

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VLASTA ŠCURIC-CUDOVAN

**ERGÄNZENDE UNTERSUCHUNGEN EINES BÜSCHELS DER
HOMOTHETISCHEN FLÄCHEN 2. GRADES UND EINIGER
KOMPLEXE, DIE DURCH DIESES BÜSCHEL BESTIMMT
WERDEN**

**DOPUNSKA ISTRAŽIVANJA PRAMENA HOMOTETIČNIH
PLOHA 2. STUPNJA I NEKIH KOMPLEKSA ODREĐENIH
TIM PRAMENOM**

Z A G R E B

1 9 8 0

ERGÄNZENDE UNTERSUCHUNGEN EINES BÜSCHELS DER HOMOTHETISCHEN FLÄCHEN 2. GRADES UND EINIGER KOMPLEXE, DIE DURCH DIESES BÜSCHEL BESTIMMT WERDEN

In der Arbeit: »Homothetische polare Räume« stellte V. Niče [1] einige Eigenschaften des Büschels der homothetischen Flächen und durch dieses bestimmter Komplexe u. zw. des tetraedralen Reyeschen oder (TK) Komplexes, des Majcenschen oder (MK) Komplexes und des Normalenkomplexes dar, während der Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, später als der orientierte Ničesche oder (VN) Komplex genannt, noch zu untersuchen bleibt.

Um die Eigenschaften auch dieses Komplexes untersuchen zu können, wird es nötig, die Erkenntnisse wie über das Büschel der homothetischen Flächen, so auch über den (TK) Komplex zu ergänzen.

Erwähnen wir einige Eigenschaften des Büschels der homothetischen Flächen 2. Grades, das mit $|F_n^2|$ bezeichnet wird, wie diese V. Niče in [1] gegeben hat, jetzt, aber ohne Beweis.

In einem projektiven Raum, bzw. auf dem Modell des projektiven Raumes, das in einem ergänzenden Euklidischen Raum E_3 gebaut ist, wird durch zwei homothetische Flächen 2. Grades ein Flächenbüschel $|F_n^2|$ solcher Flächen und sein Polarraumbüschel (F_n^2) bestimmt. Die Grundkurve k^4 4. Ordnung 1. Art dieses Flächenbüschels zerfällt in einen endlichen Kegelschnitt k^2 und in einen Fernkegelschnitt k_n^2 . Diese Kegelschnitte können beiden oder je ein reell oder imaginär sein. Wird z. B. das $|F_n^2|$ Büschel durch zwei homothetische Hyperboloide gegeben und bestimmt, besteht er aus lauter solcher Hyperboloide, die Ferngrundschnittkurve k_n^2 wird reell, während die Kurve k^2 reell oder imaginär sein kann.

Die Fernschnittpunkte A_{n1} und A_{n2} der Kurven k^2 und k_n^2 können reell oder konjugiert imaginär sein, während die reelle Verbindungsgerade o_n dieser zwei Punkte die Fernschnittgerade der Ebenen der Kurven k^2 und k_n^2 ist. Diese Gerade o_n bilden die ∞^1 Paare der konjugierten Punkte bezüglich des (F_n^2) Büschels, so dass die zweifachen Punkte dieser Reihe in den Punkten A_{n1} und A_{n2} liegen.

Die gemeinsamen reellen oder konjugiert imaginären Berührebenen der Flächen des $|F_n^2|$ Büschels in den Pkten A_{n1} und A_{n2} schneiden sich immer in einer reellen Geraden o für die V. Niče bewiesen hat, dass sie eine Gesamtheit der Flächenmittelpunkte des Büschels $|F_n^2|$ ist. Die Gerade o ist auch eine Achse des Büschels

der Paare der konjugiertzugeordneten Ebenen bezüglich des (F_h^2) Büschels und die zweifachen Ebenen dieses Büschels der involutorzugeordneten Ebenen sind die Berührebenen des Büschels $|F_h^2|$ in den Berührungspunkten A_{n1} und A_{n2} .

Die Geraden o und o_n sind die einzigen reellen Gegenkanten des ausgearteten Polartetraeders des (F_h^2) Polarraumbüschels.

In [1] wird weiterhin gezeigt, dass die Pole einer beliebigen Ebene G bezüglich des (F_h^2) Büschels eine solche Raumkurve 3. Ordnung bilden, die in die Ferngerade o_n und in eine Hyperbel zerfällt. Diese Hyperbel liegt in jener Ebene, die durch die Gerade o und durch einen Punkt G_n aufgespannt wird, der der Pol der Ferngeraden der Ebene G bezüglich der Kurve k_n^2 bzw. bezüglich des (F_h^2) Büschels ist. Einer der Fernpunkte der Hyperbel liegt auf der Geraden o_n .

Wie bekannt, bilden jene Pole, die der Fernebene bezüglich eines Polarraumbüschels 2. Grades zugeordnet sind, eine Raumkurve k_c^3 3. Ordnung, die die Flächenmittelpunkte dieses Flächenbüschels bilden.

Im Fall des $|F_h^2|$ Flächenbüschels wurde es gezeigt, dass die Mittelpunkte aller Flächen dieses Büschels die Gerade o bilden. Es bleibt uns noch übrig, die Ergänzung bis die Ordnung drei der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 zu bestimmen. Berücksichtigen wir deshalb folgende Tatsachen:

- a) eine jede Erzeugende einer Regelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades ist eine Bisekante der Grundkurve dieses Büschels,
- b) es gibt kein Raumpunkt der auf keiner Fläche eines Flächenbüschels 2. Grades liegt,
- c) jeder Punkt der Zylinderachse ist als ein Zylindermittelpunkt aufzufassen.

Daraus folgt unumstritten, dass das Flächenbüschel $|F_h^2|$ nebst der erwähnten regulären Flächen auch die ∞^1 Singulärflächen enthält, d. h. in je zwei gleichlaufende Strahlbüschel zerfallene Zylinder 2. Grades, deren Scheitelpunkte sich längs der Geraden o_n befinden. Die Erzeugenden dieser Zylinder sind die Bisekanten der Kurve k^2 bzw. k_n^2 und die Achsen werden die Verbindungsgeraden der Scheitelpunkte solcher »Zylinder« mit dem Fernpunkt O der Geraden o sein. Daraus folgt, dass der gesuchte Rest der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 , d. h. die Kurve 2. Ordnung durch die Entartung 3. Ordnung in alle Punkte der Fernebene ausgeartet ist. Der Fernpunkt O der Geraden o enthält je einen Mittelpunkt jeder der Singulärflächen, so dass die Gerade o tatsächlich die Mittelpunkte aller Flächen des Büschels $|F_h^2|$ enthält.

Die Richtigkeit der Behauptung, dass das $|F_h^2|$ Flächenbüschel die erwähnten ∞^1 Singulärflächen enthält und auch einige weiteren Eigenschaften dieses Flächenbüschels werden durch die folgenden Untersuchungen, der durch dieses Flächenbüschel bestimmten Komplexe bestätigen.

A. (TK) KOMPLEX EINES $|F_h^2|$ FLÄCHENBÜSCHELS

Ein Strahl t des bekannten Reyeschen tetraedralen Strahlkomplexes, kürzer als ein (TK) Komplex bezeichnet, der einem beliebigen Raumpunkt T zugeordnet wird, ist die gemeinsame Gerade jener Polarebenen, die dem Punkt T bezüglich eines jeden Polarraumes des allgemeinen Polarraumbüschels (F^2) 2. Grades zugeordnet sind. Der Strahl t wird also durch jene Punkte gebildet, die dem Punkt T

bezüglich des Polarraumbüschels (F^2) konjugiert zugeordnet werden. Eine solche ein-eindeutige Punkt-Strahl Abbildung wird durch

$$t = \varphi(T)$$

bezeichnet.

Einen Strahl

$$t = \varphi(T)$$

der in einem (F_h^2) Polarraumbüschel bestimmt wird, ordnete V. Niče in [1] auf folgende Weise:

Der beliebige Raumpunkt T und die erwähnte Gerade o spannen eine Ebene (T, o) , die das Flächenbüschel $|F_h^2|$ in einem homothetischen Kurvenbüschel f_h^2 schneidet. Der Punkt T und ihm konjugierter Punkt T_k bezüglich des f_h^2 Kurvenbüschels sind auch bezüglich des Büschels (F_h^2) konjugiert zugeordnet. Der Punkt T_k ist also ein Punkt des Strahles t .

Finden wir noch den Fernpunkt dieses Strahles t !

Die Geraden o und o_n sind, als die Gegenkanten des Polartetraeders des (F_h^2) Büschels, bezüglich dieses Büschels konjugiert zugeordnet. Dies hat zur Folge, dass der Ferngeraden der Ebene (T, o) der zugeordnete Fernpol T_n bezüglich der Fernkurve k_n^2 und damit auch bezüglich des Büschels (F_h^2), ein Punkt der Geraden o_n wird. Die Punkte $T \in (T, o)$ und $T_n \in o_n$ sind also bezüglich des (F_h^2) Büschels konjugiert zugeordnete Punkte, und der Punkt T_n ist der gesuchte Fernpunkt des Strahles

$$t = \varphi(T).$$

Der Strahl t ist demnach eine Verbindungsgerade der Punkte T_k und T_n .

Der Punkt $T_n \in o_n$ ist als der Pol der Ebene (T, o) bezüglich des (F_h^2) Büschels, jedem Punkt dieser Ebene konjugiert zugeordnet. Dies hat zur Folge, dass einem beliebigen Punkt der Ebene (T, o) der zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes denselben Fernpunkt T_n der Geraden o_n enthält. Da die Ebene (T, o) ∞^2 Punkte bilden, wird der Punkt T_n der Scheitelpunkt eines Bündels jener (TK) Komplexstrahlen, die den Punkten der Ebene (T, o) zugeordnet werden.

Jener (TK) Komplexstrahl, der einem beliebigen Fernpunkt T dieser Ebene (T, o) zugeordnet wird, enthält den Punkt T_n und jenen Punkt der Ferngeraden dieser Ebene, der konjugiert dem Punkt T bezüglich des Kegelschnittes k_n^2 wird. Also, den beliebigen Fernpunkten zugeordnete Strahlen des (TK) Komplexes sind die Ferngeraden! Es sei noch bemerkt, dass im Fall des $|F^2|$ Büschels eine solche Eigenschaft nur die drei Fernflächenmittelpunkte haben.

Alle, auf die beschriebene Weise erhaltenen Strahlen des (TK) Komplexes, die den beliebigen Punkten T zugeordnet werden, schneiden die Ferngerade o_n . Dies könnte zur Folge haben, dass die Strahlen des (TK) Komplexes eines (F_h^2) Büschels einen singulären linearen konoidalen Strahlkomplex der Leitgeraden o_n bilden, in dem sich auch die Strahlfelder der Ebenen der Grundkegelschnitte k^2 und k_n^2 befinden.

Bevor wir hinweisen, dass auch in diesem Fall der (TK) Komplex quadratisch ist, erwähnen wir noch einige Resultate, die V. Niče in [1] bewiesen hat:

1. Der, einem jeden Raumpunkt T zugeordnete Strahl

$$t = \varphi(T)$$

liegt mit der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k^2 parallel.

2. Der Punkt T und der Strahl

$$t = \varphi(T)$$

sind immer von der Ebene des Kegelschnittes k^2 gleich entfernt.

3. Die den Punkten einer beliebigen Raumgeraden s zugeordneten Strahlen des (TK) Komplexes bilden einen Regulus des hyperbolischen Paraboloides, dessen Fernerzeugende dem Fernpunkt der Geraden o zugeordnet ist, während die Fernleitgerade die Gerade o_n wird.

Also, den Punkten einer beliebigen Raumgeraden zugeordnete Strahlen des (TK) Komplexes bilden eine Fläche 2. Grades, wie dies auch im Fall des (F^2) Büschels die Geltung hat.

Dass auch im Fall des (F_n^2) Büschels der (TK) Komplex quadratisch, ist werden wir auf folgende Weise bewiesen:

Eine Gerade die auch selbst ein Strahl

$t = \varphi(T)$ ist, wo T ein beliebiger Raumpunkt ist, sei als Gesamtheit jener Punkte betrachtet, denen die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bestimmt werden. Wie bekannt, die den Punkten $T_i \in t$ zugeordneten (TK) Strahlen enthalten den Punkt T , schneiden aber die Ferngerade o_n . Alle solchen Strahlen bilden also keine Fläche 2. Grades, sondern ein Strahlbüschel (T) in der Ebene (T, o_n). Dass auch in diesem Fall doch eine Fläche 2. Grades ankommt, wird gleich klar gemacht.

Der Fernpunkt $T_n \in o_n$ der Geraden t ist, wie erwähnt, allen Punkten der Ebene (T, o) bezüglich des Büschels (F_n^2) konjugiert zugeordnet. Es ist weiterhin bekannt, dass ein Strahl

$$t = \varphi(T)$$

eine Gesamtheit der, dem Punkt T konjugiert zugeordneten Punkte bezüglich des Polarraumbüschels 2. Grades wird. Daraus folgt unmittelbar, dass auch jede Gerade der Ebene (T, o) ein Strahl des (TK) Komplexes ist, der dem Punkt $T_n \in o_n$ zugeordnet wird. Fassen wir den Punkt T_n in erster Reihe als den Fernpunkt des Strahles t an, dann sind ihm die Strahlen eines Büschels (T) der (TK) Komplexstrahlen in der Ebene (T, o) zugeordnet.

Da der Punkt T ein beliebiger Raumpunkt ist, folgt:

Satz 1. Der durch ein (F_n^2) Büschel bestimmte (TK) Komplex 2. Grades, zerfällt in zwei singuläre lineare Komplexe mit der Leitgeraden o und o_n . Die gemeinsamen Strahlen dieser zwei Komplexe bilden eine Kongruenz 1. Ordnung und 1. Klasse der Transverzalen der Geraden o und o_n .

Satz 2. Der Kegel 2. Grades jener (TK) Komplexstrahlen, die durch das (F_n^2) Büschel bestimmt werden und einen Raumpunkt T enthalten, zerfällt in zwei Strahlbüschel in den Ebenen (T, o) und (T, o_n).

Satz 3. Jene (TK) Komplexstrahlen eines (F_n^2) Büschels, die den Punkten des Strahles

$t = \varphi(T)$ T ein beliebiger Raumpunkt zugeordnet sind, bilden zwei Strahlbüschel, die im Satz 2 dargestellt werden.

Eine beliebige Ebene berührt, wie bekannt, drei Flächen des allgemeinen Flächenbüschels $|F^2|$ 2. Grades, so dass die Berührungspunkte die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreiecks jenes Kurvenbüschels 2. Grades sind, in dem die erwähnte Ebene das Flächenbüschel schneidet.

Es sei das homothetische Flächenbüschel $|F_n^2|$ betrachtet. Auf die beschriebene Weise wird dem beliebigen Raumpunkt T der zugeordnete Strahl

$$t = \varphi(T)$$

durch die Punkte $T_n \in o_n$ und T_k bestimmt. Die den Punkten des Strahles t zugeordneten (TK) Komplexstrahlen enthalten den Punkt T und bilden zwei Strahlbüschel in der Ebene (T, o) bzw. (T, o_n) . Die Ebene (T, t) enthält je einen Strahl des jenen dieser zwei Büscheln, so dass ein Strahl die Verbindungsgerade der Punkte T und T_k wird, wo T_k auch der Schnittpunkt des Strahles t mit der Ebene (T, o) ist, und der andere ist die Verbindungsgerade der Punkte T und T_n . Daraus folgt unumstritten, dass die Verbindungsgerade

$$T T_n \equiv t_k = \varphi(T_k) \quad \text{und}$$

$$T T_k \equiv t_n = \varphi(T_n) \quad \text{ist.}$$

Die Punkte T , T_k und T_n sind die Eckpunkte des Polardreiecks jenes Schnittkurvenbüschels in dem die Ebene (T, t) das Flächenbüschel $|F_n^2|$ schneidet. Diese Punkte müssten nach dem allgemeinen Fall des $|F^2|$ Flächenbüschels die Berührungspunkte der Ebene (T, t) mit drei Flächen des $|F_n^2|$ Flächenbüschels sein. Dies kann aber nur für die Raumpunkte T und T_k Geltung haben, während der Fernpunkt $T_n \in o_n$ in Allgemeinen ein Berührungspunkt mit keiner Regulärfläche des Büschels $|F_n^2|$ sein kann, da sie allen die Fernebene in der Grundkurve k_n^2 schneiden. Es wird indessen gezeigt, dass das $|F_n^2|$ Büschel auch die ∞^1 Singulärflächen enthält, die in je zwei Strahlbüschel mit den Scheitelpunkten längs o_n zerfallen. Der Punkt T_n ist der Scheitelpunkt einer solchen Singulärfläche, und da die Ebene (T, t) je einen Strahl jeden dieser zwei Strahlbüschel enthält, ist der Punkt T_n der Berührungspunkt einer Singulärfläche, die doch der Bestandteil des Flächenbüschels $|F_n^2|$ ist.

Da die analogen Folgerungen für jede beliebige Ebene gelten, folgt:

Satz 4. Jede beliebige Ebene berührt je zwei Regulärflächen des homothetischen Flächenbüschels $|F_n^2|$ 2. Grades und je eine der Singulärflächen dieses Büschels in seinem Scheitelpunkt auf der Ferngeraden o_n .

Satz 5. Jene (TK) Komplexstrahlen deren Leitgerade die Gerade o ist, berühren je zwei Regulärflächen des $|F_n^2|$ Flächenbüschels, während jene solcher Strahlen deren Leitgerade die Ferngerade o_n ist, je eine Regulärfläche und je eine Singulärfläche dieses Flächenbüschels berühren.

Einem Fernpunkt $T_n \in o_n$ ist, wie bekannt, der zugeordnete (TK) Komplexstrahl eine jede Gerade jener Ebene des Büschels $[o]$, die diesem Punkt bezüglich des (F_n^2) Büschels konjugiert zugeordnet ist. Unter diesen Strahlen sind auch die

Transversalen der Geraden o und o_n . Nehmen wir eine solche Transversale t_n in Betracht, die also als ein Strahl

$$t_n = \varphi(T_n)$$

aufzufassen ist. Dem Fernpunkt T_s dieses Strahles t_n muss der zugeordnete Strahl $t_s = \varphi(T_s)$ den Punkt T_n enthalten und die Gerade o schneiden. Da die Punkte T_s und T_n die konjugiert zugeordneten Punkte bezüglich der Grundkurve k_n^2 und damit auch bezüglich des (F_n^2) Büschels sind, bilden diese Punkte zwei Eckpunkte des Polardreiecks jenes Kurvenbüschels 2. Grades in dem die Ebene (T_n, t_n) das Flächenbüschel $|F_n^2|$ schneidet. Daraus folgt, dass die Verbindungsgerade $o_n = (T_s, T_n)$ ein (TK) Komplexstrahl ist, der dem Schnittpunkt T_1 der Geraden t_n und t_s zugeordnet wird. Da aber beide diesen Geraden die Gerade o schneiden, muss $T_1 \in o$ sein. Der Punkt T_1 wird der Berührungspunkt der Ebene (T_n, t_n) des Büschels $[o_n]$ mit einer Regulärfläche des $|F_n^2|$ Büschels sein.

Da aber die Gerade o_n eine Gesamtheit der Paare der konjugiertzugeordneten Punkte bezüglich des (F_n^2) Büschels ist, enthält die Ebene (T_n, t_n) die ∞^1 Polardreiecke bezüglich des erwähnten Schnittkurvenbüschels. Ein Eckpunkt eines jeden dieser Dreiecke liegt immer im Punkt $T_1 \in o$ und die übrigen zwei am o_n . Es folgt in allgemeinen:

Satz 6. Eine jede Ebene des Ebenenbüschels $[o_n]$, d. h. eine Ebene die mit der Grundkurve k^2 parallel liegt, berührt genau eine Regulärfläche des $|F_n^2|$ Büschels in seinem Schnittpunkt mit der Geraden o und alle ∞^1 Singulärflächen längs der Geraden o_n , da sie zweifache Erzeugende aller diesen Flächen ist.

Weiterhin können wir behaupten:

Satz 7. Eine beliebige Ebene des Ebenenbüschels $[o]$ berührt keine der regulären Flächen des $|F_n^2|$ Büschels. Eine Ausnahme bilden jene zwei solcher Ebenen, die alle Regulärflächen dieses Büschels im Fernschnittpunkten der Grundkurven k^2 und k_n^2 berühren.

Um eine solche Behauptung beweisen zu können, wird das Folgende genügen: Damit eine Ebene die regulären Flächen eines Büschels 2. Grades berühren könnte, muss sie einen Strahl t des (TK) Komplexes und jenen Punkt T enthalten, dem dieser Strahl zugeordnet ist. Ein Berührungspunkt liegt im T und die übrigen zwei am t . Eine beliebige Ebene des Büschels $[o]$ ist dagegen die Gesamtheit jener (TK) Komplexstrahlen, die genau einem Punkt der Geraden o_n zugeordnet sind, der im allgemeinen kein Punkt dieser Ebene ist.

Stellen wir noch einen Vergleich mit dem Flächenbüschel $|F^2|$ an. Es ist bekannt, dass die vier Scheitelpunkte der vier Singulärflächen dieses Flächenbüschels mit den Eckpunkten des gemeinsamen Polartetraeders des Polarflächenbüschels (F^2) übereinstimmen und eine jede Gerade einer Seitenebene dieses Tetraeders ist als ein (TK) Komplexstrahl aufzufassen, der dieser Ebene gegenüberliegenden Eckpunkt zugeordnet ist.

Im Fall des (F_n^2) Büschels sind zwei reelle Gegenkanten o und o_n des entarteten Polartetraeders bekannt, wo die Gerade o die Schnittgerade der ∞^1 Paare der konjugiertzugeordneten Ebenen und die Gerade o_n die Verbindungsgerade der

∞^1 Paare der konjugiertzugeordneten Punkte bezüglich des (F_n^2) Büschels ist. Es ist weiterhin bekannt, dass die, einem beliebigen Punkt $T_n \in o_n$ zugeordnete Ebene des Ebenenbüschels $[o]$, eine Gesamtheit der, dem Punkt T_n konjugiertzugeordneten Punkte bezüglich des (F_n^2) Büschels, aber auch eine Gesamtheit der Strahlen

$$t_n = \varphi(T_n)$$

ist. Die eben beschriebene Eigenschaft kennzeichnet aber den Eckpunkt und ihm gegenüberliegende Seitenebene des Polartetraeders eines Polarraumbüschels 2. Grades. Daraus folgt:

Satz 8. Durch das (F_n^2) Büschel sind zwei Gegenkanten o und o_n jener ∞^1 entarteten Polartetraeder bestimmt, deren Eckpunkte längs der Geraden o_n liegen und die Seitenebenen die Gerade o enthalten. Ein jeder dieser Tetraeder besteht aus je zwei reellen Kanten, zwei reellen Eckpunkte und zwei reellen Seitenebenen. Befindet sich ein dieser Eckpunkte im Fernschnittspunkt, der Grundkurven k^2 und k_n^2 , fällt in diesen Punkt auch der andere Eckpunkt so dass auch die beiden Seitenebenen solches Tetraeders zusammenfallen.

Da einen jeden Eckpunkt des Polartetraeders auch als einen Mittel-Scheitelpunkt der Singulärfläche des Flächenbüschels $|F_n^2|$ aufzufassen ist, ist es uns damit gelungen die Richtigkeit der Behauptung bestätigen, dass die Gerade o_n die Gesamtheit der Scheitelpunkte jener ∞^1 entarteten Zylinder ist, deren Erzeugenden je zwei Strahlbüschel bilden und die Bisekanten der Grundkurve k^2 bzw. k_n^2 sind.

Weiterhin ist es bekannt, dass den Punkten T der Flächenmittelpunktraumkurve k_c^3 3. Ordnung eines $|F^2|$ Flächenbüschels, die zugeordneten Strahlen

$$t = \varphi(T)$$

solche (TK) Fernkomplexstrahlen sind, die eine Kurve 2. Klasse einhüllen. Jeder dieser Strahlen berührt je zwei Flächen des Büschels $|F^2|$.

Im Fall des homothetischen Flächenbüschels $|F_n^2|$ haben wir im gewissen Sinn die gleiche Situation. Einem jeden Punkt der Geraden o , die eine Gesamtheit der Flächenmittelpunkte des $|F_n^2|$ Büschels darstellt, wird der zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes dieselbe Ferngerade o_n sein. Einem beliebigen Fernpunkt, der als ein Mittelpunkt einer Singulärfläche dieses Büschels aufzufassen ist, wird der zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes eine Ferngerade sein, wie dies bewiesen wurde.

Jedem Flächenmittelpunkt ist also der zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes eine Ferngerade. Diese Strahlen bilden aber keine Fernkurve 2. Klasse, wie im Fall des $|F^2|$ Büschels, da jede Ferngerade auch ein (TK) Komplexstrahl ist.

Unter den ∞^2 Punkten der Fernebene und den ihnen, durch das (F_n^2) Büschel zugeordneten ∞^2 (TK) Fernkomplexstrahlen besteht eine ein-eindeutige Zuordnung. Ein jeder Fernpunkt liegt nämlich auf einem Strahl des Fernbüschels (O) (O ist der Fernpunkt der Geraden o) und ein jeder Fernstrahl gehört einem Fernstrahlbüschel mit dem Scheitelpunkt auf der Geraden o_n an. Alle diesen Punkte und Strahlen sind die Eckpunkte und die Seiten der ∞^2 Polardreiecken bezüglich der Kurve k_n^2 in der die Fernebene das $|F_n^2|$ Flächenbüschel schneidet. Je eine Ecke eines jeden dieser Dreiecken befindet sich auf der Geraden o_n , während die

übrigen zwei Ecken auf jener Polaren bezüglich der Kurve k_n^2 liegen, die der erwähnten Ecke zugeordnet ist und den Punkt O enthält. Befindet sich ein Eckpunkt E eines Dreiecks auf der Kurve k_n^2 , fällt in denselben Punkt noch ein Eckpunkt, während der dritte auf der Geraden o_n liegt. Dieser Polardreieck setzt sich zusammen in die Tangente der Kurve k_n^2 mit dem Berührungspunkt im E .

Nur solche (TK) Fernkomplexstrahlen berühren u. zw. alle Regulärflächen des $|F_n^2|$ Flächenbüschels in demselben Punkt E der Fernkurve k_n^2 . Die übrigen ∞^2 Fernstrahlen des (TK) Komplexes berühren keine Regulärfläche dieses Flächenbüschels; ein jeder dieser Strahlen ist aber die Erzeugende einer Singulärfläche und liegt in der Ebene des entarteten Teiles aller übrigen Singulärflächen des $|F_n^2|$ Büschels.

Satz 9. Jede Ferngerade ist ein Strahl des durch das (F_n^2) Büschel bestimmten (TK) Komplexes. Die ∞^1 dieser Strahlen, die die Fernkurve k_n^2 berühren, also eine Kurve 2. Klasse einhüllen, berühren auch alle Regulärflächen dieses Flächenbüschels in den Punkten der Grundkurve k_n^2 .

B. DER (VN) KOMPLEX EINES HOMOTHETISCHEN FLÄCHENBÜSCHELS $|F_n^2|$

a) Definition des (VN) Komplexes

Einem beliebigen Raumpunkt T ist der Strahl

$$t = \varphi(T)$$

des (TK) Komplexes zugeordnet. Die, den Punkt T enthaltende und die Gerade t senkrecht schneidende Gerade n ist ein Strahl des orientierten Ničeschen Komplexes $|[2], [3]|$, den wir als (VN) Komplex bezeichnen werden. Der Punkt T und der Schnittpunkt T_1 der Geraden t und n sind die Berührungspunkte der Geraden n mit zwei Flächen des Flächenbüschels 2. Grades, sind aber keine gleichwertigen Punkte. Der Punkt T sei als ein I Punkt und der Punkt T_1 als ein Z Pnkt des Strahles n bezeichnet. Die Punkte I und Z der Geraden n verordnen die Orientierung dieses (VN) Komplexstrahles n .

Durch jeden Flächenbüschel 2. Grades sind, wie schon bekannt, vier Komplexe bestimmt. Obwohl die Definitionen der Komplexe in jedem Fall des Flächenbüschels 2. Grades die gleichen sind, ändern sich mit der Veränderung der Eigenschaften des Flächenbüschels auch die Eigenschaften der Strahlgebilden der einzelnen Komplexe.

Die Eigenschaften des (TK) Komplexes unterscheiden sich wesentlich ob dieser Komplex durch ein allgemeines Flächenbüschel $|F^2|$ oder durch ein homothetisches Flächenbüschel $|F_n^2|$ bestimmt wird. Aus der Definition des (VN) Komplexes ist ersichtlich, dass seine Strahlen wesentlich auf die Strahlen des (TK) Komplexes verbunden sind. Es ist zu erwarten, dass auch der (VN) Komplex und die Eigenschaften der Gebilden der Strahlen dieses Komplexes sich ändern werden, je nach dem, ob dieser Komplex durch ein $|F^2|$ — oder durch ein $|F_n^2|$ Flächenbüschel bestimmt wird.

- b) Die (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte eine Raumgerade s bilden und die Z -Punktkurve dieser Strahlen

Ein Strahl n des (VN) Komplexes ist, wie schon bekannt, die Senkrechte, die aus einem beliebigen Punkt T auf den Strahl

$$t = \varphi(T)$$

gelegt wird. Dies bedeutet weiterhin, dass dem Fernpunkt des Strahles t die zugeordnete Fernpolare p bezüglich des absoluten Kegelschnittes den Fernpunkt des Strahles n enthalten muss, während der Z Punkt dieses Strahles im Schnittpunkt des Strahles t mit der Ebene (T, p) liegt.

Die, den Punkten einer beliebigen Raumgeraden s zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden einen Regulus des hyperbolischen Paraboloides H_s mit der Fernleitgeraden o_n und der Fernerzeugenden

$$t_n = \varphi(S_n),$$

wo S_n der Fernpunkt der Geraden s ist. /A. 3./ Ist die Gerade s eine Gesamtheit der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen, befinden sich die Z Punkte dieser Strahlen auf den Erzeugenden der Fläche H_s . Um diese Punkte festsetzen zu können, müssen wir den Fernpunkten dieser Erzeugenden, d. h. den Punkten der Geraden o_n , die Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bestimmen. Diese Polaren bilden ein Fernstrahlbüschel (P_r) . Da aber jeden Punkt der Fernerzeugenden t_n als seinen Fernpunkt aufzufassen ist, werden auch die, diesen Punkten bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordneten Polaren ein Fernstrahlbüschel (Q_n) bilden. Während der Strahlbüschel (P_r) einer jeden Raumgeraden, auf die beschriebene Weise zugeordnet ist, wird der Strahlbüschel (Q_n) von der Wahl des Fernpunktes S_n abhängen, ist aber dem gemeinsamen Fernpunkt eines Geradenbündels zugeordnet.

Durch die Punkte der Geraden s und die ihnen ein-eindeutig zugeordneten Erzeugenden der Fläche H_s , wird, wie im Fall des (F^2) - so auch im Fall des (F_h^2) Büschels, eine Hülltorse τ_1 3. Klasse bestimmt. Eine Ebene dieser Hülltorse wird aber zum Gegensatz dem allgemeinen Fall des (F^2) Büschels, die Fernebene sein, die der Punkt S_n und die Gerade t_n ordnen.

Die kubische Hülltorse τ_2 , die im Fall des (F^2) Büschels durch die ein-eindeutige Zuordnung der Punkte der Geraden s und der ihnen, auf die beschriebene Weise zugeordneten Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes bestimmt wird, zerfällt im Fall des (F_h^2) Büschels in eine Torse τ_2^2 2. Klasse, die die Punkte der Geraden s und ihnen zugeordnete Polaren des Büschels (P_r) ordnen und in die ∞^1 -deutige Fernebene, die als der Rest τ_2^1 der Hülltorse aufzufassen ist, und die durch die Punkte der Ferngeraden t_n und der ihnen zugeordneten erwähnten Polaren des Büschels (Q_n) gespannt wird.

Es ist bekannt, dass jene (VN) Komplexstrahlen eines (F^2) Büschels, die die I Punkte auf einer beliebigen Geraden haben, eine Regelfläche 6. Grades bilden, während die Z -Punktkurve dieser Strahlen 5. Ordnung ist. [2], [3].

Nehmen wir jetzt an, das homothetische Flächenbüschel $|F_h^2|$ liege vor. Da die Hülltorse τ_2 3. Klasse zerfällt, wird auch die Fläche 6. Grades jener (VN) Komplexstrahlen zerfallen, deren I Punkte längs der beliebigen Raumgeraden s liegen. Die eineindeutig zugeordneten Ebenen der Torse τ_1 3. Klasse und der Torse τ_2^2 2. Klasse erzeugen eine Regelfläche 5. Grades, während den Rest der Fernstrahlbüschel (S_n) bildet. Die (VN) Strahlen dieses Büschels sind die »Schnitt-

geraden^c der Fernebene der Torse τ_1 mit den Ebenen der Torse τ_2^1 . Der Punkt S_n ist der I Punkt eines jeden dieser Fernstrahlen, während ihre Z Punkte auf der Geraden t_n liegen. Diese Z Punkte sind die Schnittpunkte der Ferngeraden t_n mit der, durch den Punkt S_n und die Geraden des Büschels (Q_n) aufgespannten Ebenen der Torse τ_2^1 . Die Ebenen der Torse τ_2^2 2. Klasse schneiden aber ihnen ein-eindeutig zugeordnete Erzeugenden der Fläche H_s 2. Grades in einer Kurve 4. Ordnung, die die Z -Punktkurve jener (VN) Komplexstrahlen darstellt, die die erwähnte Ragelfläche 5. Grades bilden.

Satz 10. Jene (VN) Komplexstrahlen eines (F_n^2) Büschels deren I Punkte längs einer beliebigen Raumgeraden s liegen, bilden eine Regelfläche, die in eine Fläche 5. Grades mit der Leitgeraden s und in ein Fernstrahlbüschel zerfällt. Die Z Punkte dieser Strahlen bilden eine Kurve, die in eine Kurve 4. Ordnung und in die Ferngerade zerfällt. Der Fernpunkt S_n der Geraden s ist ein ∞^1 -deutiger I Punkt.

c) Die (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte längs eines (TK) Komplexstrahles liegen

1. Einem beliebigen Raumpunkt T sei der, durch das (F_n^2) Büschel zugeordnete Strahl

$$t = \varphi(T)$$

bestimmt. Durch den Satz 3 ist es uns bekannt geworden, dass den Punkten $T_i \in t$ die zugeordneten Strahlen

$$t_i = \varphi(T_i)$$

ein Strahlbüschel (T) in der Ebene (T, o_n) bilden, aber dem Fernpunkt T_n der Geraden t selbst, werden die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen ein Strahlbüschel (T) in der Ebene (T, o) bilden. Dies hat zur Folge, dass die Fernpunkte des Strahlbüschels (T) in der Ebene (T, o_n) die Gerade o_n bilden. Die diesen Punkten zugeordneten Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden das bekannte Fernpolarenbüschel (P_r) . Durch ein-eindeutige Zuordnung der Punkte der Geraden t und der Strahlen des Büschels (T) in der Ebene (T, o_n) wird nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip eine Hülltorse τ_1^2 2. Klasse bestimmt, die einen Teil der zerfallenen Hülltorse τ_1 3. Klasse darstellt, während durch die Punkte der Geraden t und die ihnen auf die beschriebene Weise ein-eindeutig zugeordneten Polaren des Büschels (P_r) ein Teil der kubischen Hülltorse τ_2 , also eine Torse τ_2^2 2. Klasse eingehüllt wird. Dies hat zur Folge, dass jene (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte längs des Strahles t des (TK) Komplexes liegen, ohne dass der Fernpunkt dieses Strahles hervorgehoben wird, eine Fläche 4. Grades bilden. Die Erzeugenden dieser Fläche sind die Schnittgeraden der ein-eindeutig zugeordneten Ebenen der Hülltorsen τ_1^2 und τ_2^2 . Die Z -Punktkurve der (VN) Komplexstrahlen auf der erwähnten Fläche ist als ein Erzeugniss der ein-eindeutig zugeordneten Strahlen des Büschels (T) in der Ebene (T, o_n) und der Ebenen der Hülltorse τ_2^2 2. Klasse an zu nehmen, so dass die Ordnung dieser ebenen Kurve nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip gleich drei ist.

Jene (TK) Komplexstrahlen, die genau dem Fernpunkt T_n des Strahles $t = \varphi(T)$ zugeordnet sind, bilden wie bekannt, ein Strahlbüschel (T) in der Ebene

(T, o) . Dies hat zur Folge, dass der Punkt T_n und die erwähnten Strahlen dieses Büschels (T) ein Ebenenbüschel mit der Achse (T, T_n) bilden und den linearen Teil τ_1^1 der kubischen Hülltorse τ_1 ordnen. Die den Fernpunkten der Strahlen des Büschels (T) zugeordneten Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden ein Fernstrahlbüschel (Q_n) . Die, durch den Punkt T_n und durch eine jede dieser Polaren aufgespannte Ebene, wird immer dieselbe Fernebene sein, die aber auch als ein Fernebenenbüschel mit der Achse $q \equiv (Q_n, T_n)$ angenommen werden kann und damit den linearen Teil τ_2^1 der zerfallenen kubischen Hülltorse τ_2 darstellt.

Daraus folgt unmittelbar, dass der Fernpunkt $T_n \in t$ ein $2 \cdot \infty^1$ -deutiger I Pkt ist. Er ist ein ∞^1 -deutiger I Punkt der (VN) Komplexstrahlen des Fernstrahlbüschels (T_n) mit den, längs der Ferngeraden der Ebene (T, o) liegenden Z Punkten und ein ∞^1 -deutiger I Punkt auf den (VN) Strahlen eines solchen Büschels (T_n) , deren Z Punkte sich auf jenem (TK) Strahl des Büschels (T) befinden, dessen Fernpunkt die zugeordnete Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes, die Gerade $q \equiv (Q_n, T_n)$ wird.

2. Die (TK) Komplexstrahlen sind auch jene, den Punkten der Geraden o_n zugeordneten und die Gerade o schneidenden Strahlen. /Satz 1./

Ein solcher Strahl t , der ein der ∞^2 komplanären, einem Punkt $T_n \in o_n$ zugeordnete (TK) Strahl ist, sei die Gesamtheit der I Punkte der (VN) Strahlen. Auf die übliche Weise werden wir die Gesamtheit der (VN) Strahlen und die Z -Punktkurve dieser Strahlen bestimmen.

Die den Punkten des Strahles

$$t = \varphi(T_n)$$

zugeordneten (TK) Komplexstrahlen bilden die Erzeugenden eines hyperbolischen Zylinders mit dem Fernscheitelpunkt im T_n . Eine der Fernerzeugenden ist die Gerade o_n als ein Strahl

$$o_n = \varphi(T_1) \quad T_1 \in o \wedge T_1 \in t,$$

und die zweite

$$t_s = \varphi(T_s) \quad T_s \text{ der Fernpunkt der Geraden } t.$$

Wegen der ein-eindeutigen Zuordnung der Punkte der Geraden t und der Erzeugenden des Zylinders und auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt, dass die bekannte Hülltorse τ_1 3. Klasse ist, deren Bestandteil die Ebene (T_1, o_n) und die Fernebene wird. Der Fernpunkt aller Zylindererzeugenden liegt im Punkt T_n , aber jeden Punkt der Ferngeraden o_n und t_s kann man als einen Fernpunkt der betreffenden Erzeugenden auffassen. Die den Punkten der Geraden o_n zugeordneten Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden das bekannte Fernbüschel (P_r) und dem Punkt $T_n \in o_n$ zugeordnete Polare ist ein betonter Strahl p_n dieses Büschels. Den Punkten der Geraden t_s zugeordnete Polaren p bilden das andere Strahlbüschel (Q_n) , dessen Bestandteil auch die Polare $p_n = (P_r, Q_n)$ ist. Die bekannte Hülltorse τ_2 3. Klasse muss in diesem Fall zerfallen in:

- a) ein Büschel $\tau_{2,1}^1$ der parallelen Ebenen, die durch die Punkte der Geraden t und die Ferngerade p_n gespannt werden;
- b) ein Ebenenbüschel $\tau_{2,2}^1$ mit der Achse $T_1 P_r$, die der Punkt T_1 und die Geraden des Fernbüschels (P_r) spannen;
- c) die ∞^1 -deutige Fernebene, die als einen Teil der Hülltorse $\tau_{2,3}^1$, der Fernpunkt T_s und die Strahlen des Fernbüschels (Q_n) ordnen.

Jene (VN) Strahlen, die die I Punkte längs des (TK) Strahles t haben, bilden nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip eine Regelfläche 6. Grades, die zerfällt:

a) in Erzeugenden eines Konoides 4. Grades mit der Leitgeraden o_n , da diese Erzeugenden die Schnittgeraden der ein-eindeutig zugeordneten Ebenen der Hülltorse τ_1 3. Klasse und $\tau_{2,1}^1$ 1. Klasse sind;

b) in ein Strahlbüschel (T_1) jener (VN) Komplexstrahlen in denen die Ebenen die Hülltorse $\tau_{2,2}^1$ die Ebene (T, o_n) der Hülltorse τ_1 schneiden, und

c) in ein Fernstrahlbüschel (T_s) in dem die Fernebene der Hülltorse τ_1 die Ebenen der Torse $\tau_{2,3}^1$ schneiden.

Die Z -Punktkurve dieser (VN) Komplexstrahlen wird durch die Schnittpunkte der Zylindererzeugenden und der ihnen auf die beschriebene Weise zugeordneten Ebenen der entarteten Hülltorse τ_2 bestimmt. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzipes folgt, dass diese Z -Punktkurve auf den Erzeugenden des Konoides 3. Ordnung ist, auf den Strahlen des Büschels (T_1) die Ferngerade o_n und auf dem Fernstrahlen des Büschels (T_s) die Ferngerade t_s bilden.

Vergleichen wir diese Ergebnisse mit jenen, die für einen, die Gerade o_n schneidendes (TK) Komplexstrahl stattfindet, können wir in allgemeinen behaupten:

Satz 11. Jene (VN) Komplexstrahlen eines (F_n^2) Büschels deren I Punkte sich längs eines Strahles t des (TK) Komplexes befinden, bilden eine Regelfläche 6. Grades, die in eine Fläche 4. Grades und in zwei Strahlbüschel zerfällt. Ein dieser Büscheln liegt in der Fernebene. Z Punkte Die dieser Strahlen bilden eine Kurve 5. Ordnung, die in eine Kurve 3. Ordnung auf der Fläche 4. Grades und in zwei Geraden zerfällt, deren eine in der Fernebene liegt.

d) Die einem beliebigen Raumpunkt zugeordneten (VN) Komplexstrahlen

Ist ein beliebiger Raumpunkt der I Punkt bzw. der Z Punkt eines (VN) Komplexstrahles, dann sagen wir, dass dieser Strahl diesem Punkt zugeordnet ist. Einem beliebigen Strahl des (VN) Komplexes sind, wie bekannt, zwei Punkte zugeordnet, die sein I Punkt und sein Z Punkt sind.

Im Fall des $|F^2|$ Büschels ist ein beliebiger Raumpunkt der I Punkt eines und der Z Punkt dreier komplanären (VN) Strahlen.

Nehmen wir an, das $|F_n^2|$ Flächenbüschel liege vor. Nach der Definition des (VN) Komplexes folgt, dass jener (VN) Komplexstrahl, der seinen I Punkt bzw. Z Punkt in beliebigem Raumpunkt T hat, den Z Punkt bzw. I Punkt auf dem Strahl

$$t = \varphi(T)$$

haben muss. Unumstritten ist auch jetzt der Punkt T ein I Punkt nur eines (VN) Strahles, der seinen Z Punkt am Strahl t hat. Um jene (VN) Komplexstrahlen festzustellen, deren Z Punkte im Punkt T liegen, müssen wir alle solchen (VN) Strahlen in Betracht nehmen, die seine I Punkte auf dem Strahl t haben. Solche (VN) Strahlen haben aber seine Z Punkte auf den (TK) Strahlen, die den Punkten des Strahles t zugeordnet sind und bilden zwei Strahlbüschel (T) in der Ebene (T, o_n) bzw. (T, o) . /Satz 3./ Nach dem Satz 11 ist bekannt geworden, dass die erwähnten Z Punkte in der Ebene (T, o_n) eine Kurve z^3 3. Ordnung bilden, während

die Z-Punktkurve 2. Ordnung in der Ebene (T, o) in eine den Punkt T enthaltende Gerade z^1 und in die Ferngerade dieser Ebene zerfällt. Die Ebene (T, t) enthält je einen Strahl des jeden der erwähnten Strahlbüschel (T) , d. h. in der Ebene (T, o) den Strahl

$$t_n = \varphi(T_n) \quad T_n \text{ der Fernpunkt von } t$$

und in der Ebene (T, o_n) den Strahl

$$t_k = \varphi(T_k) \quad T_k \in t \wedge T_k \in t_n.$$

Die Ebene (T, t) schneidet die Z-Punktkurve z^3 in drei Punkten deren ein am Strahl t_k liegt und die übrigen zwei können nur im Scheitelpunkt T liegen. Dieselbe Ebene (T, t) schneidet auch die zwei erwähnten Z.-Punktgeraden in je einem Punkt. Ein dieser Punkte ist der Fernpunkt der Geraden t_n in dem die Ebene (T, t) die Ferngerade der Ebene (T, o) schneidet, während der Schnittpunkt mit dem Strahl z^1 nur im Punkt T liegen kann. Die letzten zwei Z Punkte sind dem Fernpunkt T_n als dem I Punkt zugeordnet.

Satz 12. Ein beliebiger Raumpunkt ist der I Punkt eines und der Z Punkt dreier komplanären, durch das (F_n^2) Büschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen. Der I Punkt eines dieser drei Strahlen liegt immer auf der Geraden o_n .

Weiterhin ist es ersichtlich, dass jener (VN) Komplexstrahl, der den Z Punkt im Punkt T und den I Punkt auf der Ferngeraden o_n hat, mit einem (TK) Strahl übereinstimmt. /Siehe Satz 1./ Da der Punkt T ein beliebiger Raumpunkt ist, folgt:

Satz 13. Jene, durch ein (F_n^2) Büschel bestimmten (TK) Komplexstrahlen, die den lineären singulären Komplex mit der Leitgeraden o_n bilden, sind auch die Strahlen eines Teiles des zerfallenen (VN) Komplexes, der durch dasselbe Flächenbüschel bestimmt wird und nach den Untersuchungen in [1] folgt, dass sie auch mit den Strahlen des Majcenschen Komplexes übereinstimmen.

e) Die (VN) Komplexstrahlen deren I Punkte auf einer Ferngeraden q und in Flächenmittelpunkten des (F_n^2) Büschels liegen

Eine beliebige Ferngerade q sei die Gesamtheit der I Punkte der, durch ein (F_n^2) Büschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen. Unsere Absicht ist die Gesamtheit der Z Punkte solcher Strahlen, wie auch die Gesamtheit dieser Strahlen bestimmen.

Die Gerade q ist als die Ferngerade, auch als ein Strahl

$$q = \varphi(Q_n) \quad Q_n \text{ ein Fernpunkt}$$

aufzufassen. Den Punkten $T \in q$ zugeordnete Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in q$$

sind die, den Fernpunkt Q_n enthaltenden Fernstrahlen. Da eine Gerade t die Gesamtheit der, dem betreffenden Punkt T konjugiert zugeordneten Punkte bezüglich des (F_n^2) Büschels ist, werden die Fernstrahlen t jene Polaren der Grundkurve k_n^2 sein, die den Punkten der Geraden q zugeordnet sind. Alle diese (TK) Fernkomplexstrahlen bilden ein Strahlbüschel (Q_n) , wie behauptet.

Der Schnittpunkt T_n der Geraden q und o_n ist als ein Scheitel-Mittelpunkt der zerfallenen Singulärfläche des $|F_n^2|$ Flächenbüschels aufzufassen. Diesen Punkten zugeordnete (TK) Komplexstrahlen bilden die Gesamtheit der ∞^2 Geraden einer, die Gerade o enthaltenden Ebene G , die dem Punkt T_n bezüglich des (F_n^2) Büschels konjugiert zugeordnet ist.

Die zwei erwähnten Gebilden der (TK) Strahlen werden wir getrennt betrachten. Einem beliebigen Punkt $T_r \in q$ ist der zugeordnete Strahl

$$t_r = \varphi(T_r)$$

eine Ferngerade und ein jeder seiner Punkte wird als sein Fernpunkt betrachtet. Die diesen Punkten zugeordneten Polaren p_r , bezüglich des absoluten Kegelschnittes, bilden ein Ferngeradenbüschel. Diese Geraden spannen mit dem Punkt T_r die ∞^1 -deutige Fernebene. Es ist klar, dass auch der Punkt T_r und der Strahl t_r die Fernebene spannen. Aus diesem Grunde folgt, dass der Punkt T_r der Scheitelpunkt jenes Fernbüschels der (VN) Komplexstrahlen ist, die im Punkt T_r den gemeinsamen I Punkt und die Z Punkte längs der Geraden t_r haben.

Da der Punkt T_r ein beliebiger Punkt der Ferngeraden q ist, folgt, dass den Punkten der Geraden q , die die I Punkte darstellen, die zugeordneten (VN) Komplexstrahlen ∞^1 Fernstrahlbüschel bilden, bzw. eine jede Ferngerade ist ein solcher (VN) Komplexstrahl, der seinen I Punkt auf der Geraden q hat.

Die Stellung der Ferngeraden q , die als die Gesamtheit der I Punkte aufzufassen wird, können wir variieren, bekommen aber immer ∞^2 der zugeordneten (VN) Komplexstrahlen. Da es in einer Ebene nur ∞^2 Geraden gibt, müssen die Geraden auf denen die (VN) Komplexstrahlen liegen, für jede Stellung der Geraden q dieselben sein. Es ändert sich nur die Stellung der zugeordneten I und Z Punkte. Eine jede beliebige Ferngerade ist also ein $2 \cdot \infty^1$ -deutiger (VN) Komplexstrahl bzw. ein ∞^1 -deutiger Involutorstrahl des (VN) Komplexes.

Ein (VN) Komplexstrahl ist ein Involutorstrahl, oder kürzer, ein (IVN) Strahl und damit auch ein Doppelstrahl dieses Komplexes, wenn sein I Punkt und sein Z Punkt involutorisch zugeordnet sind. [3].

Satz 14. Ein beliebiger Fernpunkt Q_n ist ein ∞^1 -deutiger I Punkt jenes Fernbüschels der (VN) Komplexstrahlen, deren Z Punkte längs diesem Punkt zugeordnetes (TK) Fernkomplexstrahles liegen.

Wir können auch das Folgende behaupten:

Satz 15. Ein beliebiger Fernpunkt Q_n ist ein ∞^1 -deutiger Z Punkt jener (VN) Komplexstrahlen eines (F_n^2) Büschels, deren zugeordnete I Punkte auf der Ferngeraden $q = \varphi(Q_n)$ liegen.

Satz 16. Eine beliebige Ferngerade ist ein ∞^1 -deutiger Involutorstrahl des (VN) Komplexes, der durch ein (F_n^2) Büschel bestimmt wird. Die Punkte eines jeden der ∞^1 involutorzugeordneten Paare der I - Z Punkte auf jedem (IVN) Strahl sind die Paare der konjugiertzugeordneten Punkte bezüglich des Ferngrundkegelschnittes k_n^2 .

Es blieb uns noch die Eigenschaften jener (VN) Komplexstrahlen zu bestimmen, deren I Punkt im erwähnten Punkt $T_n \in q \wedge T_n \in o_n$ liegt, wenn dieser als

ein Scheitel-Mittelpunkt der Singulärfläche des $|F_n^2|$ Büschels und damit auch als ein Eckpunkt des ausgearteten Polartetraeders des (F_n^2) Polarraumbüschels betrachtet wird. Der (TK) Komplexstrahl, der dem Punkt T_n zugeordnet ist, wird eine jede Gerade der erwähnten Ebene G des Ebenenbüschels $[o]$ sein. Die Fernpunkte dieser Strahlen bilden die Ferngerade t_n der Ebene G und diesen Punkten zugeordnete Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden ein Ferngeradenbüschel. Auf die gleiche Weise, wie wir dies im Fall des Punktes $T_r \in q$ geten haben, behaupten wir, dass der Punkt T_n ein ∞^1 -deutiger I Punkt eines Fernbüschels der (VN) Strahlen ist, deren Z Punkte längs des Fernstrahles

$$t_n = \varphi(T_n)$$

liegen.

Eine der erwähnten Polaren, die einem Punkt $T_s \in t_n$ zugeordnet ist, enthält den Punkt T_n und verordnet mit ihm ein Büschel der parallelen Ebenen. Diese Ebenen schneiden jedem Punkt T_n zugeordnete (TK) Komplexstrahlen, die ein Büschel (T_s) der gleichlaufenden Strahlen in der Ebene G bilden, in Z Punkten jener (VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt im Fernpunkt T_n haben. Da die Strahlen des Büschels (T_s) die ganze Ebene G überdecken und ein jeder Punkt eines jeden dieser Strahlen ein Z Punkt ist, folgt, dass der Punkt T_n ein ∞^2 -deutiger I Punkt eines Bündels der gleichlaufenden (VN) Komplexstrahlen ist, deren Z Punkte die Ebene G des Ebenenbüschels $[o]$ überdecken. Aus diesen Gründe können wir behaupten:

Satz 17. Ein beliebiger Punkt T_n der Ferngeraden o_n , die die Schnittgerade der Ebenen der zerfallenen Grundkurve des Flächenbüschels $|F_n^2|$ ist, ist der Scheitelpunkt eines Bündels der gleichlaufenden (VN) Komplexstrahlen, die in diesem Punkt den I Punkt haben, während ihre Z Punkte eine Ebene des Ebenenbüschels $[o]$ bilden, die konjugiert dem Punkt T_n bezüglich des Büschels (F_n^2) ist.

Die Teile der zerfallenen Grundkurve k^2 und k_n^2 des $|F_n^2|$ Flächenbüschels schneiden sich in den Punkten A_{n1} und A_{n2} der Geraden o_n . Betrachten wir jene (VN) Komplexstrahlen, die seinen I Punkt in einem dieser zwei Punkte haben, z. B. im Punkt A_{n1} .

Es wurde gezeigt, dass dem Punkt A_{n1} , die zugeordnete Polarebene G_{A1} bezüglich des (F_n^2) Büschels, jene Ebene des Ebenenbüschels $[o]$ ist, die den Punkt A_{n1} enthält und in diesem Punkt alle Flächen des Büschels $|F_n^2|$ berührt. Jeder Punkt dieser Polar-Berührebene ist dem Punkt A_{n1} konjugiert zugeordnet und damit ist eine jede Gerade dieser Ebene als ein (TK) Komplexstrahl aufzufassen, der dem Punkt A_{n1} zugeordnet wird. Den Fernpunkten dieser Strahlen zugeordnete Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden ein Fernstrahlbüschel und durch die Strahlen dieses Büschels und den Punkt A_{n1} gespannten Ebenen bilden die ∞^1 -deutige Fernebene. Hieraus folgt unmittelbar, dass der Fernpunkt A_{n1} der ∞^1 -deutige I Punkt jener Fernstrahlen des (VN) Komplexes ist, die die Z Punkte längs der Ferngeraden n der Ebene G_{A1} haben. Weil auch der Punkt A_{n1} auf dieser Geraden liegt, fallen in die Ferngerade n alle jenen (VN) Komplexstrahlen zusammen, die den gemeinsamen I Punkt im A_{n1} haben und deren Z Punkte längs der Geraden n liegen. Wir müssen aber auch das Folgende in Betracht nehmen. Eine der erwähnten Polaren p , die einem Punkt T_r der Geraden n zugeordnet

ist, muss den Punkt A_{n1} enthalten. Dies hat zur Folge, dass alle Geraden des Büschels (T_r) in der Ebene G_{A1} auf alle Geraden des Büschels (A_{n1}) in derselben Ebene senkrecht stehen, bzw. in dieser Ebene gibt es ein Netz der senkrechten Geraden, deren dem Büschel (T_r) die (TK) Komplexstrahlen und dem Büschel (A_{n1}) die (VN) Komplexstrahlen angehören. Ein jeder Strahl des (A_{n1}) Büschels ist demnach ein ∞^1 -deutiger (VN) Komplexstrahl mit dem gemeinsamen ∞^1 -deutigen I Punkt im A_{n1} und den Z Punkten längs dieses Strahles in den Schnittpunkten mit den Geraden des Büschels (T_r) .

Satz 18. Jeder der zwei Punkte der Ferngeraden o_n der ein Schnittpunkt der zerfallenen Grundkurve k^2 und k_n^2 des $|F_n^2|$ Flächenbüschels ist, wird auch der Scheitelpunkt eines Büschels der ∞^1 -deutigen (VN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen I Punkt in demselben Scheitelpunkt und die Z Punkte längs des betreffenden (VN) Komplexstrahles haben.

Auch in diesem Fall ist der Punkt der Geraden o_n ein ∞^2 -deutiger I Punkt eines in ein Strahlbüschel zusammengesetzten Bündels der (VN) Komplexstrahlen.

Es wurde weiterhin bekannt geworden, dass die, bezüglich des (F_n^2) Büschels konjugiert zugeordneten Geraden o und o_n , auch als die gegenüberliegenden Kanten des ausgerateten Polartetraeders dieses Büschels aufzufassen sind. Aus diesem Grunde ist es leicht auch das Folgende behaupten:

Satz 19. Ein beliebiger Punkt der Geraden o , die die Mittelpunkte der Flächen des $|F_n^2|$ Büschels bilden, ist ein ∞^1 -deutiger I Punkt jenes Büschels der (VN) Komplexstrahlen, deren zugeordnete Z Punkte längs der Geraden o_n liegen.

Ziehen wir einen Vergleich der Sätze 14., 17., 18. und 19. mit den ähnlichen Sätzen, die im Fall des allgemeinen Flächenbüschels $|F^2|$ stattfinden, ist es leicht eine Ähnlichkeit zu bemerken. Ein beliebiger Flächenmittelpunkt des $|F^2|$ Büschels ist der ∞^1 -deutiger I Punkt jenes Büschels der (VN) Komplexstrahlen, deren Z Punkte längs diesem Mittelpunkt zugeordneten (TK) Fernkomplexstrahles liegen, während ein Mittelpunkt der Singulärfläche — Eckpunkt des Polartetraeders — ein ∞^2 -deutiger I Punkt eines Bündels jener (VN) Komplexstrahlen ist, deren Z Punkte in der, diesem Eckpunkt gegenüberliegenden Seitenebene des Polartetraeders liegen.

Jetzt müssen wir nur noch folgende bekannten Tatsachen in Betracht nehmen. Im Fall des $|F_n^2|$ Flächenbüschels ist die Flächenmittelpunktkurve 3. Ordnung in die Gerade o und in die ganze Fernebene ausgeratet, jeder Punkt der Geraden o_n ist aber als ein Mittelpunkt der ausgearteten Singulärfläche des Büschels $|F_n^2|$, bzw. als ein Eckpunkt des ausgearteten Polartetraeders des zugeordneten Polaraumbüschels (F_n^2) aufzufassen.

f) Die (VN) Komplexstrahlen des (F_n^2) Büschels, deren Z Punkte auf einer beliebigen Raum- oder Ferngeraden liegen und ihre I -Punktkurve

Eine beliebige Raumgerade s sei die Gesamtheit der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen. I Punkte dieser Strahlen liegen auf den Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in s,$$

die einen Regulus eines hyperbolischen Paraboloides mit der Fernleitgeraden o_n bilden, während seine Fernerzeugende

$$t_s = \varphi(S_n) \quad (S_n \text{ der Fernpunkt der Geraden } s)$$

ist. Eine beliebige Erzeugende t enthaltende Ebene R schneidet das hyperbolische Paraboloid in noch einer Erzeugenden r des anderen Regulus, wobei die Gerade r der Geraden s konjugiert zugeordnete Gerade bezüglich einer Fläche des $|F_n^2|$ Büschels ist. Die Schnittpunkte der gesuchten I -Punktkurve mit der Ebene R , die auch die Ordnung dieser Kurve bestimmen, können nur auf den Erzeugenden t und r liegen. Auf der Geraden t befinden sich drei I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen, die, wie bekannt, den gemeinsamen Z Punkt im Punkt

$$T = \varphi^{-1}(t)$$

haben. Ein dieser Strahlen ist mit dem Strahl t parallel. /Satz 12./

Damit auch jene (VN) Komplexstrahlen verordnet seien, deren I Punkte auf der Geraden r liegen, wird es nötig die Strahlen

$$t_r = \varphi(T_r) \quad \text{für jeden } T_r \in r$$

feststellen. Auch solche Strahlen bilden ein Regulus des neuen hyperbolischen Paraboloides, da sie Transversalen der Geraden s und o_n sind, wobei dem Fernpunkt R_n der Geraden r jener (TK) Fernkomplexstrahl zugeordnet wird, der den Fernpunkt S_n der Geraden s enthält. Eine beliebige, die Gerade s enthaltende Ebene R_1 enthält noch eine Erzeugende-Strahl

$$t_r = \varphi(T_r) \quad T_r \in r$$

dieses hyperbolischen Paraboloides und schneidet die Z -Punktkurve z^5 jener (VN) Strahlen, die die I Punkte auf der Geraden r haben, in fünf Punkten. /Satz 10./ Ein dieser fünf Punkte liegt auf dem Strahl t_r , da ihm zugeordneter I Punkt im Punkt $T_r \in r$ liegt und die übrigen vier Punkte können nur auf der Geraden s liegen, wobei ihr Fernpunkt S_n ein solcher Z Punkt wird. /Satz 15./

Da Gerade s eine beliebige Raumgerade ist, können wir auf Grund des Chasleschen Korrespondenzprinzippes behaupten:

Satz 20. Die I -Punktkurve i^7 7. Ordnung jener (VN) Komplexstrahlen eines $|F_n^2|$ Büschels, die die Z Punkte längs der beliebigen Raumgeraden s haben, zerfällt in eine Raumkurve i^5 5. Ordnung und in zwei Ferngeraden. Eine dieser Geraden ist immer die Gerade o_n und die andere, jener Fernstrahl des (TK) Komplexes, der dem Fernpunkt der Geraden s zugeordnet wird. Die Regelfläche 10. Grades dieser Strahlen zerfällt:

1. in eine Fläche 7. Grades, deren Erzeugenden durch die ein-zweideutigen Zuordnung der Punkte der Kurve i^5 und der Punkte der Geraden s bestimmt sind;
2. in ein Regulus des hyperbolischen Paraboloides, dessen Erzeugenden die I Punkte längs der Ferngeraden o_n haben, und
3. in ein Fernbüschel solcher Strahlen, die den gemeinsamen Z Punkt im Fernpunkt S_n der Geraden s haben.

Bemerkung. Über die Strahlen des letzten Büschels wurde in Satz 15. gesprochen.

Unter allen Raumgeraden besitzt die Gerade o , als die Gesamtheit der Mittelpunkte aller Flächen des Büschels $|F_n^2|$ eine besondere Stellung. Auf Grund der bisherigen Untersuchungen und besonders jenen, die die Gerade o als eine Gesamtheit der I Punkte auffassen, können wir behaupten:

Satz 21. Ein beliebiger Punkt der Geraden o ist ein ∞^1 -deutiger Z Punkt eines Büschels jener, durch das (F_n^2) Büschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte längs der Ferngeraden o_n liegen.

Unter allen Ferngeraden nimmt die Gerade o_n eine besondere Stellung an. Es wird bekannt geworden, dass sein jeder Punkt als ein Eckpunkt des entarteten Polartetraeders und als ein ∞^2 -deutiger I Punkt eines Bündels der (VN) Komplexstrahlen eines (F_n^2) Büschels aufzufassen ist.

Im Fall des allgemeinen Büschels (F^2) 2. Grades ist, wie bekannt, jeder Eckpunkt des Polartetraeders ein ∞^1 -deutiger Z Punkt, einen Kegel 3. Grades bildenden (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte in diesem Eckpunkt gegenüberliegender Seitenebene eine Kurve 3. Ordnung bilden.

Unsere Absicht ist, jene, durch das (F_n^2) Büschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen ordnen, die in einem beliebigen Punkt $T_n \in o_n$ seinen Z Punkt haben. Wir müssen deswegen diesem Punkt T_n den zugeordneten Strahl

$$t = \varphi(T_n)$$

bestimmen. Dieser Strahl ist aber ein jeder der ∞^2 solcher Strahlen, die in einer Ebene des Büschels $[o]$ liegen. Auf Grund der Untersuchungen in $c)$ folgt, dass die Z -Punktkurve jener (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte längs des betreffenden Strahles t liegen, in eine, den Punkt T_n in allgemeinen nicht enthaltende Kurve 3. Ordnung, in die Gerade o und in die Ferngerade der Ebene (t, o) zerfällt. Da dies für einen jeden der ∞^2 Strahlen $t = \varphi(T_n)$ in der Ebene (t, o) und für einen jeden Punkt $T_n \in o_n$ die Geltung hat, folgt:

Satz 22. Ein jeder Punkt der Ferngeraden o_n ist ein $2 \cdot \infty^1$ -deutiger Z Punkt jener zwei Büschel der (VN) Komplexstrahlen, deren I Punkte längs der Geraden o bzw. längs jener Geraden des Fernstrahlbüschels (O) liegen, die die Polare des erwähnten Punktes bezüglich der Kurve k_n^2 ist. (O ist der Fernpunkt der Geraden o .)

Daraus wird klar, dass die Strahlen der beiden der erwähnten Strahlbüschel die zweifachen (VN) Komplexstrahlen sind, deren I und Z Punkt involutorisch zugeordnet sind. Solche Strahlen wurden in $e)$ als die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes genannt und werden in $j)$ näher untersucht werden.

g) Einen Raumpunkt enthaltenden (VN) Komplexstrahlen — Grad des Komplexes

Ein beliebiger Raumpunkt T ist im Fall des $|F^2|$ Flächenbüschels der Scheitelpunkt eines in allgemeinen unentarteten Kegels 8. Grades, dessen Erzeugenden die (VN) Komplexstrahlen sind. Die I Punkte bzw. Z Punkte dieser Strahlen bilden auf diesem Kegel eine Kurve 9. bzw. 11. Ordnung.

Auch im Fall des $|F_n^2|$ Flächenbüschels müssen die, einen Raumpunkt enthaltenden (VN) Komplexstrahlen einen solchen Kegel bilden, dessen Eigenschaften werden auf die übliche Weise untersucht werden.

Einem beliebigen Raumpunkt T ist der zugeordnete Strahl

$$t = \varphi(T)$$

eine, die Ferngerade o_n schneidende Gerade. Eine jede Ebene des Büschels $[t]$ ist eine, dem Punkt T bezüglich je einer Fläche des (F_n^2) Büschels zugeordnete Polarebene. Eine dieser Ebenen schneidet die ihr zugeordnete Fläche F des $|F_n^2|$ Büschels in einer Kurve c^2 2. Ordnung, die die Gesamtheit der Berührungspunkte den Punkt T enthaltenden Tangenten dieser Fläche F ist. Die Fernpunkte T_1 und T_2 der Kurve c^2 sind auch die Punkte der Ferngrundkurve k_n^2 . Die Strahlen

$$t_i = \varphi(T_i) \quad \text{für jeden } T_i \in c^2$$

sind die Erzeugenden eines Konoides 4. Grades, dem die Ferngerade o_n die zweifache Leitgerade ist. Einem jeden beliebigen Punkt $T_s \in o_n$ ist nämlich die zugeordnete Polarebene bezüglich aller Flächen des (F_n^2) Büschels eine Ebene des Büschels $[o]$, die die Kurve c^2 in zwei Punkten schneidet und diesen Punkten zugeordnete (TK) Komplexstrahlen müssen den Punkt T_s enthalten. Dies hat zur Folge, dass die Fernebene das Konoid in der zweifachen Leitgeraden o_n und in zwei Erzeugenden

$$t_i = \varphi(T_i) \quad i = 1, 2$$

schneidet, die auch Tangenten der Kurve k_n^2 in Punkten T_1 und T_2 sind. Den Punkt T enthalten jene zwei Erzeugenden des Konoides, die den Schnittpunkten der Geraden t mit der Kurve c^2 zugeordnet sind. Die aus den Punkt T auf die Erzeugenden des Konoides 4. Grades gelegten Senkrechten, bilden eine Fusspunkt-kurve 8. Ordnung, die in eine Kurve 6. Ordnung und in die Ferngeraden t_1 und t_2 zerfällt.

Die Fusspunkt-kurve 6. Ordnung wird auf folgende Weise bestimmt. Den Fernpunkten der Konoideserzeugenden, d. h. den Punkten der Geraden o_n zugeordnete Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden ein Fernstrahlbüschel (P_s) , das mit dem Punkt T ein Ebenenbüschel ordnet. Einer jeden Erzeugenden des Konoides ist eine Ebene dieses Ebenenbüschels zugeordnet, jeder Ebene aber zwei Erzeugenden dieses Konoides zugeordnet werden, so dass das Erzeugniss dieser Gebilden, nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip, die gesuchte Raumkurve ist. Dass auch die Fernerzeugenden t_1 und t_2 einen Teil der Fusspunkt-kurve bilden folgt daraus, da ein jeder Punkt einer solchen Erzeugenden auch als sein Fernpunkt aufzufassen ist. Diesen Fernpunkten zugeordnete Polaren in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt, bilden zwei Fernstrahlbüschel, die samt Punkt T solche Ebenenbüschel zuordnen, die die zugeordneten (TK) Fernstrahlen t_1 und t_2 in den Fusspunkten schneiden.

Da den Punkt T zwei Erzeugenden des Konoides enthalten, ist er ein zweifacher Punkt der Fusspunkt-kurve und erzeugt durch die Verbindung mit den übrigen Punkten dieser Kurve einen Kegel 4. Grades und zwei Strahlbüschel (T) in den Ebenen (T, t_1) und (T, t_2) . Dieser ausgeartete Kegel und der Berührungkegel (T, c^2) berühren sich längs sechs Erzeugenden unter denen auch Verbindungsgeraden TT_1 und TT_2 sind. Dies hat zur Folge, dass auf der Kurve c^2 sechs I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen liegen, die den Punkt T enthalten, aber dass

auch die Ebene (T, t) die gesuchte I -Punktkurve in noch drei, auf dem Strahl t sich befindenden I Punkten schneidet, unter denen ein der Fernpunkt ist.

Ist eine andere Ebene des Ebenenbüschels $[t]$ in Betracht genommen, schneidet diese Ebene die ihr zugeordnete Fläche F_n des $|F_n^2|$ Büschels in der Kurve c_n^2 , die I -Punktkurve in denselben drei erwähnten I Punkten auf dem Strahl t , dann in zwei Fernschnittpunkten der Kurven c_n^2 und k_n^2 und in noch vier Punkten auf der Kurve c_n^2 . Durch die Wahl der Ebenen des Büschels $[t]$ ändern sich die Schnittpunkte dieser Ebene und der Kurve k_n^2 . Solche Punkte sind aber immer zwei der neun I Punkte in denen diese Ebene die I -Punktkurve, den Punkt T enthaltenden (VN) Komplexstrahlen schneidet.

Ändern wir den Punkt T , dann ändert sich auch der Strahl

$$t = \varphi(T)$$

und die Ebenen des Büschels $[t]$, aber die Punkte der Grundkurve k_n^2 sind immer als die I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen aufzufassen, die den betreffenden Punkt T enthalten.

Satz 23. Jene, durch das (F_n^2) Büschel bestimmten und einen beliebigen Raumpunkt T enthaltenden (VN) Komplexstrahlen haben ihre I Punkte auf einer Kurve i^9 9. Ordnung, die in eine Raumkurve 7. Ordnung mit dem Doppelpunkt im T und in die Fernkurve k_n^2 2. Ordnung zerfällt. Der Kegel dieser (VN) Komplexstrahlen zerfällt danach in einen Kegel 6. Grades und in einen Kegel 2. Grades. Die Fernkurve k_n^2 2. Ordnung dieses Kegels enthalten alle solchen Kegel ohne Rücksicht auf die Stellung des Raumpunktes T .

Auf die übliche Weise, wie wir dies in [3] geten haben und auf Grund der bisherigen Untersuchungen, können wir behaupten:

Satz 24. Die Z -Punktkurve z^{11} 11. Ordnung der durch den Satz 21 erklärten (VN) Komplexstrahlen zerfällt in die Fernkurve k_n^2 und in eine Raumkurve 9. Ordnung mit dem dreifachen Punkt im Punkt T .

Dies können wir leicht auch nachprüfen. Die, aus den Punkt T auf die Flächen des $|F_n^2|$ Büschels gelegten Tangenten, berühren diese Flächen, wie bekannt, in Punkten einer Fläche ω 3. Ordnung. Diese Fläche und der erwähnte Kegel 6. Grades durchdringen sich in einer Kurve 18. Ordnung. Zwei Erzeugenden den Punkt T enthaltender Fläche des $|F_n^2|$ Büschels, liegen auch auf der Fläche ω und sind die (VN) Komplexstrahlen. [2]. Den übrigen Teil der Durchdringungskurve 16. Ordnung bildet die I -Punktkurve i^7 und die Z -Punktkurve z^9 den Punkt T enthaltender (VN) Komplexstrahlen.

h) Die Flächenmittelpunktkurve des $|F_n^2|$ Büschels

Durch ein beliebiges Flächenbüschel 2. Grades sind auch einige besonderen Kurven bestimmt, wie: die Flächenmittelpunktraumkurve k_c^2 3. Ordnung, die Grundkurve k^4 4. Ordnung dieses Büschels und die bekannte Jacobische Fern-

kurve μ 3. Ordnung. Die Punkte dieser Kurven wurden in [3] als die Singulärpunkte des (VN) Komplexes betrachtet.

Liegt das $|F_n^2|$ Bündel vor, entarten bzw. zerfallen solche Kurven, es bleibt aber sinnvoll die Punkte dieser Kurven auch in diesem Fall als die Gesamtheiten der I Punkte bzw. Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen zu betrachten.

Die Flächenmittelpunktkurve k_n^3 des $|F_n^2|$ Bündels entartet, wie bekannt, in die Gerade o und in die ganze Fernebene. Ebenso ist es bekannt, dass ein beliebiger Punkt dieser »Kurve« ein ∞^1 -deutiger I Punkt und auch ein ∞^1 -deutiger Z Punkt der Bündeln der (VN) Komplexstrahlen ist. Eine Ausnahme bilden die Punkte der Geraden o_n , die als die Scheitelpunkte der Singulärflächen des $|F_n^2|$ Bündels die ∞^2 -deutigen I Punkte und $2 \cdot \infty^1$ -deutigen Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen sind.

i) Die Grundkurve des $|F_n^2|$ Bündels

Die Kennzeichnung eines homothetischen Flächenbündels 2. Grades liegt, wie bekannt, in dem, dass seine Grundkurve 4. Ordnung in einen eigentlichen Kegelschnitt k^2 und in einen Fernkegelschnitt k_n^2 zerfällt.

Im [3] wurde es bewiesen, dass ein beliebiger Punkt T der Grundkurve k^4 des $|F_n^2|$ Bündels ein ∞^1 -deutiger I - Z Punkt eines Bündels solcher (VN) Komplexstrahlen ist, deren I - und Z Punkt im Punkt T zusammenfallen. Die Ebene dieses Bündels steht auf die Tangente der Kurve k^4 im Punkt T senkrecht.

Im Fall des $|F_n^2|$ Bündels werden wir die Kurven k^2 und k_n^2 getrennt betrachten.

Die Kurve k_n^2 . Einem beliebigen Punkt $K_n \in k_n^2$ ist der zugeordnete Strahl

$$t = \varphi(K_n)$$

die Tangente der Fernkurve k_n^2 im Punkt K_n . Eine jede beliebige den Punkt K_n enthaltende Gerade schneidet senkrecht die Gerade t in demselben Punkt K_n und damit ist jede solche Gerade als ein solcher (VN) Komplexstrahl aufzufassen, dem der I Punkt und der Z Punkt im Punkt K_n zusammenfallen. Daraus folgt, dass ein jeder Punkt der Kurve k_n^2 ein ∞^1 -deutiger I - Z Punkt eines Bündels der (VN) Komplexstrahlen ist. Alle solchen, den Punkten der Kurve k_n^2 zugeordneten (VN) Komplexstrahlen bilden einen quadratischen Komplex der Unisekanten der Kurve k_n^2 . Unter diesen Strahlen befinden sich auch alle Erzeugenden der regulären Flächen des $|F_n^2|$ Bündels.

Die Kurve k^2 . Die Tangenten t der Kurve k^2 sind auch jetzt die Strahlen

$$t = \varphi(K) \quad K \in k^2.$$

Alle diesen Geraden liegen in der Ebene der Kurve k^2 und schneiden ihre Ferngerade o_n . Jeden Punkt dieser Geraden o_n enthalten aber zwei Tangenten. Den Fernpunkten dieser Tangenten zugeordnete Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden den bekannten Fernstrahlbündel (P_r) . Die Ebenen, die durch die Punkte der Kurve k^2 und der ihnen auf die beschriebene Weise zugeordneten Polaren des Bündels (P_r) aufgespannt werden, sind senkrecht auf die Ebene der Kurve k^2 gestellt und auf einer jeden dieser Ebenen steht die ihr zugeordnete Tangente der Kurve k^2 senkrecht. Jene (VN) Komplexstrahlen, die in einem beliebigen Punkt $K \in k^2$ seinen I Punkt haben, haben in demselben Punkt auch den Z

Punkt und bilden ein Strahlbüschel (K) in der Ebene, die senkrecht auf die Tangente $t = \varphi(K)$ steht.

Alle solchen (VN) Komplexstrahlen bilden eine Kongruenz.

Wie bekannt, die Ordnung einer Kongruenz ist der Zahl einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden Kongruenzstrahlen gleich. In unserem Fall, wo alle solchen Strahlen in, auf die Ebene der Kurve k^2 , senkrecht gelegten Ebenen liegen und sie in Normalen der Kurve k^2 schneiden, wird auch die Ordnung der betrachteten Kongruenz der Zahl jener Normalen der Kurve k^2 gleich, die einen jeden Punkt der Ebene dieser Kurve enthalten. Wie bekannt, jeden solchen Punkt enthalten je vier Normalen der Kurve 2. Ordnung. Aus diesem Grunde folgt, dass auch die Ordnung der Kongruenz jener (VN) Komplexstrahlen, deren I - und Z Punkt zusammen in Punkt der Kurve k^2 fallen, gleich vier ist.

Die Klasse dieser Kongruenz, d. h. die Zahl der in einer beliebigen Ebene liegenden Kongruenzstrahlen ist gleich zwei. Eine beliebige Ebene schneidet nämlich die Kurve k^2 in zwei Punkten und jeder dieser Punkte ist der Scheitelpunkt eines der erwähnten Büscheln der (VN) Komplexstrahlen. Da eine beliebige den Scheitelpunkt des Büschels enthaltende Ebene auch einen Strahl dieses Büschels enthalten muss, folgt, dass auch eine beliebige Ebene je zwei Strahlen der Kongruenz jener (VN) Komplexstrahlen enthält, die den gemeinsamen I - und Z Punkt auf der Kurve k^2 haben.

Satz 25. Jene durch das $|F_n^2|$ Büschel bestimmten (VN) Komplexstrahlen, deren I - und Z Punkt in einen Punkt der Grundkurve dieses Flächenbüschels zusammenfallen bilden:

- a) *einen quadratischen Komplex, wenn die I - Z Punkte längs der Grundfernkurve k_n^2 liegen,*
- b) *eine Kongruenz 4. Ordnung und 2. Klasse, wenn die I - Z Punkte längs der Grundkurve k^2 liegen.*

Solche, im Satz 25 a) betrachteten Geraden sind im [1] auch als die Strahlen des Majcenschen Komplexes dargestellt. Nehmen wir noch Satz 13 in Betracht, kann man sagen:

Satz 26. Jeder Strahl des (MK) Komplexes eines (F_n^2) Büschels ist auch ein Strahl des (VN) Komplexes. Der ganze (MK) Komplex 3. Grades ist in einen Teil des (VN) Komplexes 8. Grades eingetaucht.

Bemerkung. Ein analoges Resultat haben wir auch im Fall, wenn diese Komplexe durch ein, die Kugel enthaltendes Flächenbüschel 2. Grades bestimmt sind. [5]. Die Ursachen dafür sind natürlich verschieden.

j) Die Jacobische Fernkurve μ

Die bekannte Jacobische Fernkurve μ 3 Ordnung ist eine Gesamtheit der Paare solcher Punkte, die konjugiert zugeordnet bezüglich eines Flächenbüschels 2. Grades und bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind.

Diese Definition können wir auch auf folgende Weise aussagen: Ein Fernpunkt T ist ein Punkt der Fernkurve μ , wenn dem Fernpunkt des Strahles

$$t = \varphi(T)$$

die zugeordnete Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes den Punkt T enthält.

Unsere Absicht ist, die Gesamtheiten solcher Punkte auch im Fall des (F_h^2) Büschels zu bestimmen. Unumstritten ist, dass die Eigenschaft der Punkte der Fernkurve μ die Punkte der Ferngeraden o_n haben. Es wurde gezeigt, dass die einem beliebigen Punkt $T_n \in o_n$ zugeordnete Polarebene G des Büschels $[o]$ ein Strahlbüschel (T_r) ($T_r \notin o_n$, aber ein Fernpunkt) solcher (TK) Komplexstrahlen enthält, die senkrecht auf jede den Punkt T_n enthaltende Gerade steht. Dies bedeutet aber, dass die Punkte T_r und T_n konjugiert zugeordnet bezüglich des Büschels (F_h^2) und bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind. Daraus folgt, dass ausser der Punkte $T_n \in o_n$ eine Gesamtheit solcher Fernpunkte T_r besteht, die die Eigenschaften der Fernkurve μ haben.

Eine solche Eigenschaft hat auch der Fernpunkt O der Geraden o . Die Gerade o ist als einem beliebigen Punkt $T_n \in o_n$ zugeordneten Strahl

$$o = \varphi(T_n)$$

aufzufassen. Die dem Punkt O bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnete Polare schneidet die Gerade o_n in einem dieser Punkte T_n .

Eine beliebige Ferngerade des Büschels O schneidet also die Fernkurve μ in drei Punkten u. zw. in seinem Schnittpunkt mit der Geraden o_n , im Punkt O und in noch einem Punkt T_r , wie wir dies eben behauptet haben. Die Fernkurve μ muss also in die Gerade $o_n \equiv \mu^1$ und in noch eine Kurve μ^2 zerfallen. Dass auch im Fall des (F_h^2) Büschels die Ordnung der Kurve μ gleich drei ist, werden wir die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Ferngeraden q bestimmen.

Den Punkten der Geraden o_n zugeordnete (TK) Komplexstrahlen bilden den singulären linearen Komplex der Leitgeraden o . Eine beliebige Ferngerade q enthält die Fernpunkte der ∞^2 dieser Strahlen, so dass alle einem Punkt der Gerade o_n zugeordneten (TK) Komplexstrahlen ein Strahlbüschel bilden, dem der Scheitelpunkt auf der Geraden q liegt. Auf diese Weise ist unter den Punkten der Geraden o_n und q eine ein-eindeutige Korrespondenz hergestellt. Den Punkten der Geraden q zugeordnete Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden ein Fernstrahlbüschel (Q_n) . Uns interessiert, wievielmals eine solche einem Punkt der Geraden q zugeordnete Polare p diesem Punkt auf die beschriebene Weise zugeordneten Punkt der Geraden o_n enthalten. Die Punkte der Geraden o_n bilden eine Reihe n_1 1. Ordnung und die erwähnten Polaren schneiden diese Gerade o_n in einer neuen Reihe n_2 1. Ordnung. Unter diesen zwei Reihen besteht eine ein-eindeutige Zuordnung. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzips folgt, dass auf der Geraden o_n zwei solche Punkte liegen, die die ihnen auf beschriebene Weise zugeordneten Polaren enthalten. Dies bedeutet weiterhin, dass auch die Gerade q zwei den erwähnten Punkten der Geraden o_n zugeordnete Punkte enthält, die konjugiert zugeordnet bezüglich des (F_h^2) Büschels und gleichfalls bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind. Diese zwei Punkte sind die Schnittpunkte der beliebigen Ferngeraden q mit der Kurve μ , die diese Gerade noch in seinem Schnittpunkt mit der Geraden o_n schneidet.

Satz 27. Die Jacobische Fernkurve μ 3. Ordnung wird im Fall des (F_h^2) Büschels in die Gerade $o_n \equiv \mu^1$ und in eine den Fernpunkt O der Geraden o enthaltende Fernkurve μ^2 2. Ordnung zerfallen.

k) Die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes

In *B e*) wurde ein Involutorstrahl oder ein (IVN) Strahl als ein solcher Doppelstrahl des (VN) Komplexes definiert, dem sein *I* Punkt und sein *Z* Punkt involutorisch zugeordnet sind.

Solche Strahlen, je nach dem Wahl der Art des Flächenbüschels 2. Grades durch dem sie bestimmt sind, bilden die Kongruenzen verschiedener Ordnungen und Klassen. Einen Teil dieser Kongruenzstrahlen bilden diejenigen, die die Verbindungsgeraden der Punkte der Jacobischen Fernkurve μ mit den Punkten der Flächenmittelpunktkurve des betreffenden Flächenbüschels sind.

Im Fall des (F_h^2) Büschels zerfällt die Jacobische Fernkurve μ , wie eben bewiesen wurde, in die Gerade $o_n \equiv \mu^1$ und in eine Fernkurve μ^2 2. Ordnung, während die Flächenmittelpunktkurve 3. Ordnung in die eigentliche Gerade *o* und in die Fernebene, mit der betonten Geraden o_n , ausgeartet ist. Daraus wird es klar, dass die Kongruenz der (IVN) Strahlen die spezifische Eigenschaften haben muss.

In *e*) wurde bewiesen, dass eine jede beliebige Ferngerade ein ∞^1 -deutiger (IVN) Komplexstrahl ist, den wir auch als eine Verbindungsgerade der Punkte der ausgearteten Kurve μ und der Fernflächenmittelpunkte auffassen können.

Eine jede Transversale der Geraden *o* und o_n wird auch als ein solcher (IVN) Strahl bekannt, dem die involutorisch zugeordneten *I*- und *Z* Punkte auf diesen Geraden liegen.

Betrachten wir nun noch die Verbindungsgeraden der Punkte der Kurve μ^2 und der Geraden *o*.

Eine beliebige dieser Verbindungsgeraden t_m welcher der Fernpunkt T_M auf der Kurve μ^2 liegt, ordnet mit der Geraden *o* eine Ebene des Ebenenbüschels [*o*]. Wie bekannt, eine jede Gerade dieser Ebene ist einem Punkt $T_m \in o_n$ zugeordneter (TK) Komplexstrahl. Da die Punkte $T_M \in \mu^2$ und $T_m \in o_n \equiv \mu^1$ zwei Punkte der Kurve μ sind, die auch konjugiert zugeordnete Punkte bezüglich des (F_h^2) Büschels werden, müssen sie, nach der Definition der Jacobischen Fernkurve μ , auch bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiert zugeordnet sein. Alle Geraden des Sinns T_M sind also auf alle Geraden des Sinns T_m senkrecht gelegt. Die Gerade t_m ist als ein Strahl

$$t_m = \varphi(T_m)$$

aufzufassen. Den Punkten dieser Geraden zugeordnete (TK) Komplexstrahlen bilden die Erzeugenden eines hyperbolischen Kegels /S. B c)/ mit dem Scheitelpunkt im T_m , die die Ebene (t_m, o) senkrecht schneiden. Zwei dieser Erzeugenden t_1 und t_2 durchsetzen auch die Gerade t_m in Punkten T_2 und T_1 u. zw. so, dass

$$\begin{array}{lll} t_1 = \varphi(T_1) & T_1 \in t_2 & \text{und} \\ t_2 = \varphi(T_2) & T_2 \in t_1 & \text{ist.} \end{array}$$

Damit ist aber die Gerade t_m auch als ein (IVN) Komplexstrahl aufzufassen, dem die involutorisch zugeordneten *I*-*Z* Punkt und *Z*-*I* Punkt in den Punkten T_1 und T_2 liegen.

Nehmen wir anstatt der Geraden t_m eine andere beliebige Gerade des Büschels (T_M) $T_M \in \mu^2$ der Ebene (t_m, o) in Betracht, wird auch für diese Gerade, wie auch für eine jede beliebige Verbindungsgerade eines Punktes der Kurve μ^2 mit einem

Punkt der Geraden o , auf die gleich Weise bewiesen, wie wir dies eben für den Strahl t_m getan haben, dass diese Verbindungsgerade ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes ist.

Alle solchen (VN) Strahlen bilden eine Kongruenz 2. Ordnung und 2. Klasse. Ein beliebiger Raumpunkt T und die Kurve μ^2 ordnen nämlich einen Kegel 2. Grades, den die Gerade o in zwei Punkten durchsetzt. Also, den Punkt T enthalten zwei (IVN) Strahlen, die dieser Kongruenz angehören. In einer beliebigen Ebene liegen auch zwei solche Strahlen, da diese Ebene die Kurve μ^2 in zwei Punkten und die Gerade o in einem Punkt schneidet.

Auf jedem dieser (IVN) Komplexstrahlen liegen zwei diesem Strahl zugeordnete I - Z Punkte. In einer beliebigen Ebene des Büschels $[o]$ bilden solche Strahlen ein Bündel und die zugeordneten Punkte müssen eine Kurve e bilden. In allen Ebenen des Büschels $[o]$ bilden solche Punkte eine Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} , die die Ebene G in der erwähnten Kurve e schneiden muss. Die Ordnung der Fläche \mathcal{S} - \mathcal{Z} wird also der Ordnung dieser Kurve e gleich sein. Um die Ordnung dieser Kurve e bestimmen zu können fassen wir dieses Strahlbündel als ein Erzeugniss auf, dass mittels dieser Kurve e erhalten wird.

Jeder Strahl dieses Bündels ist eine Bisekante der Kurve e . Jedem Punkt T_1 der Kurve e ist ein Punkt T_2 derselben Kurve e zugeordnet u. zw. so, dass die Verbindungsgerade T_1T_2 ein Strahl des Strahlbündels ist. Eine Umkehr dieses hat auch die Geltung, so dass jeder Strahl der mittels dieser Punktreihen ankommt, zweimal in Betracht genommen wird. Weiterhin ist es bekannt, dass in den Punkten der zerfallenen Grundkurve k^2 und k_n^2 dieses Flächenbüschels $[F_n^2]$ der I Punkt und der Z Punkt desselben (VN) Strahles zusammenfallen. Da die Grundkurve 4. Ordnung die Ebene G in vier Punkten durchsetzt, hat dies die Folgerung, dass von den Erzeugniss vier Strahlbündel abgenommen werden müssen. Nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip folgt, dass in unserem Fall $n_1 = n_2 = n$ ist, da es um dieselbe Kurve e des Ordnung n geht, dass $a_1 = a_2 = 1$ ist, wegen der eindeutigen Zuordnung der Punkte der zwei Punktreihen und dass $w = 4$ ist. Da jeder Strahl zweimal in Betracht genommen wurde, müssen wir die linke Seite der Gleichung halbieren. $\frac{1}{2}(n \cdot 1 + n \cdot 1 - 4) = 1$. So wird erhalten, dass die Ordnung der Kurve e gleich drei ist. Dies weiterhin bedeutet, dass alle involutorzugeordneten I - und Z Punkte auf allen (IVN) Strahlen, die die Verbindungsgeraden der Punkte der Kurve μ^2 und der Punkte der Geraden o sind, eine Fläche 3. Ordnung bilden, die die Fernebene in der zerfallener Kurve μ^2 und $\mu^1 \equiv o_n$ schneidet. Die, auf der Geraden $\mu^1 = o_n$ liegenden I - Z Punkte sind den Ferninvolutorstrahlen des Büschels (O) zugeordnet, wo O der Fernpunkt der Geraden o und $O \in \mu^2$ ist.

Auf Grund der bisherigen Untersuchungen können wir ohne Beweis behaupten, dass keine anderen, durch das (F_n^2) Bündel bestimmten (IVN) Strahlen bestehen.

Satz 28. Die Involutorstrahlen eines durch das (F_n^2) Bündel bestimmten (VN) Komplexes bilden

a) eine Kongruenz 1. Ordnung und 1. Klasse der Transversalen der Geraden o und o_n , so dass die involutorzugeordneten I - Z Punkte die ∞^1 -deutigen Geraden o und o_n bilden;

- b) eine Kongruenz 0. Ordnung und 1. Klasse der ∞^1 -deutigen Fernstrahlen, so dass die involutorzugeordneten I-Z Punkte dieser Strahlen die ∞^1 -deutige Fernebene bilden;
- c) eine Kongruenz 2. Ordnung und 2. Klasse der Verbindungsgeraden der Punkte der Kurve μ^2 und der Punkte der Geraden o , so dass die involutorzugeordneten I-Z Punkte dieser Strahlen eine Fläche 3. Ordnung bilden.

LITERATUR

- [1] V. Niče, Homothetische polare Räume, Rad JAZU, knj. 343 (1966.) s. 81—118.
- [2] V. Niče, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU, 331 (1965.) 145—172.
- [3] V. Ščurić-Čudovan, Der orientierte Ničesche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, I Teil, Rad JAZU, 367 (1974.) 151—205.
- [4] V. Ščurić-Čudovan, Der orientierte Ničesche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, II Teil, Rad JAZU, 370, (1975.) 57—91.
- [5] V. Ščurić-Čudovan, Das $|F_k^2|$ Flächenbüschel und eine Möglichkeit des Eintauchens des (MK) in den (VN) Komplex, Rad JAZU, 374, (1977.) 57—91.

DOPUNSKA ISTRAŽIVANJA PRAMENA HOMOTETIČNIH PLOHA 2. STUPNJA I NEKIH KOMPLEKSA ODREĐENIH TIM PRAMENOM

SADRŽAJ

Dvjema homotetičnim ploham 2. stupnja određen je pramen $|F_h^2|$ takvih ploha, kojemu se temeljna krivulja k^4 4. reda 1. vrste raspada u jednu konačnu koniku k^2 i u jednu beskonačno daleku koniku k_n^2 . Spojnica beskonačno dalekih sjecišta (realnih ili konjugirano imaginarnih) ovih dviju krivulja realan je pravac o_n , a čine ga parovi konjugiranih točaka s obzirom na pramen polarnih prostora (F_h^2) pramena $|F_h^2|$. Središta svih ploha određuju pravac o .

U radu se pokazuje da su pravci o i o_n nasuprotni bridovi ∞^1 degeneriranih autopolarnih tetraedara pridruženih pramenu (F_h^2) , za razliku od općenitog pramena (F^2) , kojemu je pridružen jedan i samo jedan autopolarni tetraedar. Pravac o_n je skup realnih vrhova ovih tetraedara, dok pravac o sadrže po dvije realne pobočne ravnine tih tetraedara. Poznato je, međutim, da je vrh autopolarnog tetraedra jednog pramena ploha 2. stupnja ujedno i vrh — središte singularne plohe unutar tog pramena ploha. Odavde slijedi da u pramenu ploha $|F_h^2|$ ne postoje samo četiri singularne plohe, već njih beskonačno mnogo s vrhovima duž pravca o_n . Svaka se od tih ploha (valjaka) raspada u dva pramena izvodnica, od kojih po jedan leži u ravnini raspadnute temeljne krivulje k^2 , odnosno k_n^2 . Svaku točku osi valjka 2. stupnja možemo smatrati i njenim središtem, pa se središta bilo kojeg valjka s vrhom u točki $T_n \in o_n$ nalaze duž spojnice točke T_n i beskonačno daleke točke O pravca o . Prostorna krivulja 3. reda središta ploha pramena $|F^2|$ raspada se i degenerira u pramena $|F^2|$ u pravac o i u točke beskonačno daleke ravnine.

Uzmemo li u obzir da su središta ploha pramena $|F^2|$ posebno istaknute točke i za komplekse određene tim pramenom, jasno je da takva degeneracija krivulje središta ploha mora dovesti i do promjena svojstava tvorevina što ih čine zrake pojedinih kompleksa određenih pramenom ploha $|F_h^2|$, pa i do bitnih promjena svojstava samih kompleksa.

Zraka t tetraedarskog kompleksa ili kompleksa (TK) definirana je kao skup točaka konjugiranih nekoj točki T prostora s obzirom na polarne prostore svake plohe pramena $|F^2|$. Kompleks (TK) je 2. stupnja. V. Niče je u [1] pokazao da bilo kojoj točki prostora pridružena zraka kompleksa (TK) određenog pramenom (F_h^2) siječe pravac o_n , tako da sve takve zrake određuju singularni linerarni kompleks s ravnalicom o_n . U radu se pokazuje da je bilo kojoj točki $T_n \in o_n$, koju možemo

smatrati i vrhom raspadnutog autopolarnog tetraedra, pridruženo ∞^2 komplanarnih zraka kompleksa (TK) , koje leže u ravnini tetraedra nasuprotnoj vrhu T_n , što znači da sijeku i pravac o . Svim dakle točkama beskonačno dalekog pravca o_n pridružene zrake kompleksa (TK) određuju još jedan singularni linearni kompleks s ravnalicom o . Bilo kojoj točki beskonačno daleke ravnine koja nije na pravcu o_n pridružena je zraka kompleksa (TK) beskonačno daleko.

Poznato je da bilo koja ravnina dira tri plohe pramena ploha 2. stupnja.

U radu se pokazuje da bilo koja ravnina dira dvije regularne plohe pramena $|F_h^2|$ i jednu singularnu plohu tog pramena u njenu vrhu na pravcu o_n .

Ravnina koja sadrži pravac o_n , tj. ravnina usporedna s ravninom konačne temeljne konike k^2 , dira jednu i samo jednu regularnu plohu pramena $|F_h^2|$ u sjecištu s pravcem o i svaku od ∞^1 singularnih ploha u točkama pravca o_n .

Po volji odabrana ravnina pramena $[o]$ ne dira nijednu regularnu plohu pramena $|F_h^2|$. Dvije ravnine tog pramena $[o]$ koje sadrže sjecišta temeljnih krivulja k^2 i k_n^2 diraju sve regularne plohe pramena $|F_h^2|$ u tim sjecištima.

Zrake kompleksa (TK) s ravnalicom o diaju po dvije regularne plohe pramena $|F_h^2|$, dok zrake tog kompleksa s ravnalicom o_n diraju po jednu regularnu i jednu singularnu plohu pramena $|F_h^2|$.

Zraka n kompleksa (VN) određena pramenom (F^2) 2. stupnja okomica je položena iz po volji odabrane točke T prostora na toj točki pridruženu zraku t kompleksa (TK) . Točka T i sjecište T_1 zraka t i n dirališta su zrake n s dvije plohe pramena $|F^2|$, ali kao točke zrake n nisu međusobno ravnopravne. Točka T nazvana je I točkom zrake n , a točka T_1 njenom Z točkom. Pokazano je da je bilo koja točka T prostora I točka za jednu i Z točka za tri komplanarne zrake kompleksa (VN) , koji je 8. stupnja.

Kako su se svojstva (TK) kompleksa određenog pramenom ploha $|F_h^2|$ bitno izmijenila u odnosu na njegova svojstva određena općenitim pramenom ploha $|F_h^2|$, a kompleks (VN) je po definiciji bitno vezan uz kompleks (TK) , moraju se te promjene odraziti i na svojstvima kompleksa (VN) određenog pramenom (F_h^2) .

Jedna od osnovnih karakteristika sastoji se u tom da se raspadaju kako plohe zraka kompleksa (VN) tako i krivulje pridruženih Z točaka, odnosno I točaka, kad I točke odnosno Z točke tih zraka određuju konačne, odnosno beskonačno daleke pravce.

Nalaze li se I točke zraka kompleksa (VN) određenog pramenom (F_h^2) na po volji odabranom konačnom pravcu s , tada te zrake tvore pravčastu plohu koja se raspada u plohu 5. stupnja s ravnalicom s i Z točkama na krivulji 4. reda i u beskonačno daleki pramen zraka s vrhom u beskonačno dalekoj točki pravca s kao ∞^1 -značnom I točkom i Z točkama duž pravca.

Ako je zraka t kompleksa (TK) skup I točaka zraka kompleksa (VN) pokazuje se da se bez obzira na to da li zraka t pripada kompleksu s ravnalicom o_n ili o , ploha zraka kompleksa (VN) raspada u plohu 4. stupnja i dva pramena zraka, a krivulja pridruženih Z točaka u krivulju 3. reda i dva pravca. Svojstva tih ploha i krivulja, kao i smještaj pramenova zavisi ipak o tome pripada li zraka t kompleksu s ravnalicom o_n , odnosno o .

Bilo koja točka T prostora je I točka jedne zrake kompleksa (VN) određenog pramenom (F_h^2) i Z točka za tri takve zrake. Jedna među njima ima uvijek pridruženu I točku na pravcu o_n , što znači da je ona ujedno i zraka kompleksa (TK) . Pokazuje se da je svaka zraka kompleksa (TK) s ravnalicom o_n ujedno i zraka kompleksa (VN) , a prema istraživanjima u [1] i zraka kompleksa (MK) .

Po volji odabrana točka beskonačno daleke ravnine je ∞^1 -značna I točka i ∞^1 -značna Z točka pramena beskonačno dalekih zraka kompleksa (VN) , kojima se pridružene Z točke odnosno I točke nalaze na toj točki pridruženoj beskonačno dalekoj zraci kompleksa (TK) .

Po volji odabrani pravac beskonačno daleke ravnine je ∞^1 -značna involutorna zraka kompleksa (VN) , određenog pramenom (F_h^2) . Točke svakog od ∞^1 involutorno pridruženih parova točaka $I-Z$ na svakoj takvoj involutornoj zraci parovi su konjugirano pridruženih točaka s obzirom na temeljnu beskonačno daleku koniku k_n^2 .

Bilo koja točka T_n pravca o_n vrh je snopa usporednih zraka kompleksa (VN) koje u toj točki imaju zajedničku I točku, pa je ona kao I točka ∞^2 -značna. Z točke tih zraka leže u ravnini K pramena $[o]$, koja je konjugirana točki T_n s obzirom na pramen (F_h^2) . Točka T_n je $2 \cdot \infty^1$ -značna Z točka onih dvaju pramenova zraka kompleksa (VN) , čije zrake imaju I točke duž pravca o , odnosno duž beskonačno dalekog pravca ravnine K .

Svaka od dviju točaka pravca o_n u kojima se sijeku temeljne krivulje k^2 i k_n^2 pramena $|F_h^2|$ vrh je pramena ∞^1 -značnih zraka kompleksa (VN) koje imaju zajedničku I točku u spomenutom vrhu, dok im se Z točke nalaze duž čitave zrake.

Po volji odabrana točka pravca o , koji se sastoji od središta ploha pramena $|F_h^2|$, vrh je i ∞^1 -značna I točka odnosno ∞^1 -značna Z točka onog pramena zraka kompleksa (VN) čije Z točke odnosno I točke leže duž pravca o_n .

Usporedimo li ova istraživanja sa sličnim rezultatima dobivenim proučavanjem općenitog pramena ploha $|F^2|$, lako uočujemo sličnosti. U pramena $|F^2|$ bilo koje središte plohe tog pramena je ∞^1 -značna I točka takvog pramena zraka kompleksa (VN) , kojima se pridružene Z točke nalaze duž beskonačno dalekog pravca. Središte singularne plohe — vrh autopolarnog tetraedra je ∞^2 -značna I točka snopa zraka kompleksa (VN) , kojima se pridružene Z točke nalaze u tom vrhu nasuprotnoj ravnini tetraedra.

Podsjetimo se samo da se krivulja središta ploha u pramena $|F_h^2|$ raspala u pravac o i točke beskonačno daleke ravnine, ali da je svaka točka pravca o_n središte raspadnute singularne plohe pramena $|F_h^2|$, odnosno vrh raspadnutog autopolarnog tetraedra pridruženog pramenu (F_h^2) .

One zrake kompleksa (VN) koje sadrže po volji odabranu točku T prostora određuju stožac 8. stupnja, koji se u pramena $|F_h^2|$ raspada u stožac 6. stupnja i stožac 2. stupnja s beskonačno dalekom krivuljom k_n^2 . I točke ovih zraka određuju krivulju 9. reda, koja se raspada u krivulju 7. reda s dvostrukom točkom u točki T i u beskonačno daleku temeljnu krivulju k_n^2 . Z točke tih zraka određuju krivulju 11. reda, koja se raspada u krivulju 9. reda s trostrukom točkom u točki T i u beskonačno daleku temeljnu koniku k_n^2 .

Bilo kojim pramenom ploha 2. stupnja određene su i neke posebne krivulje, kao što je temeljna krivulja k^4 4. reda tog pramena, krivulja k_c^3 3. reda središta ploha, te poznata beskonačno daleka Jacobijeva krivulja μ 3. reda. U [4] je pokazano da su točke takvih krivulja shvaćene kao I točke odnosno Z točke zraka kompleksa (VN) singularne.

Točke krivulje središta ploha pramena $|F_h^2|$, koja se kao što je poznato raspada u pravac i točke beskonačno daleke ravnine, jesu ∞^1 -značne I točke i ∞^1 -značne Z točke pramenova zraka kompleksa (VN) . Iznimku čine točke pravca o_n , koje su ∞^2 -značne I točke i $2 \cdot \infty^1$ -značne Z točke tih zraka.

Temeljna krivulja 4. reda pramena $|F_h^2|$ raspada se u koniku k^2 i beskonačno daleku koniku k_n^2 . Zrake kompleksa (VN) kojima se I i Z točka nalazi u istoj točki te temeljne krivulje određuju

a) kongruenciju 4. reda i 2. razreda, ako se I - Z točke nalaze duž krivulje k^2 ,

b) kvadratni kompleks, ako se I - Z točke nalaze duž temeljne krivulje k_n^2 .
Zrake ovog kvadratnog kompleksa su prema istraživanjima u [1] ujedno i zrake kompleksa (MK) 3. stupnja, koji se raspada u kompleks 2. stupnja s beskonačno dalekom ravnalicom k_n^2 i linearni kompleks s ravnalicom o_n , ujedno je i zraka kompleksa (VN), što znači da je čitav kompleks (MK) uronjen u jedan dio kompleksa (VN) 8. stupnja.

Jacobijeva krivulja μ 3. reda je skup parova takvih točaka koje su konjugirano pridružene i s obzirom na pramen ploha 2. stupnja i s obzirom na apsolutnu koniku. Pokazuje se da se u pramena (F_h^2) ova krivulja raspada u pravac $o_n \equiv \mu^1$ i u beskonačno daleku koniku μ^2 , koja sadrži beskonačno daleku točku O pravca o .

Spojnice točaka pravca $o_n \equiv \mu^1$ i točaka pravca o takve su dvostruke zrake kompleksa (VN) da su njima pridružene I točke odnosno Z točke, koje se nalaze na tim pravcima, involutorno pridružene. Takve zrake nazvali smo involutornim zrakama kompleksa (VN). One čine kongruenciju 1. reda i 1. razreda.

Spojnice točaka krivulje μ^2 s točkama pravca o također su involutorne zrake kompleksa (VN) i određuju kongruenciju 2. reda i 2. razreda. Involutorno pridružene I - Z točke tih zraka čine plohu 3. reda, koju beskonačno daleka ravnina siječe u raspadnutoj krivulji μ .

Bilo koji pravac beskonačno daleke ravnine kao spojnica točaka degenerirane krivulje središta ploha i točaka krivulje μ je ∞^1 -značna involutorna zraka kompleksa (VN). Sve takve zrake čine kongruenciju 0. reda i 1. razreda, a njima pridružene I - Z točke određuju ∞^1 -značnu beskonačno daleku ravninu.

Primljeno u II. razredu

16. 6. 1978.