kegelfläche des Scheitelpunktes M sind, do saß die Punkte I dieser Strahlen eine in der Ebene BCD liegende und die Eckpunkte B, C und D enthaltende Kurve i^3 3. Ordnung bilden [15].

Betrachtet man anstatt eines Büschels (F^2) die Reihe der Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$, dann ist durch ein jedes dieser Büschel eine Kegelfläche (M, i^3) 3. Grades des Scheitelpunktes M bestimmt, da der Punkt $M \in k^6$ der gemeinsame Eckpunt aller ∞^1 Polartetraeder der Gesamtheit (MF^2) ist. Da weiterhin die diesem Eckpunkt M gegenüberliegenden Polartetraederseitenebenen das Büschel $[m]$ bilden, liegt in einer jeden dieser Ebenen je eine Kurve i^3, die auch die übrigen drei Tetraederecken des betreffenden Tetraeders enthält.

Uns interessiert: Ist eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade die Erzeugende eines oder mehreren dieser Kegel? Bilden solche (M, i^3) Kegelflächen ein Büschel und haben dadruch neun gemeinsame Erzeugenden, oder haben diese Kegelflächen im Fall, daß sie kein Büschel bilden, doch gemeinsame Erzeugenden, und wieviel, oder sind alle Erzeugenden gemeinsam, so daß genau eine Kegelfläche entsteht?

Jede der Kurven i^3 in den Ebenen des Büschel $[m]$ schneidet die Gerade m in drei Punkten. In erster Reihe interessiert uns ob diese Kurven einen gemeinsamen Punkt $T^x \in m$ haben. Die Gerade T^xM wäre dann ein solcher ∞^1-deutiger (VN) Komplexstrahl, der durch ein jedes der ∞^1 Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt wäre und dessen ∞^1-deutiger Punkt I im Punkt $T^x \in m$ läge, während sein Punkt Z sich im Punkt M befände.

Um dies zu bestätigen sollten alle (TK) Strahlen

$$t = \varphi(T^x), \quad /\forall\, (F^2) \subset (MF^2)$$

ein Strahlbüschel (M) in jener Ebene T^x_p des Bündels $\{M\}$ bilden, die senkrecht auf die Gerade T^xM steht. Auf diese Weise würde die Gerade T^xM senkrecht auf alle Strahlen des erwähnten Büschels (M) liegen. Dies würde weiterhin bedeuten, daß die dem Punkt $T^x \in m$ bezüglich der Kegelfläche M^2 zugeordnete Polarebene mit jener Ebene übereinstimmen solle, die die Gerade m_k und eine Ferngerade p spannen. Diese Gerade p soll die dem Fernpunkt T_n der Geraden T^xM bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnete Polare sein.

Die den Punkten $T \in m$ bezüglich der Kegelfläche M^2 zugeordneten Polarebenen bilden das bekannte Ebenenbüschel $[m_k]$. Die Verbindungsgeraden TM bilden in der Ebene (M, m) das Strahlbüschel (M) und durchsetzen die Fernebene in Punkten T_n der Ferngeraden n der Ebene (M, m). Jene Polaren p, die bezüglich des absoluten Kegelschnittes den Punkten T_n zugeordnet sind, bilden das Fernstrahlbüschel (P). Genau eine Polare p_1 dieses Büschels, die einem Punkt $T_{n1} \in n$ zugeordnet ist, schneidet die Gerade m_k. Dies bedeutet, daß es genau eine Ebene des Ebenenbüschels $[m_k]$ gibt, die senkrecht auf genau eine Gerade $T_{n1}M$ des Büschels (M) in der Ebene (M, m) liegt. Dem Schnittpunkt T_1 der Geraden $T_{n\,1}M$ und m, ist eine Polarebene bezüglich der Kegelfläche M^2 zugeordnet, die aber in allgemeinem mit der Ebene (p_1, m_k) nicht übereinstimmen kann, da der absolute Kegelschnitt und die Fernkurve der Kegelfläche M^2 untereinander unabhängig sind. Daraus folgt, daß auf der Geraden *m kein Punkt* T^x mit beschriebenen Eigenschaften besteht, bzw., daß die erwähnten Kegelflächen (M, i^3) 3. Grades keine gemeinsamen Erzeugenden in der Ebene (M, m) haben können.

Der Punkt M enthält doch drei Geraden, die die gemeinsamen Erzeugenden aller ∞^1 Kegelflächen (M, i^3) sind und die als Strahlen (VN) im Punkt M den Punkt Z haben. Diese Geraden sind die Achsen der Kegelfläche M^2, die die gemeinsame Fläche aller ∞^1 Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ist.

Es ist nämlich bekannt, daß die Fernebene die Flächen eines jeden Büschels $/F^2/ \subset /MF^2/$ in je einem Kurvenbüschel 2. Grades schneidet. Die gemeinsame Kurve aller diesen Kurvenbüschel ist die Fernkurve k^2 der Kegelfläche M^2. Es ist weiterhin bekannt, daß ein jedes dieser Büschel mit dem absoluten Kegelschnitt je einen Kurvennetz bildet. Die Eckpunkte der Polardreiecke eines jeden dieser Netze bilden eine *Jacobi*sche Fernkurve μ 3. Ordnung 1. Geschlechtes [15]. Alle diese Kurven μ haben nur drei gemeinsame Punkte, die der absolute Kegelschnitt und die Kurve k_n^2 bestimmen. Diese Punkte sind die Fernpunkte der Achsen der Kegelfläche M^2.

Durch [16] ist es weiterhin bekannt, daß eine jede Achse der Flächen des Büschels $/F^2/$ ein solcher zweifacher (VN) Komplexstrahl ist, dem der Punkt I und der Punkt Z involutorisch zugeordnet sind. Ein solcher Strahl ist als ein Involutorstrahl des Komplexes (VN) genannt. Im Fall der Singulärfläche befindet sich einer der Punkte $I - Z$ im Flächenscheitelpunkt, der mit dem Polartetraedereckpunkt dieses Büschels (F^2) übereinstimmt, während sich der involutorzugeordnete Punkt $Z - I$ im Schnittpunkt dieser Achse mit jener Tetraederseitenebene befindet, die gegenüber dem erwähnten Eckpunkt liegt.

Da eine jede der drei Achsen der gemeinsamen Fläche M^2 in jedem ihren Punkt mit einer anderen Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ geschnitten wird, ist ein jeder solcher Schnittpunkt als der Punkt I des Strahles (VN) einem streng bestimmten Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ zugeordnet, während sich der Punkt Z aller diesen Strahlen immer im Punkt M befindet.

Jede der drei Achsen der Kegelfläche M^2 ist deshalb auch ein ∞^1-deutiger (VN) Komplexstrahl, mit den Punkten I längs dieser Achse und dem gemeinsamen ∞^1-deutigen Punkt Z im Punkt M.

Die Kegelfläche (M, i^3) 3. Grades können also nicht in eine Fläche zusammenfallen, sie können aber auch nicht ein Flächenbüschel 3. Grades, mit 9 gemeinsamen Erzeugenden bilden. Je zwei dieser Kegelflächen haben aber, wie bekannt, außer der erwähnten drei, noch je sechs gemeinsamen Erzeugenden. Wir müssen noch feststellen, ob eine beliebige Gerade $r \ni M$ die Erzeugende einer, zwei oder n solcher Kegelflächen ist, wo n eine endliche Zahl ist.

Nehmen wir vorläufig ein Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) in Betracht. Alle Strahlen (VN), deren Punkte Z im Punkt M liegen, haben, wie erwähnt, die Punkte I längs einer Kurve i^3 in jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$, die diesem Büschel (F^2) zugeordnet ist. Aus [16] ist weiterhin bekannt, daß der einem beliebigen Punkt $T \in i^3$ zugeordnete Strahl $t = \varphi(T),/(F^2)$, außer daß er den Punkt M enthält, auch die Kurve i^3 in einem Punkt T_1 durchsetzt. Daraus folgt, daß die Geraden TM und T_1M senkrechte Stellung haben, so daß

$$TM = \varphi(T_1),/(F^2); \quad TM = \psi(T),/(F^2) \text{ und } T_1M = \psi(T_1),/(F^2)$$

Geltung hat.

Eine beliebige Gerade r sei eine solche Verbindungsgerade TM. Es ist auch bekannt, daß diese Gerade r, als ein ∞^1-deutiger Strahl (TK), den die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmen, den Punkten eines die Gerade m schneidende Kegelschnittes r^2 zugeordnet ist ([17], Satz B 9). Dieser Kegelschnitt r^2 liegt in jener Ebene, die die gemeinsame Polarebene eines jeden Punktes der Geraden r bezüglich der Kegelfläche M^2 ist, und die deshalb auch den Punkt $M \in k^6$ enthält. Die übrigen fünf Schnittpunkte dieser Ebene mit der Kurve k^6 bestimmen die Kurve r^2 vollkommen. Da die Gerade r und die Ebene des Kegelschnittes r^2 in allgemeinen keine senkrechte Lage haben, besteht deshalb in dieser Ebene nur eine den Punkt M enthaltende Gerade r_1, die die Gerade r senkrecht schneidet. Daraus folgt, daß $r_1 \equiv T_1M$ ist. Die Gerade r_1 schneidet aber die Kurve r^2 in noch genau einem Punkt, der T_{11} genannt wird. Es gilt $r = \varphi(T_{11}),/(F_1^2)$, wo $(F^2) \neq (F_1^2)$ und $(F_1^2) \subset (MF^2)$ ist.

Auf Grund des Gesagten folgt:

Wenn $T_{11} \in r_1$ auch $T_{11} \in i_1^3$ Geltung hat, muß die Gerade r die Kurve i_1^3 in einem Punkt T_{12} schneiden, wobei die Kurve i_1^3 eine Gesamtheit der Punkte I jener Strahlen (VN) ist, die das Büschel $(F_1^2) \subset (MF^2)$ ordnet und deren Punkte Z im Punkt M liegen.

Da auch eine Umkehr Geltung hat, folgt:

$$\varphi(T_1) \equiv \varphi(T_{11}) = r \qquad \psi(T) \equiv \psi(T_{12}) = r/(F^2), (F_1^2)$$

$$\varphi(T) \equiv \varphi(T_{12}) = r_1 \qquad \psi(T_1) \equiv \psi(T_{11}) = r_1/(F^2), (F_1^2)$$

Auf untereinander senkrecht gelegten Geraden $r \in M$ und $r_1 \ni M$ befinden sich genau je zwei Punkte I, die durch zwei Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind und deren zugeordnete Punkte Z zusammen in den Punkt M fallen. Dies bedeutet weiterhin, daß die Geraden r und r_1 die gemeinsamen Erzeugenden von genau zwei Kegelflächen (M, i^3) und (M, i_1^3) 3. Grades sind, die die Büschel (F^2) und (F_1^2) ordnen. Es ist klar, daß diese zwei Kegelflächen noch je zwei Paare gemeinsame und in Paaren senkrechte Erzeugenden haben.

Eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade r ist deshalb die gemeinsame Erzeugende je zwei solcher Kegelflächen 3. Grades, die jene Strahlen (VN) ordnen, deren Punkte Z im Punkt M liegen. Dabei ist immer möglich festzustellen, welche zwei Büschel der Gesamtheit (MF^2) diesen Strahl bestimmen, da der Punkt I eines jeden dieser zweifachen Strahlen an zugeordneten Kurven i^3 in jenen Ebenen des Büschels $[m]$ liegen, die als die Polartetraederseitenebenen den betreffenden Büscheln (F^2) zugeordnet sind.

In einer beliebigen Ebene des Büschels $[m]$ befindet sich also je eine Kurve i^3, die je ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnet. Eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade r schneidet zwei dieser Kurven. Es stellt sich die Frage; schneiden auch die Geraden des Büschels (M) in der Ebene (M, m) je zwei verschiedene

Kurven i^3? Wurde dies bedeuten, daß je zwei verschiedene Kurven i^3, die in verschiedenen Ebenen des Büschels $[m]$ liegen, sich im denselben Punkt der Geraden m schneiden?

Zeigen wir zuerst, daß das Letzte unmöglich ist.

Auf Grund des Satzes B 3 [17] folgt, daß eine beliebige Gerade des Bündels M ein solcher (TK) Strahl ist, der einem bestimmten Punkt der Geraden m zugeordnet und durch ein bestimmtes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt ist. Die einem beliebigen Punkt $L \in m$ zugeordneten und durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (TK) bilden ein Strahlbüschel (M) in einer Ebene des Büschels $[m]$. Genau ein Strahl dieses Büschels ist aber senkrecht auf die Gerade LM gelegt. Daraus folgt unmittelbar, daß der Punkt L auch der Punkt genau eines Strahles (VN) ist, dessen Punkt Z im Punkt M liegt. Dies hat weiterhin zur Folge, daß genau eine Kurve i^3 die Gerade m im beliebigen Punkt L schneidet. Klar ist es auch, daß dieselbe Kurve i^3 die Gerade m in drei Punkten schneidet, von deren je zwei konjugiertimaginär sein können. Es folgt:

SATZ D2. *Durch ein beliebiges Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ sind je drei jene (VN)-Komplexstrahlen bestimmt, deren Punkte I auf der Geradden m liegen und deren gemeinsamer Punkt Z im Punkt $M \in k^6$ liegt. Ein beliebiger Punkt der Geraden m ist dabei der Punkt I eines solchen Strahles (VN).*

Daß auch eine jede Gerade des Büschels (M) in der Ebene (M, m) je zwei Kurven i^3 schneidet, wird es auf folgende Weise bewiesen:

Der dem singulären Flächenbüschel $(F^2_M) \subset (MF^2)$ zugeordnete Polartetraeder artet, wie bekannt, in die zweifache Ebene (M, m) aus, während im Punkt M zwei seine Eckpunkte fallen. Die I-Punktkurve i^3_M jener durch das Büschel (F^2_M) bestimmten Strahlen (VN), deren Punkte Z im Punkt M liegen, ist eine solche in der Ebene (M, m) liegende Kurve, die im Punkt M den zweifachen Punkt hat. Eine beliebige in der Ebene (M, m) liegende und dem Büschel (M) angehörende Gerade schneidet die Kurve i^3_M außer im zweifachen Punkt M in noch einem Punkt. Eine solche Gerade ist deshalb durch das Büschel (F^2_M) bestimmter dreideutiger Strahl (VN), dessen Punkt Z sich im Punkt M befindet.

Die Büschelstrahlen (M) in der Ebene (M, m) sind die gemeinsamen Erzeugenden je einer regulären Kegelfläche (M, i^3) 3. Grades, die durch je ein reguläres Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt ist und immer einer derselben ausgearteten Kegelfläche (M, i^3_M), die das singuläre Büschel (F^2_M) ordnet.

Daraus folgt weiterhin, daß eine beliebige Gerade $r \ni M$ die Erzeugende je zwei Kegelflächen (M, i^3) ist, die zwei verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnen, daß aber immer noch eine gemeinsame Erzeugende dieser zwei Kegelflächen besteht, die senkrecht auf die Gerade r gelegt ist.

Setzen wir noch jene, den Strahlen (VN) des Büschels (M) in der Ebene (M, m) auf die beschriebene Weise zugeordneten Strahlen (VN), die die Ergänzung zur zerfallenen Kegelfläche (M, i^3_M) bilden fest. Da die Strahlen des Büschels (M) eine nichtabbrechende Gesamtheit bilden, werden auch die ihnen senkrecht zugeordneten Strahlen eine nichtabbrechende Gesamtheit, also eine Kegelfläche des Scheitelpunktes M bilden.

Wie bekannt, bilden die den Punkten $L \in m$ bezüglich der Kegelfläche M^2 zugeordneten Polarebenen ein Ebenenbüschel $[m_k]$, und in jeder diesen Ebenen liegt ein Büschel (M) der Strahlen (TK)

$$t_L = \varphi(L), / \; \forall \, (F^2) \subset (MF^2)$$

[17]. Die Punkte $L \in m$ der Reihe (m) und die Ebenen des Büschels $[m_k]$ sind in einer bijektiven Zuordnung. Da die Ferngeraden dieser Ebenen ein Strahlbüschel (S_n) bilden, wobei S_n der Fernpunkt der Geraden m_k ist, sind auch die Punkte der Punktreihe (m) und die Geraden des Geradenbüschels (S_n) in bijektiver Zuordnung. Die Geraden des Büschels (M) der Ebene (M, m) durchsetzen die Fernebene längs der Ferngeraden n der Ebene (M, m). Die den Punkten $N_L \in n$, bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p bilden ein Fernstrahlbüschel (P_n), so daß auch die Punkte der Reihe (n) und die Strahlen des Fernbüschels (P_n) in einer bijektiven Zuordnung stehen. Da auch eine bijektive Zuordnung unter der Punktreihen (m) und (n) besteht, muß auch eine solche Zuordnung unter der Fernstrahlbüschel (S_n) und (P_n) sein. Auf Grund dessen und des bekannten Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt, daß sich die zugeordneten Strahlen dieser zwei Strahlbüschel (S_n) und (P_n) in Punkten einer Kurve 2. Ordnung schneiden, die auch die Punkte S_n und P_n enthält. Ein beliebiger Punkt T_n dieser Fernkurve ist der Fernpunkt jener Geraden $T_L \ni M$, die als ein Strahl (TK) einem streng bestimmten Punkt $L \in m$ zugeordnet ist und den ein bestimmtes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnet ([15], Sätze B 3 und B 4). Dabei stehen die Geraden t_L und LM senkrecht, da die Gerade T_nP_n die Polare des Punktes N_L bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Daraus folgt, daß die Verbindungsgeraden des Punktes M mit den Punkten der erhaltenen Kurve 2. Ordnung, die Erzeugenden einer Kegelfläche ${}_2M$ 2. Grades des Scheitelpunktes M sind. Diese Fläche ${}_2M$ stimmt weder mit der Kegelfläche M^2 noch mit den Flächen des Büschels (M^2) überein.

Die Kegelfläche (M, i^3_M) 3. Grades der Strahlen (VN), die das Büschel (F^2_M) ordnet, zerfällt deshalb in das Strahlbüschel (M) in der Ebene (M, m) und in die Kegelfläche ${}_2M$. Diese, den Büschel (M) bildenden Strahlen (VN), haben die Punkte I längs der Kurve i^3_M, während jene, die Kegelfläche ${}_2M$ bildenden Strahlen, die Punkte I im Punkt $M \in i^3_M$ haben. Die Punkte Z aller diesen Strahlen liegen auch im Punkt M.

SATZ D3. *Jene (VN) Komplexstrahlen, die durch das singuläre Flächenbüschel $|F^2_M| \subset |MF^2|$ bestimmt sind und deren Punkte Z im Punkt $M \in k^6$ liegen, bilden eine Kegelfläche* 3. *Grades, die in Strahlbüschel (M) in der Ebene (M, m) und in eine Kegelfläche ${}_2M$* 2. *Grades zerfällt. Die Punkte I dieser Strahlen bilden in der Ebene (M, m) eine Kurve i^3_M* 3. *Ordnung, deren zweifache Punkt im Punkt M liegt.*

Die Kegelfläche ${}_2M$ durchdringt jede der Kegelflächen des Büschels (M^2) in je vier Erzeugenden, unter denen eine immer die Gerade m_k als ein Teil der zerfallenen Grundkurve dieses Büschels (M^2) ist. Die übrigen drei Erzeugenden derselben Kegelfläche, die durch ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind, sind jenen Punkten der Geraden m zugeordnet, die auch die Punkte jener Kurve i^3 sind, die das betreffende Büschel (F^2) ordnet (Satz D2).

Wenn in Betracht genommen wird, daß der Polartetraeder des Büschels (F^2_M) in die zweifache Ebene (M, m) ausartet, und daß in Punkt M zwei seine Punkte fallen, erhalten wir auch eine Verallgemeinung:

SATZ D4. *Eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade ist ein solcher zweideutiger (VN)-Komplexstrahl, den das Büschel $(F_M) \subset (MF^2)$ ordnet, dessen Punkt I und Punkt Z sich im Punkt M befinden.*

In Allgemeinen kann man behaupten:

SATZ D5. *Jene durch ein Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmten Strahlen (VN), die im Punkt $M \in k^6$ den Punkt Z haben und deren Punkte I eine*

Kurve i^3 3. Ordnung in der dem Punkt M gegenüberliegenden Seitenebene des Polartetraeders haben, bilden eine Kegelfläche 3. Grades des Scheitelpunktes M. Alle solchen Kegelflächen 3. Grades, die die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmen, bilden eine Gesamtheit der ∞^1 Kegelflächen 3. Grades mit drei gemeinsamen Erzeugenden, die mit den Achsen der Kegelfläche M^2 übereinstimmen. Diese Achsen sing solche ∞^1-deutigen Strahlen (VN), die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte I längs dieser Achsen liegen. Eine jede beliebige den Punkt M enthaltende Gerade ist die Erzeugende je zwei der erwähnten regulären Kegelflächen 3. Grades, die je zwei reguläre Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmen.

Durch die Verbindung der Sätze D3, D4 und D5 folgt:

SATZ D6. *Eine beliebige den Punkt M enthaltende Gerade ist ein solcher vierdeutiger (VN) Komplexstrahl, dem der gemeinsame Punkt Z im Punkt M liegt und der durch zwei reguläre Flächenbüschel $(F^2) \subset (MF^2)$ und durch ein singuläres Büschel (F^2_M) bestimmt ist. Eine Ausnahme bilden die Strahlen des Büschels (M) in der Ebene (M, m), die durch ein reguläres Büschel $(F^2) \subset (MF^2_M)$ und durch das singuläre Büschel (F^2_M) bestimmt sind.*

Da die erwähnten ∞^1 Kurven i^3 auf allen Kegelflächen (M, i^3) nichtabbrechend verbunden sind, bilden sie eine Fläche $\mathscr{I}_M$. Auf dieser Fläche befinden sich, wie bisher gezeigt wurde, die Achsen der Fläche $M^2 \subset /F^2$, dann die Kurve k^6, da je drei ihre Punkte auf jeder der Kurven i^3 in den Ebenen des Ebenenbüschels $[m]$ liegen, und die Gerade m, als die einfachen.

Die Ordnung dieser Fläche $\mathscr{I}_M$ werden wir durch die Anzahl der Durchstosspunkte mir einer beliebigen Geraden s bestimmen. Die Gerade s ist als eine Gesamtheit der Punkte I jener Strahlen (VN) aufzufassen, die alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnen, und danach ist die Anzahl jener ihrer Punkte I zu bestimmen, deren zugeordnete Punkte Z im Punkt M liegen. Zweckmäßig ist deshalb jene den Punkt M enthaltenden (TK) Komplexstrahlen zu bestimmen, die den Punkten der Geraden s zugeordnet sind. Da der Punkt M der gemeinsame Eckpunkt aller Polartetraeder der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ist, können den Punkt M nur jene Strahlen (TK) enthalten, die jenen Punkten zugeordnet sind, welche in dem Eckpunkt M gegenüberliegender Tetraederseitenebenen des betreffenden Büschels (F^2) liegen.

Da die Gerade s eine jede der Ebenen des Ebenenbüschels $[m]$ in genau einem Punkt durchsetzt, ist einem jeden Punkt $T \in s$ je ein den Punkt M enthaltender und durch genau ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmter Strahl (TK) zugeordnet. Daraus folgt, daß die Punkte $T \in s$ der Punktreihe (s) und die Ebenen des Büschels $[m]$, und damit auch die Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) und die den Punkt M enthaltenden Strahlen (TK) in einer bijektiven Zuordnung sind. Alle diesen Komplexstrahlen (TK) sind die Erzeugenden einer Kegelfläche 3. Grades mit dem Scheitelpunkt im Punkt M. Es ist nämlich bekannt, daß die, bezüglich des Bündels $(F^2$, den Punkten der Geraden r konjugiertzugeordneten Punkte eine Raumkurve s^3 3. Ordnung bilden, und die Verbindungsgeraden ihrer Punkte mit dem Punkt M sind die Erzeugenden der erwähnten Kegelfläche.

Die Punkte Z jener Strahlen (VN), deren Punkte I auf der Geraden s liegen, werden auf die übliche Weise bestimmt. Die Fernpunkte der Erzeugenden der Kegelfläche (M, s^3) bilden eine Kurve 3. Ordnung, und die ihnen bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p hüllen eine Kurve 3. Klasse ein. Die Ebenen, die durch die Punkte der Geraden s und durch die ihnen bijektiv zugeordneten Polaren p aufgespannt sind, bilden auf Grund des Chasleschen

Korrespondenzprinzips eine Hülltorse T^4 4. Klasse. Eine jede dieser Ebenen ist auf die sich zugeordnete Erzeugende der Kegelfläche (M, s^3) senkrecht gelegt und schneidet sie im Punkt Z jenes Strahles des Komplexes (VN), dessen Punkt I im zugeordneten Punkt der Geraden s liegt. Die Ebenen der Hülltorse T^4 4. Klasse und die ihnen bijektiv zugeordneten Erzeugenden der Kegelfläche (M, s^3) 3. Grades schneiden sich auf Grund des Chasleschen Korrespondenzprinzips in Punkten einer Kurve z^7 7. Ordnung. Da uns nur jene (VN) Komplexstrahlen interessieren, deren Punkte I auf der Geraden s liegen und deren Punkte Z sich im Punkt M befinden, wird die Kurve z^7 mit der Ebene (M, s) in 7 Punkten geschnitten, während diese Ebene die Kegelfläche (M, s^3) in drei Erzeugenden schneidet. Dies bedeutet, daß sich in der Ebene (M, s) sieben solche Strahlen (VN) befinden, deren Punkte I auf der Geraden s sind, aber nur vier unter diesen haben den Punkt Z im Punkt M, während die Punkte Z der übrigen drei Strahlen an drei Schnitterzeugenden der erwähnten Kegelfläche liegen. Daraus folgt, daß die Gerade s die gesuchte Fläche $\mathcal{I}_M$ in vier Punkten durchsetzt bzw., daß die Ordnung dieser Fläche vier ist.

SATZ D7. *Die Strahlen aller durch die Büschel* $(F^2) \subset (MF^2)$ *bestimmten Komplexe* (VN), *deren Punkte* Z *im Punkt* M *liegen und die die Kegelflächen aus dem Satz* D5. *bilden, haben die Punkte* I *auf einer Fläche* $\mathcal{I}_M$ 4. *Ordnung. Diese Fläche bildet die* ∞^1 *Kurven* i^3 *in den Ebenen des Ebenenbüschels* $[m]$. *Auf der Fläche* $\mathcal{I}_M$ *befinden sich: Drei Achsen der Kegelfläche* M^2, *dann die Kurve* k^6 *und die Gerade* m, *alle als die einfachen.*

b) Die Gerade m als die Gesamtheit der Punkte I der Komplexstrahlen (VN)

Es ist bekannt, daß jene durch ein Büschel (F^2) bestimmten Komplexstrahlen (VN), deren Punkte I auf einer belibigen Geraden s liegen, eine Regelfläche P^6 6. Grades bilden, während die Punkte Z dieser Strahlen eine Kurve z^5 5. Ordnung bestimmen. Ist die Gerade s selbst ein (TK)-Komplexstrahl, dann bilden die, diesen Punkten zugeordneten Strahlen (TK) eine Kegelfläche 2. Grades, aber die Regelfläche P^6 der Strahlen (VN) und die Z-Punktkurve z^5 5. Ordnung bleiben unzerfallen [15].

Fassen wir die Punkte der Geraden m als die Gesamtheit der Punkte I jener Strahlen (VN) auf, die die Gesamtheit (MF^2) ordnet dann bilden solche Strahlen, bezüglich ein jedes der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$, je eine Fläche 6. Grades, und die ihnen zugeordneten Punkte Z bilden je eine Kurve z^5 5. Ordnung. Jede dieser Kurven befindet sich auf je einer Kegelfläche des Büschels (M^2) und ist durch dasselbe Büschel (F^2) bestimmt, das auch die Erzeugenden dieser Kegelfläche, als die den Punkten der Geraden m zugeordneten Strahlen (TK) ordnet [17]. Alle nichtabbrechend verbundenen Punkte Z der Kurven z^5 auf den Kegelflächen des Büschels (M^2) bilden eine Fläche (Z, I_m), und die zugeordneten Strahlen des Komplexes (VN) bilden eine Kongruenz (K, I_m). Bestimmen wir einige Eigenschaften und die Ordnung der Fläche (Z, I_m), dann die Ordnung und die Klasse der Kongruenz (K, I_m).

Die Fläche (Z, I_m)

Die Entstehung der Fläche (Z, I_m) kann man auf zwei Arten betrachten. Im ersten Fall ist diese Fläche, wie schon erwähnt, als eine Gesamtheit der Kurven

z^5 aufzufassen, wobei die Punkte einer jeden dieser Kurven den Punkten der Punktreihe $T \in m$, bezüglich der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$, zugeordnet sind.

Im zweiten Fall wird ein Punkt $T \in m$ ausgewählt, und die Strahlen $t = \varphi(T)$, $/\forall (F^2) \subset (MF^2)$ werden bestimmt, [17]. Alle Strahlen t bilden ein Strahlbüschel (M) in jener Ebene H des Ebenenbüschels $[m_k]$, die dem Punkt T, bezüglich der Kegelfläche M^2, zugeordnete Polarebene ist. Die aus dem Punkt T auf die Strahlen t des Büschels (M) gelegten Senkrechten schneiden, wie bekannt, diese Strahlen in den Punkten eines Kreises, der auch den Punkt M enthällt, und die Gerade m_k, außer im Punkt M, in noch einem Punkt schneidet.

Das Analoge gilt für einen beliebigen Punkt $T \in m$ und die ihm zugeordnete Ebene H des Ebenenbüschels $[m_k]$.

Eine Ausnahme bilden doch die Punkte $M_n \in m$ $(n = 1, 2, 3)$. Wie bekannt, bilden die zugeordneten Strahlen (TK) kein Strahlbüschel (M) in je einer Ebene H_n $(n = 1, 2, 3)$ des Büschels $[m_k]$, da alle einem jeden dieser Punkte zugeordneten und durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (TK) in einen Strahl m_n $(n = 1, 2, 3)$ fallen. Dieser Strahl enthält den Punkt M und ist eine Trisekante der Kurve k^6 [17]. Da aus den Punkt M_n nur eine Senkrechte auf die Gerade m_n $(n = 1, 2, 3)$ gelegt sein kann, folgt, daß jene (VN)-Komplexstrahlen, die im Punkt M_n $(n = 1, 2, 3)$ den Punkt I haben und die durch die Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind, in einen ∞^1-deutigen Strahl zusammenfallen, und im Schnittpunkt mit dem Strahl m_n $(n = 1, 2, 3)$ den gemeinsamen Punkt Z haben. Die Kreise dieser Punkte Z arten also in je zwei, sich auf der Geraden m_n $(n = 1, 2, 3)$ schneidende isotropen Geraden 1. Art aus.

Die Gerade m_k befindet sich als eine einfache auch auf der Fläche (Z, I_m). Es ist bekannt, [17], Satz B2, daß die Gerade m_k ein solcher ∞^1-deutiger Strahl des Komplexes (TK) ist, der den Punkten der Geraden m zugeordnet wird und den die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnen. Es sei noch erwähnt, daß unter der Punktreihe (m) und der Büschelreihe $(F^2) \subset (MF^2)$ eine bijektive Zuordnung besteht. Die aus den Punkten der Geraden m auf den Strahl m_k gelegten Senkrechten schneiden diesen Strahl in einem jeden seiner Punkte, so daß auch unter den Punktreihen (m) und (m_k) eine bijektive Zuordnung besteht. Jene (VN)-Komplexstrahlen, deren Punkte I auf der Geraden m liegen, und deren Punkte Z auf der Geraden m_k sind, sind also mit einer, auf der Geraden m_k senkrechten Ebene parallel und bilden einen Regulus des hyperbolischen Paraboloides.

Die gesuchte Fläche (Z, I_m) schneiden also die Ebenen des Büschels $[m_k]$ in solchen Kurven 3. Ordnung, die in die Gerade m_k und in je einen Kreis zerfallen. Drei dieser Kreise zerfallen in je zwei isotrope Geraden 1. Art und bestimmen die auf der Geraden m_n $(n = 1, 2, 3)$ liegenden Kreispunkte der Fläche (Z, I_m). Ein jeder der übrigen Kreise schenidet reel die Gerade m_k außer im Punkt M in noch je einem Punkt, der sich mit der Änderung der Ebene des Büschels $[m_k]$ auch selbst ändert. Da ein jeder dieser Kreise auch die Ferngerade seiner Ebene in den absoluten Punkten schneidet, folgt, daß die Fläche (Z, I_m) den absoluten Kegelschnitt enthalten muß.

Daraus könnte folgen, daß die Ordnung der Fläche (Z, I_m) gleich drei ist. Um dies auch zu beweisen, wird diese Fläche mit einer beliebigen Ebene R geschnitten. Diese Ebene schneidet auch das Kegelflächenbüschel (M^2) in einem Kurvenbüschel (k^2) 2. Ordnung dem ein der vier Grundpunkte im Schnittpunkt mit der Geraden m_k liegt. Wie bekannt, die Erzeugenden einer jeden der erwähnten Kegelflächen sind die Strahlen $t = \varphi(T)$, $\forall T \in m$, die je ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$

ordnet, und auf einer jeden dieser Kegelflächen liegt eine Kurve z^5 der Punkte Z jener Strahlen (VN), deren Punkte I auf der Geraden m liegen. Daraus folgt, daß sich auf einer beliebigen Schnittkurve k^2 in der Ebene R je fünf Punkte Z befinden, die genau diesem Kegelschnitt k^2 zugeordnet sind, und noch je ein Punkt Z im Schnittpunkt dieses Kegelschnittes mit der Geraden m_k liegt. Alle solchen in der Ebene R liegenden Punkte Z bilden eine Schnittkurve, die mit einer jeden der Kurven eines Kegelschnittkurvenbüschels (k^2) sechs gemeinsame Punkte hat. Auf Grund des Chasleschen Korespondenzprinzips behauptet man, daß die Ordnung dieser Schnittkurve gleich drei ist. Da weiterhin die Ebene R eine beliebige ist, folgt, daß die Ordnung der Fläche (Z, I_m) gleich drei ist.

Die Fernebene schneidet die Fläche (Z, I_m) außer im absoluten Kegelschnitt in noch einer Geraden z^1. Diese Gerade ist eine Gesamtheit der Punkte Z jener Fernstrahlen des Komplexes (VN), deren Punkte I im Fernpunkt T_m der Geraden m liegen. Die Strahlen

$$t = \varphi(T_m), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$$

bilden nämlich ein Strahlbüschel (M) in einer Ebene H_m des Büschels $[m_k]$. Die dem Fernpunkt dieser Strahlen, bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p, bilden ein Fernstrahlbüschel und seine Strahlen spannen mit dem Punkt T_m immer dieselbe Fernebene. Diese schneidet die Strahlen des erwähnten Büschels (M) in seinen Fernpunkten, so daß der Kreis der Punkte Z in der Ebene $H_m \equiv (M, z^1) \equiv (m_k, z^1)$ in die Ferngerade z^1 entartet.

Die Gerade z^1 schneidet das absolute Kegelschnitt in zwei konjugiertimaginären Punkten, die J und K genannt seien. Die untereinander parallelen Ebenen des Büschels $[z^1]$ schneiden die Fläche (Z, I_m) außer in der Geraden z^1 in noch einem Kegelschnitt, der auch die Punkte J und K des absoluten Kegelschnittes enthalten muß und so folgt, daß diese Schnittkurven Kreise sind.

Auf der Fläche (Z, I_m) sind demnach zwei Systeme der Kreisschnitte. Ein ist durch die Ebenen des Büschels $[m_k]$ bestimmt, während das andere in parallelen Ebenen des Büschels $[z^1]$ liegt. Da im ersten Fall der gemeinsame Punkt aller Kreise der Punkt $M \in m_k$ ist, und in zweitem, alle Kreise die Punkte $J \in z^1$ und $K \in z^1$ enthalten, folgt, daß der eigentliche Punkt M und die konjugiert imaginäre Punkte J und K des absoluten Kegelschnittes drei zweifache Punkte der Fläche (Z, I_m) sind.

Eine solche, den absoluten Kegelschnitt enthaltende Fläche, die einen eigentlichen und zwei auf dem absoluten Kegelschnitt liegende Doppelpunkte hat, ist auch als eine sphärische Fläche (Kugelfläche) 3. Ordnung bekannt [1], [3], [5], [6], [12].

Es ist weiterhin bekannt, daß eine Fläche 3. Ordnung unter den 27 Geraden, mindestens 3 reele Geraden enthalten muß. Einige von diesen können aber mehrdeutig sein odre zusammenfallen. Eine beliebige Ebene schneidet die sphärische Fläche in einer zyrkulärkurve 3. Ordnung und ihre Asymptote hat den Fernpunkt in ihrem Schnittpunkt mit der Ferngeraden der Fläche.

Im Fall der sphärichen Fläche (Z, I_m) enhält solche Asymptotenebene die eigentliche Gerade m_k und die zwei in die Ferngerade z^1 zusammenfallenden Geraden. Da die Fläche (Z, I_m) außer der erwähnten Geraden m_k und z^1 keine reelen Geraden enthalten kann, sind alle übrigen Geraden dieser Fläche imaginär, und als die eindeutigen oder mehrdeutigen Geradenpaare enthalten die Kreispunkte und die Doppelpunkte der Fläche (Z, I_m).

Die Symmetrieebene der Fläche (Z, I_m) enthält die Mittelpunkte der Kreise in den Ebenen de; Büschels $[z^1]$.

Vergleichen wir die Eigenschaften der sphärischen Fläche aus [5] und [12] mit den Eigenschaften der Fläche (Z, I_m), sind doch bestimmte Unterschiede zu bemerken. Auf einer sphärischen Fläche, die als die Fußpunktfläche eines Rotationsparaboloides entstanden ist, liegen vier Kreispunkte, während der reele Doppelpunkt auch zweideutig als Kreispunkt gilt, der aber nicht auf der reelen eigentlichen Geraden dieser Fläche liegt. Zum Unterschied dagegen, liegt der reele zweifache Punkt M der Fläche (Z, I_m) auf der einzigen eigentlichen Geraden m_k und ist kein Kreispunkt.

Die Ordnung der Kongruenz (K, I_m)

Alle (VN)-Komplexstrahlen, deren Punkte I auf der Geraden m liegen, bilden eine Kongruenz. Ihr Ordnung ist durch die Anzahl ihrer den beliebigen Punkt S enthaltenden Strahlen bestimmt. Da ein jeder solche Strahl auch die Gerade m schneiden muß, werden uns nur jene in der Ebene (S, m) liegenden Strahlen interessieren. Diese Ebene schneidet auch die Fläche (Z, I_m) in einer Zyrkulärkurve z^3 3. Ordnung. Dabei sind einem beliebigen Punkt $T \in m$ zwei Punkte der Kurve z^3 zugeordnet, u. zw. jene, in denen die Ebene (S, m) jenen Kreis schneidet, der auf die beschriebene Weise dem Punkt $T \in m$ zugeordnet is: und der in einer Ebene des Büschels $[m_k]$ liegt, während einem beliebigen Punkt der Kurve z^3 genau ein Punkt der Geraden m zugeordnet ist. Da die Ebene (S, m) in allgemeinen keinen Singulärpunkt der Fläche (Z, I_m) enthält, besteht in den erwähnten Zuordnungen keine Ausnahme. Auf Grund des Chasleschen Korrespondenzprinzips folgt, daß jene (VN)-Komplexstrahlen, die die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnen, deren Punkte I auf der Geraden m liegen und deren Punkte Z eine Kurve z^3 3. Ordnung bilden, eine in de- Ebene (S, m) liegende Kurve 5. Klasse einhüllen. (D. h. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$). Dies bedeutet, daß den beliebigen Punkt S fünf solche Strahlen enthalten, bzw., daß die Ordnung der Kongruenz (K, I_m) gleich fünf ist.

Die Klasse der Kongruenz (K, I_m) ist durch die Anzahl jener ihren in einer beliebigen Ebene R liegenden Strahlen bestimmt. Diese Ebene schneidet die Gerade m in einem Punkt T. In der Ebene R können deshalb nur jene, den Punkt T enthaltenden Kongruenzstrahlen liegen. Wie bekannt, ist der Punkt T der Scheitelpunkt einer Kegelfläche 2. Grades. Die Erzeugenden dieser Fläche sind jene Strahlen (VN) deren zugeordnete Punkte Z auf einem Kreis in einer Ebene des Büschels $[m_k]$ liegend. Da die Ebene R den erwähnten Kreis in genau zwei Punkten hneidet ist auch die Anzahl der Kongruenzstrahlen in der Ebene R und damit auch die Klasse dieser Kongruenz gleich zwei.

SATZ D8. *Jene (VN) Komplexstrahlen, die durch die Büschelreihe $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte I auf der Geraden m liegen, bilden eine Kongruenz* (K, I_m) 5. *Ordnung und* 2. *Klasse.*

Die Punkte Z dieser Strahlen (VN) bilden eine, den absoluten Kegelschnitt enthaltende sphäriche Fläche (Z, I_m) 3. *Ordnung, die drei Kreispunkte und drei Doppelpunkte enthält. Ein dieser Doppelpunkte liegt im Punkt M und die übrigen zwei auf dem absoluten Kegelschnitt. Auf dieser Fläche sind auch zwei Systeme der Kreisschnitte. Die Kreise eines dieser Systeme liegen in den Ebenen des Büschels $[m_k]$, während das andere System die Kreise in den paralellen Ebenen bilden, da alle diesen Kreise die erwähnten Punkte des absoluten Kegelschnittes enthalten. Die Mittelpunkte* *der Kreise dieses zweiten Systems liegen in der Symmetrieebene der Fläche* (Z, I_m). *Eine der drei reelen Geraden dieser sphärischen Fläche ist die Gerade* m_k, *während die übrigen zwei zusammenfallenden Ferngeraden die erwähnten absoluten Punkte verbinden.*

Ein beliebiger Punkt der Geraden m *ist als eine Gesamtheit der Punkte* I *solcher Strahlen* (VN) ∞^1*-deutig.*

c) Die Gerade m_k als eine Gesamtheit der Punkte I der (VN)—Komplexstrahlen

Auf Grund der Sätze B5, B6 und B7 aus [17] folgt, daß die (TK)-Strahlen

$$t = \varphi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$$

für einen beliebigen $T \in m_k$ ein Strahlbüschel (T_r) $(T_r \in k)$ in der Ebene (M, m) bilden, und auf Grund des Satzes B1 [17] folgt, daß die dem Punkt M zugeordneten und durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (TK) einen linearen singulären Komplex mit der Leitgreaden m bilden, wobei auch

$$m = \varphi(M), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$$

Geltung hat. Jene Strahlen dieses singulären Komplexes, die ein dieser Büschel (F^2) ordnet, bilden eine Kongruenz (0, 1) in jener Ebene des Büschels $[m]$, die dem Punkt M bezüglich dieses Büschels polar zugeordnet ist. Es sei noch erwähnt, daß die Gerade k eine Gesamtheit jener, den Punkten der Geraden m_k bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte ist [17].

Da der Punkt $M \in m_k$ als eine Gesamtheit der Punkte I, bzw. Punkte Z der Strahlen (VN) in Da) betrachtet wurde, werden uns jetzt die übrigen Punkte $T \in m_k$ als Punkte I der Strahlen (VN) interessieren.

Ein beliebiger Punkt $T \in m_k$ ist der Scheitelpunkt einer Kegelfläche 2. Grades jener Strahlen (VN), deren Punkte Z auf einem Kreis k_z^2 in der Ebene (M, m) liegen. Dies ist evident wenn wir in Betracht nehmen, daß die (VN) Komplexstrahlen jene Geraden sind, die aus dem Punkt T auf die erwähnten Büschelstrahlen (T_r) gelegten Senkrechten sind. Die Gerade m schneidet den Kreis k_z^2 in zwei Punkten, was weiterhin bedeutet, daß den Punkt T jene zwei Strahlen (VN) enthalten, deren Punkte Z auf der Geraden m liegen. Diese zwei Strahlen sind durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt, u. zw. durch jene, die auch jene Strahlen (TK) des Büschels (T_r) ordnen, auf denen die Punkte Z liegen. Ändert der Punkt $T \in m_k$ seine Stellung, ändert sich auch der Punkt T_r und auch der zugeordnete Kreis k_z^2.

Es stellt sich die Frage: Schneiden sich je zwei dieser Kreise oder auch alle in denselben zwei Punkten der Geraden m, oder schneidet ein jeder dieser Kreise die Gerade m in zwei verschiedenen Punkten; decken die Kreise k_z^2 die ganze Ebene (M, m), und ist dabei die Ebene (M, m) eine einfache oder mehrfache?

Setzen wir voraus, alle Kreise k_z^2 der Ebene (M, m) schneiden sich in demselben zwei Punkten $T_n \in m$ $(n = 1, 2)$ schneiden, müssen wir fest und dann stellen, daß dies unmöglich ist. Der Punkt z. B. T_1 sollte dann ein Scheitelpunkt des (TK)--Strahlbüschels (T_1) sein, was weiterhin bedeuten würde, daß ein jeder seiner Strahlen einem anderen Strahlbüschel (T_r) $(T_r \in k)$ angehört. Dies hätte zur Folge, daß die Strahlen (TK) des Büschels (T_1) der Punktreihe $T \in m_k$ zugeordnet sind, aber durch genau ein Büschel (F_1^2) der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind ([17], Satz B6). Aus [15] ist es weiterhin bekannt, daß jene Strahlen (VN), die durch ein Büschel (F^2) bestimmt sind und deren Punkte I auf einer den Scheitelpunkt der Singulärfläche enthaltender Geraden liegen, solche Regelfläche 6. Grades bilden, die in eine Fläche 4. Grades und die in Kegelfläche 2. Grades zerfällt. Die Punkte Z dieser Strahlen (VN) bilden eine Zyrkulärkurve 3. Ordnung 0. Geschlechtes und einen Kreis.

Da auch die Gerade m_k eine solche den Scheitelpunkt M der gemeinsamen Kegelfläche M^2 aller Büschel $/F^2/ \subset /MF^2/$ enthaltende Gerade ist, können wir diese bekannten Resultate auch in unserem Fall verwenden. Dabei ist der Punkt M primär als ein Punkt der Geraden m_k und erst sekundär als ein Kegelflächenscheitelpunkt bzw. gemeinsamer Eckpunkt aller Polartetraeder der Gesamtheit (MF^2) aufzufassen.

Die den Punkten der Geraden m_k als Punkten I zugeordneten und durch ein Büschel $(F_1^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Punkte Z bilden also in der Ebene (M, m) eine Zyrkulärkurve c_z^3 3. Ordnung mit dem zweifachen Punkt im Punkt T_1 und die dem Punkt $M \in m_k$ zugeordneten Punkte Z bilden einen Kreis, der in jener Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ liegt, die diesem Eckpunkt M gegenüberliegende Tetraederseitenebene ist. Dies hat zur Folge, daß auf der Geraden m_k *zwei* solche Punkte I zweier Strahlen (VN) liegen, deren gemeinsame Punkt Z im Punkt T_1 liegt, und beide dieser Strahlen durch dasselbe Büschel (F_1^2) bestimmt sind. Es ist klar, daß die analogen Folgerungen für einen jeden Punkt der Geraden m Geltung haben.

Die Gerade $m = \varphi(M), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$ selbst ist der Strahl eines jeden in der Ebene (M, m) liegenden Büschels (T_s), $\forall (T_s) \in m$. Die Strahlen je eines dieser Büschel (T_s) sind die den Punkten der Geraden m_k zugeordneten Strahlen (TK), die durch je eines der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind [16]. Genau eine Senkrechte kann aus dem Punkt M auf die Gerade m gelegt werden. Der Schnittpunkt Z_m dieser Senkrechte mit der Geraden m ist der gemeinsame Punkt jener Zyrkulärkurven c_z^3 3. Ordnung, die durch ein jedes der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und die jene, den Punkten I längs der Geraden m_k zugeordnete Punkte Z bilden. Die Gerade m schneidet deshalb jede der Zyrkulärkurven in der Ebene (M, m) im Punkt Z_m und die ihrem zweifachen Punkt.

SATZ D9. *Ein beliebiger Punkt $T \in m_k$ ist der Punkt I solcher zwei Strahlen (VN), deren zugeordnete Punkte Z auf der Geraden m liegen. Diese Strahlen sind aber durch zwei verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt. Je zwei Punkte der Geraden m_k sind solche Punkte I der Strahlen (VN), deren zugeordnete Punkte Z im denselben Punkt der Geraden m liegen und durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind. Dabei ist der Punkt M als ein regulärer Punkt der Geraden m_k aufzufassen.*

Die Behauptung des Satzes D9 ist in keinem Gegensatz mit jener aus [15] bekannten Tatsache, daß ein beliebiger Raumpunkt T der Punkt Z jener drei Strahlen (VN) ist, deren Punkte I auf dem Strahl $t = \varphi(T), / (F^2)$ liegen.

Auf der Geraden m_k sind auch drei Punkte I der Drei, durch ein Büschel $(F_n^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (VN), deren gemeinsame Punkt Z in einem Punkt $T_n \in m$ liegt. Ein dieser Punkte I liegt aber im Punkt $M \in m_k$, der jetzt als ein Polartetraedereckpunkt des Büschels (F_n^2) aufzufassen ist.

Stellen wir noch heraus, daß ein beliebiger Punkt S der Ebene (M, m) ein Punkt Z solcher zwei Strahlen (VN) ist, deren Punkte I im verschiedenen Punkten der Geraden m_k liegen und durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind. Dabei ist aber der Punkt $M \in m_k$ als ein regulärer Punkt dieser Geraden zu betrachten.

Ein beliebiger Punkt S der Ebene (M, m) ist der Träger eines in der Ebene (M, m) liegenden (TK)-Strahlbüschels (S), wobei der Schnittpunkt eines jeden dieser Strahlen mit der Geraden k zeigt, welchem Punkt $T \in m_k$ dieser Strahl zugeordnet ist, und sein Schnittpunkt mit der Geraden m ordnet, durch welches der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ er als ein Strahl (TK) bestimmt ist ([17], Satz B8). Es ist klar, daß die Strahlen (TK) des Büschels (S), die Punkte der Reihe (m_k) und die Büschel (F^2) der Büschelreihe (MF^2) einander eindeutig bestimmen, und daß dabei ein jedes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ in Betracht genommen ist. Auch hier ist auf übliche Weise leicht zu beweisen, daß die, aus den Punkten der Geraden m_k auf die ihnen zugeordneten Strahlen des Büschels (S) gelegten Senkrechten, diese in Punkten einer in der Ebene (M, m) liegenden Zyrkulärkurve 3. Ordnung schneiden. Diese Kurve hat, wie bekannt, den zweifachen Punkt im Punkt S und ist durch die Punkte Z jener Strahlen (VN) gebildet, die längs der Geraden m_k die Punkte I haben. Dies hat zur folge, daß ein beliebiger Punkt S der Ebene (M, m) ein Punkt der Z zwei verschiedenen Strahlen (VN) ist, die durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind.

Auf Grund des Gesagten folgt, daß die Punkte Z jener Strahlen (VN), deren Punkte I auf der Geraden m_k liegen und die durch ein jedes der Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ bestimmt sind, die zweifache Ebene (M, m) bilden. Die Gerade m_k ist dabei als eine Gesamtheit der Punkte I ∞^1-deutig.

Alle Strahlen $o = \psi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2)\ \forall\ T \in m_k$ bilden deshalb eine Kongruenz (K, I_{mk}). Um die Ordnung und Klasse dieser Kongruenz bestimmen zu können, wird der Punkt M als ein regulärer Punkt $M \in m_k$, also als kein gemeinsamer Eckpunkt der ∞^1 Polartetraeder der Gesamtheit (MF^2) betrachtet.

Die Ordnung der Kongruenz (K, I_{mk})

Alle einen beliebigen Raumpunkt R enthaltenden Strahlen dieser Kongruenz müssen den Punkt I auf der Geraden m_k haben und liegen deshalb in der Ebene (R, m_k). Die Punkte Z dieser Strahlen können nur auf der Schnittgeraden r der Ebenen (R, m_k) und (M, m) liegen. Unter den Punktreihen (m_k) und (r) besteht eine zwei-zweideutige Zuordnung. Einem beliebigen Punkt $T \in m_k$ sind nämlich, als dem Punkt I, zwei jene Punkte der Geraden r zugeordnet, in denen die Gerade r jenen Kreis k_z^2 schneidet, den die, dem Punkt T als dem Punkt I zugeordneten und durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Punkte Z in der Ebene (M, m) bilden. Die zwei erwähnte Punkte Z sind durch verschiedene Büschel (F^2) bestimmt. Auch ein beliebiger Punkt $S \in r$ ist der Punkt Z jener zwei Strahlen (VN), deren zugeordnete Punkte I in verschiedenen Punkten auf der Geraden m_k liegen, die aber verschieden von Punkt M sind, und die die zwei verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ verordnen. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt, daß alle Strahlen $o = \psi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2), \forall T \in m_k$, die die Punkte Z auf der Geraden r haben, eine Kurve 4. Klasse einhüllen $(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4)$. Dies hat zur folge, daß vier diese Strahlen den Punkt R enthalten, und daß die Ordnung der Kongruenz (K, I_{mk}) gleich vier ist.

Die Klasse der Kongruenz (K, I_{mk})

Alle Strahlen dieser Kongruenz, die in einer beliebigen Ebene R liegen, haben die Punkte I im Schnittpunkt T der Ebene R mit der Geraden m_k und die

Punkte Z auf der Schnittgeraden r der Ebenen R und (M, m). Da aber alle jenen Strahlen (VN), die den Punkt I im Punkt $T \in m_k$ haben, eine Kegelfläche 2. Grades bilden und die Punkte Z dieser Strahlen einen Kreis k_z^2 in der Ebene (M, m) bilden, ist es klar, daß auf der Geraden r zwei Schnittpunkte mit diesem Kreis liegen, bzw., daß sich in der Ebene R zwei, durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ bestimmte Strahlen dieser Kongruenz befinden.

SATZ D10. *Jene (VN) Komplexstrahlen, die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte I längs der Geraden m_k liegen, wo aber den Punkt $M \in m_k$ als einen regulären Punkt dieser Geraden aufzufassen ist, bilden eine Kongruenz (K, I_{mk}) 4. Ordnung und 2. Klasse. Je vier dieser, einen Raumpunkt enthaltenden, bzw. je zwei in einer beliebigen Ebene liegenden Strahlen (VN) dieser Kongruenz, sind durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt.*

Die Punkte Z aller diesen Strahlen (VN) bilden die zweifache Ebene (M, m), während die Gerade m_k als die Gesamtheit der Punkte I dieser Strahlen eine ∞^1-deutige ist.

SATZ D11. *Jene (VN) Komplexstrahlen, die durch die Büschel der Gesamtheit (MF^2) bestimmt sind, und deren Punkte I in einem Punkt $T \in m_k$ liegen, bilden eine Kegelfläche 2. Grades, während die ihnen zugeordneten Punkte Z einen Kreis in der Ebene (M, m) bilden. Es gibt keine zwei Erzeugenden dieser Kegelfläche die durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt werden.*

d) Die Gerade m als eine Gesamtheit der Punkte Z der (VN) Komplexstrahlen

Es ist bekannt, daß ein beliebiger Raumpunkt T der Punkt I jener drei durch ein Büschel (F^2) bestimmten Strahlen (VN) ist, deren Punkte I auf dem Strahl $t = \varphi(T), / (F^2)$ liegen [15].

Die Strahlen (TK) $t = \varphi(T), /(F^2) \subset (MF^2), \forall T \in m$ bilden die Erzeugenden einer Kegelfläche 2. Grades des Flächenbüschels (M^2) [17]. Auf einer jeden dieser Erzeugenden liegen je drei Punkte I jener Strahlen (VN), deren zugeordnete Punkte Z auf der Geraden m liegen. Alle diesen Punkte I bilden eine den Punkt M enthaltende Raumkurve i^7 7. Ordnung, während die Gerade m als eine Gesamtheit der Punkte Z dreifach ist [15].

Nehmen wir ein jedes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ in Betracht, werden die auf die beschriebene Weise zugeordneten Strahlen (TK) die Erzeugenden der ∞^1 Kegelflächen des bekannten Büschels (M^2) bilden und die auf diesen Kegelflächen liegenden und nichtabbrechend verbundenen Kurven i^7 bilden eine Fläche (I, Z_m). In diesem Fall ist die Gerade m als eine Gesamtheit der Punkte Z der Strahlen (VN) $3 \cdot \infty^1$-deutig einzunehmen, während der Punkt M als der gemeinsame Scheitelpunkt aller ∞^1 Kurven i^7 auf der Fläche (I, Z_m) ∞^1-deutig ist.

Die Entstehung der Fläche (I, Z_m) ist auch aus einem anderen Standpunkt möglich. Es ist bekannt, daß die einem beliebigen Punkt $T_s \in m$ zugeordneten Strahlen

$$t_s = \varphi(T_s), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$$

ein Strahlbüschel (M) in einer Ebene $\mathscr{T}_s$ des Ebenenbüschels $[m_k]$ bilden. Auf einem beliebigen dieser Strahlen liegen je drei Punkte I jener drei Strahlen (VN), deren gemeinsamer Punkt Z im Punkt T_s liegt und die durch eines der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind. Ein der drei erwähnten Punkte I liegt immer im Punkt M. Alle nichtabbrechend verbundene Punkte I auf allen Strahlen (TK) des Büschels (M) bilden eine Kurve, die zusammen mit der zweifachen Geraden m_k (Satz D9) die Schnittkurve der Ebene $\mathscr{T}_s$ und der Fläche (I, Z_m) bilden.

Um die Ordnung der Fläche (I, Z_m) bestimmen zu können wird die Anzahl der Durchstosspunkte dieser Fläche mit einer beliebigen Raumgeraden e bestimmt. Uns wird deshalb die Anzahl jener durch die Gesamtheit (MF^2) bestimmten Strahlen (VN) interessieren, deren Punkte I auf der Geraden e liegen und deren Punkte Z sich auf der Geraden m befinden.

Könnte der Punkt Z eines Strahles (VN) auf der Geraden m und der Punkt I dieses Strahles auf der Geraden e liegen, mußte der diesem Punkt I, bezüglich eines der Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ zugeordneter Strahl (TK) diesen Punkt Z enthalten.

Deswegen werden uns nur jene durch die Gesamtheit (MF^2) bestimmten die Gerade m schneidenden und den Punkten der Geraden e zugeordneten Strahlen (TK) interessieren.

Alle Strahlen $s = \varphi(S), /\forall (F^2) \subset (MF^2), S \in m$ sind die Erzeugenden der Kegelflächen des Büschels $/M^2/$ 2. Grades mit dem gemeinsamen Scheitelpunkt M ([17], Satz B3). Die den Punkten der Geraden m bezüglich der Kegelfläche $M^2 \subset \subset /MF^2/$ zugeordneten Polarebenen bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel $[m_k]$. Die beliebige Gerade e durchsetzt eine jede dieser Kegelflächen des Büschels $/M^2/$ in je zwei Punkten, ein jeder Punkt der Geraden e liegt aber auf einer diesen Kegelflächen und in einer Ebene des Ebenenbüschels $[m_k]$. Man kann aus diesem Grunde behaupten, daß einem beliebigen Punkt $T \in e$ genau ein, die Gerade m schneidender (TK) Komplexstrahl t zugeordnet ist. Dieser Strahl t ist durch dasselbe Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt, durch das auch jene, den Punkt $T \in e$ enthaltende Erzeugende einer Kegelfläche des Kegelbüschels (M^2) verordnet ist, und jenem Punkt der Geraden m zugeordnet, dem auch die den Punkt $T \in e$ enthaltende Ebene des Ebenenbüschels $[m_k]$ zugeordnet ist.

Es ist weiterhin bekannt, daß die den Punkten einer Geraden e bezüglich der Flächen des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte eine Raumkurve e^3 3. Ordnung bilden. Wegen der bijektiven Zuordnung der Punktreihen (e) und (e^3) und auch (e) und (m), besteht auch die bijektive Zuordnung unter der Reihen (m) und (e^3). Die Verbindungsgeraden so zugeordneter Punkte sind die den Punkten der Geraden e zugeordneten und durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (TK). Dabei sind durch dasselbe Büschel (F^2) je zwei Strahlen (TK) bestimmt. Auf Grund dessen und des Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt, daß solche Strahlen (TK) eine Regelfläche E 4. Grades $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 3)$ bilden, deren Gerade m die einfache Leitgerade ist.

Um jetzt auch die Ordnung der Fläche (I, Z_m) bestimmen zu können, wird die Anzahl jener Strahlen (VN) festgestellt, deren Punkt I auf der Geraden e und die Punkte Z auf der Geraden m liegen. Dies wird auf die übliche Weise getan.

Die Fernkurve der Fläche E ist 4. Ordnung. Die den Punkten dieser Kurve bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p bilden eine Fernkurve 4. Klasse. Die Punkte der Reihe (e) und die Tangenten p dieser Fernkurve sind bijektiv zugeordnet. Die Ebenen die durch diese zugeordneten Elemente aufgespannt sind, bilden auf Grund des Chaslesschen Prinzips eine Hülltorse 5. Klasse $(1 \cdot 1 + 4 \cdot 1)$. Die Ebenen dieser Hülltorse schneiden die ihnen bijektiv zugeordneten Erzeugenden der Fläche E 4. Grades in einer Kurve z^9 9. Ordnung $(1 \cdot 4 + 1 \cdot 5)$. Die Punkte dieser Kurve sind die Punkte Z der (VN) Komplexstrahlen $o = \psi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$, $\forall T \in e$. Dabei sind die Punkte der Reihe e und die Büschel (F^2) der Gesamtheit (MF^2) einander eindeutig zugeordnet.

Eine beliebige Ebene des Ebenenbüschels $[m]$ schneidet diese Kurve z^9 in neun Punkten und die Fläche E außer in der Geraden m in noch je drei Erzeugenden. Da auf einer jeden dieser Erzeugenden ein Punkt Z liegt, müssen sich die übrigen sechs Schnittpunkte mit der Kurve z^9 auf der Geraden m befinden. Daraus folgt, daß auf der Geraden m sechs Punkte Z jener Strahlen (VN) liegen, deren Punkte I sich auf einem beliebigen Geraden e befinden. Dies aber bedeutet, daß die Gerade e die Fläche (I, Z_m) in sechs Punkten durchsetzt, bzw. daß die Ordnung dieser Fläche gleich sechs ist.

Um dies bestätigen zu können wird eine beliebige die Gerade m_k schneidende Gerade s betrachtet, und die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit der Fläche (Z, I_m) bestimmt. Damit ist eine beliebige unter ∞^3 Sekanten der Geraden m_k ausgewählt und eine große Allgemeinheit erhalten.

Es ist klar, daß eine solche Gerade s in genau einer Ebene des Ebenenbüschels $[m_k]$ liegen muß. Diese Ebene (s, m_k) ist als eine Polarebene der Kegelfläche M^2, einem bestimmten Punkt $T_m \in m$ zugeordnet. Dies bedeutet, daß auch die Strahlen $t = \varphi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$, $T \in s$ den Punkt T_m enthalten müssen. Dabei ist noch zu betonnen, daß in der Ebene (s, m_k) ein Büschel (M) jener Strahlen $t_m = \varphi(T_m, /\forall (F^2) \subset (MF^2)$ liegt, die die Gerade s schneiden. Auf diese Weise ist ein jeder Punkt $T \in s$ dem Punkt T_m durch ein bestimmtes Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ zugeordnet. Da auch eine Umkehr Geltung hat, folgt, daß einem beliebigen Punkt $T \in s$ zugeordneter und den Punkt T_m enthaltender Strahl (TK) durch das bestimmte Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ verordnet ist. Auch die den Punkten der Geraden s bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte bilden eine Raumkurve k_s^3 3. Ordnung. Für den Zerfall dieser Kurve gibt es in Allgemeinen keine Ursache. Die Punkte $T \in s$ und die Punkte der Kurve k_s^3 sind in einer bijektiven Zuordnung und daraus folgt, daß die Strahlen

$$t_s = \varphi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2), \quad \forall T \in s$$

eine Kegelfläche (T_m, k_s^3) 3. Grades des Schneitelpunktes T_m bilden. Dem Schnittpunkt T_{sm} der Geraden s und m_k ist, bezüglich des Bündels $(F^2$, ein Punkt $K \in k$ in der Ebene (M, m) konjugiertzugeordnet, so daß die Kurve k_s^3 die Ebene (M, m) im Punkt K durchsetzt. Die Strahlen

$$t = \varphi(T_{ms}), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$$

bilden das Büschel (K) in der Ebene (M, m) ([17], Satz B7).

Jene den Punkten der Geraden s zugeordneten und die Gerade m schneidenden Strahlen (TK), die auf die beschriebene Weise die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnen, bilden also auch eine Regelfläche 4. Grades, die aber in die Kegelfläche (T_m, k_s^3) 3. Grades und in Strahlbüschel (K) in der Ebene (M, m) zerfällt. Die Gerade T_mK ist eine Erzeugende der Fläche (T_m, k_s^3) und ein Strahl des Büschels (K). Die Z-Punktkurve jener Strahlen (VN), deren Punkte I auf der Geraden s liegen, wird auf die übliche Weise, aber doch getrennt, für die Kegelfläche und das Büschel (K), betrachtet.

Die Kegelfläche (T_m, k_s^3) ist 3. Grades. Die den Punkten ihrer Fernkurve 3. Ordnung, bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiertzugeordneten Polaren p hüllen eine Kurve 3. Klasse ein. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt weiterhin, daß die durch die bijektiv zugeordneten Polaren p und die Punkte der Geraden s aufgespannten Ebenen eine Hülltorse 4. Klasse bilden. Die bijektiv zugeordneten Erzeugenden der Kegelfläche (T_m, k_s^3) und die Ebenen der Hülltorse 4. Klasse durchsetzen sich in Punkten einer Kurve z^7 7. Ordnung $(3 \cdot 1 + 4 \cdot 1)$, die die Punkte Z jener Strahlen (VN) bilden, deren Punkte I auf der Geraden s liegen. Eine beliebige Ebene des Büschels $[m]$ schneidet die Kegelfläche (T_m, k_s^3) $(T_m \in m)$ in drei Erzeugenden und die Kurve z^7 in sieben Punkten. Da auf einer jeden dieser Erzeugenden ein Punkt Z liegt, liegen die übrigen vier Schnittpunkte auf der Geraden m u. zw. in ihrem Punkt T_m, der auch der Scheitelpunkt der Kegelfläche (T_m, k_s^3) ist.

Die aus dem Punkt T_{sm} auf die Strahlen des Büschels (K) in der Ebene (M, m) gelegten Senkrechten schneiden diese Strahlen in Punkten eines Kreises den die Gerade m in zwei Punkten schneidet.

Daraus folgt, daß auf der Geraden s sechs $(4 + 2)$ solche Punkte I der Strahlen (VN) liegen, deren zugeordnete Punkte Z sich auf der Geraden m befinden, wie behauptet. Da zwei solcher Punkte I im beliebigen Punkt $T_{sm} \in m_k$ sind, folgt in allgemeinen, daß die Gerade m_k auf der Fläche (I, Z_m) eine zweifache ist.

Auf der Fläche (I, Z_m) befinden sich auch die Geraden m_n $(n = 1, 2, 3)$, die die Trisekanten der Kurve k^6 sind und die den Punkten $M_n \in m \wedge M_n \in k^6$ $(n = 1, 2, 3)$ bezüglich des Bündels $(F^2$ die konjugiertzugeordneten Punkte bilden. Für die Geraden gilt auch $m_n = \varphi(M_n), /\forall (F^2) \subset (MF^2), (n = 1, 2, 3)$. Auf Grund des Satzes B15. [17] folgt, daß die einem beliebigen Punkt $T \in m_n$ zugeordneten Strahlen $t = \varphi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$ ein Strahlbüschel (M_n) in einer den Punkt M enthaltenden Ebene G_r bilden. Die aus dem Punkt T auf die erwähnten Strahlen (TK) gelegten Senkrechten schneiden diesen in Punkten eines Kreises, der den Punkt M_n enthalten muß. Dies bedeutet, daß ein beliebiger Punkt $T \in m_n$ auch ein Punkt I eines durch ein Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahles (VN) ist, der seinen Punkt Z im Punkt M_n hat, und daß die Gerade m_n $(n = 1, 2, 3)$ auf der Fläche (I, Z_m) als eine einfache liegt.

Es ist auch bekannt, daß jene den Punkten der Geraden m_n $(n = 1, 2, 3)$ zugeordneten Strahlen (TK), die durch *ein* Büschel $(F_1^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind ein Strahlbüschel (M_n) in einer Ebene G_r bilden. Die aus den Punkten der Geraden m_n $(n = 1, 2, 3)$ auf diese Strahlen gelegten Senkrechten schneiden diese, wie bekannt, in Punkten einer Zirkularkurve 3. Ordnung mit dem zweifachen Punkt im Punkt M_n $(n = 1, 2, 3)$. Dies bedeutet, daß auf der Geraden m_n je zwei solche Punkte I der zwei, durch *dasselbe* Büschel $(F_1^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (VN) bestehen, deren Punkte Z in demselben Punkt $M_n \in m$ $(n = 1, 2, 3)$ liegen.

Dies hat weiterhin zur Folge, daß eine jede auf der zugeordneten Kegelfläche des Büschels (M^2) liegende Kurve i^7 7. Ordnung den Punkt M enthalten und die Gerade m_n $(n = 1, 2, 3)$ in noch je zwei verschiedenen Punkten durchsetzen muß.

Alle jenen (VN) Komplexstrahlen, die durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte Z auf der Geraden m liegen, bilden eine *Kongruenz* (K, Z_m).

Um die *Ordnung* dieser Kongruenz (K, Z_m) bestimmen zu können, werden jene einen beliebigen Raumpunkt R enthaltenden Kongruenzstrahlen betrachtet.

Da alle diesen Strahlen die Punkte Z auf der Geraden m haben, müssen sie allen in der Ebene (R, m) liegen. Diese Ebene schneidet die Fläche (I, Z_m) 6. Grades in einer Kurve i^6 6. Ordnung, für die bekannt ist, daß sie im Schnittpunkt mit der Geraden m_k den zweifachen Punkt hat. Uns werden jene den Punkt R enthaltenden und der Ebene (R, m) angehörenden Strahlen (VN) interessieren, deren Punkte I auf der Kurve i^6 liegen und deren Punkte Z sich auf der Geraden m befinden. Die Ebene (R, m) schneidet die Ebenen des Büschels $[m_k]$ in Geraden s eines Schnittbüschels (M_k), wo $M_k \in m_k$ ist. Auf einem jeden dieser Geraden s sind vier Punkte der Schnittkurve i^6, während der gemeinsame Punkt M_k aller Geraden s der zweifache Punkt dieser Kurve i^6 ist. Da die Geraden s in Ebenen des Büschels $[m_k]$ liegen, ist einer jeden Geraden s jener Punkt $T_m \in m$ zugeordnet, dem auch die betreffende Ebene des Büschels $[m_k]$, bezüglich der Kegelfläche M^2, zugeordnet ist. Alle diesen Behauptungen folgen direkt aus den Tatsachen, die beim bestimmung der Ordnung der Fläche (I, Z_m) in Betracht genommen wurden. In der Ebene (R, m) liegen doch zwei jene Strahlen (VN), welche die Punkte I im Punkt $M_k \in m_k$ und die Punkte Z auf der Geraden m haben; diese sind aber in allgemeinen keine den Punkt R enthaltenden Strahlen.

Einem beliebigen Punkt $T_m \in m$, der als ein Punkt Z aufzufassen ist, sind je vier Punkte I der Kurve i^6 zugeordnet. Einem beliebigen Punkt der Kurve i^6 ist aber nur ein Punkt der Geraden m zugeordnet. Auf Grund dessen und des Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt, daß die Verbindungsgeraden so zugeordneter Punkte eine Kurve 10. Klasse einhüllen $(1 \cdot 4 + 1 \cdot 6)$. Dies bedeutet, daß den beliebigen Punkt R 10 solche Geraden enthalten, bzw. daß die Ordnung der Kongruenz (K, Z_m) gleich zehn ist.

Bestimmen wir auch ihre *Klasse*. Eine beliebige Ebene A durchsetzt die Gerade m in genau einem Punkt $T \in m$. Alle Strahlen der Kongruenz (K, Z_m) haben die Punkte Z auf der Geraden m und auf diese Weise werden in der Ebene A nur jene Kongruenzstrahlen liegen, die die Punkte Z im Punkt $T \in m$ haben. Dies hat zur Folge, daß die Punkte I dieser Strahlen (VN) in der Schnittgeraden s der Ebene A mir jener Ebene des Ebenenbüschels $[m_k]$ liegen, die dem Punkt T bezüglich der Kegelfläche M^2 polarzugeordnet ist. Die Gerade s durchsetzt die Fläche (I, Z_m) in 6 Punkten. Die diesen Punkten I zugeordneten Punkte Z liegen alle auf der Geraden m, u. zw. so, daß vier von diesen im Punkt $T \in m$ liegen, während die dem Schnittpunkt T_{sm} der Geraden s und m_k zugeordneten Punkte Z in allgemeinen keine in dem Punkt T fallenden Punkte sind. Daraus folgt, daß in der Ebene A vier Strahlen der Kongruenz (K, Z_m) liegen, und die Klasse dieser Kongruenz ist gleich vier.

Die Gerade m durchsetzt die Fläche (I, Z_m) 6. Ordnung in 6 Punkten, was bedeutet, daß sich auch die diesen Punkten zugeordneten Punkte Z auf der Geraden m befinden, bzw., daß die Gerade m ein sechsdeutiger Strahl dieser Kongruenz (K, Z_m) ist.

SATZ D12. *Jene (VN) Komplexstrahlen die die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmen und deren Punkte Z auf der Geraden m liegen, bilden eine Kongruenz* 10. *Ordnung und* 4. *Klasse.*

Die nichtabbrechend verbundenen Punkte I solcher Strahlen bilden eine Fläche (I, Z_m) 6. Ordnung, auf der die Gerade m_k eine zweifache ist und die Geraden m_n $(n = 1, 2, 3)$ einfach sind. Der Punkt M ist auf dieser Fläche ∞^1-deutig.

Die Gerade m is als eine Gesamtheit der Punkte Z der Strahlen der Kongruenz (K, Z_m) $3 \cdot \infty^1$-deutig.

e) **Die Gerade m_k als eine Gesamtheit der Punkte Z der (VN) Komplexstrahlen**

Die Gerade m_k soll die Gesamtheit der Punkte Z jener, durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (VN) sein. Die Punkte I dieser Strahlen liegen auf den (TK) Komplexstrahlen $t = \varphi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2), \forall T \in m_k$ in der Ebene (M, m) ([17], Sätze B6 und B7).

Da auch der Punkt $M \in m_k$ ist und als eine Gesamtheit der Punkte Z der Strahlen (VN) im Abschnitt D a) betrachtet wurde, ist in weiteren Untersuchungen der Punkt M als ein regulärer Punkt dieser Geraden m aufzufassen. Im Endresultaten werden doch die Ergebnisse aus D a) in Betracht genommen.

In [15] wurde bewiesen, daß die I-Punktkurve i^7 7. Ordnung jener Strahlen (VN), die ein Büschel (F^2) ordnet und deren Punkte Z längs jener Geraden liegen, die einen Eckpunkt des zugeordneten Polartetraeders enthält, in eine Kurve 3. Ordnung und in eine Kurve 4. Ordnung zerfällt. Die Ebene dieser Kurve 3. Ordnung stimmt mit jener Ebene des Polartetraeders überein, die gegenüber dem erwähnten Eckpunkt liegt, während sich die Kurve 4. Ordnung in einer Ebene dieses Eckpunktes befindet.

In unserem Fall liegen alle solchen Kurven i^4 4. Ordnung, die ein jeder Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ ordnet, in der Ebene (M, m). Es stellt sich die Frage, ob alle diese Kurven die ganze Ebene (M, m) decken, und wenn dies stattgefunden ist, ist ein beliebiger Punkt dieser Fläche als Punkt I einfach oder mehrfach?

Die Gerade m ist eine hervorgehobene Gerade der Ebene (M, m). Wie bekannt, ein beliebiger ihrer Punkte ist ein solcher Punkt I, dem der zugeordnete Punkt Z im Punkt $M \in m_k$ liegt und der Punkt I noch eines Strahles (VN) ist, dessen Punkt Z aber im Schnittpunkt der Geraden m_k mit jener Senkrechte liegt, die aus dem Punkt I auf die Gerade m_k gelegt ist (D a) Satz D2 und D d)). Diese zwei Strahlen (VN) sind durch verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt.

Auf Grund des Satzes B11 [17] folgt, daß die einem beliebigen Punkt S der Ebene (M, m) zugeordneten Strahlen $t = \varphi(T), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$ ein Strahlbüschel (S_k) in der Ebene (S_k, m_k) bilden. Dabei sind die Punkte S und S_k die, bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte und ein jeder Strahl t ist durch ein anderes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt. Die aus dem Punkt S auf die Strahlen des Büschels (S_k) gelegten Senkrechten schneiden diese in Punkten eines Kreises, den die Gerade m_k in zwei Punkten schneidet. Daraus folgt, daß ein beliebiger Punkt S der Ebene (M, m) der Punkt I je zwei solcher Strahlen (VN) ist, die durch zwei verschiedene Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte Z auf der Geraden m_k liegen.

Wechselt der Punkt S seine Stellung in der Ebene (M, m) wechseln sich auch die zwei zugeordneten Strahlen (VN) mit den Punkten Z auf der Geraden m_k. Da es in der Ebene (M, m) ∞^2 Punkte gibt, man kann erwarten, daß ein beliebiger Punkt der Geraden m_k als der Punkt Z solcher Strahlen (VN) ∞^1-deutig ist. Alle solcher Strahlen (VN) bilden eine Kongruenz (K, Z_{mk}) mit der Leitgeraden m_k.

Betrachten wir doch die Gesamtheit der Punkte I jener Strahlen (VN), deren Punkte Z in einem beliebigen Punkt $S_1 \in m_k$ liegen und die durch alle Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind. Wie aus [17] B d) bekannt ist, bilden die (TK) Komplexstrahlen $t = \varphi(S_1), /\forall (F^2) \subset (MF^2)$, $S_1 \in m_k$ ein Strahlbüschel (S_{1k}) in der Ebene (M, m), wobei die Punkte S_1 und $S_{1k} \in k$ bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordnet sind. Ein jeder Strahl (TK) des Büschels (S_{1k}) ist durch ein anderes Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt. Durch das betreffende Büschel (F^2) sind auch jene drei Strahlen (VN) verordnet, die auf diesem Strahl (TK) die Punkte I haben, während der gemeinsame Punkt Z dieser Strahlen im Punkt $S_1 \in m_k$ liegt. Alle nichtabbrechend verbundenen Punkte I auf den Strahlen des Büschels (S_{1k}) bilden eine Kurve i^x, der unbekannten Ordnung x. Jene Strahlen (VN), die im Punkt S_1 die Punkte Z haben, bilden eine Kegelfläche x-tes Grades. Verändert der Punkt $S_1 \in m_k$ seine Stellung, ändert sich auch die Kegelfläche (S_1, i^x).

Die Ordnung x dieser Kurve wird auf übliche Weise durch die Anzahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer beliebigen Geraden s der Ebene (M, m) bestimmt. Die Gerade s ist als eine Gesamtheit der Punkte I der Strahlen (VN) aufzufassen und da bleibt noch die Anzahl jener Strahlen zu bestimmen, die die Punkte Z im Punkt $S_1 \in m_k$ haben. Ein beliebiger Punkt der Geraden s liegt dabei genau auf einem Strahl des Büschels (S_{1k}). Jene, den Punkten der Geraden s, bezüglich des Bündels $(F^2$ konjugiertzugeordneten Punkte bilden eine Kurve s^3 3. Ordnung. Da die Gerade s die Gerade m schneidet, enthält die Kurve s^3 den Punkt M und da die Gerade s keine den Punkt S_{1k} enthaltende Gerade ist, kann auch die Kurve s^3 den Punkt S_1 nicht enthalten. Da weiterhin die Punkte $S \in s$ der Reihe (s) und die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ in einer bijektiven Zuordnung sind, folgt, daß die durch diese Zuordnung bestimmten Strahlen $t = \varphi(T), /\forall (F^2) \subset \subset (MF^2), \forall T \in s$ eine Regelfläche 4. Grades bilden, die in eine Kegelfläche (S_1, s^3) 3. Grades und in Strahlbüschel (M) in einer Ebene des Büschels $[m_k]$ zerfällt ([17], Satz B3, P. 1). Der Strahl S_1M ist in diesen beiden Gesamtheiten gemeinsam.

Uns interessieren die Erzeugenden der Kegelfläche (S_1, s^3). Die Punkte der Reihe (s) und die Erzeugenden dieser Kegelfläche sind bijektiv zugeordnet. Die Senkrechten, die aus den Punkten der Geraden s auf die ihnen zugeordneten Erzeugenden der Kegelfläche gelegt sind, sind die Strahlen (VN) mit den Punkten I auf der Geraden s und den Punkten Z auf der Kegelfläche. Die Kurve der Punkte Z wird auf die übliche Weise betrachtet. Die Fernebene schneidet die Erzeugenden der Kegelfläche in Punkten einer Kurve 3. Ordnung, und die diesen Punkten bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p bilden eine Kurve 3. Klasse. Die Ebenen, die durch diese Polaren p und durch die ihnen bijektiv zugeordneten Punkte der Geraden s aufgespannt sind, bilden auf Grund des Chasslesschen Korrespondenzprinzips eine Hülltorse 4. Klasse. Ihre Ebenen und die ihnen bijektiv zugeordneten Erzeugenden der Kegelfläche (S_1, s^3) schneiden sich in Punkten einer Raumkurve z^7 7. Ordnung, die die Punkte Z jener Strahlen (VN) bilden, für die $o = \psi(S), /\forall (F^2) \subset (MF^2), \forall S \in s$ geltung hat.

Die Ebene (S_1, s) schneidet die Kegelfläche (S_1, s^3) in drei Erzeugenden und die Kurve z^7 in sieben Punkten. Da auf einer jeden dieser drei Erzeugenden je ein dieser Punkte Z liegt, folgt, daß die übrigen vier Punkte Z im Schnittpunkt $S_1 \in m_k$ der Kegelfläche (S_1, s^3) liegen müssen, bzw. daß die Gerade s die Kurve i^x in vier Punkten schneidet, so daß sie 4. Ordnung ist.

Es ist klar, daß die analogen Resultate für eine beliebige Gerade s der Ebene (M, m), bezüglich eines Strahlbüschels (S_{1k}), aber auch bezüglich eines beliebigen Büschels der Strahlen (TK) mit dem Scheitelpunkt in einem beliebigen Punkt der Geraden k Geltung haben. Daraus folgt:

SATZ D13. *Jene durch die Gesamtheit (MF^2) bestimmten Strahlen (VN), deren Punkte Z in einem beliebigen Punkt der Geraden m_k liegen, bilden eine Kegelfläche 4. Grades, mit dem Scheitelpunkt in dem erwähnten Punkt Z, während die Punkte I dieser Strahlen eine Kurve 4. Ordnung in der Ebene (M, m) bilden.*

Hier können wir auch ein geeignetes Vergleichen tun.

Die Punkte I jener Strahlen (VN), die durch *ein* Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte Z eine *Reihe* (m_k) bilden, bilden in der Ebene (M, m) eine Kurve 4. Ordnung. Dabei ist der Punkt $M \in m_k$ als ein regulärer Punkt dieser Geraden aufzufassen. Aber:

Die Punkte I jener Strahlen (VN), die durch die *Reihe* der Büschel $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ bestimmt sind und deren Punkte Z in *einem* Punkt der Geraden m_k liegen, bilden in der Ebene (M, m) eine Kurve 4. Ordnung.

Eine beliebige Ebene schneidet die Gerade m_k in einem Punkt, der als Punkt Z der Strahlen (VN) aufzufassen ist und schneidet die diesem Punkt zugeordnete I-Punktkurve in der Ebene (M, m) in vier Punkten. Daraus folgt, daß in dieser Ebene vier Strahlen der Kongruenz (K, Z_{mk}) liegen und die *Klasse* der Kongruenz ist gleich *vier*.

Um die *Ordnung* der Kongruenz bestimmen zu können, müssen wir jene einen beliebigen Raumpunkt R enthaltenden und in der Ebene (R, m_k) liegenden Strahlen dieser Kongruenz betrachten. Diese Ebene schneidet die Ebene (M, m) längs einer Geraden r, die den Punkt $M \in m_k$ enthalten muß.

Man kann gleich auf Grund des Satzes D6 behaupten, daß die Verbindungsgerade RM ein vierdeutiger Strahl dieser Kongruenz ist.

Die Punkte I aller übrigen Strahlen dieser Kongruenz müssen auf der Geraden r liegen. Uns wird die Klasse der Kurve jener Strahlen (VN) interessieren, deren Punkte I auf der Geraden r liegen und deren Punkte Z sich auf der Geraden m_k befinden. Der Punkt M wird dabei als ein regulärer Punkt der Geraden r und m_k betrachtet.

Wie bekannt, ein beliebiger Punkt der Geraden r ist der Punkt I je zwei jener Strahlen (VN), deren Punkte Z auf der Geraden m_k liegen, während ein beliebiger Punkt der Geraden m_k der Punkt Z von vier jener Strahlen (VN) ist, deren Punkte I sich auf der Geraden r befinden. Die Punkte der Reihen (r) und (m_k) sind deshalb in einer (2—4)-deutigen Zuordnung. Auf Grund dessen und des Chaslesschen Korespondenzprinzips folgt, daß die Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punkte eine Kurve 6. Klasse einhüllen $(1 \cdot 2 + 1 \cdot 4)$, und daß den Punkt R sechs diese Tangenten enthalten.

Daraus folgt, daß ein beliebiger Raumpunkt R sechs erwähnte und noch vier dem Punkt M zugeordnete Strahlen (Satz D7), also zehn Strahlen der Kongruenz (K, Z_{mk}) enthält. Dies bedeutet, daß die Ordnung dieser Kongruenz gleich *zehn* ist.

SATZ D14. *Jene durch die Büschel $(F^2) \subset (MF^2)$ bestimmten Strahlen (VN), deren Punkte Z längs der Geraden m_k liegen, bilden eine Kongruenz (K, Z_{mk}) 10. Ordnung und 4. Klasse. Jene dieser Strahlen, die die Punkte Z im Punkt $M \in m_k$ haben, bilden eine Kongruenz (4,0), und die Punkte I bilden eine Fläche $\mathscr{I}_M$ 4. Ordnung* (Satz D7). *Die übrigen Strahlen dieser Kongruenz (K, Z_{mk}) bilden eine Kongruenz 6. Ordnung und 4. Klasse und die zugeordneten Punkte I bilden die zweifache Ebene (M, m).*

Wenn wir die Resultate der Sätze D12 und D14 vergleichen, kann behaupten werden, daß diese im Wesentlichen übereinstimmen. Die im Satz D14 gegebenen Tatsachen zeigen uns aber deutlich, auf welche Weise die Singulärelemente den Eindruck auf die Ausartung der Kongruenz (K, Z_{mk}) und auf die Ausartung der Fläche der zugeordneten Punkte I haben.

LITERATUR:

[1] *E. Kranjčević, B. Kučinić*, Polarno-nožišne krivulje i plohe, Glasnik matematički, **4(24)** (1969), 139—156.
[2] *J. Majcen*, O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa, Rad JAZU **155** (1903), 159—172.
[3] *D. Palman*, Die Flächen 3. Ordnung mit vier Doppelpunkten, Glasnik mat.-fiz. i astr. **9** (1954), 129—150.
[4] *V. Niče*, O svežnju ploha 2. reda, Rad HAZU **274** (1942) 163—169.
[5] *V. Niče*, O nožišnim plohama rotacionog paraboloida, Glasnik mat.-fiz. i astr. **5** (1950), 1—9.
[6] *V. Niče*, Strofoidalne plohe 3. reda, SAN, knj. 2. Beograd 1952, 97—112.
[7] *V. Niče*, Über neue Eigenschaften der Büschel und der Bündel polarer Räume, Glasnik mat.-fiz. i astr. **17** (1962), 189—204.
[8] *V. Niče*, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik mat.-fiz. i astr. **2(18)** (1963), 255—268.
[9] *V. Niče*, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU **331** (1965), 145—172.
[10] *V. Niče*, Neue Beiträge zu den Eigenschaften eines Polarraumbündels, Glasnik Mat. **4 (24)** (1969), 259—274.
[11] *V. Niče*, Zusätzliche Betrachtungen mit ergänzenden Sätzen über den Tangentialwegekomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU **349** (1970), 93—107.
[12] *V. Niče*, Über die konstruktive Behandlung einer Art Kugelflächen 3. Ordnung, Glasnik Mat. **9(29)** (1974), 303—315.
[13] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, Abt. III, 1910.
[14] *V. Ščurić-Čudovan*, Singuläriteten des Majcenschen Stranhlenkomplexes, Glasnik Mat. **3(23)** (**1968**), 117—139.
[15] *V. Ščurić-Čudovan*, Der orientierte Ničesche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, I Teil, Rad JAZU **367** (1974), 151—205.
[16] *V. Ščurić-Čudovan*, Der orientierte Ničesche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, II Teil, Rad JAZU **370** (1975), 57—91.
[17] *V. Ščurić-Čudovan*, Einige Probleme die durch die Einteilung eines Bündels der Flächen 2. Grades in ∞^1 Büschel solcher Flächen entstanden sind, I Teil, **403** (1983), 33—54.

Angenommen in II. Abteilung
26. 6. 1985.

Neki problemi nastali razvrstavanjem svežnja ploha 2. stupnja u ∞^1 pramenova takvih ploha, II. dio

Vlasta Ščurić-Čudovan, Zagreb

Sadržaj

Ovaj je rad nastavak mog istoimenog rada [17], I. dio.

Dan je općenit svežanj $/F^2$ ploha 2. stupnja. Svakom od tih ploha određen je i njen polarni prostor, pa je s $/F^2$ određen i svežanj $(F^2$ polarnih prostora tih ploha. Svih ∞^2 ploha svežnja $/F^2$ može se razvrstati u ∞^2 pramenova $/F^2/$, odnosno u ∞^2 pramenova (F^2) njihovih polarnih prostora. Bilo koja ploha F^2 svežnja nalazi se u ∞^1 pramenova $/F^2/$. Temeljne krivulje 4. reda tih pramenova prekrivaju plohu F^2 i imaju 8 zajedničkih (asociiranih) točaka. Vrhovi — središta singularnih ploha svežnja $/F^2$ određuju prostornu krivulju k^6 6. reda, koju određuju i vrhovi auto-

polarnih tetraedara pramenova (F^2) sadržanih u svežnju $(F^2$. Bilo kojoj točki $M \in k^6$ konjugirane su s obzirom na plohe svežnja $(F^2$ točke nekog pravca m, koji je trisekanta krivulje k^6. Sjecištima M_n $(n = 1, 2, 3)$ pravca m s krivuljom k^6 konjugirano su s obzirom na svežanj $(F^2$ pridružene trisekante m_n $(n = 1, 2, 3)$ krivulje k^6, koje sadrže točku M.

U radu je istaknuta jedna singularna ploha M^2 s vrhom i središtem u po volji odabranoj točki $M \in k^6$. Bilo koja ploha svežnja $/F^2$ određuje se stošcem M^2 jedan pramen $/F^2/$, a sve plohe svežnja određuju skup $/MF^2/$. On je sastavljen od takvog skupa od ∞^1 pramenova, kojima je zajednička ploha stožac M^2.

Točka $M \in k^6$ je kao vrh zajedničkog stošca svih pramenova $/F^2/ \subset /MF^2/$ ujedno i zajednički vrh svih autopolarnih tetraedara pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$, tako da se po tri preostala vrha pojedinog tetraedra nalaze u istoj ravnini pramena $[m]$. Bilo koja ravnina pramena $[m]$ siječe krivulju k^6 u tri točke M_n $(n = 1, 2, 3)$ na pravcu m i u tri vrha tetraedra nekog određenog pramena (F^2). Jedna ravnina tog pramena $[m]$ je i ravnina (M, m), koja je pridružena singularnom pramenu $/F_M^2/$ takvih ploha, koje sve diraju ravninu (M, m) u točki M. Autopolarni tetraedar tog pramena raspada se u dvostruku ravninu (M, m), dok u točku M padaju dva njegova vrha.

Između ravnina pramena $[m]$ i pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$ postoji bijektivna pridruženost.

Točkama pravca m pridružene polarne ravnine s obzirom na stožac M^2 čine pramen ravnina, a os m_k tog pramena je pravac konjugiran pravcu m s obzirom na stožac M^2. Pravac m_k je unisekanta krivulje k^6 i sadrži točku $M \in k^6$.

Svakim od pramenova $(F^2) \subset (MF)^2$ određena su četiri kompleksa zraka, i to: *Reye*ov tetraedarski kompleks 2. stupnja ili kompleks (TK); *Majcen*ov kompleks 3. stupnja ili kompleks (MK); *Niče*ov orijentirani kompleks 8. stupnja ili kompleks (VN) i kompleks normala 8. stupnja.

Iz literature su poznata mnoga svojstva tih kompleksa određenih jednim pramenom (F^2). Interesantno je istražiti svojstva tih kompleksa određena skupom (MF^2), kojeg čini ∞^1 pramenova (F^2). Jasno je da su općenita istraživanja u tom skupu preopširna, pa se u radu nužno moralo ograničiti na samo neke probleme. U I. dijelu istraživan je kompleks (TK) i kompleks (MK), dok je u ovom II. dijelu istraživan kompleks (VN). Interesiraju nas uglavnom one zrake tih kompleksa koje su na određeni način pridružene točki M, odnosno točkama pravaca m i pravca m_k. Pri tim je istraživanjima posebna pažnja usmjerena na to da se za bilo koju zraku spomenutih kompleksa utvrdi kojim je pramenom iz skupa (MF^2) ona određena i kojoj je točki pridružena.

KOMPLEKS (VN)

Nekoj točki T pridružena zraka t kompleksa (TK) određena jednim pramenom (F^2) presječnica je polarnih ravnina pridruženih točki T s obzrom na polarne prostore ploha pramena $/F^2/$. Okomica položena iz točke T na zraku t zraka je o kompleksa (VN), određena istim pramenom (F^2). Točka T nazvana je točkom I zrake o, a njeno sjecište sa zrakom t je točka Z te zrake o. Bilo koja točka T prostora je točka I jedne zrake kompleksa (VN) i tačke Z triju takvih zraka, kojima se točke I nalaze na zraci t kompleksa (TK) pridruženoj točki T.

Radi li se o skupu (MF^2), svakim je njegovim pramenom $(F^2) \subset (MF^2$ određena po jedna zraka kompleksa (TK) i po jedna zraka kompleksa (VN), koje su pridružene istoj po volji odabranoj točki T.

U prvom nas redu interesiraju *zrake kompleksa* (VN), *kojima se točka* I, *odnosno točka* Z, *nalazi u točki* $M \in k^6$.

Poznato je da su pravci koji sadrže jedan vrh autopolarnog tetraedra nekog pramena (F^2) takve zrake kompleksa (VN) koje u spomenutom vrhu imaju točku I, dok im se točka Z nalazi u ravnini tetraedra nasuprotnoj tom vrhu. Kako je točka M zajednički vrh ∞^1 autopolarnih tetraedara skupa (MF^2), a vrhu M nasuprotne ravnine tih tetraedara određuju pramen $[m]$, lako se zaključuje da je bilo koji pravac snopa $\{M\}$ takva ∞^1-značna zraka kompleksa (VN) određena nizom pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$, kojoj se ∞^1-značna točka I nalazi u točki M, a točke Z joj leže duž same zrake. Pritom postoji između niza točaka Z ravnina pramena $[m]$ i pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$ bijektivna pridruženost.

Mnogo interesantniji i kompliciraniji slučaj nastaje kad se istražuju one zrake kompleksa (VN) kojima se točke Z nalaze u točki M. Prikažimo neke rezultate:

Bilo kojim pramenom $(F^2) \subset (MF^2)$ određene su po tri zrake kompleksa (VN) koje imaju na pravcu m točku I, a zajednička točka Z im je u točki $M \in k^6$. Bilo koja točka pravca m je pritom točka I jedne takve zrake.

Bilo koji pravac vrha M je takva dvoznačna zraka kompleksa (VN) određena pramenom $(F^2_M) \subset (MF^2)$ kojoj se i točka I i točka Z nalaze u točki M.

Zrake kompleksa (VN) određene jednim od pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$, kojima se točka Z nalazi u točki M, izvodnice su stošca 3. stupnja s vrhom u točki M. Točke I tih zraka određuju krivulju 3. reda u ravnini autopolarnog tetraedra nasuprotnog vrhu M, koja sadrži preostala tri vrha tetraedra.

Svi takvi stošci 3. stupnja određeni svakim od ∞^1 pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$ čine skup od ∞_1 stožaca 3. stupnja. Tri zajedničke izvodnice tih stožaca podudaraju se s osima stošca M^2. Te su osi takve ∞^1-značne zrake kompleksa (VN), određene skupom (MF^2), kojima se točke I nalaze duž same osi. Bilo koji pravac vrha M izvodnica je po dvaju spomenutih stožaca 3. stupnja određenih s po dva regularna pramena (F^2) skupa (MF^2).

Stožac 3. stupnja zraka kompleksa (VN) određenih pramenom (F^2_M), kojima se točka Z nalazi u točki $M \in k^2$, raspada se u pramen zraka (M) u ravnini (M, m) i u stožac ${}_2M$ 2. stupnja s vrhom također u točki M. Točke I tih zraka čine krivulju i^3_M 3. reda u ravnini (M, m). Ta krivulja sadrži i točku M kao dvostruku.

Bilo koji pravac vrha M jest četveroznačna zraka kompleksa (VN), kojoj se četveroznačna točka Z nalazi u točki M, a određena je s po dva regularna pramena $(F^2) \subset (MF^2)$ i jednim singularnim pramenom (F^2_M) tog skupa (MF^2). Iznimku čine pravci pramena (M) u ravnini (M, m) koji su određeni jednim regularnim pramenom $(F^2) \subset (MF^2)$ i singularnim pramenom (F^2_M).

Izvodnice svih spomenutih stožaca 3. stupnja, koje su ujedno i zrake kompleksa (VN) određene svakim od pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$, kojima se točke Z nalaze u točki $M \in k^6$ i čine kongruenciju (4, 0), imaju točke I na plohi $\mathcal{I}_M$ 4 reda.. Ta je ploha sačinjena od ∞^1 krivulja 3. reda u ravninama pramena $[m]$. Na plohi I_M nalaze se tri osi stošca M^2, pravac m i krivulja k^6 kao jednostruki.

Neka je *pravac* m *skup točaka* I *zraka kompleksa* (VN).

Poznato je da točkama pravca m pridružene zrake kompleksa (TK), koje su određene pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$, određuju izvodnice pramena stožaca (M^2)

sa zajedničkim vrhom u točki M, pri čemu su izvodnice istog stošca određene istim pramenom (F^2), odnosno da takve zrake kompleksa (TK) određuju pramenove (M) u ravninama pramena $[m_k]$, pri čemu su zrake istog pramena (M) pridružene istoj točki pravca m, ali određene svim pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$ [17]. Shvatimo li pravac m skupom točaka I zraka kompleksa (VN), tada pridružene zrake kompleksa (VN) određene jednim pramenom (F^2) određuju pravčastu plohu 6. stupnja, a točke Z tih zraka određuju krivulju z^5 5. reda, koja se nalazi na toj plohi, odnosno na pridruženom stošcu pramena (M^2). Uzmemo li u obzir sve pramenove $(F^2) \subset \subset (MF^2)$, tada zrake kompleksa (VN) kao izvodnice ploha 6. stupnja određuju neku kongruenciju (K, I_m), a kontinuirano povezane točke Z krivulja z^5 neku plohu (Z, I_m).

U radu se pokazuje da je ploha (Z, I_m) 3. reda. Ravnine pramena $[m_k]$ sijeku je u kružnim presjecima, što znači da ta ploha sadrži i apsolutnu koniku. Tri sjecišta M_n $(n = 1, 2, 3)$ pravca m i krivulje k^6 su ∞^1-značne točke I ∞^1-značnih zraka kompleksa (VN), koje imaju zajedničku ∞^1-značnu točku Z na pravcu m_n $(n = 1, 2, 3)$. Takve su točke Z *kružne* točke plohe (Z, I_m), pa se kružnice u ravninama (m_k, m_n) $(n = 1, 2, 3)$ raspadaju u po dva izotropna pravca. Od triju realnih pravaca plohe pravac m_k je konačan, dok su preostala dva u beskonačno dalekoj ravnini zajedno pala pravca i čine beskonačno daleki pravac z^1 asimptotske ravnine plohe (Z, I_m). Na plohi postoje i tri dvostruke točke, od kojih je jedna u točki M, dok su preostale dvije konjugirano imaginarne i nalaze se u sjecištima pravca z_1 s apsolutnom konikom.

Ploha (Z, I_m) i sferična ploha 3. reda nastala kao nožišna ploha rotacijskog paraboloida imaju dosta sličnih svojstava, ali i razlika, posebno u položaju kružnih i dvostrukih točaka.

Kongruencija (K, I_m) je 5. reda i 2. razreda.

U radu je nadalje promatran *pravac m_k kao skup točaka I zraka kompleksa* (VN), *određenih pramenovima* $(F^2) \subset (MF^2)$. Kako je točka $M \in k^6$ kao skup točaka I odnosno točaka Z kompleksa (VN) već ranije određena, smatra se u tim istraživanjima točka M regularnom točkom pravca m_k, ali se u konačnom rezultatu uzima u obzir i njen doprinos.

Poznato je da točkama pravca m_k pridružene zrake kompleksa (TK) koje su određene pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$ čine pramenove pravaca u ravnini (M, m) [17]. Budući da regularnim točkama pravca m_k konjugirane točke s obzirom na svežanj $(F^2$ čine neki pravac k u ravnini (M, m), to bilo kojoj točki T pravca m_k pridružene zrake kompleksa (TK), s obzirom na niz pramenova $(F^2) \subset (MF^2)$, određuju pramen zraka u ravnini (M, m) s vrhom u nekoj točki pravca k. Pritom je svaka zraka tog pramena određena drugim pramenom $(F^2) \subset (MF^2)$.

Zrake kompleksa (VN) koje u bilo kojoj točki $T \in m_k$ imaju točku I čine stožac 2. stupnja, dok pridružene točke Z određuju u ravnini (M, m) kružnicu. Ne postoje dvije izvodnice tog stošca koje su određene istim pramenom $(F^2) \subset (MF^2)$. Kako spomenuta kružnica siječe pravac m u dvije točke, izlazi da je bilo koja točka $T \in m_k$ točka I dviju takvih zraka kompleksa (VN), kojima se točke Z nalaze na pravcu m, ali su te zrake određene s dva različita pramena $(F^2) \subset (MF^2)$. Nadalje slijedi da su po dvije točke pravca m_k takve točke I zraka kompleksa (VN) kojima se pridružene točke Z nalaze na istoj točki pravca m i određene su istim pramenom (F^2). Zrake kompleksa (VN) određene pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$ kojima se točke I nalaze duž pravca m_k, pri čemu smatramo točku $m \in M_k$ regularnom točkom tog pravca, čine kongruenciju 4. reda i 2. razreda. Po četiri zrake te kongruencije, koji sadrže po volji odabranu točku prostora, odnosno po dvije zrake koje leže u istoj ravnini, određene su različitim pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$. Točke Z svih takvih zraka (VN) čine dvostruku ravninu (M, m), dok je pravac m_k kao skup točaka I ∞^1-značan.

Mnogo složeniji problem nastaje kad se određuje kongruencija onih zraka kompleksa (VN) određenih skupom pramenova (MF^2) kao i ploha koju čine točke I tih zraka, ako se njihove *točke Z nalaze na pravcu m, odnosno na pravcu m_k*.

Znamo naime da je bilo koja točka T prostora točka Z triju zraka kompleksa (VN) određenih jednim pramenom (F^2), kojima se točke I nalaze na zraci kompleksa (TK) pridruženoj točki T. Točkama pravca m pridružene i pramenovima $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ određene zrake kompleksa (TK) čine izvodnice stožaca pramena (M^2). Na svakoj toj izvodnici nalaze se po tri točke I zraka kompleksa (VN), kojima se pridružene točke Z nalaze na pravcu m. Po jedna od triju točaka I nalazi se uvijek u točki M. Sve kontinuirano povezane točke I određuju neku plohu (I, Z_m), za koju se pokazuje da je 6. reda. Na njoj je pravac m_k dvostruk, pravci m_n $(n = 1, 2, 3)$ su jednostruki, a točka M je ∞^1-značna.

Zrake kompleksa (VN) određene pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$ kojima se točke Z nalaze duž pravca m čine kongruenciju (K, Z_m) 10. reda i 4. razreda.

Promatra li se pravac m_k kao skup točaka Z zraka kompleksa (VN) određenih skupom pramenova (MF^2), smatrat će se ponovno točka $M \in m_k$ regularnom točkom tog pravca, budući da je kao vrh zajedničke plohe M^2 svih pramenova $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ obrađena već ranije.

Kako točkama pravca m_k pridružene zrake kompleksa (TK) leže u ravnini (M, m), u radu se pokazuje da zrake kompleksa (VN) određene pramenovima skupa (MF^2) kojima se točka Z nalazi u bilo kojoj točki pravca m_k određuju stožac 4. stupnja s vrhom u spomenutoj točki Z, dok točke I tih zraka čine u ravnini (M, m) neku krivulju 4 reda.

Uočeno je i ovo:

Točke I zraka kompleksa (VN) određene *jednim* pramenom (F^2) iz skupa (MF^2), kojima točke Z čine *niz* (m_k), određuju u ravnini (M, m) krivulju 4. reda. Točku $M \in m_k$ smatramo pritom regularnom točkom pravca m_k.

Ali: Točke I zraka kompleksa (VN) određene *nizom* pramenova $(F^2) \subset \subset (MF^2)$ kojima se točke Z nalaze u *jednoj* točki pravca m_k čine u ravnini (M, m) krivulju 4. reda.

Sve zrake kompleksa (VN) određene pramenovima $(F^2) \subset (MF^2)$ kojima se točke Z nalaze duž pravca m_k čine kongruenciju 10. reda i 4. razreda, koja se raspada u kongruenciju (4, 4), onih zraka kompleksa (VN) koje imaju točku Z u točki M i u kongruenciju (6, 4) onih zraka kojima je točka Z u regularnim točkama pravca m_k. Kontinuirano povezane točke I tih zraka kompleksa (VN) određuju plohu 4. reda ako se pridružene točke Z nalaze u točki M, odnosno dvostruku ravninu (M, m) ako su točke I duž pravca m_k.

Primljeno u II. razredu
26. 6. 1985.