

*JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI*

---

**VLASTA ŠČURIC-ČUDOVAN**

**DIE KONGRUENZEN DER INVOLUTORSTRAHLEN  
EINES DURCH DAS ( $F_k^2$ )  
FLÄCHENBÜSCHEL BESTIMMTEN (VN) KOMPLEXES**

---

**KONGRUENCIJE INVOLUTORNIH ZRAKA KOMPLEKSA (VN)  
ODREĐENOG PRAMENOM PLOHA ( $F_k^2$ )**

**ZAGREB**

---

1978

**DIE KONGRUENZEN DER INVOLUTORSTRAHLEN EINES  
DURCH DAS  $|F_k^2|$  FLÄCHENBÜSCHEL BESTIMMTEN  
(VN) KOMPLEXES**

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung meiner Arbeit: »Das  $|F_k^2|$  Flächenbüschel und eine Möglichkeit des Eintauchens des (MK) in das (VN) Komplex«, in der die Eigenschaften eines solchen Ničeschen orientierten Strahlkomplexes untersucht wurden, der durch ein Flächenbüschel  $|F_k^2|$  2. Grades das genau eine Kugel als die einzige Rotationsfläche enthält, bestimmt wird.

In einem projektiven Raum  $P_3$ , der auf dem Modell des durch die Fernebene ergänzten euklidischen Raumes  $E_3$  gebaut wird, sei ein solches Flächenbüschel  $|F_k^2|$  gegeben, das genau eine Kugel enthält. Ein solches Flächenbüschel  $|F_k^2|$  und ein Flächenbüschel  $|F^2|$  2. Grades, das weder eine Kugel noch mehr als zwei Rotationsflächen enthält, werden sich in mehreren Eigenschaften unterscheiden. [1].

Da durch ein Flächenbüschel 2. Grades vier Komplexe bestimmt werden u. zw. der bekannte Reyesche tetraedrale Strahlkomplex oder kürzer (TK) Komplex; der Majcensche Komplex oder kürzer (MK) Komplex [6], [7], [8]; der Normalenkomplex und der orientierte Ničesche Komplex oder kürzer (VN) Komplex [4], [5], [2], [3], wurde in [1] die Aufmerksamkeit auf jene Veränderungen gerichtet, die in den Eigenschaften dieser Komplexe dann auftreten, wenn sie anstatt des Flächenbüschels  $|F^2|$  durch das Flächenbüschel  $|F_k^2|$  bestimmt werden. In dieser Arbeit werden uns insbesondere solche Veränderungen auf der Gebilden der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes interessieren.

## 1. DEFINITION UND GRUNDEIGENSCHAFTEN

### a) des Majcenschen Strahlkomplexes

Der (MK) Komplex wird durch jenen Strahlen des Raumes gebildet, die die Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades in symmetrischen involutorischen Punktreihen schneiden bzw. er ist eine Gesamtheit solcher Geraden deren einer der zwei Berührungspunkte (die zweifachen Punkte der erwähnten involutorischen Punktreihen) mit den Flächen des Flächenbüschels sich unendlich fern befindet. Der überbleibende Berührungspunkt eines jeden solchen Strahles wird als sein Mittelpunkt genannt, da dieser Punkt der gemeinsame Mittelpunkt aller Strecken ist, die auf dem betreffenden (MK) Komplexstrahl von allen Flächen des Flächenbüschels ausgeschnitten werden.

Einige Eigenschaften des  $(MK)$  Komplexes:

- a 1. Der  $(MK)$  Komplex ist 3. Grades.
- a 2. Ein beliebiger Raumpunkt ist der Mittelpunkt eines  $(MK)$  Komplexstrahles.
- a 3. Ein  $(TK)$  Komplexstrahl ist mit jenem  $(MK)$  Komplexstrahl parallel, dessen Mittelpunkt er zugeordnet ist.
- a 4. Die einen beliebigen Fernpunkt enthaltenden  $(MK)$  Komplexstrahlen sind büschelförmig und die Mittelpunkte dieser Strahlen befinden sich längs des  $(TK)$  Komplexstrahles, der diesem Punkt zugeordnet ist.
- a 5. Den Punkten einer beliebigen Ferngeraden  $q$  zugeordnete  $(TK)$  Komplexstrahlen sind die Bisekanten der Flächenmittelpunktraumkurve  $k_c^3$  3. Ordnung des Flächenbüschels 2. Grades und bilden ein Erzeugendensystem des einschaligen Hyperboloides, während das ergänzende System die Unisekanten dieser Kurve bilden, die die konjugierten Polaren der Geraden  $q$  bezüglich jede der Flächen dieses Flächenbüschels und auch die  $(MK)$  Komplexstrahlen sind.
- a 6. Jede Erzeugende jeder in einem Flächenbüschel 2. Grades enthaltenden Regelfläche ist ein  $(MK)$  Komplexstrahl, dem der Mittelpunkt in der Hälfte jener Strecke liegt, die auf dieser Erzeugenden von der Grundkurve  $k^4$  4. Ordnung dieses Flächenbüschels ausgeschnitten wird.
- a 7. Jene  $(MK)$  Komplexstrahlen, deren Mittelpunkte mit den Punkten der Flächenmittelpunktkurve  $k_c^3$  übereinstimmen, bilden eine Kongruenz 5. Ordnung und 3. Klasse.
- a 8. Jede Ferngerade ist ein zweifacher  $(MK)$  Komplexstrahl. Jene  $(MK)$  Komplexstrahlen deren Mittelpunkte in der Fernebene liegen befinden sich selbst in dieser Ebene.

#### b) des orientierten Ničeschen Komplexes

Nehmen wir zuerst an, ein Flächenbüschel 2. Grades liege vor, ohne Rücksicht ob es  $|F^2|$  oder  $|F_k^2|$  ist. Einem beliebigen Raumpunkt  $T$  ist ein Strahl  $t$  des  $(TK)$  Komplexes als die Schnittgerade der Polarebenen des Punktes  $T$  bezüglich der Polarräume einer jeden Fläche dieses Flächenbüschels 2. Grades zugeordnet und diese Zuordnung wird kürzer mit

$$t = \varphi(T)$$

bezeichnet. Die den Punkt  $T$  enthaltende und den Strahl  $t$  senkrecht schneidende Gerade  $o$  ist der Strahl des orientierten Ničeschen oder  $(VN)$  Komplexes was mit

$$o = \psi(T)$$

bezeichnet wird. [1], [2], [4]. Der Punkt  $T$  sei als ein  $I$  Punkt des Strahles  $o$  genannt und sein Schnittpunkt mit dem Strahl  $t$  als der  $Z$  Punkt dieses Strahles  $o$  bezeichnet. Obwohl die Punkte  $I$  und  $Z$  die Berührungspunkte des Strahles  $o$  an zwei Flächen des Flächenbüschels 2. Grades sind, sind sie auf dem Strahl nicht gleichwertig, wie es in [2] gezeigt wurde. Sie bestimmen deshalb die Orientierung eines jeden Strahles  $o$  des  $(VN)$  Komplexes. Ein beliebiger Raumpunkt  $T$  ist der  $I$  Punkt für

einen und der  $Z$  Punkt für drei Strahlen des  $(VN)$  Komplexes, und alle dieser vier Strahlen liegen in der Ebene  $(T, t)$  wo

$$t = \varphi(T)$$

ist.

Der  $(VN)$  Komplex hat den Grad 8.

In [2] und [3] wurde es gezeigt, dass die bekannte Jacobische Fernkurve  $\mu$  3. Ordnung, die durch das Flächenbüschel  $/F^2/$  bestimmt wird, die spezifischen Eigenschaften jenen Gebilden gibt, die von der  $(VN)$  Komplexstrahlen aufgespannt werden, wenn diese Strahlen an bestimmten Weisen auf diese Kurve  $\mu$  verknüpft werden.

In [1] ist es indessen bewiesen dass im Fall des  $/F_k^2/$  Flächenbüschels jeder Fernpunkt die Eigenschaften der Punkte der Kurve  $\mu$  hat. Einem beliebigen Fernpunkt  $M$  ist der zugeordnete Strahl

$$t_M = \varphi(M)$$

die Schnittgerade der Polarebenen dieses Punktes bezüglich des Polarraumes einer jeden Fläche des Flächenbüschels  $/F_k^2/$ . Dies bedeutet, dass der Punkt  $M$  der konjugierte Punkt auch dem Fernpunkt der Geraden  $t_M$  bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist, da diese Kurve auch ein Bestandteil des Fernschnittkurvenbüschels  $f_k^2$  ist in dem die Fernebene das Flächenbüschel  $/F_k^2/$  schneidet. Daraus folgt, dass jede den Fernpunkt  $M$  enthaltende Gerade senkrecht auf die Gerade  $t_M$  steht, bzw. dass jede Verbindungsgerade des Punktes  $M$  mit irgendwelchem Punkt der Geraden  $t_M$  ein  $(VN)$  Komplexstrahl ist. Es folgt:

b1. Ein beliebiger Fernpunkt ist der Scheitel der gleichlaufenden Strahlen des  $(VN)$  Komplexes, die in dem erwähnten Scheitelpunkt den gemeinsamen  $I$  Punkt haben, während die  $Z$  Punkte dieser Strahlen längs diesem Scheitelpunkt zugeordnetes  $(TK)$  Komplexstrahles liegen.

b2. Jeder  $(MK)$  Komplexstrahl, der durch das  $/F_k^2/$  Flächenbüschel bestimmt wird, ist gleichfalls auch ein  $(VN)$  Komplexstrahl mit dem  $I$  Punkt in seinem Fernpunkt während der  $Z$  Punkt dieses  $(VN)$  Komplexstrahles mit dem Mittelpunkt des  $(MK)$  Komplexstrahles übereinstimmt.

Def. 1. Jene Raumgeraden die gleichfalls die  $(MK)$ - und  $(VN)$  Komplexstrahlen eines  $/F_k^2/$  Flächenbüschels sind und bei deren die Mittelpunkte der  $(MK)$  Komplexstrahlen mit den  $Z$  Punkten der  $(VN)$  Komplexstrahlen übereinstimmen sind die Strahlen des vereinigten  $(MK-VN)$  Komplexes.

b3. Der durch das Flächenbüschel  $/F_k^2/$  bestimmte  $(VN)$  Komplex 8. Grades zerfällt in einen Komplex 5. Grades der  $(VN)$  Komplexstrahlen und in einen Komplex 3. Grades der Strahlen des vereinigten  $(MK-VN)$  Komplexes.

Beisein der Kugel in dem Flächenbüschel  $/F_k^2/$  hat aber seinen Einfluss auf eine Reihe weiterer Eigenschaften des  $(VN)$  Komplexes, die in [1] dargestellt sind. In diesser Arbeit wird unsere Aufmerksamkeit, wie schon erwähnt, auf die Veränderungen innerhalb der Kongruenz der Involutorstrahlen des  $(VN)$  Komplexes gerichtet, die dann stattfinden, wenn dieser Komplex durch das Flächenbüschel  $/F_k^2/$  bzw. sein Polarraumbüschel  $(F_k^2)$  bestimmt wird anstatt des Zufalls, wenn solcher Komplex und solche Kongruenz durch das Flächenbüschel  $/F^2/$  bestimmt wird, das keine Kugel enthält.

## 2. DIE INVOLUTORSTRAHLEN DES (VN) KOMPLEXS

In [1] wurde definiert, dass ein (VN) Komplexstrahl genau dann ein Involutorstrahl, oder kürzer geschrieben, ein (IVN) Komplexstrahl ist, wenn er nur die Orientierung ändert, als ihm involutorzugeordneter  $I$  Punkt und  $Z$  Punkt ihre Stellung wechseln.

Wie im Fall des  $|F^2|$  Flächenbüschels ist auch im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels jede Ferngerade ein (IVN) Komplexstrahl.

Weiterhin wurde gezeigt, dass jede Gerade des Eckpunktes z. B.  $A$  des Polartetraeders  $ABCD$  des Polarraumbüschels  $(F_k^2)$  2. Grades ein (VN) Komplexstrahl ist, der im Punkt  $A$  sein  $I$  Punkt hat und sein  $Z$  Punkt in der Ebene  $(ABC)$  des Polartetraeders liegt. Der Punkt  $A$  ist auch der  $Z$  Punkt einer solchen (VN) Komplexstrahlgebilde deren  $I$  Punkte eine Kurve 3. Ordnung in der Ebene  $(ABC)$  bilden, diese Kurve aber im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels in die Ferngerade dieser Ebene und in eine, die Punkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  enthaltende Kurve 2. Ordnung zerfällt.

Jeder Eckpunkt des Polartetraeders des  $(F_k^2)$  Polarraumbüschels ist:

1. ein Scheitelpunkt des Büschels jener (IVN) Komplexstrahlen, deren einer der involutorzugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte im betreffenden Scheitel-eckpunkt liegt und der andere auf der Ferngeraden jener Ebene des Polartetraeders, die drei seiner übrigen Eckpunkte enthält, so dass nach der Definition 1. (in [1]) jede Gerade dieses Büschels auch ein (MK-VN) Komplexstrahl ist,

2. ein Scheitelpunkt eines Kegels 2. Grades dessen Erzeugenden die (IVN) Komplexstrahlen sind, so dass die involutorzugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte dieser Strahlen in dem betreffenden Eckpunkt des Polartetraeders bzw. auf der erwähnten Kurve 2. Ordnung in der Ebene der übrigen drei Tetraedereckpunkte liegen.

In [3] wurde es gezeigt, dass drei verschiedene Flächen  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  und  $\mathcal{P}_3$  bestehen, deren Erzeugenden die (IVN) Komplexstrahlen sind. Diese Erzeugenden sind die Verbindungsgeraden der Punkte der Flächenmittelpunktraumkurve  $k_c^3$  3. Ordnung des Flächenbüschels  $|F_k^2|$  mit den Punkten der Jacobischen Fernkurve  $\mu$  3. Ordnung, aber die Verbindungsbeziehungen sind für jede dieser Flächen durch andere Bedingungen gegeben. Geht es um ein  $|F_k^2|$  Flächenbüschel, also um ein Flächenbüschel 2. Grades das auch eine Kugel enthält, können wir einen jeden Fernpunkt als einen Punkt der Kurve  $\mu$  betrachten. Diese Tatsache wird unumstritten seinen Einfluss allen Strahlgebilden geben, die in bisherigen Untersuchungen mit der Kurve  $\mu$  auf irgendeine Weise verbunden werden.

Betrachten wir nun was es jetzt mit den Flächenerzeugenden und mit den Flächen  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  und  $\mathcal{P}_3$  selbst geschieht.

### a) Die Fläche $\mathcal{P}_1$ und die Kongruenz $\mathcal{P}_{k1}$

In [3] wurde es bewiesen, dass die Fläche  $\mathcal{P}_1$  6. Grades jene, durch das  $|F^2|$  Flächenbüschel bestimmten (IVN) Komplexstrahlen bilden, die auch die den Punkten der Kurve  $\mu$  zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind. Jede Erzeugende dieser Fläche ist eine Bisekante der Kurve  $k_c^3$  und eine Unisekante der Kurve  $\mu$ . Auf der Fläche  $\mathcal{P}_1$  ist die Kurve  $\mu$  eine einfache und die Kurve  $k_c^3$  eine dreifache. Alle involutorzugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte auf diesen (IVN) Komplexstrahlen-Erzeugenden der Fläche  $\mathcal{P}_1$  bilden eine nichtabbrechende Reihe, also eine Kurve  $\eta_1$ , für die die Ordnung 18 bestimmt wird.

Es ist weiterhin bekannt, dass einem beliebigen Fernpunkt  $T$ , ohne Rücksicht ob es um ein  $|F^2|$  — oder  $|F_k^2|$  Flächenbüschel geht, der zugeordnete Strahl

$$t = \varphi(T)$$

eine Bisekante der Kurve  $k_c^3$  ist und alle diesen Bisekanten bilden die bekannte Kongruenz 1. Ordnung und 3. Klasse.

Da im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels die Rolle der Punkte der Kurve  $\mu$  jeder Punkt der Fernebene übernimmt, folgt, dass den Punkten der Fernebene die zugeordneten  $(TK)$  Komplexstrahlen auch die  $(IVN)$  Komplexstrahlen sind, die aber keine Fläche  $\mathcal{P}_1$  6. Grades sondern eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  1. Ordnung und 3. Klasse bestimmen.

Für den Beweis dass die Strahlen dieser Kongruenz tatsächlich auch die  $(IVN)$  Komplexstrahlen eines  $|F_k^2|$  Flächenbüschels sind, wird uns die Idee, wie bei [3] für die Erzeugenden der Fläche  $\mathcal{P}_1$  dienen.

Einem beliebigen Fernpunkt  $T$  der Kurve  $\mu$  der zugeordnete Strahl

$$t_T = \varphi(T)$$

ist die Bisekante der Kurve  $k_c^3$ , so dass sie die Mittelpunkte  $O_1$  und  $O_2$  jener zwei Flächen des Büschels  $|F^2|$  enthält, für die es

$$T \in t_{0_1} \text{ und } T \in t_{0_2} \text{ für } t_{0_n} = \varphi(O_n) \text{ (} n = 1,2 \text{)}$$

gilt. Der Strahl  $t_T$  ist eine Gesamtheit der  $Z$  Punkte jener  $(VN)$  Komplexstrahlen die den gemeinsamen  $I$  Punkt im Punkt  $T$  haben, also für die

$$o_n = \psi(T)$$

Geltung hat. Ist die Gerade  $t_T$  ein  $(IVN)$  Komplexstrahl, müssten den Punkten dieser Geraden die zugeordneten  $(TK)$  Komplexstrahlen diese Gerade zweimal senkrecht schneiden. Wie bekannt, alle solchen  $(TK)$  Komplexstrahlen bilden die Erzeugenden des hyperbolischen Zylinders  $T^2$  mit dem Scheitelpunkt im  $T$ , den die Fernebene in den Erzeugenden

$$t_{0_n} = \varphi(O_n) \quad O_n \in k_c^3 \quad (n = 1,2)$$

schneidet. Alle Senkrechten, die aus der Punkte der Geraden  $t_T$  auf die ihnen zugeordneten Erzeugenden des Zylinders gelegt sind, liegen in derselben durch die Geraden  $t_T$  und  $p_T$  aufgespannten Ebene, wo  $p_T$  die Polare des Punktes  $T$  bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Dies bedeutet, dass die  $Z$  Punkte jener  $(VN)$  Komplexstrahlen, deren  $I$  Punkte sich auf der Geraden  $t_T$  befinden, die Durchstosspunkte der Erzeugenden des hyperbolischen Zylinders  $T^2$  mit der, auf sie senkrechtstehenden Ebene  $(t_T, p_T)$  sind, bzw. dass diese  $Z$  Punkte eine Hyperbel bilden. Die  $Z$ -Punktkurve  $z^5$  5. Ordnung jener  $(VN)$  Komplexstrahlen deren  $I$  Punkt auf dem Strahl  $t_T$  liegen ([2], [3]) zerfällt in die erwähnte Hyperbel und in die Geraden  $t_{0_1}, t_{0_2}$  und

$$t_B = \varphi(R)$$

wo  $R$  der Fernpunkt der Geraden  $t_T$  ist, so dass diese drei Geraden die Gesamtheit der  $Z$  Punkte jener  $(VN)$  Komplexstrahlen sind, deren  $I$  Punkte sich in den Punkten  $O_1, O_2$  und  $R$  befinden.

Zwei Erzeugenden des Zylinders  $T^2$  2. Grades schneiden die Gerade  $t_T$  in Punkten, die als  $K$  und  $L$  genannt seien, so dass für die Strahlen

$$LT = \varphi(K) \text{ und gleichfalls } KT = \varphi(L)$$

die Geltung hat. Da beide diesen Strahlen auch senkrecht auf die Gerade  $t_T$  sind, folgt, dass die Gerade  $t_T$  selbst ein  $(IVN)$  Komplexstrahl ist mit involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkten in Punkten  $K$  und  $L$ .

Im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels hat jeder beliebige Fernpunkt  $T$  die beschriebenen Eigenschaften der Punkte der Kurve  $\mu$ .

Die Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_1}$  bilden also die  $\infty^1$  Kegel 2. Grades deren Scheitelpunkte sich in den Flächenmittelpunkten des  $|F_k^2|$  Büschels befinden und deren Erzeugenden die Involutorstrahlen des  $(VN)$  Komplexes aber auch die Bisekanten der Kurve  $k_c^3$  und gleichfalls den Fernpunkten zugeordnete  $(TK)$  Komplexstrahlen sind. Keine Ausnahme bilden auch die Punkte  $U, V$  und  $Y$  der Kurve  $k_c^3$  und so folgt, dass die Verbindungsgeraden der Punkte der Kurve  $k_c^3$  mit ihren Fernpunkten  $U$  bzw.  $V$  bzw.  $Y$  auch die  $(IVN)$  Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_1}$  sind.

Alle involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte dieser  $(IVN)$  Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_1}$  bilden eine nichtabbrechende Gesamtheit, die als die Fläche  $\mathcal{E}_1$  genannt sei. Die Ordnung dieser Fläche ist entweder durch die Zahl der Durchstosspunkte dieser Fläche mit einer beliebigen Geraden  $s$  oder durch die Ordnung der Schnittkurve dieser Fläche mit einer beliebigen Ebene bestimmt.

Eine beliebige Gerade  $s$  kann die Fläche  $\mathcal{E}_1$  nur auf jenen Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_1}$  durchstossen, die diese Gerade schneiden. In einer beliebigen Ebene der Geraden  $s$  liegen drei Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_1}$  (1., 3.), so dass eine Fläche  $E$  jener die Gerade  $s$  schneidenden Strahlen dieser Kongruenz, 4. Grades ist und der die Gerade  $s$  die einfache Leitgerade ist, da jeden ihren Punkt je ein Strahl enthält.

Auf jeder Erzeugenden dieser Fläche  $E$  befinden sich zwei involutorzugeordnete  $I-Z$  Punkte. Alle solchen stetig verbundenen Punkte geben eine Kurve  $e$ . Um die Ordnung dieser Kurve  $e$  bestimmen zu können fassen wir diese Fläche 4. Grades auf, als ein Erzeugnis, das mittels dieser Kurve  $e$  erhalten wird.

Jede Erzeugende dieser Fläche  $E$  ist eine Bisekante der Kurve  $e$ . Jedem Punkt  $T$  der Kurve  $e$  ist ein Punkt  $T_1$  derselben Kurve  $e$  zugeordnet usw. so, dass die Verbindungsgerade  $TT_1$  eine Erzeugende der Fläche  $E$  ist. Eine Umkehr dieses hat auch die Geltung, so dass jede Erzeugende die mittels dieser Punktreihen ankommt zweimal in Betracht genommen wird. Weiterhin ist es bekannt, dass in den Punkten der Grundkurve  $k^4$  4. Ordnung eines Flächenbüschels 2. Grades der  $I$  Punkt und der  $Z$  Punkt desselben  $(VN)$  Komplexstrahles zusammenfallen. Da die Kurve  $k^4$  die Fläche  $E$  4. Grades in 16 Punkten durchstosst hat dies die Folgerung, dass von den Erzeugnis 16 Strahlbüschel abgenommen werden müssen. Nach dem bekannten Chaslesschen Korrespondenzprinzip folgt, dass in unserem Fall  $n_1 = n_2 = n$  ist, da es um dieselbe Kurve  $e$  der Ordnung  $n$  geht, dass  $a_1 = a_2 = 1$  ist, wegen der ein-eindeutigen Zuordnung der Punkte der zwei Punktreihen und dass  $w = 16$  ist. Da jede Erzeugende zweimal in Betracht genommen wurde, müssen wir die linke Seite der Gleichung halbieren.  $(1/2(n \cdot 1 + n \cdot 1 - 16) = 4)$ . Demnach ist  $n = 12$ .

Die Ordnung der Kurve  $e$  jener involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte, die auf die, eine beliebige Gerade  $s$  schneidenden  $(IVN)$  Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_1}$  liegen ist also gleich 12. Eine beliebige die Gerade  $s$  enthaltende Ebene enthält,

wie schon erwähnt, drei Erzeugenden der Fläche  $E$  und auf jeder dieser Erzeugenden befinden sich je zwei Punkte der Kurve  $e$ , die aber in allgemeinen keine Punkte der Geraden  $s$  sind. Dies bedeutet, dass auf der Geraden  $s$  sechs übrigen Punkte von Gesamt zwölf liegen, in denen die beliebige Ebene der Geraden  $s$  die Kurve  $e$  schneidet.

Der Ebenenbüschel  $[s]$  enthält auch sechs Ebenen die je eine solche Erzeugende der Fläche  $E$  enthält, der einer der ihr zugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte genau auf der Geraden  $s$  liegt. Eine solche Ebene berührt die Kurve  $e$  und den Berührungspunkt ist als einen zweideutigen Punkt in der betreffenden Ebene aufzufassen.

Die gesuchte Fläche  $\mathcal{E}_1$  der involutorzugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte auf den Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  hat demnach 6. Ordnung.

*Satz 1. Die den Fernpunkten zugeordneten (TK) Komplexstrahlen in einem  $(F_k^2)$  Polarraumbüschel sind auch die Involutorstrahlen des (VN) Komplex und bilden eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  1. Ordnung und 3. Klasse. Diesen Strahlen zugeordnete und stetig verbundene  $I$ - $Z$  Punkte bilden eine Fläche  $\mathcal{E}_1$  6. Ordnung.*

#### b) Die Fläche $\mathcal{P}_2$ und die Kongruenz $\mathcal{P}_{k2}$

In [3] wird es weiterhin festgestellt, dass auch eine solche Fläche  $\mathcal{P}_2$  jener (IVN) Komplexstrahlen des  $|F^2|$  Flächenbüschels besteht, deren eine der involutorzugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte auf der Kurve  $\mu$  und der andere  $Z$ - $I$  Punkt auf der Kurve  $k_c^3$  liegt. Jeden Punkt der Kurve  $k_c^3$  enthalten drei Erzeugenden der Fläche  $\mathcal{P}_2$  und durch jeden Punkt der Kurve  $\mu$  zwei ihre Erzeugenden gehen. Auf der Fläche  $\mathcal{P}_2$  12. Ordnung ist die Kurve  $\mu$  zweifach und die Kurve  $k_c^3$  dreifach, so dass die Kurve  $\eta_2$  der zugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte aller Erzeugenden dieser Fläche eine zerfallene Kurve 15. Ordnung ist.

In Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels müssen wir wieder in Betracht nehmen, dass jeder Punkt der Fernebene die Eigenschaften der Punkte der Fernkurve  $\mu$  3. Ordnung hat. Ausserdem, wie in [1] gezeigt wurde, jeden Flächenmittelpunkt des  $|F_k^2|$  Büschels d. h. jeden Punkt  $O_n$  der Kurve  $k_c^3$  enthalten jene (IVN) Strahlen eines Strahlbüschels, die die zugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte im betreffenden Mittelpunkt  $O_n$  und auf dem Fernstrahl

$$t_n = \varphi(O_n)$$

haben. Jeder solche Strahl ist nach [1] auch ein (MK) Komplexstrahl. In [6] wurde es gezeigt, dass alle solchen (MK) Komplexstrahlen eine Kongruenz 5. Ordnung und 3. Klasse bilden. Daraus folgt, dass alle (IVN) Komplexstrahlen eines  $|F_k^2|$  Flächenbüschels, deren ein der zugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte sich auf der Kurve  $k_c^3$  und der andere in der Fernebene befindet, eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  5. Ordnung und 3. Klasse bilden.

Da die  $I$ - $Z$  Punkte dieser Strahlen nur auf der Kurve  $k_c^3$  liegen, kann auch die Fläche  $\mathcal{E}_2$  der involutorzugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte auf den Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  nur diese Punkte enthalten. Da jeden Punkt der Fernebene je zwei (TK) Komplexstrahlen enthalten, die den Mittelpunkten zweier Flächen des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels zugeordnet sind, folgt, dass die Fernebene als ein Teil der Fläche  $\mathcal{E}_2$  zweimal zu rechnen ist, während die Punkte der Kurve  $k_c^3$  3. Ordnung  $\infty^1$ -deutig sind.



Satz 2. Die Involutorstrahlen des (NV) Komplexes deren je ein der zugeordneten I-Z Punkte sich im Mittelpunkt der Fläche des  $|F_k^2|$  Büschels befindet und der andere in der Fernebene liegt, bilden eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_2}$  5. Ordnung und 3. Klasse. Diesen Strahlen zugeordnete I-Z Punkte bilden eine Fläche  $\mathcal{E}_2$  die sich aus der zweifachen Fernebene und aus der  $\infty^1$ -deutigen Flächenmittelpunktraumkurve  $k_c^3$  des  $|F_k^2|$  Büschels zusammensetzt.

Satz 3. Die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_2}$  sind auch die Strahlen des (MK-VN) Komplexes.

In jeder Ebene

$$(O_n, t_n) \quad t_n = \varphi(O_n) \quad O_n \in k_c^3$$

befindet sich also ein Büschel  $(O_n)$  jener (IVN) Komplexstrahlen die zur Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_2}$  angehören. Jede solche Ebene berührt auch eine den Punkt  $O_n$  enthaltende Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels, so dass zwei ihre im Punkt  $O_n$  sich schneidende Erzeugenden auch die (IVN) Komplexstrahlen sind.

Da die Kurve  $k_c^3$  eine jede Fläche des  $|F_k^2|$  Büschels in je sechs Punkten durchstosst, befinden sich auf jeder Fläche des  $|F_k^2|$  Büschels  $6 \cdot 2$  Erzeugenden dieser Fläche, welche auch die (IVN) Komplexstrahlen und ein Teil der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_2}$  sind, die aber auch konjugiertimaginär sein können.

In [2] wird es bewiesen, dass die Erzeugenden der Regelflächen des  $|F^2|$  Büschels die (MK) Komplexstrahlen und auch die zweifachen (VN) Komplexstrahlen mit zwei verschiedenen Paaren der zugeordneten I-Z Punkte sind, die aber keine (IVN) Komplexstrahlen sein können. Gibt es dagegen ein  $|F_k^2|$  Flächenbüschel wird dies mit zwölf, die Punkte der Kurve  $k_c^3$  enthaltenden Erzeugenden derselben Fläche kein Fall.

Wegen der stetigen Verbindung der Punkte der Kurve  $k_c^3$  bilden auch solche Erzeugenden ein nichtabrechendes System und hüllen eine Fläche ein, auf der die Kurve  $k_c^3$  zweifach ist. Die Fernebene schneidet diese Fläche des unbekanntes Grades  $n$  in einer Kurve, die in eine Kurve des unbekanntes Ordnung  $x$  und in 6 Fernerzeugenden zerfällt, von deren nur ein Paar reell ist, und von deren Erzeugenden je zwei den Punkt  $U$  bzw.  $V$  bzw.  $Y$  der Kurve  $k_c^3$  enthalten. Jeden Punkt dieser Kurve  $x$ -ter Ordnung enthält nur eine Erzeugende der gesuchten Fläche, da denselben Punkt dieser Kurve nur eine Fläche des Flächenbüschels  $|F_k^2|$  enthalten kann. Jedem Punkt der Kurve  $k_c^3$  sind demnach zwei Punkte der gesuchten Fernkurve zugeordnet während jedem Punkt dieser Kurve je ein Punkt der Kurve  $k_c^3$  zugeordnet ist. Unser Problem löst sich mittels zwei linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$6 + x = n \quad \text{und} \quad 1 \cdot 3 + 2 \cdot x = n$$

Daraus folgt dass  $x = 3$   $n = 9$  ist.

Satz 4. Jene Erzeugenden der Flächen des  $|F_k^2|$  Büschels, die genau einen Punkt der Flächenmittelpunktkurve  $k_c^3$  dieses Büschels enthalten, sind die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes mit den zugeordneten I-Z Punkten auf der Kurve  $k_c^3$  und in den Fernpunkten dieser Erzeugenden. Alle solchen Erzeugenden bilden eine Regelfläche 9. Grades auf der die Kurve  $k_c^3$  eine zweifache ist.

c) Die Fläche  $\mathcal{P}_3$  und die Kongruenz  $\mathcal{P}_{k^3}$

Jede Fläche eines Flächenbüschels  $|F_k^2|$  hat drei untereinander senkrechte Achsen die sich im Mittelpunkt der betreffenden Fläche schneiden. Einem beliebigen Punkt  $T$  der Achse  $r$  einer beliebigen Fläche  $F$  dieses Büschels steht die zugeordnete Polarebene bezüglich dieser Fläche senkrecht auf die Achse  $r$ . Den Punkten der Achse  $r$  zugeordnete Strahlen des  $(TK)$  Komplexes bilden ein Erzeugendensystem des hyperbolischen Paraboloides, da sie alle parallel mit jener Ebene sind, die senkrecht auf die Achse  $r$  steht und zwei dieser Erzeugenden  $t_1$  und  $t_2$  schneiden die Achse  $r$  in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$ . Der Strahl

$$t_1 = \varphi(T_1)$$

schneidet die Achse  $r$  im Punkt  $T_2$ , steht aber auch senkrecht auf  $r$ . Der Strahl

$$o_1 = \psi(T_1)$$

übereinstimmt mit der Achse  $r$  und ihr  $Z$  Punkt liegt im Punkt  $T_2$ . Ist der Punkt  $T_2$  ein  $I$  Punkt des neuen Strahles

$$o_2 = \psi(T_2)$$

folgt, dass ihm zugeordneter  $Z$  Punkt im Punkt  $T_1$  liegt, so dass die Achse  $r$  nicht nur ein  $(VN)$  Komplexstrahl, sondern auch ein  $(IVN)$  Strahl dieses Komplexes ist. [3].

Es ist weiterhin bewiesen, dass alle Achsen der Flächen des Büschels  $|F^2|$  die Verbindungsgeraden der Punkte der Kurven  $k_c^3$  und  $\mu$  sind und dass sie ein nichtabbrechendes System einer Fläche  $\mathcal{P}_3$  9. Grades bilden, auf der die Kurve  $\mu$  eine einfache und die Kurve  $k_c^3$  eine dreifache ist. Bewegt sich ein beliebiger Punkt  $T$ , den wir als ein Flächenmittelpunkt auffassen, längs der Kurve  $k_c^3$ , bewegen sich mit ihm auch die drei Achsen aber so, dass jede der drei Achsen je einen Teil der Fläche  $\mathcal{P}_3$  bildet und ihre Fernpunkte je einen Teil der Kurve  $\mu$  geben. [10]- Die Kurve  $\eta_3$  der  $I$ - $Z$  Punkte auf allen Erzeugenden der Fläche  $\mathcal{P}_3$  hat 27. Ordnung. [3].

Innerhalb eines Flächenbüschels  $|F_k^2|$  hat jede Fläche auch drei im Mittelpunkt dieser Fläche sich schneidende Achsen. Jetzt kommt die Frage vor, was mit der Gesamtheit der Fernpunkte dieser Achsen geschieht, da jeder Punkt der Fernebene als ein Punkt der Fernkurve  $\mu$  3. Ordnung aufzufassen ist.

Lösen wir eine Achse  $d_1$  der Inzidenzfläche  $F$  des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels aus und stellen dann fest die spezifischen Eigenschaften, die an diese Achse verbunden werden. Damit den Punkten der Geraden  $d_1$  die zugeordneten  $(TK)$  Komplexstrahlen bestimmen zu können, wird es genügen diesen Punkten die zugeordneten Polarebenen bezüglich der Polarräume der Fläche  $F$  und der Kugel ordnen. Den Punkten der Achse  $d_1$  die zugeordneten Polarebenen bezüglich der Fläche  $F$  stehen alle auf die Achse  $d_1$  senkrecht und dies hat zur Folge, dass die gemeinsame Ferngerade aller diesen Ebenen die Polare  $p_n$  des Fernpunktes  $D_n$  der Achse  $d_1$  bezüglich des abstrakten Kegelschnittes, d. h. bezüglich der Fernkurve der Kugel ist. Den Punkten der selben Geraden  $d_1$  zugeordnete Polarebenen bezüglich der Kugel bilden ein Ebenenbüschel dessen Achse  $r_1$  konjugiert der Geraden  $d_1$  bezüglich der Kugel ist, während der Fernpunkt der Geraden  $r_1$  auf der Geraden  $p_n$  liegen muss. Die dem Fernpunkt  $D_n$  der Geraden  $d_1$  zugeordnete Polarebene

bezüglich der Kugel muss die Gerade  $r_1$  und den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthalten und ist die Symmetrieebene jener Strecke, die von der Kugel auf der Geraden  $d_1$  ausgeschnitten wird. Daraus folgt, dass die Ferngerade auch dieser Ebene die Gerade  $p_n$  ist.

Weiterhin kann man behaupten dass dem Fernpunkt  $D_n$  der beliebigen Achse  $d_1$  die zugeordneten Polarebenen bezüglich der Fläche  $F$  und bezüglich der Kugel sich in der Geraden  $p_n$  schneiden, so dass für eine solche Gerade in allgemeinen

$$p_n = \varphi(D_n)$$

Geltung hat.

Damit haben wir eine sehr wichtige Eigenschaft festgestellt. Die Achse einer Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels ist eine solche Raumebene, dass ihrem Fernpunkt zugeordneter  $(TK)$  Komplexstrahl in der Fernebene liegt. Wie bekannt, eine solche Eigenschaft haben nur die drei Fernpunkte  $U, V$  und  $Y$  der Flächenmittelpunktcurve  $k_c^3$  dieses  $|F_k^2|$  Büschels u. zw. so, dass einem dieser Punkte die Verbindungsgerade der übrigen zwei als der  $(TK)$  Komplexstrahl zugeordnet wird.

Im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels hat jeder Punkt der Fernebene allerdings die Eigenschaften der Punkte der Kurve  $\mu$ , aber die Punkte  $U, V$  und  $Y$  haben dabei auch die spezifische Eigenschaften erhalten bzw. sie sind ausserordentlich hervorragende Punkte dieser ausgearteten Kurve u. zw. als Scheitelpunkte des gemeinsamen Polardreiecks des Fernschnittkurvenbüschels  $f_k^2$  in dem die Fernebene das  $|F_k^2|$  Flächenbüschel schneidet.

Die Achsen einer beliebigen Fläche dieses Büschels sind demnach die Verbindungsgeraden des Mittelpunktes dieser Fläche mit den Punkten  $U, V$  und  $Y$ .

Auf diese Weise haben wir noch eine Eigenschaft des Flächenbüschels  $|F_k^2|$  erkannt. Es genügt nämlich die Richtungen der Achsen einer Fläche zu bestimmen und damit sind auch die Richtungen der Achsen aller Flächen dieses Büschels bestimmt.

Es ist klar, dass drei Verbindungsgeraden des Kugelmittelpunktes  $O_k$  mit den Punkten  $U, V$  und  $Y$  auch drei Achsen der Kugel sind.

Die Achsen der Flächen des  $|F_k^2|$  Büschels sind deshalb solche Bisekanten der Kurve  $k_c^3$ , die je einen endlichen und einen Fernpunkt dieser Kurve verbinden. Die Fläche der Achsen des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels zerfällt in drei Kegel-Zylinder 2. Grades.

Auf jeder Achse liegen zwei dieser Achse involutorzugeordnete  $I-Z$  Punkte, die in allgemeinen von den Punkten der Kurve  $k_c^3$  verschieden sind, so dass sie eine nichtabbrechende Reihe bzw. eine Kurve bilden. Jede der drei Achsenflächen 2. Grades sei als ein Erzeugnis dieser Kurve der unbekanntenen Ordnung  $n$  betrachtet, genau so, wie wir dies in 2 a) getan haben. Jede Erzeugende der Fläche ist auch jetzt zweimal zu rechnen, während die Grundkurve  $k^4$  des  $|F_k^2|$  Büschels diese Fläche 2. Grades in acht Punkten durchsticht. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzipes folgt, dass  $n = 6$  ist.

Es bestehen also drei Kurven 6. Ordnung der involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte auf jenen  $(IVN)$  Komplexstrahlen die auch die Achsen der Flächen des  $|F_k^2|$  Büschels sind. Alle solchen  $I-Z$  Punkte bilden demnach eine Raumkurve 18. Ordnung.

*Satz 5. Die Achsen aller Flächen eines  $|F_k^2|$  Flächenbüschels bilden eine Fläche 6. Grades die in drei Kegel-Zylinder 2. Ordnung zerfällt und die die Scheitelpunkte in den Fernpunkten der Flächenmittelpunkt-*

kurve  $k_c^3$  3. Ordnung haben. Jede Achse der jeden Fläche des Büschels  $|F_k^2|$  ist die Bisekante der Kurve  $k_c^3$  und ein Involutorstrahl des (VN) Komplexes. Die Kurve der involutorzugeordneten I-Z Punkte auf diesen Achsen ist 18. Ordnung und zerfällt in drei Kurven 6. Ordnung.

Satz 6. Die Richtungen der Drei der Achsen einer jeden Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels übereinstimmen mit den Richtungen der Drei der Achsen jeder der Flächen dieses Flächenbüschels.

In 2 a) sind jene (IVN) Komplexstrahlen betrachtet, die die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  sind, d. h. die allen Fernpunkten zugeordneten (TK) Komplexstrahlen und auch die Bisekanten der Kurve  $k_c^3$  sind. Jede der Achsen der Flächen des  $|F_k^2|$  Büschels ist aber auch eine Bisekante der Kurve  $k_c^3$ , obwohl sie auf eine andere Weise bestimmt wird, so dass jede Achse der Fläche eines  $|F_k^2|$  Büschels als ein Strahl der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  betrachtet werden kann. Dies ist wieder eine weitere Eigenschaft nach der sich das Flächenbüschel  $|F_k^2|$  von dem Flächenbüschel  $|F^2|$  unterscheidet.

Wie bekannt, die Achsen der Flächen eines  $|F^2|$  Flächenbüschels sind die Verbindungsgeraden der Punkte der Kurve  $\mu$  und  $k_c^3$ . Die Achsen aller Flächen des Flächenbüschels  $|F_k^2|$  verbinden indessen nur drei Fernpunkte mit den Punkten der Kurve  $k_c^3$ . Dies gibt einen Eindruck der Mangelhaftigkeit, da jeder Punkt der Fernebene die Eigenschaften der Fernkurve  $\mu$  hat.

Das Problem werden die Kugelachsen lösen. Jeden Dreier der untereinander senkrechten Durchmesser der Kugel ist als drei zugeordneten Achsen der Kugel aufzufassen, von deren die drei Verbindungsgeraden des Kugelmittelpunktes  $O_k$  mit den Fernpunkten  $U$ ,  $V$  und  $Y$  nur ein Dreier der hervorragender Achsen ist. Auch so erhaltene Kugelachsen bilden eine Kongruenz die  $\mathcal{P}_{k3}$  genannt wird. Diese Kongruenz ist 1. Ordnung und 0-ter Klasse.

In [1] wurde gezeigt, dass je zwei gegenüberliegende Kanten des Polartetraeders  $ABCD$  des Polarraumbüschels ( $F_k^2$ ) untereinander senkrecht stehen (der orthozentrische Tetraeder) und die drei kürzeste Transversalen solcher Gegenkanten sind die den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthaltenden (IVN) Komplexstrahlen. Diese Transversalen sind demnach auch die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$  aber in allgemeinen bilden sie keine Drei der untereinander zugeordneten senkrechten Achsen der Kugel.

Auf jeder der Kugelachsen die als die (IVN) Komplexstrahlen betrachtet seien befinden sich je zwei diesem Strahl zugeordnete I-Z Punkte und alle solchen nichtabbrechend verbundene Punkte bilden eine Fläche  $\mathcal{E}_3$ . Die Ordnung dieser Fläche wird als die Zahl der Durchstosspunkte dieser mit einer beliebigen Geraden  $s$  behauptet.

Eine beliebige Gerade  $s$  sei als die Gebilde der I Punkte der (VN) Komplexstrahlen aufgefasst. Die Z Punkte dieser Strahlen können nur auf den Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in s$$

liegen und alle solchen  $t$  Strahlen bilden, wie bekannt, einen Regulus des einschaligen Hyperboloides  $H_s$ . Da uns nur jene Strahlen

$$o = \psi(T) \quad T \in s$$

interessieren, die auch den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthalten, schneiden wir diesen Hyperboloid  $H_s$  mit der Ebene  $(O_k, s)$  in einer Kurve 2. Ordnung. Durch die

ein-eindeutige Zuordnung der Punkte auf der Geraden  $s$  und auf der Schnittkurve 2. Ordnung ist eine Kurve 3. Klasse in der Ebene  $(O_k, s)$  gebildet, dies bedeutet aber, dass den Punkt  $O_k$  nur jene drei  $(VN)$  Komplexstrahlen enthalten können, die die  $I$  Punkte auf der Geraden  $s$  haben. Könnten wir beweisen dass diese drei  $(VN)$  Komplexstrahlen auch die Involutorstrahlen sind, würde auch bewiesen, dass die beliebige Gerade  $s$  mit der Fläche  $\mathcal{E}_3$  drei gemeinsame Punkte hat, bzw. dass die Ordnung dieser Fläche gleich drei ist.

Bemerken wir eine unter diesen drei Strahlen, die die Verbindungsgerade des Kugelmittelpunktes  $O_k$  mit einem Punkt  $R$  der Geraden  $s$  sein soll und führen den Beweis auf die übliche Weise durch, dass  $O_kR$  ein  $(INV)$  Komplexstrahl ist.

Eine Erzeugende des Hyperboloides  $H_s$  ist der Strahl

$$r = \varphi(R).$$

Dem Fernpunkt  $R_n$  der Geraden  $r$  muss die, bezüglich der Kugel zugeordnete Polarebene den Punkt  $R$  enthalten, da die Punkte  $R$  und  $R_n$  konjugiert zugeordnet bezüglich aller Flächen des  $|F_k^2|$  Büschels und dadurch auch bezüglich der Kugel sind. Diese Polarebene muss ausserdem auch den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthalten und wegen des Polarverhältnisses bezüglich der Fernkurve der Kugel d. h. des absoluten Kegelschnittes auch die Gerade  $r$  senkrecht schneiden. Dass dieser Schnittpunkt  $R^x$  mit der Geraden  $r$  genau auf der Verbindungsgeraden  $O_kR$  liegt garantiert die Voraussetzung

$$O_kR = \psi(R)$$

und der  $Z$  Punkt dieses Strahles übereinstimmt mit dem Punkt  $R^x$ .

Ist weiterhin  $O_kR$  ein  $(INV)$  Komplexstrahl muss auch die Umkehrung stattfinden. Die Punkte  $R$  und  $R^x$  sind die konjugierten Punkte bezüglich des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels und so muss auch der Strahl

$$r^x = \varphi(R^x)$$

den Punkt  $R$  enthalten. Dem Fernpunkt  $R_n^x$  der Geraden  $r^x$  ist die zugeordnete Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes die Ferngerade der Polarebenen, die diesem Fernpunkt  $R_n^x$  bezüglich der Kugel zugeordnet ist, und diese Ebene muss noch den Punkt  $R^x$  und den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthalten. Daraus folgt, wie behauptet, dass die erwähnte Polarebene die Gerade  $r^x$  senkrecht schneidet.

Die Gerade  $O_kR$  ist also ein Involutorstrahl des  $(VN)$  Komplexes und ein Strahl der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$ .

Auf die gleiche Weise könnten wir beweisen, dass auch die übrigen zwei Verbindungsgeraden des Kugelmittelpunktes  $O_k$  mit jenen zwei Punkten  $R^1$  und  $R^2$  der Geraden  $s$  für die die Geltung hat

$$O_kR^n = \psi(R^n) \quad n = 1,2$$

auch die Involutorstrahlen des  $(VN)$  Komplexes sind.

Eine beliebige Gerade  $s$  durchdringt also die Fläche  $\mathcal{E}_3$  in drei Punkten und daraus folgt, dass die Ordnung der Fläche  $\mathcal{E}_3$  drei ist.

Auch die Achsen der Kugel durchdringen diese Fläche  $\mathcal{E}_3$  in drei Punkten von deren zwei die involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte, die genau diesem Strahl

zugeordnet sind und der dritte im Kugelmittelpunkt  $O_k$  liegt. Dem Punkt  $O_k$  ist nämlich der Fernstrahl

$$t_n = \varphi(O_k)$$

zugeordnet und die Verbindungsgeraden des Punktes  $O_k$  mit den Punkten der Geraden  $t_n$  sind die bekannten (IVN) Komplexstrahlen die zur Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  angehören. Da diese Verbindungsgeraden auch als die Achsen der Kugel zu betrachten sind, bilden diese auch einen Teil der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$ . Der Kugelmittelpunkt ist demnach ein  $\infty^1$ -deutiger Punkt der Fläche  $\mathcal{E}_3$ , ist aber als der Durchstosspunkt einer beliebigen Achse der Kugel mit der Fläche  $\mathcal{E}_3$  ein einfacher.

*Satz 7. Jede Drei der untereinander senkrechten Durchmesser der Kugel sind als die Achsen dieser Kugel aufzufassen. Alle Kugelachsen sind die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes und bilden eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$  1-ten Ordnung und 0-ter Klasse. Die involutorzugeordneten I-Z Punkte auf diesen (IVN) Strahlen bilden eine Fläche  $\mathcal{E}_3$  3-ter Ordnung.*

Die Grundkurve  $k^4$  des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels liegt auf jeder der Flächen dieses Büschels und damit auch auf der Kugel.

In [2] wurde es gezeigt, dass ein beliebiger Punkt  $T$  der Grundkurve  $k^4$  des Flächenbüschels  $|F_k^2|$  ein  $\infty^1$ -deutiger  $I$  Punkt und ein  $\infty^1$ -deutiger  $Z$  Punkt eines Büschels ( $T$ ) jener (VN) Komplexstrahlen ist, die im Punkt  $T$  den  $I$  Punkt und auch den  $Z$  Punkt haben. Den Strahlbüschel ( $T$ ) enthaltende Ebene ist senkrecht gelegt auf die Tangente  $t$  der Kurve  $k^4$  in dem Berührungspunkt  $T$ , wo auch

$$t = \varphi(T)$$

Geltung hat.

Da im Fall des  $|F_k^2|$  Büschels jede Berührgerade  $t$  der Kurve  $k^4$  auch die Berührgerade der Kugel ist, folgt, dass auch jede Verbindungsgerade des Punktes der Kurve  $k^4$  mit dem Kugelmittelpunkt  $O_k$  ein solcher (VN) Komplexstrahl ist, dem sein  $I$  Punkt und sein  $Z$  Punkt zusammenfallen. Es besteht demnach ein Kegel 4. Grades des Scheitelpunktes  $O_k$ , dessen Erzeugenden jene (VN) Komplexstrahlen sind, deren  $I$  Punkt und  $Z$  Punkt zusammenfallen. Es ist klar, dass auch solche Strahlen einen Teil der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  bilden.

In einer beliebigen den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthaltenden Ebene  $P$  bilden die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$  einen Strahlbüschel ( $O_k$ ). Die Vier innerhalb dieser Strahlen haben die diesen Strahlen zugeordneten und zusammenfallenden  $I$ - und  $Z$  Punkte in vier Durchstosspunkten der Kurve  $k^4$  mit der Ebene  $P$ , während die Verbindungsgerade des Punktes  $O_k$  und des Schnittpunktes  $T_n$  des Fernstrahles

$$t_n = \varphi(O_k)$$

mit der Ebene  $P$  der gemeinsame Strahl der Kongruenzen  $\mathcal{P}_{k2}$  und  $\mathcal{P}_{k3}$  in dieser Ebene ist.

Die Ebene  $P$  schneidet auch die Fläche  $\mathcal{E}_3$  3. Ordnung in einer Kurve  $e_3$  3. Ordnung. Diese Kurve enthält den Kugelmittelpunkt  $O_k$ , dann die vier Durchstosspunkte  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) dieser Ebene mit der Kurve  $k^4$  u. zw. so, dass sie um das Halbmesser der Kugel von den Punkt  $O_k$  entfernt sind, und auch den erwähnten Fernpunkt  $T_n$ .

Jede Gerade der Ebene  $P$  und auch jeder Strahl des Büschels  $(O_k)$  muss die Kurve  $e^3$  in drei Punkten schneiden. Dies muss auch für die Verbindungsgerade  $O_k S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) gelten. Einer dieser Schnittpunkte befindet sich im Punkt  $O_k$  während die übrigen zwei nur im Punkt  $S_i$  liegen können, dies aber nur dann auftreten kann, wenn die Gerade  $O_k S_i$  die Tangente der Kurve  $e^3$  im Punkt  $S_i$  ist.

In der Ebene  $P$  seien alle vier Punkte  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) reell und in solcher Stellung, dass keine der Verbindungsgeraden dieser Punkte den Punkt  $O_k$  enthält. In einem solchen Fall muss die Schnittkurve  $e^3$  3. Ordnung in einen ovalen und in einen unendlich langen Teil zerfallen. Der Kugelmittelpunkt und zwei der Punkte  $S_i$  befinden sich auf dem unendlich langem Teile und die übrigen zwei  $S_i$  Punkte auf dem ovalen Teil liegen. Diese vier Punkte  $S_i$  bilden innerhalb  $\infty^1$  Vieren eine Vier der zugeordneten Punkte der Kurve  $e^3$  3. Ordnung die so liegen, dass sie als die Berührungspunkte solche Tangenten der Kurve  $e^3$  verordnen, die einen Punkt dieser Kurve enthalten. [11]. In unserem Fall ist ein solcher Punkt der Mittelpunkt  $O_k$  jenes Kreises in dem die Ebene  $P$  die Kugel schneidet.

Sind die zwei der vier Punkte  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) reell und die übrigen zwei konjugiertimaginär, so ist die Schnittkurve  $e^3$  in der Ebene  $P$  einteilig und ohne zweifachen Punkt. In diesem Fall enthalten den Punkt  $O_k$  zwei reelle Tangenten der Kurve  $e^3$ , die sie in reellen Punkten  $S_1$  und  $S_2$  berühren.

Nehmen wir an, die Ebene  $P$  schneidet die Kurve  $k^4$  in vier solchen reellen Punkten  $S_i$ , dass die Verbindungsgerade zwei dieser Punkte auch den Punkt  $O_k$  enthält. Diese Gerade ist die reelle Erzeugende einer Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels, aber auch ein  $\infty^1$ -deutiger Involutorstrahl des  $(VN)$  Komplexes mit  $\infty^1$  Paaren der involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkten, da jeder Paar der konjugiertzugeordneten Punkte auf diesem Strahl auch ein Paar der involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte ist. Eine solche Erzeugende befindet sich selbst auf der Fläche  $\mathcal{E}_3$  so dass den Rest der Schnittkurve  $e^3$  in der die Ebene  $P$  die Fläche  $\mathcal{E}_3$  schneidet, eine Kurve 2. Ordnung bildet.

Betrachten wir auch den Fall wenn die Ebene  $P \equiv (O_k, t_n)$  ist und wo

$$t_n = \varphi(O_k)$$

gilt. Eine solche Ebene berührt, wie in allgemeinem bekannt wird, drei Flächen des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels, eine von deren aber in Punkt  $O_k$ . Dies bedeutet, dass den Kugelmittelpunkt  $O_k$  zwei Erzeugenden derselben Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels enthalten, die die  $\infty^1$ -deutigen  $(IVN)$  Komplexstrahlen der Kongruenz  $P_{k3}$  und einfache  $(IVN)$  Komplexstrahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  sind. Die Ebene  $(O_k, t_n)$  schneidet also die Fläche  $\mathcal{E}_3$  in einer Kurve 3. Ordnung die in drei Geraden zerfällt. Diese entartete Kurve bilden die zwei erwähnten Erzeugenden und die Ferngerade  $t_n$ .

Die vier Grundpunkte  $S_i$  des Schnittkurvenbüschels  $f_k^2$  2. Grades in dem Ebene  $(O_k, t_n)$  das  $|F_k^2|$  Flächenbüschel schneidet sind zentralsymmetrisch bezüglich des Punktes  $O_k$  und auch zweiachsensymmetrisch gestellt, da sie auf zwei den Punkt  $O_k$  enthaltenden Geraden liegen, so dass in einer solchen Ebene die Kurven des Schnittkurvenbüschels  $f_k^2$  2. Grades den gemeinsamen Mittelpunkt im Punkt  $O_k$  haben.

*Satz 8. Jene Ebene die den Kugelmittelpunkt und ihm zugeordneten Fernstrahl des  $(TK)$  Komplexes enthält, schneidet das  $|F_k^2|$  Flächenbüschel in einem Büschel der konzentrischen Kurven 2. Grades.*

Die Flächenmittelpunktraumkurve  $k_c^3$  3. Ordnung eines Flächenbüschels 2. Grades enthält in allgemeinem sieben hervorragende Punkte: vier Mittelpunkte  $A, B, C, D$  der Singulärflächen dieses Büschels und drei Fernpunkte  $U, V$  und  $Y$  dieser Kurve. [3].

Im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels ist auch der Mittelpunkt  $O_k$  der Kugel ein besonders hervorragender Punkt, den die  $(IVN)$  Komplexstrahlen enthalten. Fassen wir dies zusammen:

a) Der Kugelmittelpunkt  $O_k$  ist der Träger eines Bündels jener Involutorstrahlen des  $(VN)$  Komplexes die eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_3}(1., 0)$  der Kugelachsen bilden und diesen Strahlen zugeordnete  $I-Z$  Punkte führen eine Fläche  $\mathcal{E}_3$  3. Ordnung aus.

b) Innerhalb der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_3}$  besteht ein Kegel 4. Grades jener  $(IVN)$  Komplexstrahlen deren  $I$  Punkt und  $Z$  Punkt längs der Grundkurve  $k^4$  des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels zusammenfallen und die Fläche  $\mathcal{E}_3$  in den Punkten dieser Kurve  $k^4$  berühren. Zwei Erzeugenden dieses Kegels sind die  $\infty^1$ -deutigen  $(IVN)$  Komplexstrahlen mit  $\infty^1$  Paaren der involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte längs deren, so dass diese Erzeugenden auf der Fläche  $\mathcal{E}_3$  liegen.

c) Die  $(VN)$  Komplexstrahlen des  $(O_k)$  Büschels deren ein der zugeordneten  $I-Z$  Punkte im Punkt  $O_k$  und der andere  $Z-I$  Punkt auf der Ferngeraden  $t_n = \varphi(O_k)$  liegt, sind die gemeinsamen Strahlen der Kongruenzen  $\mathcal{P}_{k_3}$  und  $\mathcal{P}_{k_2}$ .

d) Den Punkten der Ferngeraden  $t_n$  zugeordnete Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in t_n$$

einwüllen einen Kegel 2. Grades des Scheitelpunktes  $O_k$ , die die  $(IVN)$  Komplexstrahlen und die Bisekanten der Kurve  $k_c^3$  und damit auch die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_1}$  aber auch  $\mathcal{P}_{k_3}$  sind. Die Kurve der involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte auf diesen Strahlen ist 6. Ordnung und ist die Durchdringungskurve dieses Kegels 2. Grades mit der Fläche  $\mathcal{E}_3$  3. Ordnung. Dass diese Kurve tatsächlich 6. Ordnung hat, könnte man auf die gleiche Weise beweisen, wie dies für die Kurve der  $I-Z$  Punkte auf der Fläche der Achsen des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels getan wurde.

e) Innerhalb der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k_3}$  bestehen auch drei solche Strahlen, die die kürzesten Verbindungsgeraden der Gegenkanten des Polartetraeders  $ABCD$  sind und auf denen die zugeordneten  $I-Z$  Punkte auf der erwähnten Kanten liegen.

d) Über die Involutorstrahlen des  $(VN)$  Komplexes eines  $|F_k^2|$  Flächenbüschels in allgemeinem

Stellen wir jetzt, wie dies auch in [3] getan wurde, eine grundsätzliche Frage auf, haben wir auf die beschriebene Weise auch alle Involutorstrahlen des  $(VN)$  Komplexes eines  $|F_k^2|$  Flächenbüschels bestimmt oder gibt es ausser der erwähnten noch einige. Diese Frage ist möglich auch einfacher zum Ausdruck bringen u. zw. in der Form: wieviel endliche  $(IVN)$  Komplexstrahlen einen beliebigen Fernpunkt  $M$  enthalten.

Dem beliebigen Fernpunkt  $M$  ist die zugeordnete Polare  $p_M$  bezüglich des absoluten Kegelschnittes, die Ferngerade dem Punkt  $M$  zugeordneter Polarbene bezüglich der Kugel als einer Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels. Der Strahl

$$t_M = \varphi(M)$$



hat deshalb seinen Fernpunkt auf der Geraden  $p_M$ . Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in p_M$$

sind die Bisekanten der Kurve  $k_c^3$  und bilden einen Regulus des Hyperboloides  $H_M$ . Wegen der Polarverhältnisse muss auch der Punkt  $M$  auf der Fernkurve des Hyperboloides  $H_M$  liegen.

Das Analoge kam in [3] vor, wenn der Punkt  $M$  auf der Kurve  $\mu$  lag. Weiterhin ist es bekannt, dass jeden Punkt der Kurve  $\mu$  vier endliche (IVN) Komplexstrahlen enthalten von deren zwei die Erzeugenden der Fläche  $\mathcal{P}_2$  und je eine der Fläche  $\mathcal{P}_1$  bzw.  $\mathcal{P}_3$  angehört, zum Unterschied von einem beliebigen Fernpunkt  $M$ , den acht endliche (IVN) Komplexstrahlen enthalten, wo aber der Punkt  $M$  kein Punkt der Fernkurve des Hyperboloides  $H_M$  ist.

Im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels, wenn jeder Fernpunkt die Eigenschaften der Punkte der Kurve  $\mu$  besitzt, können wir mit Berechtigung erwarten, dass auch jeden beliebigen Fernpunkt vier endliche (IVN) Komplexstrahlen enthalten von deren zwei der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  und je einer der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  bzw.  $\mathcal{P}_{k3}$  angehört.

Die erste ganz formale Bekräftigung dieses findet man so: Wie bekannt, die Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  ist 5. Ordnung, aber drei Strahlen dieser Kongruenz die den beliebigen Fernpunkt  $M$  enthalten, enthalten auch die Fernpunkte  $U$  bzw.  $V$  bzw.  $Y$  der Kurve  $k_c^3$ . Die übrigen zwei Strahlen dieser Kongruenz sind keine Fernstrahlen. Da die Kongruenzen  $\mathcal{P}_{k1}$  und  $\mathcal{P}_{k3}$  1. Ordnung sind, enthalten den beliebigen Fernpunkt  $M$  tatsächlich vier erwähnte Strahlen der Kongruenzen.

Es ist noch zu beweisen, dass diese auch die einzigen den beliebigen Fernpunkt  $M$  enthaltenden endlichen (IVN) Komplexstrahlen sind.

In [3] wurde bewiesen, dass eine den Fernpunkt  $M$  enthaltende Gerade ein (VN) Komplexstrahl des  $(F^2)$  Büschels genau dann ist, wenn sein  $I$  Punkt auf der, dem Punkt  $M$  auf die beschriebene Weise zugeordneten Hyperboloid  $H_M$  liegt, während er ein (IVN) Komplexstrahl genau dann ist, wenn sein  $I$  Punkt und sein  $Z$  Punkt auf dieser Fläche liegen.

Auf der Fläche  $H_M$ , die dem Punkt  $M$  bezüglich des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels auf die beschriebene Weise zugeordnet ist, liegt auch die Flächenmittelpunktraumkurve  $k_c^3$  3. Ordnung, da einen Regulus dieser Fläche die Bisekanten der Kurve  $k_c^3$  bilden. Der Strahl

$$t_M = \varphi(M)$$

ist keine Erzeugende der Fläche  $H_M$ , durchsetzt sie aber in Punkten  $O_i$  ( $i = 1, 2$ ) der Kurve  $k_c^3$ . Die Verbindungsgeraden  $MO_1$  und  $MO_2$  sind zwei endliche Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  und einzige (IVN) Komplexstrahlen deren ein der zugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte im Punkt  $M$  und der andere auf der Kurve  $k_c^3$  liegt. Die übrigen den Punkt  $M$  enthaltenden (IVN) Komplexstrahlen können nur diejenigen sein, die auf dem Hyperboloid  $H_M$  liegen, bzw. die auch die Erzeugenden dieser Fläche sind.

Eine den Punkt  $M$  enthaltende Erzeugende der Fläche  $H_M$  ist der dem Fernpunkt der Geraden

$$t_M = \varphi(M)$$

zugeordneter (TK) Komplexstrahl der auch ein Strahl der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  ist und dem beide involutorzugeordneten  $I$ - $Z$  Punkte auf dieser Weise auf der Fläche  $H_M$  liegen. Den ergänzenden Regulus der Fläche  $H_M$  bilden die den Punkten der Geraden  $p_M$  konjugierte Polaren bezüglich einer jeden Fläche des  $|F_k^2|$  Flächen-

büschels. Da dem Punkt  $M$  die zugeordnete Polarebene bezüglich der Kugel die Gerade  $p_M$  als ihre Ferngerade enthält, bilden auch den Punkten dieser Geraden  $p_M$  die zugeordneten Polarebenen bezüglich der Kugel ein Ebenenbüschel, dessen Achse den Punkt  $M$  und den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthält. Diese Achse ist deshalb eine Erzeugende der Fläche  $H_M$ , aber auch ein Strahl der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$ , da er den Punkt  $O_k$  enthält.

Aus diesen Grunde könnten wir behaupten, dass jeder endliche Involutorstrahl des  $(IVN)$  Komplexes einer der Kongruenzen  $\mathcal{P}_{k1}$  bzw.  $\mathcal{P}_{k2}$  bzw.  $\mathcal{P}_{k3}$  gehört. In [2] und [3] wurde es indessen festgestellt, dass jeder Mittelpunkt einer Singulärfläche des  $|F^2|$  Flächenbüschels ein Scheitelpunkt eines Kegels 3. Grades der  $(IVN)$  Komplexstrahlen ist und in [1] wurde bewiesen, dass im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels ein solcher Kegel 3. Grades in ein Strahlbüschel und in einen Kegel 2. Grades der  $(IVN)$  Komplexstrahlen zerfällt, wie dies in 2.1 und 2.2 dieser Arbeit betont wurde.

Die Strahlen dieses Büschels können wir gleich als die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  betrachten, da auf jeden solchen Strahl ein der zugeordneten  $I-Z$  Punkte auf der Kurve  $k_c^3$  und der andere im Fernpunkt dieses Strahles liegt, aber die Erzeugenden des Kegels 2. Grades können wir ohne weiteren Betrachtungen in keine der Kongruenzen  $\mathcal{P}_{k1}$  bzw.  $\mathcal{P}_{k2}$  bzw.  $\mathcal{P}_{k3}$  einbetten. Es scheint, die Erzeugenden der vier Kegel 2. Grades der  $(IVN)$  Komplexstrahlen mit den Scheitelpunkten in Eckpunkten des Polartetraeders des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels bringen zum Gegensatz die Behauptung, dass jeden beliebigen Fernpunkt vier endliche Involutorstrahlen enthalten.

Den Punkten einer beliebigen Geraden  $a$ , die einen Eckpunkt z. B.  $A$  des Polartetraeders  $ABCD$  des Polarraumbüschels  $(F^2)$  enthält, bilden, wie bekannt, die zugeordneten  $(TK)$  Komplexstrahlen zwei Strahlbüschel mit dem Scheitelpunkt in jenem Punkt  $K$  der Ebene  $(BCD)$ , für die

$$a = \varphi(K)$$

Geltung hat u. zw. so, dass den Punkten dieser Geraden  $a$  die zugeordneten  $(TK)$  Komplexstrahlen ein Strahlbüschel  $(K)$  in einer den Eckpunkt  $A$  enthaltenden Ebene bilden, während dem Punkt  $A$  der Geraden  $a$  selbst, das zugeordnete Strahlbüschel  $(K)$  in der Ebene  $(BCD)$  liegt.

In [3] wurde gezeigt, dass die den Punkt  $A$  enthaltenden  $(IVN)$  Komplexstrahlen einen Kegel 3. Grades bilden, die die Ebene  $(BCD)$  in Punkten einer Kurve  $m_1^3$  3. Ordnung durchdringen. Die involutorzugeordneten  $I-Z$  Punkte des jeden solchen  $(IVN)$  Strahles liegen im Punkt  $A$  bzw. auf der Kurve  $m_1^3$ . Der Strahl

$$a_i = \varphi(A_i) \quad \text{wo } A_i \in m_1^3 \text{ ist}$$

enthält den Punkt  $A$ , schneidet senkrecht den  $(IVN)$  Komplexstrahl  $AA_i$  und durchdringt die Ebene  $(BCD)$  im Punkt  $A_i^x$ , der auch auf der Kurve  $m_1^3$  liegt. Davon wurde behauptet, dass auch die Verbindungsgerade  $A_i^x A$  ein  $(IVN)$  Komplexstrahl und auch die Erzeugende des erwähnten Kegels  $(m_1^3, A)$  3. Grades ist.

Im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels zerfällt dieser Kegel  $(m_1^3, A)$ , wie bekannt, in einen Kegel  $(m_1^2, A)$  2. Grades und in ein Strahlbüschel  $(A)$  der  $(IVN)$  Komplexstrahlen so, dass die Kurve  $m_1^3$  3. Ordnung in die Kurve  $m_1^2$  2. Ordnung und in die Ferngerade  $m_1^1$  der Ebene  $(BCD)$  zerfällt.

Heben wir hervor eine Erzeugende  $l$  dieses Kegels  $(m_1^2, A)$ . Wie bekannt, bilden die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in l$$

ein Strahlbüschel dessen Scheitelpunkt in der Ebene  $(BCD)$  liegt. Auf der Geraden  $l$  sind ausser des Punktes  $A$  noch zwei Punkte zu betonen u. zw. ihr Stosspunkt  $A_1 \in m_1^2$  mit der Ebene  $(BCD)$  und ihr Fernpunkt  $M$ . Ist die Gerade  $l$  ein  $(IVN)$  Komplexstrahl, muss seinem Punkt  $A_1$  der zugeordnete Strahl

$$l_1 = \varphi(A_1)$$

senkrecht auf dem Strahl  $l$  sein und den Eckpunkt  $A$  enthalten. Dies kann aber nur dann erfüllt sein, wenn der Fernpunkt der Geraden  $l_1$  auf jener Ferngeraden  $p_M$  liegt, die die Polare des Fernpunktes  $M$  der Geraden  $l$  bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist. Die Polare  $p_M$  ist aber auch die Ferngerade der, dem Punkt  $M$  zugeordneten Polarebene bezüglich der Kugel, die eine Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels ist, so dass diese Ebene auch den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthalten muss. Der Strahl

$$t = \varphi(M)$$

schneidet den Strahl  $l_1$  in seinem Schnittpunkt  $K$  mit der Ebene  $(BCD)$  da sie beiden demselben Strahlbüschel  $(K)$  gehören. Auf Grunde dieses folgt, dass für den Punkt  $K$  der Ebene  $(BCD)$  entweder

a)  $K \in m_1^2$  oder b)  $K \in m_1^1$  gelten muss.

Wir nehmen zuerst an, der Fall a) liege vor.

Die Geraden  $l_1$  und  $t$  verordnen eine Ebene, der die Ferngerade die Polare  $p_M$  sein muss. Dies bedeutet weiterhin, dass diese Ebene in welcher die, den Punkten der Geraden  $l$  zugeordneten  $(TK)$  Komplexstrahlen den Strahlbüschel  $(K)$  bilden, mit der Polarebene des Punktes  $M$  bezüglich der Kugel übereinstimmt. Wie bekannt eine jede Ebene schneidet die Kurve  $k_c^3$  in drei Punkten. Keine Ausnahme von diesen ist die erwähnte Ebene. Sie schneidet also die Flächenmittelpunktkurve  $k_c^3$  3. Ordnung des  $|F_k^2|$  Büschels in drei Punkten u. zw. im Mittelpunkt  $A$  der Singulärfläche  $A^2$  dieses Flächenbüschels, in Kugelmittelpunkt  $O_k$  und in noch einem Flächenmittelpunkt  $O$ . Davon würde unumstritten folgen, dass der Strahl

$$t = \varphi(M)$$

den Kugelmittelpunkt  $O_k$  und den Mittelpunkt  $O$  noch einer Fläche dieses Flächenbüschels enthalten muss, da die Geraden

$$l_1 = \varphi(A_1) \neq t = \varphi(M), \quad \text{da auch } A_1 \neq M \text{ sind.}$$

Nimmt man noch in Betracht, dass jeder Strahl  $t$  des  $(TK)$  Komplexes der nicht nur dem Fernpunkt der jeden Erzeugenden des Kegels  $(m_1^2, A)$  sondern auch dem Fernpunkt der jeden Erzeugenden solcher Kegel der  $(IVN)$  Komplexstrahlen mit den Scheitelpunkten in  $B, C$  und  $D$  zugeordnet ist, den Kugelmittelpunkt  $O_k$  enthalten müsste und andererseits, dass ein Strahl

$$t = \varphi(M)$$

den Kugelmittelpunkt  $O_k$  genau dann enthalten kann, wenn der Punkt

$$M \in t_n \text{ für } t_n = \varphi(O_k) \text{ ist,}$$

sind wir zur Gegensatz mit der Voraussetzung gekommen, dass  $K \in m_1^2$  ist.

Als einzige mögliche Lösung dieses Problems bleibt die Annahme b) dass

$$K \in m_1^1 \text{ ist, so dass auch } K \in p_M \text{ ist.}$$

Das erwähnte Büschel ( $K$ ) bilden die gleichlaufenden Strahlen, deren Ebene schneidet die Polarebene des Punktes  $M$  bezüglich der Kugel in der Geraden

$$t = \varphi(M).$$

Bewegt sich die Erzeugende  $l$  längs des Kegels  $(m_1^2, A)$ , bewegt sich auch ihr Fernpunkt  $M$  und der zugeordnete Strahl  $t = \varphi(M)$  enthält in jeder Stellung zwei andere Punkte der Kurve  $k_c^3$  und einen anderen Punkt der Geraden  $m_1^1$ . Dies hat zur Folge, dass jedes Paar der untereinander senkrechten und involutorzugeordneten Erzeugenden des Kegels  $(m_1^3, F)$  eines  $|F^2|$  Flächenbüschels im Fall des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels in solchen Paar übergeht, dass eine der Erzeugenden dem Kegel  $(m_1^2, A)$  und die andere dem Büschel  $(A)$  in der Ebene  $(m_1^1, A)$  angehört.

Wir müssen noch feststellen welcher der Kongruenzen die (IVN) Komplexstrahlen des Kegels  $(m_1^2, A)$  gehören.

Auf die übliche Weise können wir feststellen, dass den Punkten der Geraden  $p_M$ , wo  $p_M$  die Polare des Fernpunktes  $M$  einer beliebigen Erzeugenden  $l$  des Kegels  $(m_1^2, A)$  bezüglich des absoluten Kegelschnittes ist, die zugeordneten (TK) Komplexstrahlen die Erzeugenden des Hyperboloides  $H_M$  sind, so dass die Fernkurve dieser Fläche den Punkt  $M$  enthält. Die Gerade  $l$  ist als ein Strahl

$$l = \varphi(K) \text{ für } K \in p_M \text{ und } K \in m_1^1$$

auffassen und damit auch als eine Bisekante der Kurve  $k_c^3$  betrachten. Solche Bisekanten gehören aber, wie es gezeigt wurde, einer Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$ .

Es ist ganz offensichtlich dass das Anlage auch für jeden (IVN) Komplexstrahl die Geltung hat, der einen der involutorzugeordneten I-Z Punkte auch im Eckpunkt  $B$  bzw.  $D$  des Polartetraeders  $ABCD$  des  $(F_k^2)$  Polarbüschels hat und dem der andere Z-I Punkt auf einer Kurve 2. Ordnung in der Ebene der übrigen drei Eckpunkte liegt.

Für die (IVN) Komplexstrahlen die die Strahlbüscheln  $(A)$  bzw.  $(B)$  bzw.  $(C)$  bzw.  $(D)$  bilden und die in jenen Ebenen liegen, die parallel mit der Ebene der übrigen drei Eckpunkte sind, wurde schon gezeigt, dass sie der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  angehören.

*Satz 10. Jene (IVN) Komplexstrahlen die einen der involutorzugeordneten I-Z Punkte im Mittelpunkt der Singulärfläche des  $|F_k^2|$  Büschels, d. h. im Eckpunkt des Polartetraeders des  $(F_k^2)$  Polarraumbüschels haben und deren andere Z-I Punkt auf einer Kurve 2. Ordnung in der Ebene der übrigen drei Mittelpunkte-eckpunkte liegt, sind die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$ .*

Satz 11. *Jene (IVN) Komplexstrahlen die im Mittelpunkt der Singulärfläche des  $|F_k^2|$  Flächenbuschels einen der involutorzugeordneten I-Z Punkt und den anderen Z-I Punkt auf der Ferngeraden jener Ebene haben, die die Mittelpunkte der übrigen drei Singulärflächen spannen sind die Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$ .*

Fassen wir das Gesagte zusammen, so folgt:

Satz 12. *Die Involutorstrahlen des (VN) Komplexes eines  $|F_k^2|$  Flächenbuschels bilden eine Kongruenz 7. Ordnung und 7. Klasse, die zerfällt in:*

1. *Eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  1. Ordnung und 3. Klasse jener (IVN) Komplexstrahlen, die auch die den Fernpunkten zugeordneten (TK) Komplexstrahlen und die Bisekanten der Flächenmittelpunktkurve  $k_c^3$  sind. Innerhalb dieser Kongruenz befinden sich auch die Erzeugenden der drei Kegelylinder mit den Scheitelpunkten in Fernpunkten der Kurve  $k_c^3$ , die auch die Achsen der Flächen des  $|F_k^2|$  Buschels sind, und auch die Erzeugenden der vier Kegel aus den Satz 10.*
2. *Eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  5. Ordnung und 3. Klasse jener Strahlen, deren ein der involutorzugeordneten I-Z Punkte auf der Kurve  $k_c^3$  und der andere unendlich fern liegt.*
3. *Eine Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$  1. Ordnung und 0. Klasse, die die Kugelachsen bilden, so dass eine zugeordnete Drei die senkrechte Kugeldurchmesser bilden.*
4. *Eine Kongruenz 0. Ordnung und 1. Klasse aller Ferngeraden.*

e) Die Fläche der I-Z Punkte auf den (IVN) Komplexstrahlen eines  $|F_k^2|$  Flächenbuschels

Auf jeder der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes befinden sich zwei diesem Strahl zugeordnete I-Z Punkte, die alle stetig verbunden sind und eine Fläche  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{Z}$  bilden. Wie eben bewiesen wurde, zerfällt die ganze Kongruenz 7. Ordnung und 7. Klasse der (IVN) Komplexstrahlen in die Kongruenzen der niedrigeren Ordnungen und Klassen. Auf jeder dieser Kongruenzen ist die Ordnung der zugeordneten Fläche der I-Z Punkte betrachtet, so dass man erwarten kann, die Ordnung der Fläche  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{Z}$  ist gleich der Gesamtheit der Ordnung der einzelner Flächen.

Bringen wir uns in Erinnerung, dass die Fläche der involutorzugeordneten I-Z Punkte

1. auf den Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k1}$  6. Ordnung,
2. auf den Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$  2. Ordnung, da diese Fläche die Fernebene bildet, der jeder Punkt zwifach ist, während jeder Punkt der Kurve  $k_c^3$   $\infty^1$ -deutig ist,
3. auf den Strahlen der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k3}$  3. Ordnung,
4. auf den Ferninvolutorstrahlen 1. Ordnung ist.

Es ist deshalb zu erwarten, dass die Fläche  $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{Z}$  die Ordnung 12 hat.

Die Ordnung dieser Fläche werden wir auf die ähnliche Weise bestimmen, wie dies in [3] für eine solche Fläche im  $|F^2|$  Flächenbüschel getan wurde.

Die Ordnung der Fläche  $\mathcal{F}\text{-}\mathcal{Z}$  ist gleich der Anzahl der Durchstosspunkte einer beliebigen Geraden  $s$  mit dieser Fläche. Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden } T \in s$$

bilden einen Regulus des Hyperboloides  $H_s$  während den ergänzenden Regulus die Geraden  $r$  bilden, die der Geraden  $s$  die konjugierten Geraden bezüglich einer jeden Fläche des  $|F_k^2|$  Flächenbüschels sind. Nehmen wir an, dass die Gerade  $s$  die Gesamtheit der  $I$  Punkte der  $(VN)$  Komplexstrahlen ist, dann bilden die  $Z$  Punkte, wie bekannt, eine auf dem Hyperboloid  $H_s$  liegende Kurve 5. Ordnung, die aber in eine Kurve  $z^4$  4. Ordnung und in eine Gerade  $z^1$  zerfällt. [1]. Da den Fernpunkt der Geraden  $s$  drei jene  $(IVN)$  Komplexstrahlen enthalten, die in diesem Punkt auch seinen  $I$ - $Z$  Punkt und auf der Geraden  $z^1$  seinen  $Z$ - $I$  Punkt haben (ein dieser Strahlen ist der Fernstrahl und die übrigen zwei gehören der Kongruenz  $\mathcal{P}_{k2}$ ) werden wir in theoretischen Betrachtung keine Rücksicht auf diese drei Strahlen nehmen, aber im Endresultat werden sie zuzählen werden. In [1] wurde es bewiesen, dass jede Erzeugende des ersten Regulus des Hyperboloides  $H_s$  die Unisekante der erwähnten Kurve  $z^4$  und jede Erzeugende des ergänzenden Regulus die Trisekante dieser Kurve ist.

Ist die Gerade  $s$  eine Gesamtheit der  $Z$  Punkte der  $(VN)$  Komplexstrahlen, bilden die zugeordneten  $I$  Punkte eine auf dem Hyperboloid  $H_s$  liegende Kurve 7. Ordnung, die wieder in eine Raumkurve  $i^5$  5. Ordnung und in die Fernkurve  $i^2$  2. Ordnung zerfällt. Uns interessieren nur die Punkte der Kurve  $i^5$ , für die in ([1] bewiesen wurde, dass jede Erzeugende des ersten Regulus der Fläche  $H_s$  ihre Bisekante und jede Erzeugende des ergänzenden Regulus ihre Trisekante ist. Zwei Punkte der Kurve  $i^2$  könnten nur dann auf der Fläche  $\mathcal{F}\text{-}\mathcal{Z}$  liegen, wenn die Gerade  $s$  eine Bisekante der Kurve  $k_c^3$  wäre. Dies aber steht im Gegensatz mit der Voraussetzung, dass  $s$  eine beliebige Gerade ist.

Da die Gerade  $s$  in allgemeinen keine der Kurve  $i^5$  und  $z^4$  schneidrt, hat dies zur Folge, dass jeder Schnittpunkt der Kurven  $i^5$  und  $z^4$  ein  $I$ - $Z$  Punkt jenes  $(IVN)$  Komplexstrahles ist, dem der zugeordnete  $Z$ - $I$  Punkt auf der Geraden  $s$  liegt. Die Zahl der Durchstosspunkte der Geraden  $s$  mit der Fläche  $\mathcal{F}\text{-}\mathcal{Z}$  ist demnach gleich der Zahl der Schnittpunkte der Kurven  $i^5$  und  $z^4$ .

Die Zahl der Schnittpunkte zweier auf einer Regelfläche 2. Grades liegenden Kurven hängt von der Zahl der Schnittpunkte jeder dieser Kurve mit den Erzeugenden eines und des anderen Regulus dieser Fläche ab. Schneidet jede Erzeugende eines Regulus eine dieser Kurven auf dem Hyperboloid in  $a_1$  Punkten und die Erzeugenden des anderen Regulus dieselbe Kurve in je  $a_2$  Punkten, während die andere Kurve diese Erzeugenden in  $a_1^x$  bzw.  $a_2^x$  Punkten schneiden, so ist die Zahl  $n$  der Schnittpunkte dieser Kurve durch die Gleichung

$$n = a_1 a_2^x + a_2 a_1^x \quad \text{gegeben.} \quad (9)$$

In unserem Fall ist

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_1^x = 2 \quad a_2^x = 3$$

und so folgt, dass  $n = 9$  ist. Dies bedeutet, dass die Gerade  $s$  die Fläche  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{Z}$  in neun endlichen und drei Fernpunkten schneidet, bzw. dass die Ordnung der Fläche  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{Z}$  12 ist. Dies aber übereinstimmt mit dem Resultat den wir erwartet haben.

*Satz 13. Die involutorzugeordneten I-Z Punkte auf allen (IVN) Komplexstrahlen eines  $|F_k^2|$  Flächenbüschels bilden eine Fläche  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{Z}$  12. Ordnung, die in eine Fläche 9. Ordnung und in die dreifache Fernebene zerfällt. Auf dieser Fläche ist die Grundkurve  $k^4$  eine einfache, während die Flächenmittelpunktkurve  $k_c^3$   $\infty^1$ -deutig ist.*

#### LITERATUR

- [1] V. Šturić-Čudovan, Das  $|F^2|$  Flächenbüschel und eine Möglichkeit des Eintauchens des (MK) in den (VN) Komplex, Rad JAZU, (1977.) 59—94.
- [2] V. Šturić-Čudovan, Der orientierte Ničesche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, I. Teil, Rad JAZU, 367 (1974.) 374 151—205.
- [3] V. Šturić-Čudovan, Der orientierte Ničesche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, II. Teil, Rad JAZU, 370 (1975.) 57—91.
- [4] V. Niče, Über die kürzesten Tangentialwege zwischen der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU, 331 (1965.) 145—172.
- [5] V. Niče, Zusätzliche Betrachtungen mit ergänzenden Sätzen über den Tangentialkurzwegkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU, 349 (1970) 94—107.
- [6] J. Majcen, O jednoj posebnoj vrsti kubičnog kompleksa, Rad JAZU, 155 (1903) 159—172.
- [7] V. Niče, Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad JAZU, 235, (1962) 107—125.
- [8] V. Šturić-Čudovan, Singularitäten des Majcenschen Strahlenkomplexes, Glasnik matematički 3 (23) (1968), 117—139.
- [9] H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, Leipzig, und Berlin, 1914.
- [10] V. Niče, Die Achsenregelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik mat.-fiz. i astr., 2 (18) (1963) 255—268.
- [11] V. Niče, O strofoidalni i prostornoj krivulji 4. reda na kugli, Rad JAZU, 276. (1949.) 5—12.

## KONGRUENCIJE INVOLUTORNIH ZRAKA KOMPLEKSA $VN$ ODREĐENOG PRAMENOM PLOHA $|F_k^2|$

### SADRŽAJ:

Ovaj je rad nastavak mog rada [1] u kojem su razmatrana svojstva Ničeovog orijentiranog kompleksa određenog takvim pramenom ploha  $|F_k^2|$  2. stupnja koji sadrži kuglu kao jedinu rotacionu plohu. I sam pramen ploha  $|F_k^2|$  razlikuje se po mnogim svojstvima od pramena ploha  $|F^2|$  koji ne sadrže kuglu, a neka od tih svojstava prikazana su u [1].

Kako su pramenom ploha 2. stupnja određena četiri kompleksa zraka, i to poznati Reyeov tetraedarski kompleks ili kraće  $TK$ , Majcenov kompleks ili kraće  $MK$ , kompleks normala i orijentirani Ničeov kompleks ili kraće kompleks  $VN$ , interesantno je istražiti kakve promjene nastaju i u svojstvima tih kompleksa kad su oni umjesto pramenom ploha  $|F^2|$  zadani pramenom ploha  $|F_k^2|$ . U ovom nas radu posebno interesiraju takve promjene nastale na kongruenciji involutornih zraka kompleksa  $VN$ .

Neki je pravac  $o$  zraka kompleksa  $VN$  određenog pramenom ploha  $|F^2|$  odnosno pramenom ploha  $|F_k^2|$  2. stupnja ako on sadrži po volji odabranu točku  $T$  prostora i okomito siječe pravac  $t$ , koji je zraka  $TK$  pridružena točki  $T$ . Točka  $T$  je točka  $I$  zrake  $o$ , a sjecište pravaca  $o$  i  $t$  je točka  $Z$  te zrake. Točke  $I$  i  $Z$  su dirališta zrake  $o$  s dvije plohe pramena  $|F^2|$  odnosno  $|F_k^2|$ , ali nisu međusobno ravnopravne. Bilo koja točka  $T$  prostora je točka  $I$  za jednu zraku i točka  $Z$  za tri zrake kompleksa  $VN$ .

U beskonačno dalekoj ravnini postoji poznata Jacobieva krivulja  $\mu$  3. reda koja daje posebna svojstva tvorevinama sačinjenim od zraka kompleksa  $VN$  određenih pramenom ploha  $|F^2|$  ako su te zrake na određeni način vezane uz krivulju  $\mu$ . U slučaju pramena ploha  $|F_k^2|$ , svaka točka beskonačno daleke ravnine ima svojstvo točke krivulje  $\mu$ , pa je u [1] pokazano, da je bilo koja točka beskonačno daleke ravnine vrh pramena međusobno usporednih zraka kompleksa  $VN$ , koje u dotičnom vrhu imaju zajedničku točku  $I$ , dok im se točke  $Z$  nalaze duž tom vrhu pridružene zrake  $TK$ .

Neka je zraka kompleksa  $VN$  njegova involutorna zraka ili kraće zraka  $IVN$  ako ona samo promijeni orijentaciju kad joj involutorno pridružena točke  $I$  i  $Z$  zamijene svoja mjesta.

Kao u pramena  $|F^2|$  i u pramena  $|F_k^2|$  svaki je pravac beskonačno daleke ravnine zraka  $IVN$  kompleksa  $VN$ .

U [3] je pokazano da postoje tri različite plohe:  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  i  $\mathcal{P}_3$ , kojima su izvodnice zrake  $IVN$  kompleksa  $VN$ . Za sve njih karakteristično je da im izvodnice



povezuju krivulju  $k_c^3$  3. reda središta ploha pramena  $|F^2|$  s beskonačno dalekom Jacobievom krivuljom  $\mu$  3. reda, ali je to povezivanje dato za svaku plohu pod drugim uvjetima. Radi li se međutim o pramenu ploha  $|F_k^2|$ , dakle o pramenu ploha 2. stupnja koji sadrži kuglu, svaka točka beskonačno daleke ravnine preuzima ulogu točke krivulje  $\mu$ , pa ta činjenica utječe i na sve tvorevine vezane za krivulju  $\mu$ .

a) Ploha  $\mathcal{P}_1$  i kongruencija  $\mathcal{P}_{k1}$

U [3] je pokazano da plohu  $\mathcal{P}_1$  6. stupnja čine one zrake *IVN* kompleksa *VN* određene pramenom ploha  $|F^2|$  koje su ujedno i zrake *TK* pridružene točkama krivulje  $\mu$ . Svaka je izvodnica te plohe bisekanta krivulje  $k_c^3$  i unisekanta krivulje  $\mu$ . Na plohi  $\mathcal{P}_1$  krivulja  $\mu$  je jednostruka, a krivulja  $k_c^3$  trostruka. Sve involutorno pridružene točke *I-Z* na onim zrakama *IVN* koje su i izvodnice plohe  $\mathcal{P}_1$  neprekinuto su povezane i određuju krivulju  $\eta_1$  za koju se pokazuje da je 18. reda.

U pramenu ploha  $|F_k^2|$  točkama beskonačno daleke ravnine pridružene zrake *TK* jesu bisekante prostorne krivulje  $k_c^3$  i određuju poznatu kongruenciju 1. reda 3. razreda. Pokazuje se da je svaka takva bisekanta ujedno i *IVN* zraka kompleksa *VN*, pa sve na taj način dobivene zrake *IVN* ne određuju plohu  $\mathcal{P}_1$  6. stupnja, već kongruenciju  $\mathcal{P}_{k1}$  1. reda i 3. razreda.

Kongruencija  $\mathcal{P}_{k1}$  sastoji se od  $\infty^1$  stožaca 2. stupnja kojima se vrhovi nalaze u središnjima plohamu pramena  $|F_k^2|$ , a izvodnice su im zrake *IVN* kompleksa *VN* i bisekante krivulje  $k_c^3$ . Iznimku ne čine ni beskonačno daleke točke *U*, *V* i *Y* krivulje  $k_c^3$ .

Sve involutorno pridružene točke *I-Z* tih zraka *IVN* kompleksa *VN* iz kongruencije  $\mathcal{P}_{k1}$  takođe su neprekinuto povezane i određuju plohu  $\mathcal{E}_1$  za koju se pokazuje da je 6. reda.

b) Ploha  $\mathcal{P}_2$  i kongruencija  $\mathcal{P}_{k2}$

U [3] je nadalje pokazano da postoji i takva ploha  $\mathcal{P}_2$  zraka *IVN* kompleksa *VN* određenih pramenom ploha  $|F^2|$  koje imaju jednu od involutorno pridruženih točaka *I-Z* na krivulji  $\mu$ , a drugu točku *Z-I* na krivulji  $k_c^3$ . Svaku točku krivulje  $k_c^3$  sadrže tri zrake *IVN*, a svaku točku krivulje  $\mu$  dvije takve zrake. Na plohi  $\mathcal{P}_2$  koja je 12. stupnja krivulja  $\mu$  je dvostruka, a krivulja  $k_c^3$  trostruka, pa izlazi da je krivulja  $\eta_2$  pridruženih točaka *I-Z* 15. reda.

U pramenu ploha  $|F_k^2|$  svaku točku  $O_k$  krivulje  $k_c^3$  sadrži pramen zraka *IVN* s pridruženim točkama *I-Z* u dotičnom središtu plohe iz pramena  $|F_k^2|$ , odnosno s pridruženim točkama *Z-I* na beskonačno dalekoj zraci *TK* pridruženoj tom središtu. U [1] je pokazano da je svaka takva zraka kompleksa *VN* ujedno i zraka *MK*, a iz [8] slijedi da sve takve zrake određuju kongruenciju 5. reda i 3. razreda.

Sve one zrake *IVN* kompleksa *VN* određenog pramenom plohe  $|F_k^2|$  kojima se jedna od pridruženih točaka *I-Z* nalazi u središtu plohe pramena  $|F_k^2|$ , a druga u beskonačno dalekoj ravnini određuju kongruenciju  $\mathcal{P}_{k2}$  5. reda i 3. razreda. Tim zrakama pridružene točke *I-Z* određuju plohu  $\mathcal{E}_2$  koja se sastoji od dvostruke beskonačno daleke ravnine i  $\infty^1$ -značne krivulje  $k_c^3$  3. reda središta plohe pramena  $|F_k^2|$ .

U sastav kongruencije  $\mathcal{P}_{k2}$  spadaju i one izvodnice ploha iz pramena  $|F_k^2|$  koje sadrže točke krivulje  $k_c^3$ . Sve takve izvodnice određuju pravčastu plohu 9. stupnja, na kojoj je krivulja  $k_c^3$  dvostruka.

c) Ploha  $\mathcal{P}_3$  i kongruencija  $\mathcal{P}_{k3}$

Svaka ploha pramena  $|F_k^2|$  ima tri osi koje se sijeku u središtu te plohe na krivulji  $k_c^3$ . Sve neprekinuto povezane osi ploha pramena  $|F^2|$  određuju pravčastu plohu 9. stupnja na kojoj je krivulja  $k_c^3$  trostruka, a beskonačno daleka krivulja te plohe raspada se u šest izvodnica i u beskonačno daleku krivulju  $\mu$  3. reda. U [3] je pokazano da su sve osi ploha ujedno zrake  $IVN$  kompleksa  $VN$ , te da određuju plohu  $\mathcal{P}_3$  9. reda, a involutorno pridružene točke  $I-Z$  određuju na toj plohi krivulju  $\eta_3$  27. reda.

Neka je dan pramen ploha  $|F_k^2|$ . Svaka ploha i tog pramena ima tri osi. Problem nastaje pri određivanju beskonačno dalekih točaka tih osiju jer svaku točku beskonačno daleke ravnine možemo smatrati, kao što je već ustanovljeno, točkom krivulje  $\mu$ . Pokazano je da je bilo koja os plohe iz pramena  $|F_k^2|$  takav pravac prostora čijoj se beskonačno dalekoj točki pridružena zraka  $TK$  nalazi ponovno u beskonačno dalekoj ravnini. Takvo svojstvo imaju međutim samo tri beskonačno daleke točke:  $U$ ,  $V$  i  $Y$  krivulje  $k_c^3$ , pri čemu je jednoj od njih pridružena spojnica preostalih dviju kao zraka  $TK$ . Na temelju daljnjih razmatranja izlazi da osi svih ploha pramena  $|F_k^2|$  određuju plohu 6. stupnja, koja se raspada u tri stošca-valjka 2. stupnja s vrhovima u beskonačno dalekim točkama krivulje  $k_c^3$ . Svaka je os plohe iz pramena  $|F_k^2|$  bisekanta krivulje  $k_c^3$  i zraka  $IVN$  kompleksa  $VN$ . Krivulja involutorno pridruženih točaka  $I-Z$  na tim osima je 18. reda, ali se raspada u tri krivulje 6. reda.

Time je uočeno još jedno vrlo interesantno svojstvo ploha pramena  $|F_k^2|$ , jer se smjer trojke osiju jedne plohe iz pramena  $|F_k^2|$  podudara sa smjerom trojke osiju svake plohe tog pramena.

Kako je svaka os plohe iz pramena  $|F_k^2|$  bisekanta krivulje  $k_c^3$ , podudaraju se osi ploha pramena s onim zrakama kongruencije  $\mathcal{P}_{k1}$  koje sadrže beskonačno daleke točke  $U$  odnosno  $V$  odnosno  $Y$  krivulje  $k_c^3$ . Jednu trojku takvih osiju čine i tri međusobno okomite osi kugle.

*Svaku* međutim trojku međusobno okomitih promjera kugle možemo smatrati osima te kugle. Sve one čine kongruenciju  $\mathcal{P}_{k3}$  1. reda i 0. razreda, a beskonačno daleke točke takvih osiju prekrivaju čitavu beskonačno daleku ravninu. Kako je svaka os kugle i zraka  $IVN$  kompleksa  $VN$ , to sve tim osima pridružene i neprekidno povezane točke  $I-Z$  određuju opću plohu  $\mathcal{E}_3$  3. reda.

Temeljna krivulja  $k^4$  4. reda pramena  $|F_k^2|$  nalazi se čitava na kugli. Zrake kompleksa  $VN$  koje sadrže bilo koju točku  $T$  krivulje  $k^4$  i okomite su na tangentu  $t$  krivulje  $k^4$  u točki  $T$  određuju pramen takvih zraka kompleksa  $VN$  kojima se točka  $I$  i točka  $Z$  nalaze u točki  $T$ . [2]. To znači da je središte kugle  $O_k$  vrh stošca 4. stupnja takvih zraka  $IVN$  kojima par točaka  $I-Z$  i  $Z-I$  pada zajedno. Krivulja  $k^4$  je istaknuta krivulja plohe  $\mathcal{E}_3$ . Bilo koja ravnina  $P$  koja sadrži središte kugle siječe plohu  $\mathcal{E}_3$  u krivulji  $e$  3. reda, a spojnice točke  $O_k$  s probodištima krivulje  $k^4$  s ravninom  $P$  tangente su presječne krivulje  $e$ . U radu su razmatrani razni slučajevi takvih presjeka, pa među ostalim izlazi da ravnina određena središtem kugle i tom središtu pridruženom beskonačno dalekom zrakom  $TK$  siječe pramen plohe  $|F_k^2|$  u pramenu koncentričnih krivulja 2. stupnja.

Unutar kongruencije  $\mathcal{P}_{k3}$  postoje i tri zrake koje su najkraće transverzale nasuprotnih bridova autopolaranog tetraedra pramena ploha  $(F_k^2)$  na kojima se involutorno pridružene točke  $I-Z$  nalaze na spomenutim bridovima.

Nadalje je pokazano da bilo koju točku beskonačno daleke ravnine sadrže četiri konačne zrake  $IVN$  kompleksa  $VN$  i to po jedna iz kongruencije  $\mathcal{P}_{k1}$  i  $\mathcal{P}_{k3}$  i dvije iz kongruencije  $\mathcal{P}_{k2}$ .

Zrake  $IVN$  kompleksa  $VN$  koje imaju točke  $I-Z$  u vrhu autopolarne tetraedra, a točke  $Z-I$  u ravnini preostalih triju vrhova tetraedra i koje u pramena ploha  $|F^2|$  određuju stožac 3. stupnja određuju u pramena ploha  $|F_k^2|$  pramen zraka  $IVN$  u ravnini usporednoj s ravninom preostalih triju vrhova i stožac 2. stupnja. Zrake pramena spadaju u tom slučaju u kongruenciju  $\mathcal{P}_{k2}$ , dok su izvodnice spomenutog stošca zrake kongruencije  $\mathcal{P}_{k1}$ .

Sve zrake  $IVN$  kompleksa  $VN$  određuju kongruenciju 7. reda i 7 razreda, jer je kongruencija  $\mathcal{P}_{k1}$  (1., 3.);  $\mathcal{P}_{k2}$  (5., 3.);  $\mathcal{P}_{k3}$  (1., 0.); a pravci beskonačno daleke ravnine čine kongruenciju takvih zraka koja je 0-tog reda i 1. razreda.

Sve involutorno pridružene točke  $I-Z$  na zrakama  $IVN$  kompleksa  $VN$  određenog pramenom ploha  $|F_k^2|$  određuju opću plohu 12. reda na kojoj se nalazi i temeljna krivulja  $k^4$  tog pramena ploha kao jednostruka, dok je krivulja  $k_c^3$  središta ploha  $\infty^1$ -značna.

Primljeno u II. razredu  
14. 4. 1977.