JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI
Razred za matematičke, fizičke i tehničke znanosti

Vlasta Ščurić-Čudovan

EINIGE EIGENSCHAFTEN DES (VN) KOMPLEXES EINES (F_0^2) BUSCHELS

Poseban otisak
iz Rada 396 str. 47—70

ZAGREB 1982

EINIGE EIGENSCHAFTEN DES *(VN)* KOMPLEXES EINES (F_0^2) BÜSCHELS

Vlasta Ščurić-Čudovan, Zagreb

In der Arbeit [1] untersuchte *V. Niče* die charakteristischen Eigenschaften eines solchen Flächenbüschels $/F_0^2/$ 2. Grades und die Eigenschaften durch dieses Büschel bestimmter Komplexe: des *Reye*schen tetraedralen oder (*TK*) Komplexes 2. Grades, des *Majcen*schen Komplexes 3. Grades und des Normalenkomplexes 8. Grades, während der orientierte *Niče*sche oder (*VN*) Komplex 8. Grades nur teilweise untersucht wurde.

Für weitere Untersuchungen würden, gleichso wie dies in [1] getan wurde, nur jene Eigenschaften des $/F_0^2/$ Büschels und durch ihn bestimmter Komplexe interessant, die sich von solcher, in Arbeiten [2] — [7] dargestellten Eigenschaften des allgemeinen Flächenbüschels $/F^2/$ und durch ihn bestimmter Komplexe unterscheiden. In dieser Arbeit wird unsere Aufmerksamkeit auf den (*VN*) Komplex des $/F_0^2/$ Büschels gerichtet.

Durch ein Flächenbüschel $/F^2/$ 2. Grades, wird wie bekannt, auch das Polarraumbüschel (F^2) dieser Flächen bestimmt. Die Eckpunkte des gemeinsamen Polartetraeders dieses Büschels sind die Scheitel-Mittelpunkte der Singulärflächen (Kegel) des $/F^2/$ Büschels. Im Fall des $/F_0^2/$ Büschels der Konzentrischen Flächen 2. Grades mit gemeinsamen Mittelpunkt O, wird der Punkt O der einzige eigentliche Eckpunkt des gemeinsamen Polartetraeders des Polarraumbüschels (F_0^2) dieses $/F_0^2/$ Büschels. Die dem Eckpunkt O, bezüglich des (F_0^2) Büschels zugeordnete Polarebene, wird die Fernebene, woraus folgt, dass auch die übrigen drei Eckpunkte A, B und C dieses Tetraeders in der Fernebene liegen, bzw. dass die drei Singulärflächen des $/F_0^2/$ Büschels mit den Scheitelpunkten in diesen Punkten, die Zylinder sind. Die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung zerfällt in die drei Achsen der erwähnten Zylinder, mit dem gemeinsamen Punkt im Mittelpunkt O aller Flächen des $/F_0^2/$ Büschels.

Die Fernebene N schneidet das Flächenbüschel $/F_0^2/$ in einem Kurvenbüschel $/f_0^2/$. Die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreickes dieses Schnittbüschels $/f_0^2/$ stimmen mit den Fernpunkten A, B, C des Polartetraeders $OABC$ zusammen.

Die Grundkurve k^4 4. Ordnung des $/F_0^2/$ Büschels ist zentrisch symmetrisch, aber ohne senkrecht liegenden Symmetrieebenen. [1].

Einem beliebigen Raumpunkt T wird der zugeordnete Strahl t des bekannten Reyeschen tetraedralen oder kürzer (*TK*) Komplexes, die Schnittgerade der dem

Punkt T bezüglich der Polarräume der Flächen des $/F^2/$ Büschels. zugeordneten Polarebenen. Eine solche Zuordnung wurde in [6] durch

$$t = \varphi(T)$$

bezeichnet. Es ist auch bekannt, dass ein Strahl

$$t_n = \varphi(T_n) \text{ für } T_n \in N$$

eine Bisekante der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 des $/F^2/$ Büschels wird, während die den Punkten einer beliebigen Geraden zugeordneten (TK) Komplexstrahlen einen Regulus des Hyperboloides bilden.

Ist der (TK) Komplex durch das (F_0^2) Büschel bestimmt, ändern sich einige Eigenschaften dieses Komplexes beziehungsweise des Falls, wenn er durch das (F^2) Büschel bestimmt wird. In diesem Sinn werden für weitere Untersuchungen die Strahlen

$$t_n = \varphi(T_n), \; T_n \in N$$

eines (F_0^2) Büschels interessant.

Ist der Punkt $T_n \in N$ ein beliebiger Fernpunkt und damit auch der Punkt der Fernseitenebene ABC des Polartetraeders, muss der Strahl $t_n = \varphi(T_n)$ den Mittelpunkt $O \in k_c^3$ aller Flächen des $/F_0^2/$ Büschels enthalten. Liegt der Punkt T_n in einem der Ferneckpunkte A bzw. B bzw. C des Tetraeders $OABC$, wird ein diesem Punkt zugeordneter Strahl t_n irgendeine Gerade sein, die in der diesem Punkt gegenüberliegenden Seitenebene dieses Tetraeders liegt. Dabei müssen wir betonen, dass einem Punkt z. B. $T_n \equiv A$, der in erster Reihe als der Eckpunkt des Tetraeders aufzufassen ist, der zugeordnete Strahl t_n keine den Punkt O enthaltende Gerade ist, schneidet aber die Kanten OB und OC des Tetraeders und damit die richtige Bisekante der zerfallenen Kurve k_c^3 sein wird, während demselben Punkt $T_n \equiv A$, der als ein Punkt der Fernebene N angenommen wird, der zugeordnete Strahl t_n den Punkt O enthalten muss. Aus diesem Gründe folgt, dass die den Punkten einer beliebigen Ferngeraden zugeordneten (TK) Komplexstrahlen die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades mit dem Scheitelpunkt O sind. Drei Erzeugenden dieses Kegels sind die Geraden OA, OB und OC, die den Schnittpunkten dieser Geraden mit den Kanten BC, AC und AB zugeordnet sind. [1].

Der orientierte Ničesche oder (VN) Komplex

a) Definition und einige Grundeigenschaften

Nehmen wir zuerst an, ein Flächenbüschel 2. Grades liege vor, ohne Rücksicht ob es $/F^2/$ oder $/F_0^2/$ ist. Einem beliebigen Raumpunkt T sie der Strahl

$$t = \varphi(T)$$

zugeordnet. Die den Punkt T enthaltende und den Strahl t senkrecht schneidende Gerade o ist ein Strahl des (VN) Komplexes, was durch

$$o = \psi(T)$$

bezeichnet wird. [4], [6]. Der Punkt T wird als ein I Punkt des Strahles o genannt und sein Schnittpunkt mit dem Strahl t als der Z Punkt dieses Strahles o bezeichnet. Obwohl die Punkte I und Z die Berührungspunkte des Strahles o an zwei Flächen des Flächenbüschels 2. Grades sind, sind sie auf dem Strahl o nicht gleichwertig, wei dies in [6] gezeigt wurde. Sie bestimmen deshalb die Orientierung eines jeden (VN) Komplexstrahles o. Ein beliebiger Raumpunkt T ist der I Punkt für einen und der Z Punkt für drei (VN) Komplexstrahlen und alle diesen vier Strahlen liegen in der Ebene (T, t), wo $t \doteq \varphi(T)$ ist.

Der (VN) Komplex hat den Grad 8.

Wie schon erwähnt, unr jene Eigenschaften der Gebilden der (VN) Komplexstrahlen eines (F_0^2) Büschels werden uns interessieren, die sich beziehungsweise solcher Gebilden der (VN) Strahlen eines (F^2) Büschels ändern.

Eine der Grundaufgaben wird die Gesamtheit jener (VN) Strahlen des (F_0^2) Büschels zu bestimmen, deren zugeordnete I Punkte bzw. Z Punkte auf den besonders hervorragenden Raum- oder Ferngeraden liegen.

Es zeigt sich, dass z. B. jene (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte sich auf einer beliebigen Raumgeraden s befinden, im Fall des (F_0^2) Büschels genauso wie im Fall des (F^2) Büschels eine Regelfläche 6. Grades bilden und die Z Punkte dieser Strahlen liegen auf einer Kurve 5. Ordnung.

Wird aber die Gesamtheit der I Punkte der (VN) Strahlen eine Gerade

$$t = \varphi(T), \text{ wo } T \text{ ein beliebiger Fernpunkt ist,}$$

dann tretten die bedeutsameren Veränderungen in Fällen des (F^2)- bzw. des (F_0^2) Büschels auf.

Im Fall des (F^2) Büschels wird der Strahl t die Bisekante der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung. Jene (VN) Strahlen deren I Punkte auf dieser Bisekante liegen, bilden ein Konoid 4. Grades und die zugeordneten Z Punkte eine Raumkurve 3. Ordnung. Den ergänzenden Teil der Fläche 6. Grades und der Kurve 5. Ordnung bilden die zwei Strahlbüschel mit den Scheitelpunkten und gemeinsamen I Punkten in den Flächenmittelpunkten und den Z Punkten längs jener (TK) Fernkomplexstrahlen, die diesen Mittelpunkten zugeordnet werden. [6].

Im Fall des (F_0^2) Büschels ist der erwähnte Punkt $T \in N$ auch ein Punkt der Fernseitenebene ABC des Polartetraeders $OABC$ so dass für

$$t = \varphi(T) \text{ auch } O \in t \text{ die Geltung hat.}$$

Die Strahlen

$$t_i = \varphi(T_i) \quad \text{für alle } T_i \in t$$

bilden zwei Strahlbüschel (T). Dem Punkt O selbst, der primär als der Eckpunkt des Tetraeders und erst sekundär als ein Punkt der Geraden t aufgefasst wird, bilden die zugeordneten Strahlen t_o das Fernstrahlbüschel (T) und allen übrigen Punkten $T_i \in t$, einschliessend den Punkt O, bilden die zugeordneten (TK) Strahlen des eigentliche Büschel (T) der paralellen Strahlen. Es wird gezeigt, dass die Strahlen

$$o = \psi(O)$$

ein (VN) Komplexstrahlbündel $\{O\}$ mit dem gemeinsamen I Punkt im O und den zugeordneten Z Punkten in der Fernebene bilden, während die Strahlen

$$o_i = \psi(T_i) \text{ für jeden } T_i \in t$$

die Erzeugenden eines Konoides 3. Grades sind. Die I Punkte dieser Strahlen liegen auf der Geraden t und die ihnen zugeordneten Z Punkte bilden die gleichseitige Hyperbel in der Ebene des eigentlichen Büschels (T) der Strahlen t_i.

Ein (VN) Strahl $o = \psi(T)$ wird nämlich, der Definition nach, eine solche den Punkt T enthaltende Gerade, die den Strahl $t = \varphi(T)$ senkrecht schneidet. Weiterhin wurde es bekannt, dass von je zwei untereinander senkrechter Geraden eine immer in jener Ebene liegt, die senkrecht auf die andere Gerade gelegt wird Dies bedeutet aber, dass die gesuchte, die Gerade o enthaltende und auf die Gerade t senkrecht liegende Ebene, durch den Punkt T und jene Ferngerade p gespannt. wird, die die Polare des Fernpunktes der Geraden t bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Der Strahl o wird die Schnittgerade der Ebenen (T, t) und (T, p) sein. Der Z Punkt des Strahles o liegt im Durchstosspunkt des Strahles $t = \varphi(T)$ mit der Ebene (T, p).

Wenden wir dies auf unseren Fall an, folgt, dass in [6] definierte kubische Hülltorse τ_1 in das Ebenenbüschel $[O, T]$ und in eine Hülltorse 2. Klasse zerfällt. Die Ebenen des Büschels sind durch den Punkt O und durch die Strahlen des Fernbüschels (T) der (TK) Strahlen gespannt, während die Ebenen der Hülltorse durch die Punkte $T_i \in t$ und die ihnen (1-1)-deutig zugeordneten (TK) Strahlen des eigentlichen Büschels (T) aufgespannt werden. Dass diese Torse 2. Klasse ist, folgt auf Grund des bekannten Chaslesschen Korrespondenzprinzipes nach. Die (VN) Komplexstrahlen in Ebenen dieser zwei Torsen müssen wir getrennt betrachten.

Jeden Punkt eines beliebigen Strahles

$$t_o = \varphi(O)$$

des Fernbüschels (T) ist als den Fernpunkt dieses Strahles aufzufassen, dies bedeutet, dass die diesen Punkten bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p, ein Fernpolarenbüschel bilden. Diese Polaren spannen mit dem Punkt O ein neues Ebenebüschel, des den Fernstrahl t_o in den Z Punkten jener (VN) Komplexstrahlen schneidet, die den gemeinsamen I Punkt im Punkt O haben. Da eine solche Eigenschaft für jede Gerade t_o des Fernbüschels (T) die Geltung hat, so folgt, dass der Punkt O der Scheitelpunkt jenes Bündels der (VN) Strahlen wird, die den gemeinsamen I Punkt im O und die Z Punkte in der Fernebene haben.

Alle Strahlen

$$t_i = \varphi(T_i) \quad \text{für alle } T_i \in t$$

des eigentlichen Büschels (T) haben den gemeinsamen Fernpunkt in T. Eine Ausnahme bildet nur der Fernstrahl $t_o = \varphi(O)$ der der gemeinsame Strahl der beiden erwähnten Büschel (T) wird. Die dem Punkt T, bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnete Polare p, ist die Achse jenes Büschels der paralellen Ebenen, die durch die Punkte T_i der Geraden t und durch die Polare p aufgespannt werden. Diese Ebenen sind senkrecht auf die zugeordneten (TK) Strahlen des eigentlichen Büschels (T) gelegt. Auf Grund der (1-1)-deutigen Zuordnung der Ebenen der Hülltorse 2. Klasse und der Ebenen des Büschels $[p]$ und auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzipes folgt, dass jene (VN) Strahlen deren I Punkte längs der erwähnten Geraden t liegen und die Z Punkte auf einer gleichseitingen Hyperbel haben, bilden ein *Konoid* 3. Grades, wie behauptet. Die Punkte der Hyperbel sind auf Grund der (1-1)-deutigen Zuordnung der Strahlen t_i des eigentlichen Büschels (T) und der Ebenen des Büschels $[p]$ erhalten.

b) Die *Jacobi*sche Fernkurve μ

Die Fernebene N schneidet das Flächenbüschel $/F^2/$ in einem Kurvenbüschel $/f^2/$, das mit dem absoluten Kegelschnitt ein Kurvennetz bildet. Die Gesamtheit der Eckpunkte der Polardreiecken dieses Netzes wird die bekannte *Jacobi*sche Fernkurve μ 3. Ordnung sein. Drei Punkte dieser Kurve sind auch die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreieckes des Schnittbüschels $/f^2/$. [6].

Auch im Fall des $/F_0^2/$ Büschels wird die zugeordnete *Jacobi*sche Kurve μ unentartet und 3. Grades sein. Da auch die Eckpunkte des erwähnten Polardreiecks des $/f_0^2/$ Schnittbüschels mit den Ferneckpunkten A, B, C des Polartetraeders $OABC$ des (F_0^2) Büschels übereinstimmen, enthält die Fernkurve μ jeden der drei Eckpunkte A, B und C dieses Tetraeders.

Eine den Punkt O enthaltende Gerade

$$t = \varphi(T) \text{ für } T \in N \text{ and } T \in \mu$$

sei die Gesamtheit der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen. Die Z Punkte auch dieser Strahlen liegen auf den Strahlen

$$t_i = \varphi(T_i) \text{ für jeden } T_i \in t,$$

die schon wieder zwei Strahlbüschel (T) bilden. Es zeigt sich, dass auch in diesem Fall der Punkt O ein I Punkt der ∞^2 (VN) Strahlen wird, die die zugeordneten Z Punkte auf den Fernstrahlen $t_o = \varphi(O)$ des Fernbüschels (T) haben. Alle Strahlen des eigentlichen Strahlbüschels (T) haben den gemeinsamen Fernpunkt in T und die diesem Punkt bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnete Polare p, muss den Fernpunkt T_q der Geraden t enthalten. Die Fernpunkte $T \in \mu$ und T_q sind nämlich bezüglich der Polarfelder des Büschels (f_0^2) und bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiert zugeordnet, so dass auch $T_q \in \mu$ die Geltung hat, wie dies in [7] bewiesen wurde. Die Punkte T_i der Geraden t und die Polare p spannen dieselbe Ebene (t, p). Eine Ausnahme bildet der Punkt $T_q \in p$ der mit der Geraden p das Ebenenbüschel $[p]$ ordnet. Hieraus folgt, dass die (VN) Strahlen

$$o_i = \psi(T_i)$$

deren I Punkte T_i längs der Geraden t liegen, die Z Punkte auf einer den Punkt O enthaltenden Geraden s haben, in der die Strahlen $t_i = \varphi(T_i)$ die Ebene (t, p) durchsetzen. Wegen der (1-1)-deutigen Zuordnung der Punktreihen 1. Ordnung auf den Geraden t und s, hüllen die Strahlen o_i in der Ebene (t, p) eine Kurve 2. Klasse ein.

Es bleibt noch zu betonen, dass der Fernpunkt $T_q \in t$ und $T_q \in \mu$ ein ∞^1-deutiger I Punkt eines Büschels der paralellen (VN) Komplexstrahlen ist, deren Z Punkte längs des Strahles

$$TO = \varphi (T_q)$$

liegen. Diese Z Punkte sind in den Schnittpunkten der Geraden TO mit den Ebenen des Ebenenbüschels $[p]$.

Daraus folgt:

SATZ 1. *Jene (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte auf der Verbindungsgeraden des gemeinsamen Mittelpunktes O aller Flächen des $/F_0^2/$ Büschels, mit einem beliebigen Punkt der Jacobischen Fernkurve μ liegen, bilden:*

1. *eine Kurve 2. Klasse mit den zugeordneten Z Punkten auf einer den Punkt O enthaltenden Geraden,*

2. *ein Strahlbündel jener Strahlen, die den gemeinsamen I Punkt im Punkt O und die Z Punkte in der Fernebene haben und*

3. *ein Strahlbüschel mit dem gemeinsamen I Punkt auf der Kurve μ und den Z Punkten längs diesem Fernpunkt zugeordnetes (TK) Komplexstrahles, der auch selbst eine Verbindungsgerade des Punktes O mit einem Punkt der Kurve μ ist.*

c) Die Kanten des Polartetraeders

Wie schon erwähnt, hat der Polartetraeder $OABC$ des (F_0^2) Büschels drei eigentliche Kanten OA, OB und OC, während die übrigen drei AB, BC und CA in der Fernebene liegen.

Fassen wir jetzt die Polartetraederkanten als die Gebilde der I Punkt bzw. die Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen auf, und stellen die Gebilde solcher Strahlen, wie auch die Gebilde derer Z Punkte bzw. I Punkte fest.

Es ist bekannt, dass eine eigentliche Gerade z. B. OC des Polartetraeders auch als ein Strahl

$$OC = \varphi (T) \text{ für ein beliebiger } T \in AB$$

aufzufassen ist. Eine Umkehr dieses hat auch die Geltung, so dass alle den Punkten $T_i \in OC$ zugeordneten (TK) Strahlen immer mit der Kante AB übereinstimmen. Eine Ausnahme bilden dabei die Punkte O und C der Kante OC. Sind diese Punkte O und C primär als die Punkte der Kante $OC = \varphi (T)$ und erst sekundär als die Tetraedereckpunkte aufgefasst, bilden die, dem Punkt C selbst zugeordneten (TK) Strahlen ein Büschel (T) in der Ebene OAB und jene solchen Strahlen die dem Punkte O zugeordnet sind bilden ein Strahlbüschel (T) in der Ebene ABC.

Der Punkt C liegt, wie bekannt, auf der Kurve μ. Weiterhin ist es bekannt, dass die Gerade AB die Kurve μ 3. Ordnung ausser in den Punkten A und B noch in einem Punkt Q schneiden muss. Auf Grund der Untersuchungen in [7] kann man behaupten, dass die Punkte C und Q konjugiertzugeordneten Punkte nicht nur bezüglich des Büschels (F_0^2), sondern auch bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind.

Die Gerade

$$OC = \varphi (T_i) \quad \text{für } T_i \in AB \text{ aber auch } T_i \not\equiv Q$$

sei die Gesamtheit der I Punkte der (VN) Strahlen, wobei die Punkte O und C vorläufig als keine Tetraedereckpunkte betrachtet werden. Einem beliebigen Punkt $T_i \in OC$ liegt der zugeordnete Strahl $AB = \varphi(T_i)$ in der Fernebene und jeder sein Punkt ist als ein Fernpunkt dieses Strahles aufzufassen. Die den Punkten der Geraden AB, bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren p, bilden ein Strahlbüschel (P) und alle diesen Polaren spannen mit dem betreffenden Punkt T_i ein Ebenenbüschel $[P, T_i]$. Jede dieser Ebenen schneidet die Gerade AB im Z Punkt jenes (VN) Strahles, dem der I Punkt im T_i liegt. Daraus folgt, dass alle jenen (VN) Strahlen die den I Punkt im T_i haben, ein Büschel solcher Strahlen in der Ebene (T_i, AB) bilden, deren Z Punkte längs der Geraden AB liegen. Nimmt man anstatt des Punktes T_i irgendeinen beliebigen Punkt der Geraden OC, folgt das Gleiche. Daraus folgt, dass ein beliebiger Punkt des eigentlichen Tetraederkantes OC ein ∞^1-deutiger I Punkt eines Büschels der (VN) Komplexstrahlen ist, deren Z Punkte längs der Kante AB liegen.

Der eigentliche Eckpunkt O des Polartetraeders ist auch in diesem Fall der Scheitelpunkt eines Bündels der (VN) Strahlen, die im O den gemeinsamen I Punkt haben, die Z Punkte deren aber in der Fernebene liegen. Es ist klar, dass innerhalb dieses Bündels auch ein (VN) Strahlbüschel liegt, deren I Punkte im O sind und die Z Punkte sich längs der Kante AB befinden.

Auch der Ferntetraedereckpunkt C ist der Träger eines Bündels der (VN) Strahlen, die den I Punkt ir Punkt C und die Z Punkte in der Ebene ABO haben. Dies werden wir auf folgende Weise erklären. Eine den Punkt C enthaltende Gerade wird ein (VN) Komplexstrahl genau dann, wenn ihn der dem Punkt C zugeordnete (TK) Komplexstrahl senkrecht schneidet. Da eine jede in der Ebene ABO liegende Gerade auch als dem Punkt C zugeordneter (TK) Strahl aufzufassen ist, haben eine solche Eigenschaft auch alle Geraden des Büschels (Q) in dieser Ebene, die aber auf jede den Punkt C enthaltende Gerade, wie bekannt, senkrecht stehen.

Es ist klar, dass analoge Behauptungen auch für die Kantenpaare OB-CA bzw. OA-BC des Tetraeders $OABC$ die Geltung haben.

SATZ 2. *Ein beliebiger Punkt der eigentlichen Kante des Polartetraeders des (F_0^2) Büschels ist ein ∞^1-deutiger I Punkt eines Büschels jener (VN) Komplexstrahlen, deren Z Punkte längs dieser Kante gegenüberliegender Fernkante des Tetraeders liegen, während jeder, auf dieser eigentlichen Kante liegende Tetraedereckpunkt, deren ein in der Fernebene und der andere im Punkt O liegt, ein ∞^2-deutiger I Punkt eines Bündels jener (VN) strahlen ist, deren Z Punkte im betreffenden Eckpunkt gegenüberliegender Tetraederebene liegen.*

Durchführen wir noch die analogen Betrachtungen über eine Ferntetraederkante z. B. AB des Polartetraeders. Wie bekannt:

$$AB = \varphi(T) \text{ für einen beliebigen } T \in OC.$$

Die Gerade AB sei die Gesamtheit der I Punkte der (VN) Strahlen. Ein beliebiger Punkt $T_i \in AB$, aber $T_i \neq A, B, Q$ sei ein solcher I Punkt. Der Fernpunkt des Strahles

$$OC = \varphi(T_i)$$

liegt im Punkt C und diesem Punkt bezüglich des absoluten Kegelschnittes, zugeordnete Fernpolare p enthält den Punkt $Q \in AB$. Die Polare p und der Punkt

T_i spannen die Fernebene, welche setzt den Strahl OC in seinem Fernpunkt C durch. Dies bedeutet, dass der beliebige Punkt T_i der I Punkt *eines* Fernstrahles des (VN) Komplexes wird, dem der Z Punkt in C liegt. Eine Ausnahme bilden die Punkte A, B, und Q.

Da für die Ferntetraedereckpunkte A und B die analogen Behauptungen die Geltung haben, die eben für den Punkt C dargestellt sind, belibt noch über den Punkt $Q \in \mu$ als den I Punkt der (VN) Strahlen betrachten.

Wie bekannt

$$OC = \varphi(Q)$$

hat auch die Geltung. Die Polare des Fernpunktes C dieser Geraden, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, enthält den Punkt Q und bildet mit ihm das ganze Ebenenbüschel, das den Strahl OC in den Z Punkten jener (VN) Strahlen schneidet, die die I Punkte im Punkte Q haben.

Schon wieder ist es klar, dass die analogen Behauptungen auch für die übrigen Fernkanten BC und CA des Tetraeders die Geltung haben.

SATZ 3. *Ein beliebiger Punkt einer Fernkante des Polartetraeders des* (F_0^2) *Büschels ist der I Punkt eines* (VN) *Fernkomplexstrahles, dem der Z Punkt im Fernpunkt jener eigentlichen Kante liegt, die gegenüber der betreffenden Kante steht. Jeder der zwei Tetraedereckpunkte auf dieser Fernkante ist ein* ∞^2*-deutiger I Punkt eines Bündels jener* (VN) *Strahlen, deren Z Punkte in der gegenüberliegenden Seitenebene des Tetraeders liegen. Ein der Schnittpunkte der Jacobischen Fernkurve* μ *mit dieser Fernkante, der kein Eckpunkt des Tetraeders wird, ist der Scheitelpunkt eines Büschels jener* (VN) *Strahlen, die in diesem Punkt den gemeinsamen I Punkt und die Z Punkte längs der gegenüberliegenden eigentlichen Kante haben.*

In [6] wurde es bewiesen, dass ein beliebiger Punkt T der Z Punkt eines Dreier jener komplanären (VN) Komplexstrahlen des (F^2) Büschels ist,deren I Punkte auf dem Strahl $t = \varphi(T)$ liegen.

Auf Grund der Behauptungen aus den Satz 3 folgt, dass auch ein beliebiger Punkt der eigentlichen Kante z. B. OC der Z Punkt jener drei (VN) Strahlen des (F_0^2) Büschels ist, deren I Punkte in den Punkten A, B und Q der Fernkante AB liegen, während ein beliebiger Punkt dieser Kante AB ein ∞^1-deutiger Z Punkt jener (VN) Strahlen ist, deren I Punkte längs der eigentlichen Kante OC liegen (Satz 2).

In [6] wurde weiterhin bewiesen, dass ein beliebiger Eckpunkt des Polartetraeders des (F^2) Büschels ein ∞^1-deutiger Z Punkt jener (VN) Strahlen ist, deren I Punkte auf einer Kurve 3. Ordnung in jener Seitenebene dieses Polartetraeders liegen, die gegenüber dem betreffenden Eckpunkt steht.

Auf Grund des Satzes 1, P. 3 folgt, dass auch der eigentliche Eckpunkt O des $OABC$ Tetraeders des (F_0^2) Büschels ein ∞^1-deutiger Z Punkt jener (VN) Strahlen ist, deren I Punkte in der Ferntetraederseitenebene liegen und die *Jacobi*sche Fernkurve μ 3. Ordnung bilden.

Es bleibt uns noch zu beweisen, dass auch die Ferneckpunkte A bzw. B bzw. C des Polartetraeders die ∞^1-deutigen Z Punkte jener (VN) Strahlen sind, deren I Punkte eine Kurve 3. Ordnung in der Ebene OBC bzw. OAC bzw. OAB bilden.

Nehmen wir die Ebene OAB und ihr gegenüberliegenden Eckpunkt C in betracht. Der Strahl

$$t_c = \varphi(C)$$

obwohl er eine beliebige Gerade der Ebene ABO ist, sei ein solcher, der den Punkt $Q \in AB$ und $Q \in \mu$ enthält und die Kante OA in einem Punkt P_1 und die Kante OB in einem Punkt P_2 schneidet.

Die Strahlen

$$t_i = \varphi(T_i) \quad \text{für jeden } T_i \in t_c$$

sind die Erzeugenden eines Kegels-Zylinders 2. Grades mit dem Scheitelpunkt im C. Die dem gemeinsamen Fernpunkt C aller diesen Erzeugenden, bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnete Polare p_c muss, wie bekannt, den Fernpunkt Q enthalten. Die Punkte $T_i \in t_c$ und die Polare p_c bilden immer dieselbe, durch die Geraden t_c und p_c aufgespannte Ebene, die senkrecht auf die Erzeugenden des Zylinders gelegt wird. Die Durchstosspunkte dieser Erzeugenden mit der Ebene (t_c, p_c) sind die Z Punkte jener komplanären (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte $T_i \in t_c$ sind. Alle solchen Z Punkte bilden eine Kurve 2. Ordnung. Wegen der (1-1)-deutigen Zuordnung der Punkte dieser Kurve und der Punkte T_i der Geraden t_c und auf Grund des *Chasles*schen Korrespondenzprinzipes folgt, dass alle solchen (VN) Strahlen in der Ebene (t_c, p_c) eine Kurve 3. Klasse bilden. Uns ist aber bekannt, dass die Z Punkte jener (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte auf einer Geraden liegen, eine Kurve 5. Ordnung bilden, während diese (VN) Strahlen eine Fläche 6. Grades einhüllen. Die Lösung des Problemes findet man so: Die gesuchte Kurve 5. Ordnung zerfällt in die erwähnte Kurve 2. Ordnung und in drei Geraden CA, CB und CO, die die Z Punkte jener (VN) Strahlen sind, deren I Punkte in den Punkten P_2, P_1 und Q der Geraden t_c liegen (Satz 2 und Satz 1, P. 3), während die Fläche 6. Grades zerfällt in drei Strahlbüschel (P_1), (P_2) und (Q) in den Ebenen $(P_1\, CB)$, $(P_2\, CA)$ und (QCO) und der Rest, die Fläche 3. Grades, setzt sich in die erwähnte Kurve 3. Klasse zusammen.

Hätten wir anstatt der Geraden t_c eine andere Gerade des Punktes Q in Betracht genommen, wäre die zugeordnete Z-Punktkurve 2. Ordnung eine andere, aber der Rest der zugeordneten Z-Punktkurve auf drei Kanten CB, CA und CO blieb derselbe. Auf dem neuen Strahl $t_c = \varphi(C)$ wären schon wieder drei I Punkte jener drei (VN) Strahlen deren Z Punkte im Punkt C liegen.

Der Strahl $t_c = \varphi(C)$ soll jetzt eine beliebige Gerade der Ebene (OAB) sein, die die Kante AB in einem Punkt $P \not\equiv Q$ schneidet. Auch dieser Punkt P ist der I Punkt eines (VN) Strahles dem der Z Punkt im Eckpunkt C liegt (Satz 3).

Auf Grund dessen können wir in allgemeneinen behaupten:

SATZ 4. *Jene (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte in einer eigentlichen Seitenebene des Polartetraeders des (F_0^2) Büschels liegen und die den gemeinsamen Z Punkt in dieser Ebene gegenüberliegendem Ferneckpunkt dieses Tetraeders haben, bilden eine Fläche* 3. *Grades. Diese Fläche zerfällt in drei Strahlbüschel mit dem gemeinsamen Scheitelpunkt im erwähnten Tetraedereckpunkt, so dass die Ebenen dieser Strahlbüschel übereinstimmen mit jenen Seitenebenen des Tetraeders, die den erwähnten Tetraedereckpunkt enthalten. Die I-Punktkurve* 3. *Ordnung dieser Strahlen zerfällt in die drei den erwähnten Eckpunkt nicht enthaltenden Kanten des Tetraeders.*

Unsere Betrachtungen zeigen uns unumstritten, dass die Kanten des Polartetraeders eines (F_0^2) Büschels keine gleichwertigen Geraden sind, wenn sie als Gesamtheiten der I Punkte bzw. der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen betrachtet werden. Wir müssen unterscheiden ob eine Kante eigentliche oder uneigentliche ist.

Bei all dem dürfen wir nicht vergessen, dass die eigentlichen Kanten des Polartetraeders auch als die Achsen der Singulärflächen-Zylinder des $/F_0^2/$ Büschels zu betrachten sind und noch weiterhin, dass diese Achsen die Gesamtheiten der Mittelpunkte dieser Zylinder sind. Auf Grund der Betrachtungen in [6] und [7] ist es uns bekannt, dass im Fall des $/F^2/$ Büschels ein beliebiger Flächenmittelpunkt ein ∞^1-deutiger I Punkt eines Büschels der (VN) Komplexstrahlen ist, deren zugeordnete Z Punkte längs diesem Mittelpunkt zugeordneten (TK) Fernkomplexstrahles liegen. Dies übereinstimmt aber vollständig mit unseren Betrachtungen über die Punkte der eigentlichen Tetraederkanten.

d) Die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes

Eine beliebige Gerade v, z. B. der Ebene (AOC), die den Eckpunkt C enthält, können wir im 1. Fall als einen solchen (VN) Komplexstrahl aufzufassen, dem der I Punkt im Punkt C und der Z Punkt im Schnittpunkt mit der Kante OA liegt und im 2. Fall als einen solchen Strahl betrachten, dessen I Punkt im Schnittpunkt mit dem Strahl OA und der Z Punkt im Eckpunkt C liegt. Ein solcher zweifache (VN) Komplexstrahl, dessen I Punkt und Z Punkt involutorisch zugeordnet sind, wurde in [6] als ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes definiert. Dieser wird kürzer als ein (IVN) Strahl bezeichnet.

Stellen wir jene, durch das (F_0^2) Büschel bestimmten und bisher betrachteten (VN) Komplexstrahlen fest, die auch (IVN) Strahlen sind.

Auf Grund der bisherigen Untersuchungen können wir behaupten, dass auch im Fall des (F_0^2) Büschels genauso wie im Fall des (F^2) Büschels ankommt, eine jede Ferngerade ein (IVN) Strahl wird.

Eben wurde es bemerkt, dass auch eine beliebige den Ferntetraedereckpunkt enthaltende und in der eigentlichen Tetraederseitenebene liegende Gerade ein solcher (IVN) Komplexstrahl wird, dessen involutorisch zugeordnete I-Z Punkte im erwähnten Eckpunkt und Z-I Punkte in diesem Eckpunkt gegenüberliegender Tetraederkante der betreffenden Tetraederseitenebene liegen. Jeder Ferntetraedereckpunkt ist der Träger je zwei eigentlicher paralellen Büscheln und eines Fernbüschels solcher (IVN) Strahlen.

Der Mittelpunkt O aller Flächen des $/F_0^2/$ Büschels ist der Scheitelpunkt eines Kegels 3. Grades dessen Erzeugenden jene (IVN) Strahlen sind, deren zugeordnete I-Z Punkte im Punkt O und Z-I Punkte auf der *Jacobi*schen Fernkurve μ 3. Ordnung liegen (Satz 1, P. 1 und 3).

Der Fernschnittpunkt Q der Kurve μ mit der Tetraederfernkante z. B. AB, wo $Q \neq A$ und $Q \neq B$ ist, wird der Scheitelpunkt eines Büschels paralleler (IVN) Strahlen, deren involutorzugeordneten I-Z Punkte im Punkt Q und Z-I Punkte längs der Kante OC liegen (Satz 1, P. 3 und Satz 3). Es ist klar, dass analoge Folgerungen auch für die Schnittpunkte der Kurve μ mit den Fernkanten BC und CA des Polartetraeders $OABC$ die Geltung haben.

In [7] wurde gezeigt, dass im Fall des (F^2) Büschels innerhalb der Kongruenz (15, 11) der (IVN) Komplexstrahlen drei Flächen $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_3$ bestehen, deren Erzeugenden die Verbindungsgeraden der Punkte der Flächenmittelpunktraumkurve k_c^3 3. Ordnung des $/F^2/$ Büschels mit den Punkten der *Jacobi*schen Kurve μ 3. Ordnung sind. Die Verbindungszuordnungen der Punkte dieser zwei Kurven wurden aber für eine jede dieser Flächen durch andere Bedingungen gegeben.

Auch im Fall des (F_0^2) Büschels, wo alle Flächen dieses Büschels den gemeinsamen Mittelpunkt O haben, und die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 in die drei

Zylinderachsen zerfällt, während die Kurve μ ungeartet und 3. Ordnung bleibt, wird es interessant jene Flächen zu untersuchen, deren Erzeugenden durch die analogen Bedingungen definiert werden, wie dies in [7] für die Flächen $\mathscr{P}_1$,$\mathscr{P}_2$ und $\mathscr{P}_3$ geten wurde. Nennen wir solche Flächen $\mathscr{P}_{01}$, $\mathscr{P}_{02}$ und $\mathscr{P}_{03}$.

1. *Die Fläche* $\mathscr{P}_{01}$

In [7] wurde gezeigt, dass die Fläche $\mathscr{P}_1$ 6. Grades jene, durch das (F^2) Büschel bestimmten (IVN) Komplexstrahlen bilden, die auch die den Punkten der Kurve μ zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind. Jede Erzeugende dieser Fläche ist eine Bisekante der Kurve k_c^3 und eine Unisekante der Kurve μ. Auf der Fläche $\mathscr{P}_1$ ist die Kurve μ eine einfache und die Kurve k_c^3 eine dreifache. Alle involutorzugeordneten I-Z Punkte auf diesen (IVN) Strahlen-Erzeugenden der Fläche $\mathscr{P}_1$ bilden eine nichtabbrechende Reihe, also eine Kurve η_1, für die die Ordnung 18 bestimmt wurde.

Im Fall des (F_0^2) Büschels wird einem beliebigen Punkt $T \in \mu$ der zugeordnete Strahl $t = \varphi(T)$ den Punkt O und einen Punkt der Kurve μ enthalten, wie dies in b) gezeigt wurde. Alle solchen den Punkten der Kurve μ zugeordneten Strahlen t sind die Erzeugenden eines Kegels 3. Grades mit der Fernkurve μ und des Schietelpunktes O, aber auch die (IVN) Komplexstrahlen, deren I-Z Punkte im O und ihren zugeordnete Z-I Punkte auf der Kurve μ liegen.

Die Grundbedingung

$$t = \varphi(T) \quad \text{für } T \in \mu$$

die eine beliebige Erzeugende t der Fläche $\mathscr{P}_1$ und damit im Fall des (F_0^2) Büschels die Erzeugende der Fläche $\mathscr{P}_{01}$ erfüllen muss, ist für die Erzeugenden des Kegels (O, μ) 3. Grades befriedigt. Doch die Erzeugenden dieses Kegels, die ein Bestandteil der Fläche $\mathscr{P}_{01}$ wird, sind keine Bisekanten der Flächenmittelpunktkurve k_c^3, wie dies bei der Fläche $\mathscr{P}_1$ der Fall ist, da eine jede dieser Erzeugenden den Mittelpunkt O aller Flächen des $/F_0^2/$ Büschels enthält.

Auch die I-Z Punktkurve η_1 der (IVN) Strahlen auf der Fläche $\mathscr{P}_1$ des $/F^2/$ Büschels wird einige Unterschiede erledigen. Diese Kurve enthält nämlich in allgemeinen keine Punkte, werder der Kurve k_c^3 noch der Kurve μ. Die I-Z Punktkurve der (IVN) Strahlen des (F_0^2) Büschels auf dem Kegel (O, μ) ist aber genau durch den Punkt O und die Punkte der Kurve μ gebildet.

Die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 des $/F_0^2/$ Büschels zerfällt, wie bekannt, in drei Tetraederkanten OA, OB und OC, die auch die Achsen der drei Zylinder dieses Büschels sind. Eine beliebige Gerade z. B. der Ebene OAB ist die Bisekante dieser zerfallenen Kurve. Falls diese Gerade auch eine Erzeugende der Fläche $\mathscr{P}_{01}$ sein soll, dann muss sie unumstritten auch ein, dem Punkt der Kurve μ zugeordneter (TK) Komplexstrahl sein. Die Lösung unseres Problems und die Ergänzung der Fläche $\mathscr{P}_{01}$ bis 6. Grades bilden drei Strahlbüschel in den eigentlichen Seitenebenen des Polarteraeders.

Es ist uns bekannt, dass z. B. der Strahl

$$t_c = \varphi(C) \quad \text{für } C \in \mu$$

eine Gerade in der Ebene OAB wird. Da eine Erzeugende der Fläche $\mathscr{P}_{01}$ ihr Fernpunkt auf der Kurve μ haben muss, werden uns nur jene, das Büschel (Q) bildenden Strahlen t_c interessieren, wo $Q \in AB$ und $Q \in \mu$ ist. Erwähnen wir noch einmal, dass die Punkte C und Q die konjugiertzugeordneten Punkte sowohl bezüglich des $/f_0^2/$ Schnittbüschels, als auch bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind.

Zeigen wir nun, dass ein, die Kante AB im Punkt Q, die Kante OA im Punkt P_1 und die Kante OB im Punkt P_2 schneidender Strahl t_c ein (IVN) Komplexstrahl wird. Ist dies der Fall, müssen auf dem Strahl t_c zwei solche Punkte T_r $(r = 1, 2)$ liegen, denen zugeordnete Strahlen

$$t_r = \varphi(T_r) \quad (r = 1, 2)$$

den Strahl t_c senkrecht schneiden. Alle den Punkten der Geraden t_c zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind die Erzeugenden eines Zylinders 2. Grades mit dem Scheitelpunkt on C so dass

$$\varphi(P_1) = CB, \ \varphi(P_2) = CA \text{ und } \varphi(Q) = CO$$

wird. Alle Erzeugenden dieses hyperbolischen Zylinders sind auf den Strahl t_c senkrecht gelegt, zwei deren schneiden aber t_c in den gesuchten Punkten T_1 und T_2, die auch I-Z bzw. Z-I Punkte dieses (IVN) Komplexstrahles t_c werden.

Hätten wir anstatt dieser Geraden t_c des Büschels (Q) in der Ebene OAB eine andere Gerade t_s in Betracht genommen, die aber die Kante AB in einem Punkt $S \not\equiv Q$ schneidet, würden auch die ihren Punkten zugeordneten (TK) Komplexstrahlen ein Erzeugendensystem des hyperbolischen Zylinders des Scheitelpunktes C bilden, unter deren Erzeugenden auch CA, CB und CO liegen. Da aber die Punkte C und S keine bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiertzugeordneten Punkte sind, kann kein Zylindererzeugende den Strahl t_s senkrecht schneiden und der Strahl t_s kann kein (IVN) Komplexstrahl sein.

Auf jedem Strahl t_c des Büschels (Q) der (IVN) Strahlen befinden sich zwei diesem Strahl involutorzugeordnete $I - Z$ Punkte die stetig verbunden eine Kurve e_1 bilden. Um die Ordnung n dieser Kurve e_1 bestimmen zu können, fassen wir dieses Büschel (Q) als ein Erzeugniss auf, das mittels dieser Kurve e_1 erhalten wird. Jeder Strahl dieses Büschels (Q) ist eine Bisekante der Kurve e_1. Jedem Punkt $T_1 (\equiv I - Z)$ der Kurve e_1 wird ein Punkt $T_2 (\equiv Z - I)$ derselben Kurve zugeordnet uzw. so, dass die Verbindungsgerade $T_1 T_2$ ein Strahl des Büschels (Q) wird. Eine Umkehr dieses hat auch die Geltung, so dass jeder Strahl der mittels dieser Punktreihen ankommt, zweimal in Betracht genommen wird. In [6] wurde es bewiesen, dass solche Punkte T_1 und T_2 in den Punkten der Grundkurve k^4 4. Ordnung eines Flächenbüschels 2. Grades zusammenfallen. Da die Grundkurve k^4 des $/F_0^2/$ Büschels die Ebene OAB in vier Punkten durchstosst, hat dies die Folgerung, dass von dem Erzeugeniss, das die Verbindungsgeraden der zugeordneten Punkte der Kurve e_1 geben, vier Strahlbüschelabgenommen werden müssen.

Berücksichtigen wir dies und das bekannte Chaslessche Korrespondenzprinzip, kann man die Gleichung $\frac{1}{2}(n \cdot 1 + n \cdot 1 - 4) = 1$ erhalten, woher folgt, dass die Ordnung n der Kurve e_1 gleich drei ist.

Dies steht in keinem Gegensatz mit den bekannten Tatsachen. Ein beliebige Gerade t_c des Büschels (Q) schneidet die Kurve e_1 in den zwei sich zugeordneten Punkten $I - Z$, aber auch im Punkt Q, der ein der $I - Z$ Punkte auf dem Strahl OQ sein wird, während der andere ihm involutorzugeordnete $Z - I$ Punkt dieses Strahles im Punkt O liegt. Die Fernpunkte der Kurve e_1 müssen in den Punkten A, B und Q in den Schnittpunkten der Kante AB mit der Kurve μ liegen.

Es ist klar, dass die analogen Behauptungen auch für solche Strahlbüschel in den Ebenen OBC und OCA und für die $I - Z$ Punktkurven auf den Strahlen dieser Büschel die Geltung haben.

SATZ 5. *Im Fall des* (F_0^2) *Büschels zerfällt die Fläche* $\mathscr{P}_{01}$ 6. *Grades, deren Erzeugenden die den Punkten der Jacobischen Kurve* μ *zugeordneten* (TK) *Komplexstrahlen wie auch die Involutorstrahlen des* (VN) *Komplexes sind und die, diesen strahlen zugeordnete* $I - Z$ *Punktkurve* e_1 12. *Ordnung in:*

1. *ein Kegel* 3. *Grades mit dem Scheitelpunkt im Punkt* O *und mit der Fernkurve* μ, *so dass die zugeordneten* $I - Z$ *Punkte in Punkt* O *bzw. auf der Kurve* μ *liegen,*

2. *drei Strahlbüschel in den eigentlichen Tetraederseitenebenen, so dass die Scheitelpunkte dieser Büschel mit jenen Schnittpunkten der Kurve* μ *und Ferntetraederkanten übereinstimmen, die verschieden von Ferneckpunkten sind, während die* $I - Z$ *Punktkurve jedes dieser Büschel* 3. *Ordnung ist und nebst dem Büschelscheitelpunkt auch die drei Tetraedereckpunkte in der betreffenden Tetraederebene enthält.*

2. *Die Fläche* $\mathscr{P}_{02}$

In [7] wurde festgestellt, dass eine Verbindungsgerade des Mittelpunktes S einer Fläche des $/F^2/$ Büschels, mit jenem Punkt der Kurve μ in dem sie den Fernstrahl $t_s = \varphi(S)$ schneidet, auch ein (IVN) Komplexstrahl wird, dem die zugeordneten $I - Z$ Punkte im Mittelpunkt S bzw. auf der Kurve μ liegen. Alle solchen stetig verbundenen (IVN) Strahlen sind die Erzeugenden einer neuen Fläche $\mathscr{P}_2$ 12. Grades, auf der die Kurve μ 3. Ordnung eine zweifache und die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 eine dreifache ist. Die Erzeugenden dieser Fläche $\mathscr{P}_2$ sind keine durch das (F^2) Büschel bestimmten (TK) Komplexstrahlen.

Die Flächenmittelpunkte aller Flächen des $/F_0^2/$ Büschels liegen, wie bekannt, im Punkt O, die Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung zerfällt aber, wie gesehen, in die drei eigentlichen Tetraederkanten, so dass klar ist, dass eine Fläche $\mathscr{P}_{02}$ derer Erzeugenden auf die analoge Weise wie die Erzeugenden der Fläche $\mathscr{P}_2$ des $/F^2/$ Büschels definiert werden, zerfallen muss.

Bine jede Ferngerade ist als ein Strahl

$$t = \varphi(0)$$

aufzufassen, der die Kurve μ in drei Punkten schneidet. Die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte mit dem Punkt O sind die Erzeugenden der Fläche $\mathscr{P}_{02}$ und die (IVN) Komplexstrahlen. Obwohl jede Erzeugende dieser Fläche eine ∞_1-deutige ist, da ihren Fernpunkt ∞^1 Strahlen $t = \varphi(0)$ enthalten, bilden alle diesen Erzeugenden einen Kegel 3. Grades des Scheitelpunktes O und der Fernkurve μ.

Es sei noch bemerkt, dass derselbe Kegel auch ein Bestandteil der Fläche $\mathscr{P}_{01}$ wurde, aber die Definition der Erzeugenden dieser Fläche wurde suf andere Weise gegeben.

Den übrigen Teil der Fläche $\mathscr{P}_{02}$ werden jene (IVN) Strahlen bilden, deren ein der $I - Z$ Punkte auf der eigentlichen Tetraederkante — Achse des Zylinders des $/F_0^2/$ Büschels liegt und der zugeordnete $Z - I$ Punkte befindet sich auf der Kurve μ in einem ihrer Schnittpunkte mit jener Ferntetraederkante, die gegenüber der betreffenden eigentlichen Kante liegt. Es wurde nämlich gezeigt, dass die den Punkten, z. B. der Kante OC, zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sich in die Tetraederkante AB zusammensetzen und diese Kante schneidet die Kurve μ im Punkten A, B und Q. Dass die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit den Punkten der Kante OC die (IVN) Komplexstrahlen sind, wurde auch schon bewiesen.

SATZ 6. *Die Fläche* $\mathscr{P}_{02}$ 12. *Ordnung des* (F_0^2) *Büschels, der eine jede Erzeugende ein* (IVN) *Komplexstrahl und auch die Verbindungsgerade eines Punktes der Flächenmittelpunktkurve* k_c^3 *dieses Büschels mit jenem Fernpunkt ist, dem die Fernkurve* μ *jenen* (TK) *Komplexstrahl schneidet der dem betreffenden Mittelpunkt zugeordnet wird, zerfällt:*

1. *in ein Kegel* 3. *Grades mit dem Scheitelpunkt im* O *und mit der Fernkurve* μ,

2. *in* 9 *Strahlbüschel deren Scheitelpunkte in den Schnittpunkten der Kurve* μ *mit den Ferntetraederkanten liegen, so dass die Ebenen dieser Strahlbüschel die eigentlichen gegenüberliegenden Tetraederkanten enthalten.*

Die $I - Z$ *Punkt aller diesen* (IVN) *Strahlen befinden sich auf der zerfallenen Kurve* k_c^3 *und die ihnen zugeordneten* $Z - I$ *Punkte liegen in den Punkten der Kurve* μ.

3. *Die Fläche* $\mathscr{P}_{03}$

Eine jede Fläche 2. Grades hat drei Achsen, die sich im Mittelpunkt dieser Fläche schneiden. Alle Flächenachsen des $/F^2/$ Büschels sind nichtabbrechend verbunden und bilden eine Regelfläche 9. Grades, auf der die Kurve k_c^3 eine dreifache wird. Die Fernkurve dieser Fläche zerfällt in die Kurve μ 3. Ordnung und in sechs Achsen der drei hyperbolischen Paraboloide des $/F^2/$ Büschels. [8]. In [7] wurde bewiesen, dass alle solchen Flächenachsen auch jene (IVN) Komplexstrahlen sind, die eine Fläche $\mathscr{P}_3$ 9. Grades bilden, während die involutorzugeordneten $I - Z$ Punkte dieser Strahlen eine Kurve μ_3 27. Ordnung bilden.

Auch eine jede Fläche F^2 des $/F_0^2/$ Büschels hat drei Achsen deren Fernpunkte auf der Kurve μ liegen, die aber die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreieckes der Fernkurve der Fläche F^2 und des absoluten Kegelschnittes sind. Da die Mittelpunkte aller Flächen des $/F_0^2/$ Büschels im Punkt O liegen, wird auch eine jede Verbindungsgerade des Punktes P mit einem Punkt $T \in \mu$ die Achse einer Fläche dieses Büschels sein. Alle solchen Achsen bilden den bekannten Kegel (O, μ) 3. Grades, während die Ergänzung der Fläche $\mathscr{P}_{03}$ bis zur Ordnung neun jene drei Ebenenpaare bilden, in welchen die Achsen der drei Zylinder des $/F_0^2/$ Büschels liegen. Einen beliebigen Punkt, z. B. der Achse AO, enthalten ausserhalb dieser Achse AO noch je zwei Achsen des Zylinders des Scheitelpunktes A. Diese Achsen liegen in einer Ebene die senkrecht auf die Achse AO gelegt wird. Alle solchen die Zylinderachsen enthaltenden und auf die Achse AO senkrecht liegenden

Ebenen sind untereinander paralell, so dass sie allen die Fernpolare p_A des Punktes A bezüglich des absoluten Kegelschnittes enthalten. Die Fernpunkte dieser Achsen liegen in zwei Schnittpunkten der Polare p_A mit der Kurve μ.

Die Flächenachsen des $/F_0^2/$ Büschels sind demnach auch die Transversalen der Punkte der Kurven k_c^3 und μ.

Dass eine jede Erzeugende des Kegels (O, μ) auch ein solcher (IVN) Komplexstrahl ist, dem die zugeordneten $I - Z$ und $Z - I$ Punkte im Punkt O bzw. auf der Kurve μ liegen, wurde schon gezeigt. Dass auch eine jede Zylinderachse ein (IVN) Strahl ist, wird auf die ähnliche Weise wie in [7] bewiesen: Den Punkkten einer solchen Achse a_1 des Zylinders, z. B. des Scheitelpunktes A, werden die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen einen Regulus des hyperbolischen Paraboloides bilden. Alle dieser Erzeugenden werden senkrecht auf die Achse a_1 gelegt sein, zwei unter diesen werden aber die Achse a_1 in seinen $I - Z$ und $Z - I$ Punkten schneiden.

Auf die ähnliche Weise, wie die Ordnung der $I - Z$ Punktkurven auf den (IVN) Komplexstrahlen auf der Fläche $\mathscr{P}_{01}$ bestimmt wurde, kann man auch in auch in diesem Fall feststellen, dass die $I - Z$ Punktkurve der untereinander paralellen (IVN) Strahlen, die auch die Achsen einer Singulärfläche des $/F_0^2/$ Büschels sind, die Ordnung drei hat.

SATZ 7. *Die Achsen der Flächen des $/F_0^2/$ Büschels sind auch die (IVN) Komplexstrahlen und bilden eine Regelfläche $\mathscr{P}_{03}$ 9. Grades, die zerfällt:*

1. *in einen Kegel $(0, \mu)$ 3. Grades mit den zugeordneten $I - Z$ Punkten im Punkt O und auf der Kurve μ,*

2. *in sechs Strahlbüschel in den Symmetrieebenen der Singulärflächen des $/F_0^2/$ Büschels, während die zugeordneten $I - Z$ Punkte auf einem jeden dieser Achsenbüschel eine Kurve 3. Ordnung bilden.*

Es bleibt uns noch festzustellen, ob die erwähnten (IVN) Komplexstrahlen, d. h. die Kongruenz 0. Ordnung und 1. Klasse der Fernstrahlen und die Erzeugenden der Flächen $\mathscr{P}_{01}$, $\mathscr{P}_{02}$ und $\mathscr{P}_{03}$, auch alle, durch das (F_0^2) Büschel bestimmten (IVN) Komplexstrahlen sind.

In [7] wurde gezeigt, dass einen beliebigen Fernpunkt M acht eigentliche, durch das (F^2) Büschel bestimmte (IVN) Komplexstrahlen enthalten und dass alle solchen Strahlen eine Kongruenz (15, 11) bilden. Eine Raumgerade m der Richtung M wurde ein (IVN) Komplexstrahl genau dann, wenn sein I Punkt und sein Z Punkt auf jenem Hyperboloide H_M liegen, dessen ein Regulus jene (TK) Komplexstrahlen bilden, die den Punkten einer solchen Ferngeraden p_M zugeordnet werden, die die Polare des Punktes M bezüglich des absoluten Kegelschnittes wird.

In Fall des (F_0^2) Büschels sei ein Punkt M ein beliebiger Fernpunkt der kein Punkte der Kurve μ und ferntetraederkante wird. Dem Punkt M wird die Polare p_M bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnet. Die den Punkten der Polaren p_M zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind aber die Erzeugenden eines Kegels K 2. Grades des Scheitelpunktes O, bilden also, zum Gegensatz des Falls des (F^2) Büschels, keinen Regulus eines Hyperboloides.

Der Strahl

$$t_R = \varphi(R) \quad R \in p_M$$

wird eine Erzeugenden des Kegels K. Die Ebene (M, t_R) schneidet den Kegel K in noch einer Erzeugenden t_S, die zum Unterschied des Falls des Hyperboloides, demselben Regulus angehört. Es wird demnach auch

$$t_S = \varphi(S) \quad S \in p_M.$$

Setze man voraus, dass den Punkt M ein eigentlicher Involutorstrahl m enthält, der genau in der Ebene (M, t_R) liege. In diesem Fall müssten die involutorzugeordneten $I - Z$ Punkte der Geraden m, auf den Erzeugenden t_R und t_S dessen in Schnittpunkten T_1 und T_2 mit dem Strahl m liegen. Die den Punkten der Geraden t_R zugeordneten (TK) Strahlen bilden zwei Strahlbüschel des Scheitelpunktes R. Ein dieser Büschel, der dem Punkt $0 \in t_R$ zugeordnet wird, liegt in der Fernebene und wird deshalb für unsere Untersuchungen nicht interessant.

Die Ebene des anderen Büschels (R) *muss*, wie bekannt, den Punkt O, aber auch den Punkt $T_2 \in t_S$ enthalten. (Das Letzte wegen der Voraussetzung, dass m ein (IVN) Strahl ist.) Daraus folgt, dass die Ebene dieses Strahlbüschels (R) die Erzeugende t_S enthaltén muss, bzw. dass jeder, einem Punkt der Geraden t_R zugeordnete (TK) Komplexstrahl, auch die Gerade t_S in je einem Punkt schneiden muss. Unter den Punktreihen auf den Geraden t_R und t_S ist auf diese Weise eine $(1-1)$-deutige Korrespondenz hergestellt und auf Grund des bekannten *Chasles*schen Korrespondenzprinzipes folgt, dass das Erzeugniss dieser zwei Punktreihen eine Kurve 2. Klasse wird. Dies hat die Folgerung, dass auch den Punkt M zwei Tangenten dieser Kurve enthalten, die solchen (VN) Strahlen sind, deren I Punkt auf dem Strahl t_R und der Z Punkt auf dem Strahl t_S liegt. Eine solche Bedingung wird aber auch hinreichend, dass ein (VN) Strahl auch ein (IVN) strahl wird. In diesem Fall schneiden nämlich die den Punkten der Geraden t_S zugeordneten (TK) Strahlen des Büschels (S) die Ebene (M, t_R) in den Punkten der Erzeugenden t_R. Den Punkt M enthalten demnach zwei (IVN) Komplexstrahlen in der Ebene (M, t_R), mit den zugeordneten $I - Z$ Punkten auf der Geraden t_R und den $Z - I$ Punkten auf der Geraden t_S.

Es stellt sich weiterhin die Frage vor, wie viele eigentliche (IVN) Strahlen den Punkt M enthalten, bzw. wie viele Ebenen des Ebenenbüschels $[MO]$ bestehen, die auch die (IVN) Strahlen der Richtung M enthalten.

Alle den Punkten der Geraden p_M zugeordneten (TK) Strahlen, sind, wie erwähnt, Erzeugenden eines Kegels K 2. Grades. Die den Punkten einer seinen Erzeugenden, z. B.

$$t_R = \varphi(R) \quad R \in p_M$$

zugeordneten (TK) Strahlen bilden das Fernbüschel (R), das dem Punkt $O \in t_R$ selbst zugeordnet wird und noch ein eigentliches Büschel (R), dessen Ebene den Punkt O enthalten muss. Diese Ebene schneidet den Kegel K in zwei Erzeugenden t_{Si} $(i = 1, 2)$, die auch zwei, den Punkten S_i $(i = 1, 2)$ der Geraden p_M zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind. Der Kegel K ist, wie bekannt, eine solche Fläche 2. Grades, der die Erzeugenden des ersten und des zweiten Regulus zusammenfallen und den Punkt O enthalten. Vorläufig werden wir doch jene Erzeugenden, die mit t_R bezeichnet werden, als die Erzeugenden des »ersten Regulus« und jene mit t_S bezeichnete als die Erzeugenden des »zweiten Regulus« auffassen. Die Fernpunkte dieser Erzeugenden bilden die Fernkurve k^2 des Kegels K. Jedem dieser Punkte, der als ein Fernpunkt der Erzeugenden des ersten Regulus aufzufassen ist, werden zwei Punkte derselben Kurve k^2 des zweiten Regulus zugeordnet. Unter den Punktreihen derselben Kurve k^2 besteht demnach eine (1-2)-deutige Korrespondenz, jede Verbindungsgerade der so zugeordneten Punkt ist aber zweimal in Betracht genommen. Auf Grund dessen und des *Chasles*schen Korrespondenzprinzipes folgt, dass Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punktreihen 2. Ordnung eine Kurve 3. Klasse einhüllen $[n = \frac{1}{2} (2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 3]$. Dies bedeutet weiterhin, dass drei Tangenten dieser Klassenkurve den Punkt M enthalten, bzw. es gibt drei den Punkt M enthaltenden Ebenen (t_R, t_S). Da in jeder dieser Ebenen zwei eigentliche den Punkt M enthaltende (IVN) Strahlen liegen, folgt, das den beliebigen Fernpunkt M sechs eigentliche (IVN) Strahlen enthalten.

SATZ 8. *Einen beliebigen Fernpunkt enthalten sechs durch das (F_0^2) Büschel bestimmte (IVN) Komplexstrahlen, deren je zwei in derselben den Punkt O enthaltender Ebene liegen.*

Nehmen wir jetzt eine beliebige, den Punkt O enthaltende Ebene an und bestimmen die Anzahl der in dieser Ebene liegenden (IVN) Komplexstrahlen. Um dieses Problem lösen zu können, werden wir die Anzahl, auf der Ferngeraden u dieser Ebene liegender Punkte M bestimmen, die je zwei in der Ebene (O, u) liegende (IVN) Strahlen enthalten!

Erinnern wir uns zuerst einiger Tatsachen:

1. Die den Punkten einer beliebigen Ferngeraden zugeordneten (TK) Strahlen eines (F_0^2) Büschels bilden einen Kegel 2. Grades des Scheitelpunktes O.

2. Drei Erzeugenden eines jeden solcher Kegel sind die Kanten OA, OB und OC des Polartetraeders $OABC$, die den Schnittpunkten der betreffenden Geraden mit den Kanten BC, AC und BA des Tetraeders zugeordnet sind.

Alle den Punkten $M_i \in u$, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, zugeordneten Polaren p_{Mi} bilden ein Fernbüschel (U) uzw. ein solches, dass die Gerade u eine Polare des Punktes U bezüglich des absoluten Kegelschnittes wird. Die den Punkten R einer beliebigen Geraden p_M des Büschels (U) zugeordneten (TK) Strahlen $t_R = \varphi(R)$ bilden einen Regulus des Kegels K 2. Grades mit dem Scheitelpunkt O, dessen drei Erzeugenden die Kanten OA, OB und OC sind, während der dem Punkt $U \in p_M$ zugeordnete (TK) Strahl die vierte gemeinsame Erzeugende aller, auf die beschriebene Weise erhaltenen Kegel K wird. Die allen Punkten aller Geraden p_M des Büschels (U) zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden also ein Büschel (K^2) der Kegel K mit dem gemeinsamen Scheitelpunkt O. Die Ebene (O, u) schneidet jeden dieser Kegel in zwei seinen Erzeugenden t_R und t_S, die den Punkten R und S derselben Polare p_M zugeordnete (TK) Strahlen sind, wo aber die Erzeugende t_R dem »ersten« und die Erzeugende t_S dem »zweiten« Regulus angehört. Die Punktpaare R-S auf allen Geraden p_M des Büschels (U) sind stetig verbunden und bilden eine Fernkurve u^2 2. Ordnung. Die Verbindungsgeraden der Punkte der Kurve u^2 mit dem Punkt O sind die den Punkten der Geraden u zugeordneten (TK) Strahlen, so dass auch der Kegel (O, u^2) die Erzeugenden OA, OB und OC enthält.

Es wurde aber bekannt, dass den Punkten einer Kurve 2. Ordnung die zugeordneten (TK) Strahlen eine Fläche 4. Grades bilden. Im Fall der Kurve u^2 ausartet eine solche Fläche in die Geraden, die in vier Ebenen: (O, u), OAB, OAC und OBC liegen. Einem jeden Punkt der Kurve u^2 ist eindeutig ein Strahl des Büschels (O) in der Ebene (O, u) zugeordnet, einem jeden Tetraedereckpunkt

$A, B, C \in u^2$ ist aber jede Gerade jener Seitenebene des Tetraeders zugeordnet, die dem betreffenden Eckpunkt gegenüber liegt.

Jedem Punkt $M \in u$ ist also (1-1)-deutig eine Polare p_M des Fernbüschels (U) zugeordnet und den zwei Schnittpunkten R und S der Geraden p_M und der Kurve u^2 sind in der Ebene (O, u) zwei Erzeugenden t_R und t_S jenes Kegels K bestimmt, der dem Punkt M zugeordnet ist. Eine Gerade m des Punktes M wird, wie bekannt, ein (IVN) Strahl, wenn sein I Punkt am t_R und sein Z Punkt am t_S liegt. Ändern die Erzeugenden t_R und t_S ihre Stellung, ändert sich auch die Rolle der Punkte I und Z, der (VN) Strahl ändert seine Orientierung, der (IVN) Strahl aber derselbe bleibt.

Der Punktreihe $M \in u$ ist demnach (1-1)-deutig das Büschel (O) der Erzeugenden t_R des »ersten Regulus« des Kegelbüschels $/K^2/$ und ein Büschel (O) der Erzeugenden t_S des »zweiten Regulus« in der Ebene (O, u) zugeordnet. Es ist weiterhin bekannt, dass die den Punkten aller Erzeugenden t_R zugeordneten (TK) Strahlen eine Gesamtheit der Strahlbüschels (R), mit den Scheitelpunkten längs der Kurve u^2 bilden, während die Ebenen dieser Büschel die Ebene (O, u) in noch einem Strahlbüschel (O) einer Schnittgeraden l schneiden. Auch in diesem Fall haben wir kein Interesse über die Fernstrahlen des (VN) Komplexes und auch über die Büschel jener dem Punkt $O \in t_R$ zugeordneten (TK) Komplexstrahlen.

Der Strahlbüschel (O) der Erzeugenden t_S und der Büschel (O) der Schnittgeraden l sind demnach kolokal, aber die Strahlen dieser zwei Büschel, die auf die beschriebene Weise demselben Punkt $M_i \in u$ zugeordnet werden, sind auch untereinander (1-1)-deutig zugeordnet. Auf Grund dessen und *Chasles*schen Korrespondenzprinzipes folgt, dass genau zwei gemeinsame Strahlen dieser zwei Büschel existieren, d. h., die Strahlen t_{Si} und l_i die demselben Punkt $M_i \in u$ ($i = 1, 2$) zugeordnet sind, fallen zusammen. Einer solcher Erzeugenden t_{Si} des Kegels K_i wird eindeutig auch seine Erzeugende t_{Ri} zugeordnet. Der den Punkt M_i enthaltende (VN) Komplexstrahl hat seinen I Punkt am t_{Ri} und seinen Z Punkt am t_{Si}. Da aber die Erzeugenden des »ersten Regulus« auch die Erzeugenden des »zweiten Regulus« des Kegels K_i sind und auch eine Umkehrung dieses die Geltung hat, folgt, dass auch die den Punkten der Erzeugenden t_{Si} zugeordneten (TK) Strahlen die Ebene (O, u) längs der Erzeugenden t_{Ri} schneiden. Der I Punkt eines den Punkt M_i enthaltenden (VN) Strahles befindet sich in diesem Fall auf der Erzeugenden t_{Si}, und der zugeordnete Z Punkt liegt auf t_{Ri}. Dies bedeutet aber, dass auf der Geraden u keine zwei Punkte, sondern genau ein Punkt M_i besteht, welchen die (IVN) Komplexstrahlen in der Ebene (O, u) enthalten. Das einen solchen M_i Punkt zwei eigentliche in der Ebene (O, u) liegende (IVN) Strahlen enthalten, deren zugeordnete I-Z und Z-I Punkte auf den Geraden t_{Ri} und t_{Si} liegen, wurde schon vorher bewiesen.

Diese I-Z und Z-I Punkte der ebene erwähnten (IVN) Strahlen können in allgemeinen weder im Punkt M noch im Punkt O liegen. Leicht kann man zeigen, dass für einen Punkt $M \in u$, aber $M \notin \mu$ die Gerade MO kein (IVN)Komplexstrahl wird, d. h. es gibt keinen solchen (VN) Strahl, dessen I Punkt im M und Z Punkt im O liegen.

Der Strahl

$$t_M = \varphi(M) \quad M \in u \text{ aber } M \notin \mu$$

enthält zwar den Punkt O, kann aber die zugeordnete Polare p_M des Punktes M bezüglich des absoluten Kegelschnittes nicht schneiden. Dies bedeutet, dass dem

Fernpunkt T_M des Strahles t_M, bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnete Polare, keine den Punkt M enthaltende Gerade wird, spannt aber mit dem Punkt M die Fernebene, die den Strahl t_M im Punkt $T_M \not\equiv O$ schneidet.

Es ist klar, dass auf einer beliebigen Ferngeraden u auch drei Schnittpunkte mit der Kurve μ liegen und die Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte mit dem Punkt O sind jene (IVN) Strahlen, die die zugeordneten I-Z, Z-I Punkte auf der Kurve μ bzw. im Punkt O haben. Dies steht in keinem Wiederspruch mit der Behauptung, dass der Punkt $M \in u$ und $M \notin \mu$ der einzige Träger der zwei eigentlichen paralellen (IVN) Strahlen in der Ebene (O, u) ist. Einem beliebigen der drei Schnittpunkte M_M der Geraden u mit der Kurve μ wird die zugeordnete Polare. Polare p_{MM} bezüglich des absoluten Kegelschnittes ein Strahl des Fernbüschels (U) sein, und die seinen Punkten zugeordneten (TK) Strahlen sind die Erzeugenden eines der Kegel des Kegelbüschels (K^2). Man kann leicht feststellen, dass die Erzeugende t_R dieses Kegels den Punkt M_M enthält, dass aber die zugeordnete Erzeugende t_S und die Schnittgerade l keine zusammenfallenden Geraden sind, die sich aber im Punkt O schneiden. Dies ist doch hinreichend, um die Gerade $M_M O$ ein (IVN) Komplexstrahl wird, dem die zugeordneten I-Z und Z-I Punkte im $M_M \in \mu$ und O liegen.

SATZ 9. *Eine beliebige, den Mittelpunkt O aller Flächen des $|F_0^2|$ Büschels enthaltende Ebene enthält fünf eigentliche (IVN) Komplexstrahlen, deren zwei untereinander paralell werden und die übrigen drei sind die Schnittgeraden dieser Ebene mit dem Kegel (O, μ), den die gemeinsamen Erzeugenden der Flächen $\mathcal{P}_{01}$, $\mathcal{P}_{02}$* und *$\mathcal{P}_{03}$ bilden.*

LITERATUR:

[1] *V. Niče*, Konzentrische polare Räume, Glasnik Mat. **2** (**22**) (1967), 99—177.

[2] *V. Niče*, Ergänzende Beiträge zum *Majcen*schen kubischen Strahlenkomplex, Rad JAZU **235** (1962), 107—125.

[3] *V. Niče*, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik matem.-fiz. i astr. **18** (1963), 255—268.

[4] *V. Niče*, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU **331** (1965), 145—172.

[5] *V. Šćurić-Čudovan*, Singulariteten des *Majcen*schen Strahlenkomplexes, Glasnik Mat. **3** (**23**) (1968), 117—139.

[6] *V. Šćurić-Čudovan*, Der orientierte *Niče*sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, I Teil, Rad JAZU **367** (1974), 151—205.

[7] *V. Šćurić-Čudovan*, Der orientierte *Niče*sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, II Teil, Rad JAZU **370** (1975), 57—91.

[8] *V. Niče*, Die Achsenregelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik Mat. **1** (**21**) (1966), 215—221.

Angenommen in II. Abteilung
24. 2. 1981.

Neka svojstva kompleksa *(VN)*, određenog pramenom koncentričnih ploha 2. stupnja

Vlasta Ščurić-Čudovan

Sadržaj

U radu »Konzentrische polare Räume« [1] istražio je *V. Niče* karakteristična svojstva jednog takvog pramena pohe $/F_0^2/$ 2. stupnja i svojstva kompleksa određenih tim pramenom: *Reyeovog* tetraedarskog kompleksa ili (TK) 2. stupnja, *Majcenova* kompleksa 3. stupnja i kompleksa normala 8. stupnja, dok je orijentirani *Ničeov* kompleks ili kompleks (VN) 8. stupnja tek djelomično istražen.

U istraživanjima stvojstava kompleksa (VN) zadanog pramenom $/F_0^2/$ koncentričnih ploha 2. stupnja, interesantna su ona koja se mijenjaju kada je taj kompleks zadan općenitim pramenom $/F^2/$ plohe 2. stupnja.

Poznato je da je nekim pramenom $/F^2/$ određen i pramen (F^2) polarnih prostora tih ploha, i da svi oni imaju zajednički autopolarni tetraedar kojemu su vrhovi ujedno vrhovi — središta singularnih ploha (stožaca) pramena $/F_0^2/$. U pramena $/F_x^2/$ koncentričnih ploha sa zajedničkim središtem O točka O je jedini konačni vrh pramena (F_0^2) pridruženog autopolarnog tetraedra, dok je vrhu O pridružena polarna ravnina, s obzirom na sve polarne prostore pramena (F_0^2), beskonačno daleko. Odavde slijedi da su i preostala tri vrha A, B i C tetraedra beskonačno daleko, odnosno da su tri singularne plohe pramena $/F_0^2/$ s vrhovima u tim točkama valjci. Prostorna krivulja k_c^3 središta ploha pramena $/F^2/$, inače 3. reda, raspada se u pramena $/F_0^2/$ u tri osi spomenutih valjaka sa zajedničkom točkom u središtu O svih ploha tog pramena.

Točke T beskonačno daleke ravnine N koje određuju smjerove zraka kompleksa u slučaju pramena (F_0^2) ujedno su i točke ravnine autopolarnog tetraedra tog pramena, što mora rezultirati novim interesantnim svojstvima tvorevina zraka kompleksa (VN) koje su pridružene točkama T beskonačno daleke ravnine. Ta će se svojstva mijenjati ovisno o tome da li je točka T općenita beskonačno daleka točka ili je ona posebno istaknuta točka te ravnine s obzirom na pramen $/F_0^2/$.

Pokazuje se da bilo kojoj točki T ravnine N pridružena zraka t kompleksa (TK), koja je os pramena točki T pridruženih polarnih ravnona s obzirom na pramen (F_0^2), sadrži i središte O svih ploha pramena $/F_0^2/$. Točkama bilo kojeg beskonačno dalekog pravca q pridružene zrake kompleksa (TK) izvodnice su stošca 2. stupnja

s vrhom u točki O. Tri njegove izvodnice su i konačni bridovi OA, OB i OC tetraedra $OABC$ pridružene sjecištima pravca q s beskonačno dalekim bridovima CB, CA i AB tetraedra.

Podsjetimo se da je zraka o kompleksa (VN) određenog pramenom plohe 2. stupnja takav pravac prostora koji sadrži neku točku T i okomito siječe toj točki T pridruženu zraku t kompleksa (TK). Točka T je pri tome točka I zrake o, a njezino sjecište sa zrakom t je točka Z te zrake. Poznato je nadalje da točke I i Z iste zrake nisu međusobno ravnopravne i time određuju orijentaciju zrake o, te da je bilo koja točka prostora točka I jedne i točka Z triju komplanarnih zraka kompleksa (VN).

Postavlja se pitanje što čine sve one zrake kompleksa (VN) određenog pramenom (F_0^2) koje imaju pridružene točke I odnosno točke Z u posebno istaknutim točkama ili pravcima prostora odnosno beskonačno daleke ravnine N.

Ako je npr. skup točaka I zraka kompleksa (VN) bilo koji pravac s prostora, tada pridružene zrake tog kompleksa određuju pravčastu plohu 6. stupnja, a pridružene točke Z krivulju z^5 5. reda bez obzira na to da li je kompleks određen pramenom (F^2) ili (F_0^2).

Ako je međutim skup točaka I zraka kompleksa (VN), određenog pramenom (F_0^2), zraka t kompleksa (TK) pridružena točki T ravnine N, nastaju znatne promjene u odnosu na prethodni slučaj. Točkama T_t zrake t pridružene zrake kompleksa (TK) određuju dva pramena (T) takvih zraka. Točki O pravca t, shvaćenoj prvenstveno vrhom tetraedra, pridružene zrake t_o kompleksa (TK) određuju beskonačno daleki pramen (T), a svim preostalim točkama pravca t, uključujući i točku O, pridružene zrake (TK) čine konačni pramen (T) usporednih zraka. One zrake (VN) koje imaju točku I u točki O čine snop zraka, a njima pridružene točke Z leže u beskonačno dalekoj ravnini, dok zrake (VN) s točkama I duž zrake t određuju konoid 3. stupnja, a njima pridružene točke Z čine istostranu hiperbolu u ravnini konačnog pramena (T).

Ravnina N siječe pramen $/F_0^2/$ u beskonačno dalekom pramenu krivulja $/f_0^2/$. Vrhovi autopolarnih trovrha što ih pramen (f_0^2) određuje s apsolutnom konikom čine poznatu beskonačno daleku *Jacobi*jevu krivulju μ 3. reda, koja sadrži vrhove A, B, C tetraedra. Poznato je da bilo kojoj točki $T \in \mu$ pridružena zraka t kompleksa (TK) siječe krivulju μ. Zrake (VN) kojima se točke I nalaze na jednoj takvoj zraci t, koja je spojnica točke O s točkom krivulje μ, tvore ponovno: snop zraka sa zajedničkom točkom I u točki O i točkama Z u beskonačno dalekoj ravnini, dok se konoid 3. stupnja iz prethodnog slučaja raspada u parabolu s pridruženim točkama I duž zrake t i točkama Z na pravcu i u pramen usporednih zraka sa zajedničkom točkom I u sjecištu T_q pravca t s krivuljom μ i točkama Z duž točki T_q pridružene zrake kompleksa (TK), koja je i sama spojnica točke $T \in \mu$ s točkom O.

Poznato je da je bilo kojoj točki jednog brida autopolarnog tetraedra pridružena zraka kompleksa (TK) nasuprotni brid tog tetraedra. U pramena (F_0^2) tri brida: OA, OB i OC tetraedra su u konačnosti, dok su njima nasuprotni bridovi: BC, CA i AB beskonačno daleko. Razlikovat ćemo stoga skupove zraka kompleksa (VN) s točkama I odnosno Z na konačnim bridovima od onih na beskonačno dalekim bridovima.

Pokazuje se da je bilo koja točka konačnog brida autopolarnog tetraedra pramena (F_0^2) ∞^1-značna točka I pramena onih zraka kompleksa (VN) koje imaju pridružene točke Z duž tom bridu nasuprotnog beskonačno dalekog brida, dok su vrhovi tetraedra koji se nalaze na konačnom bridu ∞^2-značne točke I onih zraka (VN) koje imaju točke Z u tom vrhu nasuprotnoj ravnini tetraedra.

Bilo koja točka beskonačno dalekog brida autopolarnog tetraedra pramena (F_0^2) je točka *I jedne* beskonačno daleke zrake kompleksa (VN), kojoj se točka Z nalazi u beskonačno dalekoj točki nasuprotnog konačnog brida. Vrhovi tetraedra koji se nalaze na beskonačno dalekom bridu ujedno su i točke konačnih bridova, pa su, kao što je spomenuto, ∞^2-značne I točke snopa zraka (VN) kojima se točke Z nalaze u tom vrhu nasuprotnoj ravnini tetraedra. Točka Q beskonačno dalekog brida, različita od njegovih vrhova, u kojoj taj brid siječe Jacobijevu krivulju μ vrh je pramena onih paralelnih zraka (VN) koje u toj točki imaju točku I, a točke Z im se nalaze duž nasuprotnog konačnog brida tetraedra.

Bilo koja točka konačnog brida, npr. OC tetraedra, jest točka Z onih triju zraka kompleksa (VN) pramena (F_0^2) kojima se pridružene točke I nalaze u točkama A, B i Q, dok je nasuprot tome bilo koja točka beskonačno dalekog brida, npr. AB tetraedra $OABC$, ∞^1-značna točka Z onih zraka (VN) kojima se pridružene točke I nalaze duž konačnog brida OC.

U [6] je pokazano da je bilo koji vrh autopolarnog tetraedra pramena (F^2) ∞^1-značna Z točka onih zraka (VN) kojima se pridružene točke I nalaze na krivulji 3. reda u ravnini tetraedra nasuprotnoj spomenutom vrhu.

Iz prikazanog slijedi da je konačni vrh O tetraedra $OABC$ pramena (F_0^2) ∞^1-značna točka Z onih zraka (VN) kojima se pridružene točke I nalaze u beskonačno dalekoj ravnini na Jacobijevoj krivulji μ 3. reda. Bilo koji beskonačno daleki vrh tetraedra također je ∞^1-značna Z točka onih zraka (VN) koje čine tri pramena u ravninama tetraedra koje sadrže taj vrh, dok im se I točke nalaze na ona tri brida tetraedra koje taj vrh ne sadrže.

Lako uočujemo da bridovi tetraedra $OABC$ nisu međusobno ravnopravni ni kao skupovi točaka I odnosno točaka Z zraka (VN). Ne smijemo međutim zaboraviti da se konačni bridovi tetraedra mogu smatrati osima singularnih ploha pramena $/F_0^2/$, tj. skupovima središta tih valjaka. Iz [6] i [7] znamo da je u pramena $/F^2/$ bilo koje središte plohe ∞^1-značna točka I pramena zraka (VN) koje imaju pridružene točke Z duž beskonačno daleke zrake (TK), pridružene tom središtu. To se u potpunosti podudara s rezultatima dobivenim za točke konačnih bridova autopolarnog tetraedra $ABCD$ pramena (F_0^2).

Pod *involutornom zrakom* kompleksa (VN) ili kraće zrakom (IVN) smatramo takvu dvostruku zraku (VN) kojoj su točka I i točka Z pridružene involutorno.

Iz dosad prikazanog zaključujemo:

Bilo koji pravac beskonačno daleke ravnine je zraka (IVN) bez obzira na to zadamo li kompleks pramena (F^2) ili (F_0^2).

Središte O svih ploha pramena $/F_0^2/$ vrh je stošca 3. stupnja onih zraka (IVN) kojima se pridružene točke I-Z nalaze u točki O, a točke Z-I na beskonačno dalekoj krivulji μ 3. reda.

Svaki od beskonačno dalekih vrhova tetraedra nosilac je triju pramenova zraka (IVN) koje leže u ravninama tetraedra dotičnog vrha. Točke I-Z tih zraka nalaze se u spomenutom vrhu tetraedra, a njima pridružene točke Z-I na bridovima tetraedra u ravnini tetraedra nasuprotnoj tom vrhu.

Pokazuje se da kao i u pramena (F^2) [7] postoje i u pramena (F_0^2) tri plohe zraka (IVN) kojima su izvodnice spojnice točaka beskonačno daleke krivulje μ 3. reda s krivuljom središta ploha pramena $/F_0^2/$, ali je definicija izvodnica dana za svaku tu plohu na drugi način.

Zraka kompleksa (TK) pramena (F_0^2) pridružene točkama krivulje μ ujedno su i zrake (IVN) i određuju plohu $\mathscr{P}_{01}$ 6. stupnja, koja se raspada u stožac (O, μ) 3. stupnja, pri čemu se točke I-Z tih zraka nalaze duž krivulje μ, a točke Z-I su u točki O, i u tri pramena zraka u konačnim ravninama autopolarnog tetraedra, tako da se vrhovi tih pramenova podudaraju sa sjecištima krivulje μ s beskonačno dalekim bridovima tetraedra različitim od beskonačno dalekih vrhova, a krivulja točaka I-Z na svakom od tih pramenova je 3. reda i sadrži osim vrha pramena zraka i sva tri vrha tetraedra u dotičnoj ravnini.

Ploha $\mathscr{P}_{02}$ 12. reda pramena (F_0^2), kojoj je bilo koja izvodnica zraka (IVN) i spojnica točke krivulje središta ploha tog pramena s onom beskonačno dalekom točkom u kojoj zraka (TK) pridružena dotičnom središtu siječe krivulju μ, raspada se u stožac (O, μ) zajednički s plohom $\mathscr{P}_{01}$ i u devet pramenova zraka s vrhovima u sjecištima beskonačno dalekih bridova tetraedra s krivuljom μ, tako da ravnine tih pramenova sadrže konačni nasuprotni brid tetraedra. Točke I-Z svih tih zraka nalaze se na raspadnutoj krivulji središta ploha, a njima pridružene točke Z-I u točkama krivulje μ.

Osi ploha pramena $/F_0^2/$ ujedno su i zrake (IVN) i određuju pravčastu plohu $\mathscr{P}_{03}$ 9. stupnja, koja se također raspada u stožac (O, μ) 3. stupnja i u šest pramenova u simetralnim ravninama singularnih ploha tog pramena. Pridružene točke I-Z na svakom od pramenova čine krivulju 3. reda.

Pokazuje se nadalje da bilo koju točku beskonačno daleke ravnine sadrži šest konačnih zraka (IVN), od kojih po dvije leže u istoj ravnini točke O. Bilo koja ravnina točke O sadrži pet konačnih zraka (IVN), od kojih su dvije međusobno usporedne, a preostale tri su presječnice te ravnine sa stošcem (O, μ), koji čine zajedničke izvodnice ploha $\mathscr{P}_{01}$, $\mathscr{P}_{02}$ i $\mathscr{P}_{03}$.

Primljeno u II. razredu
24. 2. 1981.