JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

VLASTA ŠĆURIĆ-ČUDOVAN

DER ORIENTIERTE NIČE-SCHE STRAHLKOMPLEX EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

ORIJENTIRANI NIČEOV KOMPLEKS ODREĐEN PRAMENOM PLOHA 2. STUPNJA

Poseban otisak iz: »RADA« knjiga 367

ZAGREB 1974.

VLASTA ŠČURIĆ-ČUDOVAN

DER ORIENTIERTE NIČE-SCHE STRAHLKOMPLEX EINES FLÄCHENBÜSCHELS 2. GRADES

1. TEIL

A. DEFINITION UND GRUNDEIGENSCHAFTEN

In einem projektiven Raum, bzw. auf dem Modell des projektiven Raumes das in einem ergänzenden Euklidischen Raum gebaut ist, ist ein Flächenbüschel $/F^2/$ 2. Grades gegeben, und durch ihm das Büschel (F^2) der Polarräume dieser Flächen bestimmt.

Schon T. Reye wies hin, dass durch jeden Flächenbüschel 2. Grades ein *»Tetraedraler Komplex«* gegeben ist ([5], Bd. III.), und V. Niče, dass durch jeden solchen Flächenbüschel auch ein *»Majcensche Komplex«* [3], ein *»Normalenkomplex«* [4], und ein *»Tangentialkurzwegekomplex eines Flächenbüschels 2. Grades«* [1], [2], bestimmt ist.

Jeder beliebiger Raumpunkt befindet sich auf je einer Fläche des $/F^2/$ Büschels. Ein so angenommener Punkt T, soll sich auf der Fläche F dieses Büschels befinden. Die Berührungsebene R dieser Fläche im Punkt T, enthält einen, dem Punkt T zugeordneten Strahl t, des, durch dieses Büschel $/F^2/$ bestimmten, tetraedralen – oder kürzer-des (TK) Komplexes. Dieser Strahl t, ist wie bekannt, die Schnittgerade der Polarebenen des Punktes T, bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels $/F^2/$. Die ein-eindeutige Abbildung, die einem beliebigen Raumpunkt T einen Strahl t des (TK) Komplexes zuordnet, nennen wir φ-Abbildung und bezeichnen sie mit

$$t = \varphi(T) \quad \text{bzw.} \quad T = \varphi^{-1}(t).$$

Die den Punkt T enthaltende Normale der Ebene R, ist ein Strahl des Normalenkomplexes, oder (NK) Komplexes 8. Grades des Flächenbüschels $/F^2/$. [4]. Die Geraden des Büschels (T), in der Ebene R, berühren die Fläche F im Punkt T, während sich die zweiten Berührungspunkte dieser Geraden, mit noch je einer Fläche des Büschels $/F^2/$, in deren Schneidepunkten mit dem Strahl t befinden. Zwischen allen Geraden dieses Büschels (T) nimmt eine besondere Stelle diejenige Gerade, die parallel mit dem Strahl t ist, den Strahl t in seinem Fernpunkt schneidet, und als ein Strahl des Majcenschen-, oder (MK) Komplexes bekannt ist [3]; und dann diejenige Gerade, auf die die Entfernung zwischen den Berührungspunkten die kürzeste ist. Diese Gerade enthält den Punkt T und liegt auf dem Strahl

$$t = \varphi (T)$$

senkrecht.

Alle solche Senkrechte, die aus jeden Raumpunkt T auf den zugeordneten Strahl

$$t = \varphi (T)$$

gelegt sind, bilden eine stätige Menge vond ∞^3 Geraden, also einen Komplex, den V. Niče in Arbeiten [1] und [2] definiert, und eine Reihe seiner Eigenschaften bestimmt hat. Jedem Strahl dieses Komplexes wird, wie wir später zeigen werden, auf die natürliche Weise seine Orientation zugeordnet, und so werden wir ihn als: »*Der orientierte Niče-sche Strahlkomplex eines Flächenbüschels 2. Grades*« oder kürzer »*(UN) Komplex*« nennen.

DEFINITION 1.

Die Abbildung die einem beliebigen Raumpunkt T, eine Senkrechte o zuordnet, die aus dem Punkt T auf dem Strahl

$$t = \varphi (T)$$

gezogen ist, nennen wir als eine ψ-Zuordnung, und bezeichnen sie mit

$$o = \psi (T).$$

DEFINITION 2.

Der (UN) Komplexstrahl ist jede Raumgerade die durch die Abbildung

$$o = \psi (T)$$

bestimmt ist.

V. Niče nannte in [1] dem Punkt

$$T = \psi^{-1} (o)$$

als einen A u s g a n g s p u n k t des Strahles o, und den Schnittpunkt der Strahlen $t \wedge o$, wo

$$t = \varphi(T) \quad \text{und} \quad o = \psi(T) \quad \text{ist,}$$

als einen E i n g a n g s p u n k t dieses Strahles. Wir werden dieselben Punkte als I Punkt und Z Punkt des Strahles o nennen.[1]

DEFINITION 3.

Ein Z Punkt des (VN) Komplexstrahles o ist

$$Z \overset{\text{Def.}}{=\!=} t \wedge o \quad \text{für}$$
$$t = \varphi(I) \quad \textit{und} \quad o = \psi(I)$$

Hieraus folgt, für den (VN) Komplex die charakteristische

FOLGERUNG 1.

Jedem (VN) Komplexstrahl sind zwei Raumpunkte zugeordnet, die sich auf diesem Strahl als seine I- und Z Punkt befinden.

DEFINITION 4.

Zwischen den Raumpunkten besteht eine χ Abbildung die einem beliebigen Punkt I ein-eindeutig den Punkt Z zuordnet, uzw. so, dass

$$Z = \chi(I) \quad \text{für} \quad Z = \varphi(I) \wedge \psi(I) \quad \text{ist.}$$

Wenn auch die Punkte $I \in o$ und $Z \in o$, die Berührungspunkte des Strahles o mit zwei Flächen des Büschels $/F^2/$ sind, sind sie auf diesem Strahl nicht gleichberechtigt. Es soll

$$Z_1 = t_1 \wedge o_1 \quad \text{für} \quad t_1 = \varphi(I_1),\ o_1 = \psi(I_1) \quad \text{sein.}$$

Nehmen, wir jetzt an, dass

$$Z_1 = I_2 \quad \text{wo} \quad Z_1 \in o_1 \quad \text{aber}$$
$$I_2 \in o_2 \quad \text{für} \quad o_2 = \psi(I_2) \quad \text{ist.}$$

Aus $\quad Z_2 = \chi(I_2) \quad \text{für} \quad Z_2 \in t_2 = \varphi(I_2) \quad \text{und} \quad I_1 \in t_2$

folgt dann im allgemeinen

$$Z_2 \neq I_1\text{, was auch bedeutet, dass } o_2 \neq o_1 \quad \text{gilt.}$$

Offenbar ist, dass der I- und Z Punkt eines (VN) Komplexstrahles ein eingerichtetes Punktpaar bilden. Einem beliebigen (VN) Komplexstrahl

[1] Diese abgekürzten Namen stammen von kroatischen Benennungen ab.
Ausgangspunkt – Izlazna točka
Eingangspunkt – Zalazna točka

können wir, wie schon bemerkt, deshalb auf die natürliche Weise die Orientation zuordnen, die durch seine Punkte I und Z bestimmt ist.

Die Tatsache, dass zwei Geraden untereinander senkrecht dann und nur dann stehen, wenn jede von ihnen in der Ebene liegt, die senkrecht auf die andere Gerade gelegt ist, ermöglicht uns systematische Untersuchungen verschiedener Mengen der *(VN)* Komplexstrahlen, wie auch die Örter der diesen Strahlen zugeordneten I bzw. Z Punkte, wenn sich die Z bzw. I Punkte dieser Strahlen auf den Geraden, Kurven, Ebenen oder Flächen befinden.

1. *(VN)* KOMPLEXSTRAHLEN, DENEN SICH DIE *I* PUNKTE AUF EINER GERADEN BEFINDEN

Die Idee, der sich V. Niče bei der Bestimmung des Grades jener Fläche der *(VN)* Komplexstrahlen bediente, welche die I Punkte auf einer beliebigen Geraden haben, wird auch uns, nebst kleinen Modifikationen, in fast allen Aufgaben ähnlicher Art dienen. Diese Idee besteht in folgendem:

Wenden wir φ Abbildung auf die Punkte einer beliebigen Geraden s, an. Die erhaltenen *(TK)* Komplexstrahlen bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem eines Hyperboloides H_s, den die Fernebene in Punkten einer Kurve 2. Ordnung schneidet. Diesen Punkten zugeordnete Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes bilden eine Fernkurve 2. Klasse. Jedem Punkt $T \in s$ ist also eine Erzeugende

$$t = \varphi(T) \in H_s$$

und je eine Polare p der Kurve 2. Klasse, zugeordnet. Für Ebenen (T, t) und (T, p) gilt:

$$(T, t) \wedge (T, p) = o \in (VN) \text{ Komplexes,}$$

uzw. so, dass der Punkt T ein I Punkt des Strahles o ist, dem sich der Z Punkt in

$$t \wedge (T, p) \quad \text{befindet.}$$

Mit Punkten der Geraden s und mit den ihnen ein-eindeutig zugeordneten Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für} \quad T \in s$$

bestimmte Ebenen, geben eine Torse τ_1. Diese Torse ist, der bekannten Chasles-Relation nach, 3. Klasse. Dieselbe Punkte der Geraden s, und die ihnen ein-eindeutig zugeordneten erwähnten Polaren p der Kurve 2.

Klasse, bilden die andere Torse τ_2 3. Klasse. Je zwei Ebenen dieser Torsen, die demselben Punkt der Geraden s zugeordnet sind, schneiden sich im Strahl

$$o \in (UN) \text{ Komplexes.}$$

Da zwischen den Ebenen dieser Torsen eine ein-eindeutige Zuordnung besteht, können wir schon wieder, auf Grund der Chasles-Relation behaupten, dass alle diese o Strahlen eine Regelfläche 6. Grades bilden, auf der die Gerade s eine einfache Leitgerade ist. Die Ebenen der Torse τ_2 3. Klasse schneiden, nach Chasles, die ihnen ein-eindeutig zugeordnete (TK) Komplexstrahlen, die die Erzeugenden des Hyperboloides H_s 2. Gradeds sind, in Punkten einer Kurve 5. Ordnung. Diese Kurve bilden die Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf der Geraden s befinden. Damit haben wir, den in [1] bekannten, aber wichtigen Satz erhalten:

SATZ A 1.

Die (UN) Komplexstrahlen, denen sich ihre I Punkte auf einer beliebigen Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 6. Grades, auf der die erwähnte Gerade die einfache Leitgerade ist, während die Z Punkte dieser Strahlen eine Kurve z^5 5. Ordnung bilden.

2. *(UN)* KOMPLEXSTRAHLEN, DIE EINEM RAUMPUNKT ZUGEORDNET SIND

DEFINITION 5.

Ein (UN) Komplexstrahl ist einem Raumpunkt z u g e o r d n e t, wenn sich in diesem Punkt sein I- oder sein Z Punkt befindet.

Wählen wir im Raum einen beliebigen Punkt T und ordnen die Nummer der (UN) Komplexstrahlen, die im Sinn der Definition 5, diesem Punkt zugeordnet sind.

Es soll $t = \varphi(T)$ sein.

Die Strahlen

$$t_n = \varphi(T_n) \quad \text{für jeden} \quad T_n \in t$$

sind die Erzeugenden des Kegels T^2 2. Grades, mit dem Scheitelpunkt T. Befinden sich die I Punkte der (UN) Komplexstrahlen längs des Strahles t, müssen sich die Z Punkte dieser Strahlen auf den Erzeugenden des Kegels T^2 befinden. Behaupten wir es jetzt so, wie wir es in (A 1) getan haben. Die erhaltenen Torsen τ_1 und τ_2 sind wieder 3. Klasse, und die Fläche der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf dem Strahl t befinden, hat den Grad sechs. Auch die Z-Punktkurve dieser Strahlen ist 5. Ordnung und die Ebene (T, t) schneidet sie in fünf Punkten. Da sich diese Punkte nur auf den Erzeugenden des Kegels T^2

befinden können, und die Ebene (T, t) diesen Kegel in zwei Erzeugenden schneidet, kann auf jeder von ihnen nur je ein Z Punkt liegen, während sich die übrigen drei Punkte im Punkt T befinden müssen. Offenbar sind die drei (VN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf dem Strahl t, und die Z Punkte im Punkt t befinden, solche, dass sie senkrecht auf drei Erzeugenden des Kegels T^2 stehen, die nicht in der Ebene (T, t) liegen. Da der Punkt T gleichzeitig der I Punkt jenes (VN) Komplexstrahles ist, der senkrecht auf dem Strahl t liegt, und der Punkt T ein beliebiger Raumpunkt ist, folgt:

SATZ A 2.

Einem beliebigen Raumpunkt sind vier komplanäre (VN) Komplexstrahlen zugeordnet, von denen einer in diesem Punkt den I Punkt, und die drei anderen die Z Punkte haben.

Bzw.

SATZ A 2a.

Einem beliebigen Raumpunkt T, als dem I Punkt des (VN) Komplexstrahles ist e i n Z Punkt dieses Strahles zugeordnet: nehmen wir diesen Punkt T als Z Punkt an, dann sind ihm d r e i I Punkte dreier (VN) Komplexstrahlen zugeordnet, die die Z Punkte im Punkt T haben. Alle, auf diese Weise, dem Punkt T zugeordneten Punkte befinden sich auf dem Strahl

$$t = \varphi(T).$$

Die Eigenschaften des (VN) Komplexes die in der *Folgerung 1.* und im *Satz A 2.* gegeben sind, treten in keinem der übrigen drei Komplexe auf, die durch den Flächenbüschel $/F^2/$ bestimmt sind. Diese Eigenschaften ermöglichen uns verschiedene Untersuchungen über die gegenseitige Abhängigkeit der Menge der (VN) Komplexstrahlen, und der Menge der I Punkte bzw. Z Punkte dieser Strahlen annehmen.

3. (VN) KOMPLEXSTRAHLEN, DENEN SICH DIE Z PUNKTE AUF EINER GERADEN BEFINDEN

Eine beliebige Gerade s soll eine Menge der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen sein. I Punkte dieser Strahlen können sich nur auf dem Hyperboloid H_s befinden, dem die Erzeugenden die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in s$$

sind. Auf jeder diesen Erzeugenden befinden sich drei I Punkte dreier (VN) Komplexstrahlen mit gemeinsamen Z Punkt in jenem Punkt der Geraden s, dem die betreffende Erzeugende – der (TK) Komplexstrahl, zugeordnet ist. /*Satz A 2 a*/. Alle I Punkte, denen sich die zugeordnete Z Punkte auf der Geraden s befinden, bilden auf dem Hyperboloid H_s eine stätige Kurve i^n.

Da die Ordnung einer Raumkurve der Zahl der Durchstosspunkte mit einer beliebigen Ebene gleich ist, werden wir die gesuchte Kurve i^n mit jener Ebene schneiden, die eine Erzeugende t der Fläche H_s enthält. Wie bekannt, in jeder Ebene des Büschels t befindet sich, ausser der Erzeugenden t, noch eine Erzeugende des Hyperboloides H_s des anderen Systems, dem die konjugierte Polaren r_n der Geraden s, bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels (F^2), bilden. Die ausgewählte Ebene des Büschels $[t]$ soll die Fläche H_s in ihren Erzeugenden t und r schneiden, und zwar so, dass sich die Durchstosspunkte mit der Kurve i^n nur in Punkten dieser Kurve befinden können. Da sich auf t drei Punkte dieser Kurve befinden, können alle übrigen Punkte nur auf der Geraden r liegen.

Betrachten wir deshalb die Polare r als eine Menge der I Punkte der $(\mathcal{VN})$ Komplexstrahlen und bestimmen wir, wie viele dieser Strahlen den Z Punkt auf der Geraden s haben. Die den Punkten der Geraden r zugeordneten $(\mathcal{TK})$ Komplexstrahlen bilden ein System der Erzeugenden eines neuen Hyperboloides H_r, dem die Gerade s eine Erzeugende des anderen Systems ist, weil die Polare r in jedem Punkt je einen $(\mathcal{TK})$ Komplexstrahl schneidet, der dem Punkt der Geraden s zugeordnet ist. Die Z-Punktkurve z^5 der $(\mathcal{VN})$ Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf der Geraden r befinden, ist 5. Ordnung /*Satz A 1.*/. Jede Ebene, also auch die Ebene der Geraden s, schneidet diese Kurve in fünf Punkten. Jede Ebene des Büschels $[s]$ schneidet das Hyperboloid H_r, ausser in der Geraden s, nur noch in je einem $(\mathcal{TK})$ Komplexstrahl, der einem Punkt der Geraden r zugeordnet ist. Auf diesem Strahl befindet sich der Z Punkt eines Strahles des $(\mathcal{VN})$ Komplexes, dem sich der I Punkt in dem erwähnten Punkt der Geraden r befindet, während sich auf der Geraden s die übrigen vier Durchstosspunkte der ausgewählten Ebene mit der Kurve z^5 befinden müssen. Auf der Geraden r befinden sich, also, vier I Punkte der vier $(\mathcal{VN})$ Komplexstrahlen, denen die zugeordneten Z Punkte auf der Geraden s liegen. Hieraus folgt, dass die Ebene (t, r) die gesuchte I-Punktkurve i^n in sieben Punkten schneidet, von denen sich drei auf der Geraden t befinden.

Da diese Behauptungen in allgemeinen gelten, folgt, dass die I-Punktkurve der $(\mathcal{VN})$ Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf einer Geraden befinden, eine Raumkurve i^7 7. Ordnung bildet.

Die $(\mathcal{VN})$ Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf einer beliebigen Geraden s befinden, und denen die I Punkte eine Kurve i^7 7. Ordnung bilden, sind stätig im Raum verbunden und eine Regelfläche bilden. Da jedem Punkt der Kurve i^7 durch χ Abbildung nur ein Punkt der Geraden s gehört, aber jedem Punkt dieser Geraden drei Punkte der Kurve i^7 zugeordnet sind, folgt nach Chasles, dass der Grad der gesuchten Regelfläche gleich zehn ist, während die Gerade s auf ihr eine dreifache Leitgerade ist.

SATZ A 3.

Die (UN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf einer beliebigen Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 10. Grades, auf der diese Gerade eine dreifache Leitgerade ist, und die I Punkte dieser Strahlen eine Raumkurve i^7 *7. Ordnung bilden.*

SATZ A 4.

Den Punkten einer beliebigen Geraden, die eine Menge der Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen bilden, die zugeordnete (TK) Komplexstrahlen sind Trisekanten der I-Punktkurve i^7 *7. Ordnung dieser (UN) Komplexstrahlen, während konjugierte Polaren dieser Geraden, bezüglich je eine der Flächen des Büschels* (F^2)*, Kvadrisekanten der Kurve* i^7 *sind.*

4. ERZEUGENDEN DER FLÄCHEN DES /F^2/ BÜSCHELS, ALS (*UN*) KOMPLEXSTRAHLEN

V. Niče hat in [1] gezeigt, dass jede Erzeugende jeder Regelfläche des Büschels /F^2/, auch ein zweifacher (*UN*) Komplexstrahl ist. Den Punkten einer beliebigen Erzeugenden d einer Regelfläche F des Büschels /F^2/ zugeordnete (*TK*) Komplexstrahlen, bilden ein Erzeugendensystem eines Hyperboloides H, dem die Gerade d in anderen Erzeugendensystem gehört. Da es immer zwei solche Erzeugenden (reele oder konjugiert imaginäre) des Hyperboloides H bestehen, die senkrecht auf der Erzeugenden d sind, folgt:

SATZ A 5.

Jede Erzeugende jeder Regelfläche des Büschels /F^2*/ ist ein zweifacher (UN) Komplexstrahl, mit zwei verschiedenen I Punkten und zwei verschiedenen Z Punkten.*

SATZ A 6.

Die (UN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf der Erzeugenden d der Fläche des Büschels /F^2*/ befinden, bilden eine Regelfläche 6. Grades, auf der die Erzeugende d zweifach, und für die Z- Punktkurve* z^5 *dieser Strahlen diese Erzeugende eine Bisekante ist.*

5. DER GRAD DES (*UN*) KOMPLEXES

Um den Grad eines Komplexes zu bestimmen, genügt es, wie bekannt, entweder seine Ordnung oder seine Klasse zu finden, weil sie bei einem Strahlkomplex immer gleich sind. Es ist weiterhin bekannt, dass die Ordnung eines Komplexes gleich der Ordnung jenes Kegels ist, den alle einen Raumpunkt enthaltende Strahlen dieses Komplexes bilden, während die Klasse des Komplexes gleich der Klasse jener Kurve ist, die seine Strahlen in einer Ebene einhüllen.

Da sich auf jedem $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahl zwei ihm zugeordnete Punkte befinden, die sich auf dem Ordnungskegel, wie auch auf der Klassenkurve dieser Strahlen befinden müssen, so geben uns die Untersuchungen der Ordnung und der Klasse dieses Komplexes die Möglichkeit, auch andere seine Eigenschaften kennenzulernen.

a) Die Ordnung des Komplexes

Die Idee von Niče, der [2] die Ordnung des $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexes bestimmte, besteht in folgendem:

Wählen wir in Raum einen beliebigen Punkt T. Das Geradenbündel des Punktes T berührt, wie bekannt, alle Flächen des Büschels $/F^2/$ in Punkten einer Fläche Ω 3. Ordnung, die die Berührungspunkte jener Berührungskegel bilden, die aus dem Punkt T auf jede der Flächen des Büschels $/F^2/$ gelegt sind. Zwischen allen Erzeugenden dieser Berührungskegel 2. Grades bestehen offenbar auch die $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen, die einen Kegel n-ter Grades bilden. Der Strahl

$$t = \varphi(T)$$

ist die Achse des Polarebenenbüschels $[t]$ des Punktes T bezüglich aller Flächen des Büschels $/F^2/$, und jede diese Polarebene schneidet die Fläche Ω, ausser in der Geraden t, noch in je einer Kurve c_n^2 2. Ordnung, die sich ganz auf je einer Fläche des Büschels $/F^2/$ befindet. Deshalb genügt es, dass wir die Zahl jener $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen bestimmen, die den Punkt T enthalten, und die I Punkte längs einer der Schnittkurven c^2 2. Ordnung haben. Die erhaltene Behauptungen können wir auf jede der Schnittkurven c_n^2 übertragen. Offenbar schneidet jede diese Kurve c_n^2 die Gerade t in je zwei Punkten, die aber für jede Ebene des Büschels $[t]$ verschieden sind.

Wählen wir im Ebenenbüschel $[t]$ die Ebene R, die die Polarebene des Punktes T bezüglich einer Fläche F des Büschels $/F^2/$ ist und die diese Fläche längs der Kurve c^2 schneidet.

V. Niče hat gezeigt, dass sechs solche Geraden bestehen, die ausser den Punkt T, auch den Punkt T_n $(n = 1, 2, \ldots 6)$ der Kurve c^2 enthalten, und die senkrecht den Strahl

$$t_n = \varphi(T_n) \quad \text{für} \quad T_n \in c^2 \ (n = 1, 2, \ldots 6)$$

schneiden. Auf Grund dessen folgt, dass diese Geraden auch $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen sind, die die I Punkte auf der Kurve c^2 haben, denen aber der Z Punkt, im allgemeinen, nicht im Punkt T liegt. Wir wissen nämlich, dass sich auf der Geraden t drei Punkte befinden, die die I Punkte für drei (VN) Komplexstrahlen sind, und für die der Punkt T, der gemeinsame Z Punkt ist. Damit sind auch alle solche (VN) Komplexstrahlen in Betracht genommen.

Die Ebene R, wie auch jede andere Ebene des Büschels $[t]$, schneidet demgemäss die I-Punktkurve der (VN) Komplexstrahlen, die den Punkt T enthalten, in neun $(3 + 6)$ Punkten. Davon folgt, dass die gesuchte I-Punktkurve dieser Strahlen 9. Ordnung ist. Der Punkt T befindet sich auf der Kurve i^9 dieser I Punkte, aber da er der I Punkt nur für einen (VN) Komplexstrahl ist, folgt, dass alle Bisekanten dieser Kurve, die den Punkt T enthalten, auch (VN) Komplexstrahlen sind, und einen Kegel 8. Grades bilden. Dies bedeutet, dass auch die Ordnung des (VN) Komplexes gleich acht ist.

Auf dem Kegel T^8 8. Grades der (VN) Komplexstrahlen befindet sich ausser der I-Punktkurve i^9 9. Ordnung, auf der der Punkt T einfach ist, auch die Z-Punktkurve z^{11} dieser Strahlen, für die V. Niče gezeigt hat, dass sie die 11. Ordnung hat, und auf ihr der Punkt T ein dreifacher ist.

SATZ A 7.

Die (VN) Komplexstrahlen, die einen Raumpunkt enthalten, bilden einen Kegel 8. Grades, was bedeutet, dass der (VN) Komplex 8. Ordnung, und damit auch 8. Grades ist. Die I-Punktkurve dieser Strahlen ist 9. Ordnung, und die Z-Punktkurve 11. Ordnung, einen dreifachen Punkt im Scheitelpunkt des Komplexkegels hat.

b) Die Klase des (VN) Komplexes und einige daraus hervorgehende Sätze

Alle (VN) Komplexstrahlen die in einer beliebigen Ebene R liegen, hüllen eine Kurve ein, die, wie schon gesehen, 8. Klasse ist. Das werden wir aber, wegen der erwähnten Gründen auf eine andere Weise behaupten.

Die I-Punktkurve jener (VN) Komplexstrahlen, die in einer beliebigen Ebene R liegen, ist 5. Ordnung. Wir haben nämlich gezeigt /*Satz A 1.*/, dass die Z Punkte, die wir durch die Abbildung

$$Z = \chi(I) \quad \text{für jeden} \quad I \in s$$

bekommen haben, und wo s eine beliebige Gerade der Ebene R ist, eine Raumkurve z^5 5. Ordnung bilden, die die Ebene R in fünf Punkten schneidet. Hieraus folgt, dass sich auf jeder Geraden s der Ebene R fünf I Punkte jener (VN) Komplexstrahlen befiden, die in der Ebene R liegen, bzw. dass die gesuchte I-Punktkurve i^5 5. Ordnung ist.

Die Ordnung der Z-Punktkurve z^n der (VN) Komplexstrahlen, die in der ausgewählten Ebene R liegen, werden wir auch durch die Zahl der

Schneidepunkte dieser Kurve z^n mit einer beliebigen Geraden s, dieser Ebene bestimmen. Die (UN) Komplexstrahlen, welche die Z Punkte auf der Geraden s haben, können die I Punkte nur auf den Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad t \in s$$

haben. Alle solche (TK) Komplexstrahlen bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem des Hyperboloides H_s, dem die Ebene R in einer Kurve h^2 2. Ordnung schneidet. Alle diese Erzeugenden, sind weiterhin, die Bisekanten der Raumkurve k^3 3. Ordnung, die die Pole der Ebene R, bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels (F^2) bilden. Die Ebene R schneidet diese Kurve k^3 im Eckpunkten J_n $(n = 1, 2, 3)$ des Polardreiecks jenes Schnittkurvenbüschels, in dem die Ebene R das Flächenbüschel (F^2) schneidet. Auf Grund dessen folgt, dass der dem Schnittpunkt, z. B. Verbindungsgeraden J_2J_3 mit der Geraden s, zugeordnete (TK) Komplexstrahl, den Punkt J_1 enthalten muss. Ähnlich könnte man auch für die Verbindungsgeraden J_3J_1, J_1J_2 und für die Punkte J_2 und J_3 sagen. Von hier aus folgt, dass auch die Punkte J_1, J_2 und J_3 auf der Kurve h^2 liegen.

Die in der Ebene R liegenden (UN) Komplexstrahlen, die die Z Punkte auf der Geraden s haben, können die I Punkte nur auf der Kurve h^2 haben. Die Strahlen.

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in h^2$$

müssen die Gerade s schneiden und als Erzeugende eine Regelfläche P^4 4. Grades $/1(1 + 3)/$, III. Sturmscher Art bilden, der die Gerade s eine einfache Leitgerade ist. Die (UN) Komplexstrahlen die die I Punkte auf der Kurve h^2 haben, und denen die Z Punkte auf den Erzeugenden der Fläche P^4 liegen, können wir auf die schon bekannte Weise bestimmen. Die Ebenen, die durch die Punkte der Kurve h^2, und durch die mit ihnen ein-eindeutig zugeordneten Erzeugenden der Fläche P^4 bestimmt sind, bilden, nach Chasles, eine Torse τ_1 6. Klasse. Die Erzeugenden der Fläche P^4 dringen die Fernebene in Punkten einer Kurve 4. Ordnung durch, deren Punkten die zugeordnete Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes, eine Kurve 4. Klasse einhüllen. Die Ebenen, die durch die Tangenten dieser Klassenkurve und durch die ihnen ein-eindeutig zugeordneten Punkte der Kurve h^2 bestimmt sind, bilden eine neue Torse τ_2 6. Klasse. Die ein-eindeutig zugeordneten Ebenenpaare dieser zwei Torsen, die demselben Punkt der Kurve h^2 zugeordnet sind, schneiden sich in den (UN) Komplexstrahlen und bilden (dem Chasles nach), eine Fläche 12. Grades. Die Ebene R schneidet diese Fläche in einer Kurve k^{12} 12. Ordnung, die in eine Kurve h^2 2. Ordnung und in zehn (UN) Komplexstrahlen mit den I Punkten auf der Kurve h^2, zerfällt. Die Ebene R schneidet auch die Fläche P^4 in vier Geraden u. zw.: s, J_1J_2, J_1J_3 und J_2J_3. Da sich auf der letzten drei Geraden die Z Punkte dreier (UN)

Komplexstrahlen befinden, denen die I Punkte in Punkten J_3, J_2 und J_1 auf der Kurve h^2 liegen, folgt, dass auf der Geraden s sieben Z Punkte der übrigen sieben (UN) Komplexstrahlen bestehen, die die I Punkte auf der Kurve h^2 haben.

Da wir die gleiche Behauptung für jede Gerade s der beliebigen Ebene ε durchführen können, gelten sie in allgemeinen. Die I Punkte, der in einer Ebene liegenden (UN) Komplexstrahlen, bilden also, eine Kurve i^7 7. Ordnung.

Die Kurve 8. Klasse der (UN) Komplexstrahlen in der Ebene R, können wir auf Grund der ein-eindeutigen Zuordnung der Punkte der Kurven 7. und 5. Ordnung erhalten, die die Reihen der I- und der Z Punkte dieser Strahlen sind. Doch, wir wissen, dass der Chasles-Relation nach, wir vom Erzeugnis die Zahl der gemeinsamen sich selbst zugeordneten Punkte dieser zwei Kurven abrechnen müssen. Da die Grundkurve k^4 4. Ordnung des Büschels $/F^2/$ die Ebene R in vier Punkten schneidet, für die es in /B 2./ bewiesen wird, dass in ihnen die I- und die Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen zusammenfallen, folgt, dass alle (UN) Komplexstrahlen in der beliebigen Ebene R eine Kurve 8. Klasse einhüllen.

SATZ A 8.

Die I-Punktkurve jener (UN) Komplexstrahlen, die in einer Ebene liegen und eine Kurve 8. Klasse einhüllen, ist eine Kurve 5. Ordnung, während die Z-Punktkurve dieser Strahlen 7. Ordnung hat.

Da wir auf dieselbe Weise behaupten können, dass die Erzeugenden der Fläche P^4 die ihnen ein-eindeutig zugeordneten Ebenen der Torse τ_2 in einer Kurve 10. Ordnung durchdringen, folgt:

SATZ A 9.

Die (UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf einer Kurve h^2 2. Ordnung haben, bilden ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 12. Grades, auf der sich die Kurve h^2 als einfache befindet, während die Z Punkte dieser Strahlen eine Raumkurve 10. Ordnung bilden.

Es kann weiterhin durchgeführt werden, dass die (UN) Komplexstrahlen, mit den Z Punkten auf der Kurve h^2 2. Ordnung, die I Punkte auf der Erzeugenden der Fläche P^4 4. Grades haben müssen. Schneiden wir die Fläche P^4 mit einer beliebigen Ebene der Geraden s, zerfällt die Schnittkurve in die Gerade s, und in drei Erzeugenden dieser Fläche, für die gilt:

$$t_n = \varphi(T_n), \quad T_n \in h^2 \quad (n = 1, 2, 3).$$

Auf jeder diesen Erzeugenden befinden sich je drei I Punkte für je drei (UN) Komplexstrahlen mit gemeinsamen Z Punkt im Punkt T_n (n = 1, 2, 3) der Kurve h^2, während sich auf der Geraden s selbst, fünf I Punkte jener (UN) Komplexstrahlen befinden, denen die Z Punkte in den

Punkten der Kurve h^2 sind /*wegen A 2.*/. Da jede Ebene des Ebenenbüschels [s] die gesuchte I-Punktkurve i^n in vierzehn Punkten $(3 \cdot 3 + 5)$ schneidet, folgt, dass sie die 14. Ordnung hat.

Zwischen den Punkten der Kurve h^2 2. Ordnung, die wir als eine quadratische Reihe der Z Punkte der (VN) Komplexstrahlen betrachten, und den Punkten der I-Punktkurve i^{14} 14. Ordnung dieser Strahlen, besteht eine (1, 3)-Korrespondenz. Auf Grund der Chasles-Relation folgt, dass alle (VN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf einer Kurve 2. Ordnung befinden, eine Regelfläche 20. Grades bilden.

SATZ A 10.

Die (VN) Komplexstrahlen, die die Z Punkte auf einer Kurve 2. Ordnung haben, bilden die Erzeugenden einer Regelfläche 20. Grades, auf der diese Kurve 2. Ordnung dreifach ist, während die I Punkte dieser Strahlen eine Raumkurve 14. Ordnung bilden.

6. AUSSERORDENTLICHE KONGRUENZEN DER (VN) KOMPLEXSTRAHLEN UND DIE FLÄCHEN DER IHNEN ZUGEORDNETEN I- BZW. Z PUNKTEN

Alle (VN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf einer Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 6. Grades, und die Z Punkte dieser Strahlen, eine Kurve 5. Ordnung /*A 2.*/. Alle (VN) Komplexstrahlen aber, denen sich die Z Punkte auf einer Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 10. Grades, und die I Punkte dieser Strahlen, bilden eine Kurve 7. Ordnung /*A 5.*/. Bei stetiger Bewegung dieser Geraden, so dass sie in einer Ebene bleiben, oder eine Fläche bilden, bewegen sich stetig auch die erwähnte Z-Punkt- bzw. I-Punktkurven dieser (VN) Komplexstrahlen, denen sich die I- bzw. Z Punkte auf dieser Geraden befinden, und einige Flächen bilden, während die (VN) Komplexstrahlen selbst, die Kongruenzen solcher Strahlen bilden.

a) Die (VN) Komplexstrahlen und die Flächen der zugeordneten Punkte die mittels einer Ebene verbunden sind

Es sei die beliebige Ebene R eine zweidimensionale Menge der I- (Z-) Punkte der (VN) Komplexstrahlen. Die diesen Punkten zugeordnete /*Satz A 2 a*/ Z- (I-) Punkte bilden eine Fläche, der wir die Ordnung oder durch die Zahl der Durchstosspunkte mit einer beliebigen Geraden, oder mitttels der Ordnung seiner Schnittkurve mit beliebiger Ebene, bestimmen können.

Nehmen wir eine beliebige Gerade s, als eine Menge der Z- (bzw. I-) Punkte der (VN) Komplexstrahlen. Die diesen Punkten zugeordnete I- (bzw. Z-) Punkte bilden eine Raumkurve 7. (bzw. 5.) Ordnung, die die Ebene R in sieben (bzw. fünf) Punkten schneidet. Das bedeutet, dass sich auf der Geraden s sieben (bzw. fünf) Punkte befinden, die die Z Punkte von sieben (bzw. die I Punkte von fünf) (UN) Komplexstrahlen sind, die die I- (bzw Z-) Punkte in der Ebene R haben. Hieraus folgt, dass auch die Gerade s die Z-Punktfläche in sieben (bzw. die I-Punktfläche in fünf) Punkten durchdringt. Da diese Ausführungen für jede Gerade s der beliebigen Ebene R gelten, folgt:

SATZ A 11.

Befinden sich die I- bzw. Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen in einer Ebene, bilden die Z- bzw. I Punkte dieser Strahlen, eine Fläche Z^7 *7. Ordnung, bzw. die Fläche* I^5 *5. Ordnung. Auf diese Weise ist auch eine räumliche Abbildung 7. bzw. 5. Ordnung bestimmt.*

Beweisen wir auch das folgende:

SATZ A 12.

Auf der Fläche Z^7 *(bzw.* I^5*) die, im Sinn des Satzes A 2 a, den Punkten einer Ebene zugeordnet ist, befindet sich die kubische Raumkurve* k^3*, die die Pole dieser Ebene bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels* $/F^2/$ *bilden, als dreifache (bzw. als einfache).*

Nehmen wir nun eine beliebige Ebene R, als eine Menge der I- bzw. Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen an. Die Z- bzw. I Punkte die den Punkten dieser Ebene zugeordnet sind, bilden eine Fläche Z^7 7. Ordnung, bzw. eine Fläche I^5 5. Ordnung. Jeder Strahl

$$t = \varphi(T) \quad \text{für beliebigen} \quad T \in R$$

ist eine Bisekante der kubischen Raumkurve k^3, der Pole der Ebene R, bezüglich aller Flächen des Büschels $/F^2/$. Die den Punkten eines beliebigen Strahles

$$t = \varphi(T) \quad \text{für} \quad T \in R$$

zugeordnete (TK) Komplexstrahlen bilden die Erzeugenden eines Kegels T^2 2. Grades mit dem Scheitelpunkt in T. Die Ebene R schneidet diesen Kegel in zwei Erzeugenden

$$t_n = \varphi(T_n) \quad \text{für} \quad T_n = t \wedge k^3 \quad (n = 1, 2).$$

Auf dem Strahl t befinden sich, ausser der erwähnten Punkte T_n auch die Punkte K, L und M, die die I Punkte für drei (UN) Komplexstrahlen mit gemeinsamen Z Punkt in T sind, während die Punkte T_n ($n = 1, 2$) die I Punkte jener (UN) Komplexstrahlen sind, denen sich die Z Punkte auf den Strahlen t_n ($n = 1, 2$), befinden. Die Gerade t dringt deshalb die I-Punktfläche I^5, denen sich die zugeordnete Z Punkte in der Ebene R befinden, in fünf Punkten. Zwischen diesen Punkten befinden sich auch zwei Schnittpunkte mit der Kurve k^3, als einfache Punkte dieser Fläche.

Auf der Geraden t_n ($n = 1, 2$) befinden sich drei Punkte K_n, L_n und M_n ($n = 1, 2$), die die I Punkte für drei (UN) Komplexstrahlen mit gemeinsamen Z Punkt in Punkt T_n ($n = 1, 2$) sind, während der Punkt T, der I Punkt für noch einem (UN) Komplexstrahl ist, der den Z Punkt auf dem Strahl t hat. Die Gerade t dringt deshalb die erwähnte Z-Punktfläche Z^7 in sieben Punkten so durch, dass sich in Schneidepunkten T_n ($n = 1, 2$) mit der Kurve k^3, je drei diese Punkte befinden.

Da wir gleiche Behauptungen für jeden (TK) Komplexstrahl durchführen können, der einem beliebigen Punkt der beliebigen Ebene R zugeordnet ist, folgt das in *Satz A 12.* Ausgesprochene.

Wir können weiterhin festsetzen, dass alle (UN) Komplexstrahlen, denen sich die I- bzw. Z Punkte in einer Ebene befinden, eine Kongruenz dieser Strahlen bilden.

Die Ordnung einer Kongruenz ist, wie bekannt, durch die Zahl der einen beliebigen Raumpunkt enthaltenden Kongruenzstrahlen bestimmt. Alle (UN) Komplexstrahlen, die einen beliebigen Raumpunkt enthalten, bilden einen Kegel 8. Grades, auf dem sich die I-Punktkurve i^9 9. Ordnung und die Z- Punktkurve z^{11} 11. Ordnung befindet. Da jede Ebene diese Kurven in neun bzw. elf Punkten schneidet, folgt, dass dem beliebigen Punkt T neun jener (UN) Komplexstrahlen enthalten, die die I Punkte in der beliebigen Ebene R haben, und elf solcher Strahlen, die in dieser Ebene die Z Punkte haben. [2.]

Die Klasse einer Kongruenz ist der Zahl seiner, in einer Ebene liegenden Strahlen, gleich. Da die I-Punktkurve der (UN) Komplexstrahlen, die in einer beliebigen Ebene S liegen, 5. Ordnung, und die Z-Punktkurve dieser Strahlen 7. Ordnung ist, schneidet jede Ebene R diese Kurven in fünf bzw. sieben Punkten. In der Ebene S befinden sich also fünf (UN) Komplexstrahlen, die in der Ebene R die I Punkte, bzw. sieben solcher (UN) Komplexstrahlen, die in der Ebene R die Z Punkte, haben.

SATZ A 13.

Die Kongruenz der (UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte in einer beliebigen Ebene haben, ist 9. Ordnung und 5. Klasse.

SATZ A 14.

Die Kongruenz der (UN) Komplexstrahlen die die Z Punkte in einer beliebigen Ebene haben, ist 11. Ordnung und 7. Klasse.

b) Die (UN) Komplexstrahlen und die Flächen der zugeordneten Punkte die mittels einer Fläche 2. Grades verbunden sind

Es sei eine Ebene H 2. Grades die Menge der I- bzw. Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen. Die Z- bzw. I Punkte dieser Strahlen bilden wieder einige Flächen, und durch die zugeordnete (UN) Komplexstrahlen selbst, enstehen weitere neue Kongruenzen.

Setzen wir voraus, dass die Fläche H dem Büschel $/F^2/$ gehört. Damit haben wir nichts an der Allgemeinheit verloren, was inerhalb der Behandlung selbst sichtbar wäre, aber so bekommen wir die Möglichkeit einige interessante Sätze über die Erzeugenden der Regelflächen des Flächenbüschels $/F^2/$ auszuführen. Wir müssen nur als bekannte Eigenschaft anzunehmen, dass in jedem Punkt der Grundkurve k^4 des Flächenbüschels $/F^2/$, der I- und der Z Punkt desselben $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahles zusammenfallen. /*B 2.*/.

Wählen wir unter den Erzeugenden des Hyperboloides H des $/F^2/$ Büschels eine seine Erzeugende d, und nehmen sie als eine Menge der I Punkte der $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen an. Die Z Punkte dieser Strahlen bilden, wie bekannt, eine Kurve z^5 5. Ordnung, der die Erzeugende d eine Quadrisekante ist. Wir wissen nämlich, dass jede Erzeugende der Regelfläche des Büschels $/F^2/$ ein zweifacher $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahl mit zwei verschiedenen I Punkten ist. /*Satz B 6*/. Da ausserdem, jede dieser Erzeugenden die Bisekante der Grundkurve k^4 dieses Büschels ist, folgt, auf Grund des *Satzes B 6.*, dass sich auf jeder Erzeugenden auch zwei Z Punkte befinden, die mit den zugeordneten I Punkten zusammenfallen. Die gleichen Behauptungen gelten, wenn wir die Erzeugende d in einem oder anderem Erzeugendensystem annehmen.

SATZ A 15.

Die Erzeugende der Regelfläche des Büschels $/F^2/$ ist die Quadrisekante der Z-Punktkurve 5. Ordnung jener $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf derselben Erzeugenden befinden.

Es handelt sich also um eine Kurve 5. Ordnung III. Art

In jeder Ebene des Ebenenbüschels $[d]$, befindet sich, ausser der vier Z Punkte auf der Erzeugenden d, noch je ein Z Punkt der Kurve z^5, der dem Berührungspunkt I der betreffenden Ebene mit der Fläche H, zugeordnet ist, so das

$$Z = \chi(I) \quad \text{gilt.}$$

Eine der Ebenen des Büschels $[d]$ soll das Hyperboloid H, ausser in der Erzeugenden d, noch in einer Erzeugenden r des anderen Systems schneiden. Der Strahl

$$t = \varphi(T) \quad \text{für} \quad T = d \wedge r,$$

befindet sich in der Ebene (d, r) und schneidet die Erzeugenden d und r in ihren Durchstosspunkten mit der Fläche H. Wünschen wir jene $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen bestimmen, dennen sich die I- und Z Punkte auf der Fläche h befinden, dann bemerken wir das Folgende:

Der Punkt $T = d \wedge r$ soll ein solcher I Punkt sein, dass sich ihm zugeordneter Punkt

$$Z = \chi(I)$$

auf der Fläche H befindet. Da dieser Z Punkt

$$Z \in t \quad \text{sein muss, wo} \quad t = \varphi(I) \quad \text{ist,}$$

folgt, dass dieser Punkt nur im Durchstosspunkt des Strahles t mit der Fläche H liegen kann, bzw., dass der (UN) Komplexstrahl, der sich der I- und der Z Punkt auf derselben Regelfläche des Büschels $/F^2/$ befindet, die Erzeugende dieser Fläche ist.

SATZ A 16.

Der (UN) Komplexstrahl, dem sich der I und der Z Punkt auf derselben Fläche des $/F^2/$ Büschels befindet, ist eine Erzeugende dieser Fläche, aus einem oder aus anderen Erzeugendensystem. Die Ausnahme stellen jene (UN) Komplexstrahlen, denen die I und die Z Punkte auf der Grundkurve des Büschels liegen, vor.

Nehmen wir die Erzeugende d einer Regelfläche H 2. Grades, (unabhängig, ob diese Fläche der Bestandteil des Büschels $/F^2/$ ist), als eine Menge der I Punkte der (UN) Komplexstrahlen an. Die zugeordnete Z Punkte bilden, wie bekannt, eine Kurve 5. Ordnung. Wegen der stetigen Verbindung der Erzeugenden auf der Fläche H, sind stetig auch die zugeordneten Z-Punktkurven verbunden und bilden eine Fläche Q. Die Ordnung dieser Fläche werden wir mittels folgender Idee finden können.

Setzen wir voraus, dass die gesuchte Ordnung der Fläche Q gleich x ist. Die Durchdringungskurve q der Fläche H 2. Grades mit der Fläche Q, hat die Ordnung $2x$. Wenn wir die Ordnung dieser Kurve bestimmen, dann können wir auch die Ordnung x der Fläche Q finden. Wie bekannt, ist die Ordnung einer Raumkurve der Zahl der Durchstosspunkte dieser Kurve mit einer beliebigen Ebene gleich. Zwischen allen Ebenen wählen wir diejenige, die das Hyperboloid H in zwei ihren Erzeugenden d und d_s schneiden. Die Kurve q kann die Ebene(d, d_s) nur längs dieser Erzeugenden der Fläche H durchdringen. Es sei die Erzeugende d eine Menge der Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen. I Punkte dieser Strahlen bilden eine Kurve 7. Ordnung, die das Hyperboloid H in vierzehn Punkten durchdringt. Es folgt, dass sich auf der Erzeugenden d vierzehn Punkte befinden, die die Z Punkte für jene (UN) Komplexstrahlen sind, denen sich die I Punkte auf der Fläche H befinden. Die gleiche Ausführung können wir auch für die Erzeugende d_s durchführen. Die ausgewählte Ebene schneidet, also, die Kurve q in achtundzwanzig Punkten, was bedeutet, dass die Ordnung der gesuchten Fläche Q gleich vierzehn ist.

Der Punkt $T = d \wedge d_s$ befindet sich in allgemeinen nicht auf der Kurve q, da sich drei I Punkte der (UN) Komplexstrahlen, denen der Punkt T der gemeinsame Z Punkt ist, in allgemeinen nicht auf der Fläche H befinden.

SATZ A 17.

Die Z-Punktfläche der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die zugeordneten I Punkte auf einer Regelfläche 2. Grades befinden, hat 14. Ordnung.

Ist die Fläche *H* ein Bestandteil des Büschels $/F^2/$, dann befindet sich auf der Fläche *Q* auch die Grundkurve des Büschels $/F^2/$, als eine einfache Kurve. */B 2./.*

Auf Grund der *Sätze A 16.* und *A 17.* folgt weiter:

SATZ A 18.

Auf jeder Regelfläche des Büschels $/F^2/$ bestehen je zehn ihrer Erzeugenden desselben Erzeugendensystems, die, als die (UN) Komplexstrahlen, je eine der zwei zugeordneten Z Punkte auf derselben Erzeugenden des anderen Systems haben.

Auf die ähnliche Weise können wir auch folgendes behaupten:

SATZ A 19.

Die I Punktfläche der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die zugeordneten Z Punkte auf einer Regelfläche 2. Grades befinden, ist 10. Ordnung.

SATZ A 20.

Auf jeder Regelfläche des $/F^2/$ Büschels bestehen je sechs ihrer Erzeugenden desselben Erzeugendensystems, die, als die (UN) Komplexstrahlen, je eine der zwei zugeordneten I Punkte auf derselben Erzeugenden des anderen Systems haben.

Alle diese (*UN*) Komplexstrahlen bilden auch eine Kongruenz. Behaupten wir ähnlich wie in */A. 6. a/*, folgt:

SATZ A 21.

Die Kongruenz der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die I- (bzw. Z-) Punkte auf einer Fläche 2. Grades befinden, hat die Ordnung 18 (bzw. 22) und die Klasse 10 (bzw. 14).

Vergleichen wir die Sätze A: 1., 3., 9., 10., 11., 13., 14., 17., 18., 19. und 21., so können wir bemerken einige gewisse Gesetzlichkeiten und Abhängigkeiten der *I*-, *Z*-Punktkurven und der *I*-, *Z*-Punktflächen der (*UN*) Komplexstrahlen, wie auch der Flächen und Kongruenzen dieser Strahlen, von den Örtern seiner *Z*- bzw. *I* Punkte. Man kann leicht sehen, dass sich, z. B. die Ordnung des stetigen Ortes der *Z*- bzw. *I* Punkte der (*UN*) Komplexstrahlen verdoppelt, wenn die Ordnung des Ortes der *I*-, bzw. *Z* Punkte dieser Strahlen von linearen zum quadratischen übergeht. Die ähnliche Behauptungen von der Verdoppelung der Ordnung und der Klasse des Ortes der (VN) Komplexstrahlen, d. h., der Flächen bzw. Kongruenzen dieser Strahlen bekommen wir, wenn der Ort der I- bzw. Z Punkte dieser Strahlen eine Ebene, bzw. eine Fläche 2. Grades ist.

Es ist klar, dass sich diese Untersuchungen auch auf die Kurven und Flächen, die grössere Ordnung als zwei haben, erweitern können, aber das würde uns vorläufig in eine ungewünschte Breite führen.

B. SINGULÄRE PUNKTE

Irgendeiner Raumpunkt T ist ein I Punkt für einen, und ein Z Punkt für drei Strahlen des (VN) Komplexes, die alle vier in einer Ebene liegen. /*Satz A 2 a*/. Einen Punkt der diese Eigenschaften nicht erfüllt, nennt man ein Singulärpunkt des (VN) Komplexes.

Wegen der spezifischen Eigenschaften dieser Punkte, wird es interessant festzustellen, was jene (VN) Komplexstrahlen bilden, die einigen Singulärpunkten, in Sinn der Definition 5, zugeordnet sind, wie auch die Mengen dieser Singulärpunkte bestimmen.

1. FLÄCHENMITTELPUNKTE

a) Allgemein

Alle Mittelpunkte O_n der Flächen des Flächenbüschels $/F^2/$ bilden, wie bekannt, eine Raumkurve k_c^3 3. Ordnung. Jeder Strahl

$$t_o = \varphi(O) \quad \text{für jeden} \quad O \in k_c^3$$

ist eine Ferngerade. Jedem Punkt O, der ein I Punkt eines (VN) Komplexstrahles ist, muss der, durch χ Abbildung zugeordneter Z Punkt, auf dem Strahl t_o liegen. Da jede Gerade der Ebene »senkrecht« auf die Ferngerade dieser Ebene liegt, ist es leicht zu sehen, dass wir jeden Punkt des Fernstrahles t_o, als ein Z Punkt jenes Strahles des (VN) Komplexes annehmen können, dem sich der I Punkt im Mittelpunkt O befindet. Es folgt:

SATZ B 1.

Jeder Flächenmittelpunkt des Büschels $/F^2/$ ist ein ∞^1-deutiger I Punkt der Strahlen eines (VN) Komplexstrahlbüschels. Die Z Punkte dieser Strahlen befinden sich auf dem Fernstrahl des (TK) Komplexes, der diesem Mittelpunkt zugeordnet ist.

Jeder Raumpunkt ist ein Z Punkt für drei Strahlen des (VN) Komplexes. Würde der Mittelpunkt O ein Z Punkt sein, sollen sich die I Punkte jeder der zugeordneten (VN) Komplexstrahlen auf dem Fernstrahle

$$t_o = \varphi(O)$$

befinden. Um solche Strahlen des $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexes zu finden, werden wir versuchen, es auf die bekannte Art durchzuführen. Da die Raumkurve k_c^3 der Ort der Pole der Fernebene, bezüglich der Flächen des Büschels $/F^2/$ ist, sind alle Strahlen

$$t = \varphi\,(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in t_o\,,$$

wo

$$t_o = \varphi\,(O) \quad \text{für irgendeinen} \quad O \in k_c^3 \quad \text{ist,}$$

die Bisekanten dieser Kurve und bilden die Erzeugenden eines Kegels O^2 2. Grades des Scheitelpunktes O. Die Fernebene schneidet diesen Kegel in einer Kurve 2. Ordnung, und die seinen Punkten zugeordneten Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes, hüllen in der Fernebene eine Kurve 2. Klasse ein. Die Punkte des Strahles t_o und die ihnen eineindeutig zugeordneten erwähnten Polaren liegen immer in der Fernebene. Es folgt, also, dass sich auch die Z Punkte der $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen, deren I Punkte den Strahl t_o bilden, im Fernpunkten der Erzeugenden des Kegels O^2 befinden. Da es im allgemeinen Fall ein Raumpunkt der I Punkt nur für einen $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahl sein kann, könnten wir auf Grund bisheriger Erkenntnisse falsch schliessen, dass ein Flächenmittelpunkt des Büschels $/F^2/$ kein Z Punkt, für irgendeinen $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahl sein kann. Dass jeder Mittelpunkt der Flächen des Büschels (F^2) mindestens auch ein dreifacher Z Punkt für mindestens drei $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen ist, werden wir in /*C 5. b*/ durchführen.

b) Mittelpunkte der hyperbolischen Paraboloide

Es ist bekannt, dass drei Fernpunkte der Kurve k_c^3 die Mittelpunkte dreier hyperbolischen Paraboloide des Büschels $/F^2/$ sind, aber dass sie auch die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreieckes des Fernkurvenbüschels f_n^2 2. Grades sind, in dem die Fernebene das Flächenbüschel $/F^2/$ schneidet.

Nennen wir diese Mittelpunkte U, $\mathcal{V}$ und Y. Da z. B. der dem Mittelpunkt U zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes die Verbindungsgerade der Mittelpunkte $\mathcal{V}$ und Y ist, ist der Punkt U ein I Punkt für Strahlen eines Fernbüschels (U), die die Z Punkte längs der Geraden $\mathcal{V}Y$ haben. Wollen wir diejenige $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexstrahlen bestimmen, die die Z Punkte im Punkt U haben, können wir auf die bekannte Weise behaupten, dass der Mittelpunkt U ein Z Punkt auch für jene Strahlen des Fernbüschels (U) ist, die die I Punkte längs der Geraden $\mathcal{V}Y$ haben.

Auch für den Punkt $\mathcal{V}$ und die Gerade UY, wie auch für den Punkt Y und die Gerade $\mathcal{V}U$, gilt das Analoge.

Jeder Strahl des Fernbüschels (U), bzw. $(\mathcal{V})$, bzw. (Y) ist ein Doppelstrahl des $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexes, u. zw. ein solches, der nur die Orientierung ändert, wenn an ihm die involutorisch zugeordneten I- und Z Punkte ihre Stellung wechseln. Damit haben wir hier einen neuen Begriff erhalten: die Involutorstrahlen des $(\mathcal{V}\mathcal{N})$ Komplexes.

DEFINITION 6.

I- und Z Punkt desselben (VN) Komplexstrahles sind i n v o l u t o r i s c h *zugeordnet, wenn gleichzeitig*

$$Z = \chi(I) \quad \textit{und} \quad I = \chi(Z) \quad \textit{gilt.}$$

DEFINITION 7.

Ein (VN) Komplexstrahl ist ein I n v o l u t o r s t r a h l, *und damit auch ein Doppelstrahl dieses Komplexes, wenn sein I- und Z Punkt involutorisch zugeordnet sind.*

SATZ B 2.

Die Mittelpunkte der drei hyperbolischen Paraboloides des Büschels $/F^2/$ *sind die Scheitelpunkte des Fernbüschels der Involutorstrahlen des (VN) Komplexes. Jeder solcher Mittelpunkt ist ein* ∞^1*-deutiger I Punkt und ein* ∞^1*-deutiger Z Punkt solches Büschels der (VN) Komplexstrahlen, denen sich der andere ihnen zugeordnete Punkt, auf der Verbindungsgeraden der übrigen zwei Mittelpunkte befindet.*

c) Die Mittelpunkte der Singulärflächen des Büschels $/F^2/$ *bzw. die Scheitelpunkte des Polartetraeders*

Die Spezialpunkte der Kurve k_c^3 sind auch die Eckpunkte des Hauptpolartetraeders, die auch, wie bekannt, die Scheitel-mittelpunkte der Singulärflächen des Flächenbüschels $/F^2/$ sind. Nennen wir diese Punkte: A, B, C und D und die ihnen zugeordnete Poralebenen in den Polarräumen aller Flächen des Büschels $/F^2/$ mit: α, β, γ und δ. Es ist klar, dass z. B. die Ebene α die Eckpunkte B, C und D enthält, und deswegen bezeichnen wir sie gewöhnlich als eine (BCD) Ebene. Es ist weiterhin klar, dass alles was wir über den Punkt A und die Ebene α behaupten werden, gleichzeitig auch für drei übrige Eckpunkte des Tetraeders, und ihnen zugeordneten Polarebenen gilt.

Jeder Punkt der Ebene α ist, dem Punkt A, bezüglich jede der Flächen des Büschels $/F^2/$ konjugiert, und deshalb können wir, wie bekannt, j e d e Gerade der Ebene α als einen Strahl

$$t = \varphi(A)$$

betrachten. Auf Grund der *Definition 2* und der eben erwähnten Eigenschaft folgt, dass jede Gerade des Eckpunktes A auch ein (VN) Komplexstrahl ist, dem sich der I Punkt im Scheitelpunkt A, und der Z Punkt in der Ebene α befindet. Um das zu beweisen, wird es genügen eine beliebige Gerade des Punktes A als einen Strahl

$$o = \psi(A)$$

zu betrachten und im Durchstosspunkt dieses Strahles mit der Ebene α, einen Strahl

$$t = \varphi(A)$$

stellen, für welchen $t \perp o$ gilt. Man bekommt dann, dass die Ebene α eine Menge der Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen ist. Da alle diese Strahlen die I Punkte im Eckpunkt A haben, folgt, dass der Punkt A ein ∞^2-deutiger I Punkt eines (UN) Komplexstrahlbündels ist. [1].

Sollte ein (UN) Komplexstrahl den Z Punkt im Scheitelpunkt A haben, muss sich sein I Punkt in der Ebene α befinden. Wählen wir deshalb in dieser Ebene eine beliebige Gerade

$$t = \varphi(A)$$

aus, und nehmen sie als eine Menge der I Punkte der (UN) Komplexstrahlen an. Auf die ganz gleiche Weise wie im /*A 2.*/, können wir behaupten, dass sich auf der erwähnten Geraden t drei I Punkte dreier (UN) Komplexstrahlen befinden, die gemeinsamen Z Punkt im Eckpunkt A haben. Da dasselbe für jede Gerade t der Ebene α gilt, folgt, dass sich in dieser Ebene eine Kurve m_1 3. Ordnung befindet, die der Ort der I Punkte der (UN) Komplexstrahlen ist, während der Punkt A der gemeinsame Z Punkt für alle diese Strahlen bleibt. Es ist leicht zu ersehen, dass die Kurve m_1 auch die Eckpunkte B, C und D des Tetraeders enthällt.

In allgemeinen können wir behaupten:

SATZ B 3.

Der Mittelpunkt der Singulärfläche des Büschels /F^2/ ist ein ∞^2-deutiger I Punkt und ein ∞^1-deutiger Z Punkt der (UN) Komplexstrahlen. Jene dieser Strahlen, denen die I Punkte im einem Mittelpunkt der Singulärfläche sind, bilden ein Bündel solcher Strahlen die die Z Punkte in der Ebene übrigen drei Mittelpunkte der Singulärflächen haben. Die (UN) Komplexstrahlen, die im Mittelpunkt der Singulärfläche die Z Punkte haben, sind die Erzeugenden eines Kegels 3. Grades, während die I-Punktkurve 3. Ordnung dieser Strahlen die übrigen drei Mittelpunkte der Singulärflächen des Büschels /F^2/ enthält und in der Ebene dieser Mittelpunkte liegt.

Auf Grund des *Satzes B 3.* und der *Definition 7.*, folgt weiter:

SATZ B 4.

Jene (UN) Komplexstrahlen, die im Mittelpunkt der Singulärfläche des Büschels /F^2/ den Z Punkt haben, sind die Involutorstrahlen dieses Komplexes.

Weiterhin können wir behaupten:

SATZ B 5.

Jede I-Punktkurve 7. Ordnung jener (UN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf beliebiger Geraden befindet, enthält alle vier Mittelpunkte der Singulärflächen des Büschels /F^2/. Z Punkte dieser Strahlen, denen sich die I Punkte in erwähnten Kegelscheitelpunkten befinden, sind im Durchstosspunkten der betreffenden Geraden mit diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenebenen des Polartetraeders.

2. DIE GRUNDKURVE DES BÜSCHELS /F^2/

Jeder Punkt T der Grundkurve k^4 4. Ordnung 1. Art, des Flächenbüschels /F^2/ befindet sich, wie bekannt, auf jeder der Flächen dieses Büschels. Der Strahl

$$t = \varphi\,(T) \quad \text{für irgend einer} \quad T \in k^4$$

berührt im Punkt T die Kurve k^4, und ist, als die Bisekante dieser Kurve auch die Erzeugende einer Regelfläche F des Büschels /F^2/.

Jede Ebene berührt drei Flächen des Büschels /F^2/. In jeder Ebene des Büschels [t], wo t die erwähnte Berührungsgerade der Kurve k^4 ist, fallen je zwei dieser Berührungspunkte in den Punkte T, während der dritte Berührungspunkt mit der Fläche F, immer auf der Erzeugenden t dieser Fläche liegt. Jede Ebene des Büschels [t] berührt demnach ausser der Fläche F nur noch eine Fläche des Büschels /F^2/ u. zw. so, dass das Büschel [t] der Berührungsebenen mit dem Flächenbüschel /F^2/ perspektiv zugeordnet ist. Der Fläche F ist jene Berührungsebene des Büschels [t] zugeordnet, die die Schmiegungsebene der Kurve k^4 im Punkt T ist, und die in diesem Punkt die Fläche F berührt.

Stellen wir fest den Strahl

$$O = \psi\,(T) \quad \text{für irgend einen} \quad T \in k^4.$$

Der Z Punkt dieses Strahles o, muss sich auf dem Strahl t so befinden, dass die Verbindungsgerade des Punktes $I \equiv T$ mit dem Punkt Z, die infinitesimal nahe sind, senkrecht auf den Strahl

$$t = \varphi\,(T)$$

steht. Auf Grund dessen folgt, dass ein Büschel (T) der o_T Strahlen des (UN) Komplexes bestehen muss, für die die I- und Z Punkte im Punkt T so zusammen fallen, dass sich in jeder Ebene des Büschels [t] je einer dieser Strahle befindet. Die Ebene E des erwähnten Büschels (T) der o_T Strahlen, ist auf dem Strahl t senkrecht gelegt.

Wenn wir jene $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen bestimmen wünschen, denen der Punkt T der Grundkurve k^4 ein Z Punkt ist, werden wir auf die gewöhnte Weise vorgehen. Die I Punkte solcher Strahlen können sich nur auf dem Strahl

$$t = \varphi(T) \quad \text{für} \quad T \in k^4$$

befinden. Die, den Punkten des Strahles t zugeordnete (TK) Komplexstrahlen, sind die Erzeugenden eines Kegels T^2 2. Grades, mit dem Scheitelpunkt in T. Dem Punkt T (auf t) allein ist die Erzeugende $t^* \ (\equiv t)$ dieses Kegels zugeordnet. Die Ebene E schneidet den Kegel T^2 in zwei Erzeugenden t_n $(n = 1, 2)$. Da es für die Strahlen

$$t_n = \varphi(T_n), \quad \text{wo} \quad T_n \in t \quad (n = 1, 2) \quad \text{ist,}$$

$$t_n \perp t \quad \text{gilt, so folgt} \quad T = \chi(T_n) \quad (n = 1, 2).$$

Die Tangente t muss deshalb ein Doppelstrahl des $(\mathcal{UN})$ Komplexes sein, was wir auch zu erwarten haben, weil sie eine Erzeugende der erwähnten Fläche F des Büschels $/F^2/$ ist.

Wir wissen, dass ein beliebiger Raumpunkt der Z Punkt für drei komplanäre $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen ist, */Satz A 2./*, und man kann deshalb erwarten, dass diese Eigenschaft auch die Punkte der Grundkurve k^4 haben. In jeder Ebene des erwähnten Büschels $[t]$ befindet sich nämlich der Punkt T, wie auch der Strahl

$$t = \varphi(T)$$

und in jeder von diesen Ebenen muss sich noch auch der dritte Strahl des $(\mathcal{UN})$ Komplexes befinden, der den Z Punkt im Punkt T hat. Da der I Punkt dieses Strahles sich nur im Punkt T befinden kann, folgt, dass der gesuchte Strahl mit jenem o_T Strahl des Büschels (T) in der Ebene E überein stimmt, der in der erwähnten Ebene des Büschels $[t]$ liegt. In jeder Ebene dieses Büschels befindet sich also, ausser des Doppelstrahles t auch ein z w e i d e u t i g e r Strahl des $(\mathcal{UN})$ Komplexes

$$o = \psi(T).$$

Ein o_T Strahl im Büschel (T) kann nicht als ein Doppel- oder Involutorstrahl betrachtet werden, weil im Gegenfall der Punkt T ein doppeldeutiger I Punkt und vierdeutiger Z Punkt sein müsste. Die Unmöglichkeit dieses werden wir auf folgende Weise zeigen:

Jede Ebene R schneidet das Flächenbüschel $/F^2/$ in einem Kurvenbüschel $k_n{}^2$ 2. Grades, dem die Grundpunkte K, L, M und N die Durchstosspunkte der Kurve k^4 mit dieser Ebene sind. Drei zerfallene Kurven dieses Büschels $k_n{}^2$ sind die Erzeugenden jener drei Flächen des Büschels $/F^2/$ die die Ebene R im Eckpunkten J_1, J_2 und J_3 des Polardreiecks des Büschels k_n^2 berühren. Eine dieser Erzeugenden, z. B. MN, die auch den Berührungspunkt J_1 enthält, schneidet die I-Punktkurve i^5 und die Z-Punktkurve z^7 jener (VN) Komplexstrahlen, die in der Ebene R liegen. Es ist klar, dass in der Ebene R jene zwei (VN) Komplexstrahlen liegen, die im Punkt M bzw. N ihre I–Z Punkte haben, und senkrecht auf der Berührungsgerade der Kurve k^4 im Punkt M bzw. N stehen. Mindestens je ein Schnittpunkt der Geraden MN mit der Kurve i^5 befindet sich, wie wir es sahen, in Punkten M bzw. N. Da jede Erzeugende einer Regelfläche des Büschels $/F^2/$ ein Doppelstrahl des (VN) Komplexes ist, müssen sich auf der Erzeugenden MN noch zwei I Punkte befinden, die dieser Erzeugenden zugeordnet sind. Es ist weiterhin bekannt, dass auch der Punkt J_1 ein I Punkt für jenen Komplexstrahl ist, dem sich der Z Punkt auf der Verbindungsgeraden J_2J_3 befindet. Wenn wir die Punkte M und N, als die Doppel-I-Punkte betrachten möchten, dann müsste die Gerade MN die Kurve i^5 5. Ordnung im sieben Punkten schneiden, was nur dann möglich wäre, wenn die Gerade MN ein Bestandteil der Kurve i^5 ist. Da wir dasselbe für jede der sechs erwähnten Erzeugenden, die in der Ebene R liegen, behaupten können, ist offensichtlich, dass wir die Punkte der Grundkurve k^4 nicht als die doppel I-Punkte betrachten können.

Auf ähnliche Weise können wir behaupten, dass die Erzeugende MN, die Z-Punktkurve z^7, in sieben Punkten nur dann schneidet, wenn die Punkte M und N als Z Punkte der Strahlen des (VN) Komplexes in der Ebene R, einfach sind.

SATZ B 6.

Jeder Punkt T der Grundkurve k^4 des Büschels $/F^2/$ ist ein ∞^1-deutiger I Punkt und ein ∞^1-deutiger Z Punkt der Strahlen des (VN) Komplexes. Alle (VN) Komplexstrahlen, die in derselben Punkt T der Kurve k^4 die I- und Z-Punkte haben, bilden ein Büschel solcher Strahlen in der Ebene, die senkrecht auf der Tangente t der Kurve k^4 im Punkt T, steht.

SATZ B 7.

Die Tangente t der Grundkurve k^4 des Büschels $/F^2/$ befindet sich in jeder Ebene des Büsches $[t]$ als ein Doppelstrahl des (VN) Komplexes, mit zwei verschiedenen I Punkten und dem gemeinsamen Z Punkt im Berührungspunkt T der Tangente t mit der Kurve k^4. In jeder Ebene des Büschels $[t]$ befindet sich je einer zweideutiger (VN) Komplexstrahl, dem I- und Z Punkt in denselben Punkt T fallen.

SATZ B 8.

In jeder beliebigen Ebene befinden sich vier jene (VN) Komplexstrahlen, denen die I- und Z Punkte zusammen fallen. Diese vier Punkte befinden sich in Durchstosspunkten der erwählten Ebene mit *der Grundkurve k^4 des Büschels $/F^2/$, aber diese Strahlen sind in betrachteter Ebene einfach (also diese Strahlen sind weder zweideutig, noch zweifällig und am mindesten involutorisch).*

Vergleichen wir diese Untersuchungen mit der Arbeit V. Niče [4], kann man leicht ersehen, dass jeder Strahlen des (UN) Komplexstrahlbüschels, aus dem *Satz B 6.*, der gemeinsame I- und Z-Punkte in demselben Punkt der Grundkurve k^4 hat, als ein Strahl des Strahlbüschels des Normalkomplexes, oder kürzer (NK) Komplexes, betrachtet werden kann, der den Fusspunkt in demselben Punkt der Grundkurve k^4 hat.

Alle Strahlen des (NK) bzw. (UN) Komplexes, die die Fusspunkte, bzw. I- und Z Punkte in Punkten der Grundkurve k^4 des Büschels $/F^2/$ haben, bilden eine Strahlkongruenz. V. Niče hat in [4] gezeigt, dass jeder Raumpunkt zwölf solche Strahlen des (NK) Komplexes enthält, und wir behaupten, dass die Kongruenz solcher Strahlen die Ordnung 12 hat. Auf Grund des *Satzes B 8.* folgt, dass diese Kongruenz 4. Klasse ist. Wir schliessen:

SATZ B 9.

Die Kongruenz der Strahlen des (UN) Komplexes, die die I- und Z Punkte auf der Grundkurve k^4 des Flächenbüschels $/F^2/$ haben, ist 12. Ordnung und 4. Klasse.

Anmerkung. Ausser den erwähnten Kurven k_c^3 und k^4 im Endlichen, gibt es in der Fernebene noch zwei Kurven, denen die Punkte singulär für den (UN) Komplex sind, aber davon wird es in *C 5. a)* und *C 5. b)* gesprochen.

C. (UN) KOMPLEXSTRAHLEN DIE DIE ZUGEORDNETE PUNKTE AUF SONDERGERADEN UND EBENEN HABEN

Es ist gezeigt, dass die (UN) Komplexstrahlen die die I Punkte auf einer Geraden haben, eine Regelfläche 6. Ordnung bilden, auf der diese Gerade eine einfache Leitgerade ist, und die zugeordnete Z-Punktkurve die Ordnung 5 hat. Weiterhin ist es bekannt, dass die (UN) Komplexstrahlen mit den Z Punkten auf einer Geraden, eine Regelfläche 10. Ordnung bilden, auf der diese Gerade eine dreifache Leitgerade ist, während die entsprechenden I Punkte eine Kurve 7. Ordnung bilden.

Enthält eine Gerade, die als die Menge der I Punkte bzw. Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen angenommen ist, einen oder mehr Singulärpunkte dieses Komplexes, dann übertragen sich die Eigenschaften dieser (UN) Komplexstrahlen, die diesen Punkten, in Sinne der *Definition 5*, zugeordnet sind, auf die erwähnten Komplexstrahlfläche, wie auch auf die zugeordnete Z-Punkt- bzw. I-Punktkurven. Das ermöglicht uns, noch eine ganze Reihe neuer Eigenschaften dieses Komplexes zu bestimmen.

Als ein der einfachsten Beispiele, soll uns diejenige Gerade dienen, die eine Unisekante der Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung des Flächenbüschels $/F^2/$ ist.

1. DIE UNISEKANTE DER KURVE k_c^3

Eine Unisekante h soll den Mittelpunkt O der Fläche F des Flächenbüschels $/F^2/$ enthalten. Nehmen wir diese Gerade h als eine Menge der I Punkte der (UN) Komplexstrahlen an. Auf die gewöhnte Weise können wir bestimmen, dass die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in h$$

ein Erzeugendensystem des hyperbolischen Paraboloides bilden, so dass die Torse τ_1 (nach dem Arbeitslauf in *A 1.*) 3. Klasse ist, während die Torse τ_2 2. Klasse ist. Auf bekannte Weise können wir beweisen, dass sich je zwei ein-eindeutig zugeordnete Ebenen dieser zwei Torsen in Strahlen des (UN) Komplexes schneiden, die eine Regelfläche 5. Grades bestimmen. Die Z Punkte dieser Strahlen bilden eine Kurve 4. Ordnung. Der Ergänzungsteil bis zum Grad 6 der Fläche der (UN) Komplexstrahlen, und der Z-Punktkurve 5 .Ordnung dieser Strahlen, bilden die Strahlen des Komplexstrahlbüschels denen der gemeinsame I Punkt im Mittelpunkt O ist, und die Z Punkte dieser Strahlen, sich auf dem Fernstrahl

$$t_o = \varphi\,(O)$$

befinden.

SATZ C 1.

Die Strahlen des (UN) Komplexes, die die I Punkte auf der Unisekanten der Kurve k_c^3 haben, bilden eine Regelfläche 6. Grades, die in eine Regelfläche 5. Grades und ein Strahlbüschel zerfällt. Die Z-Punktkurve dieser Strahlen zerfällt in eine Raumkurve 4. Ordnung und in die Ferngerade.

Zwischen allen Unisekanten der Kurve k_c^3 haben eine besondere Stelle diejenigen, die den Mittelpunkt der Singulärfläche des Büschels $/F^2/$, resp. einen Eckpunkt des Polartetraeders dieses Büschels, enthalten.

a) Die Gerade die einen Eckpunkt des Polartetraeders enthält

Wählen wir im Raum irgend eine Gerade, die einen Eckpunkt des Polartetraeders $ABCD$ enthält. Diese ausgewählte Gerade a, die den Scheitelpunkt A dieses Tetraeders enthalten soll, schneidet die Ebene $\alpha \equiv (BCD)$ im Punkt A_1. Die Fläche 2. Grades, die die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in a$$

bilden, zerfällt in zwei Strahlbüschel mit gemeinsamen Scheitelpunkt. Wir können nämlich die Gerade a, genau so wie jede andere Gerade des Scheitels A, als einen Strahl des (TK) Komplexes annehmen, die irgendeinem Punkt K der Ebene α zugeordnet ist. Da der Punkt A gleichzeitig auch ein Scheitelpunkt des Kegels A^2 2. Grades des Büschels $/F^2/$ ist, bilden die allen Punkten der Geraden a zugeordnete Strahlen des (TK) Komplexes, ein Büschel (K) solcher Strahlen in einer Ebene K^x, die den Punkt A enthält. Diese Ebene ist die gemeinsame Polarebene aller Punkte der Geraden a, bezüglich des Kegels A^2, während dem Punkt A allein, die Polarebene α, bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels $/F^2/$ zugeordnet ist. In dieser Ebene α befindet sich der andere Büschel (K) der (TK) Komplexstrahlen die dem Punkt A der Geraden a, zugeordnet sind.

Wenn wir die Strahlen

$$o = \psi(I) \quad \text{für jeden} \quad I \in a$$

bestimmen wünschen, dass müssen wir die Strahlen dieser zwei Büschel des (TK) Komplexes getrennt beobachten. Auf die gebräuchliche Weise können wir erhalten, dass die (UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf der Geraden a, und die Z Punkte auf den Strahlen des Büschels (K) in der Ebene K^x haben, eine Regelfläche Q^4 4. Grades bilden, auf der die Z-Punktkurve eine Zirkulärkurve 3. Ordnung ist. Die Ebene K^x schneidet nähmlich den absoluten Kegelschnitt in zwei konjugiert imaginäre Punkte die die zwei konjugiert imaginäre Strahlen des (TK) Komplexstrahlbüschels (K) enthalten, also diese Punkte sich auch auf der Z-Punktkurve befinden. Ausser des Erwähnten, können wir leicht bemerken, dass in jeder Ebene der Geraden a drei Strahlen des (UN) Komplexes sich befinden, die die I Punkte auf der Geraden a, und die Z Punkte auf der erwähnten Zirkulärkurve 3. Ordnung haben.

Betrachten wir nun den Punkt A als ein Bestandteil der Geraden a, aber auch als einen Eckpunkt des Tetraeders, dann bilden alle Strahlen

$$t = \varphi(A)$$

einen Strahlbüschel (K) in der Ebene α. Die Senkrechte-Strahlen des (UN) Komplexes die durch den Punkt A auf die Strahlen dieses Büschels (K) gelegt sind, sind die Erzeugenden eines Komplexkegels 2. Grades. Die Z-Punkte dieser Strahlen bilden eine Zirkulärkurve 2. Ordnung, also einen Kreis in der Ebene α.

Da wir ähnliche Betrachtungen auch für irgendeine Raumgerade, die einen Eckpunkt des Polartetraeders enthält, ausführen können, gilt:

SATZ C 2.

Die (UN) Komplexstrahlen, mit den I Punkten auf einer Geraden, die einen Scheitelpunkt des Polartetraeders des Büschels (F^2) ent-

hält, bilden eine Regelfläche, die in eine Fläche 4. Grades und in einen Kegel 2. Grades zerfällt, dem sich der Scheitelpunkt im betreffenden Eckpunkt des Haupttetraeders befindet. Die Z-Punktkurve 5. Ordnung dieser Strahlen zerfällt in zwei Zirkulärkurven 3. und 2. Ordnung. Die Ebene der Kurve 3. Ordnung enthält den erwähnten Eckpunkt des Tetraeders, während sich der Kreis in jener Seitenebene des Tetraeders befindet, die gegenüber diesem Scheitelpunkt liegt.

Betrachten wir die allgemeine Unisekante der Kurve k_c^3 als eine Menge der Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen. Die Fläche dieser Strahlen, wie auch die I-Punktkurve, bekommen wir so wie wir es im allgemeinen Fall getan haben, der im *A 3.* gegeben ist. Dieses Problem wird interessant, wenn die angenommene Gerade den Mittelpunkt einer Singulärfläche des Büschels $/F^2/$ enthält.

Die Strahlen des (UN) Komplexes, die die Z Punkte auf der erwähnten Geraden a haben, können, wie bekannt, die I Punkte, oder auf den (TK) Komplexstrahlen des Büschels (K) in der Ebene K^x, oder auf solchen Strahlen des Büschels (K) in der Ebene α, haben. Die Ausführung für jeden dieser Büschel müssen wir getrent durchführen.

Die Ordnung der I-Punktkurve jener (UN) Komplexstrahlen, die die Z Punkte auf der Geraden a haben, ist der Zahl der Durchstosspunkte irgend einer Geraden s der Ebene K^x, mit dieser Kurve, gleich. Da jeder Punkt der Geraden s auf je einer Strahl des (TK) Komplexstrahlbüschels (K) in der Ebene K^x liegt, und jeder Strahl je einen Punkt der Geraden a zugeordnet ist, bilden auch die, den Punkten der Geraden s zugeordneten, Strahlen des (TK) Komplexes ein Erzeugendensystem des Hyperboloides H, dem die Gerade a eine Erzeugende des anderen Systems ist. Die (UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf der Geraden s haben, bilden wieder eine Regelfläche 6. Grades, auf der die Z Punkte ihrer Strahlen auf einer Raumkurve z^5 5. Ordnung liegen. Es interessiert uns, in wie vielen Punkten die Gerade s diese Kurve 5. Ordnung schneidet. Resonierend wie in *(A 3.)* können wir behaupten: Jede Ebene der Geraden a schneidet die Kurve z^5 in fünf Punkten und das Hyperboloid H ausser in der Erzeugenden a, noch in je einer Erzeugenden

$$t = \varphi(T) \quad \text{wo} \quad T \in s \quad \text{ist.}$$

Auf dem Strahl t befindet sich nur ein Punkt

$$Z = \chi(T)\,.$$

Es folgt also, dass sich die übrigen vier Schnittpunkte mit der Kurve z^5 auf der Geraden a befinden müssen. Hieraus folgt, dass auf jeder Geraden s der Ebene K^x sich vier Punkte befinden, die die I Punkte vierer Strahlen des (UN) Komplexes sind, mit den Z Punkten auf der Geraden a, also dass die gesuchte I-Punktkurve i^4 4. Ordnung ist.

Die Strahlen des (UN) Komplexes, denen sich die I Punkte auf der Kurve i^4 4. Ordnung in der Ebene K^x befinden, und die Z Punkte auf der Geraden a liegen, bilden eine Fläche. Auf Grund der ein-eindeutlichen Zuordnung der Punkte dieser zwei Kurven folgt, dass der Grad der gesuchten Fläche sieben ist, und die Gerade a eine dreifache Leitgerade dieser Fläche ist.

Auf Grund des *Satzes B 3.* können wir behaupten, dass auch ein kubischer (UN) Komplexstrahlkegel besteht. Die I Punkte seiner Strahlen bilden in der Ebene α eine Kurve 3. Ordnung, während sie den gemeinsamen Z Punkt im Punkt A haben.

Schon wieder können wir im allgemeinen behaupten:

SATZ C 3.

Die Strahlen des (UN) Komplexes mit Z Punkten auf der Geraden, die einen Eckpunkt des Polartetraeders des Büschels $/F^2/$ enthält, bilden eine Regelfläche 10. Grades, die in eine Fläche 7. Grades zerfällt, der diese Gerade eine dreifache Leitgerade ist, und in einen Kegel 3. Grades, dem sich der Scheitelpunkt im erwähnten Eckpunkt des Polartetraeders befindet. Die I-Punktkurve dieser Strahlen zerfällt in zwei ebene Kurven 4. und 3. Ordnung. Die Ebene der Kurve 4. Ordnung enthält den betreffenden Eckpunkt des Tetraeders, während die Ebene der Kurve 3. Ordnung die übrige drei Tetraedereckpunkte enthält.

2. BISEKANTEN DER KURVE k_c^3

Alle Bisekanten der Raumkurve k_c^3 3. Ordnung bilden die bekannte Kongruenz 1. Ordnung und 3. Klasse. Es ist weiterhin bekannt, dass jeder Strahl dieser Kongruenz auch ein (TK) Komplexstrahl ist, der jenem Punkt der Fernebene zugeordnet ist, in dem sich die fern (TK) Komplexstrahlen schneiden, die jenen zwei Punkten der Kurve k_c^3 zugeordnet sind, die diese Bisekante enthält.

Wählen wir eine beliebige Bisekante b der Kurve k_c^3, die die Mittelpunkte O_r und O_s der Flächen F_r und F_s des Büschels $/F^2/$ enthalten soll. Da die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in b$$

die Erzeugenden eines Zylinders P^2 bilden, dem sich der Scheitelpunkt in der Fernebene befindet, und wo

$$P = t_{or} \wedge t_{os} \quad \text{für}$$

$$t_{or} = \varphi(O_r) \quad \text{und} \quad t_{os} = \varphi(O_s)$$

ist, folgt, dass die Torse τ_1 (siehe *A 2*). 3. Ordnung ist, während sich die Torse τ_2 in ein Büschel parallelen Ebenen zusammenzieht. Auf Grund dessen, und der bekannten Chasles-Relation folgt, dass die Strahlen des

(UN) Komplexes, die die I Punkte auf der Geraden b haben, ein *Konoid* 4. Grades bilden, da alle seine Erzeugenden parallel mit einer Ebene sind. Die Z Punkte dieser Strahlen bilden auf diesem Konoid eine Kurve 3. Ordnung.

Als ein Bestandteil der gesuchten Fläche 6. Grades, müssen wir auch zwei Strahlbüschel (O_r) und (O_s) annehmen, die in der Ebenen (O_r, t_{or}) und (O_s, t_{os}) liegen und die Z Punkte längs des Strahles t_{or} bzw. t_{os} haben.

SATZ C 4.

Die Strahlen des (UN) Komplexes die die I Punkte auf einer Bisekante der Flächenmittelpunktraumkurve des Büschels $/F^2/$ haben, bilden ein Konoid 4. Grades und die Z Punkte dieser Strahlen eine Raumkurve 3. Ordnung. Den Ergänzteil bis zum Grad sechs der betreffenden Fläche und bis zu der Ordnung fünf der Z-Punktkurve, bilden noch zwei (UN) Komplexstrahlbüschel, denen sich die I Punkte in der erwähnten Flächenmittelpunkte befinden, und die die Z Punkte der diesen Mittelpunkten zugeordneten Fernstrahlen des (TK) Komplexes, enthalten.

Wenn wir die Bisekante b als eine Menge der Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen annehmen, ist es leicht zu ersehen, dass weder die Fläche 10. Grades der (UN) Komplexstrahlen, noch die I-Punktkurve 7. Ordnung dieser Strahlen zerfällt.

a) Die Kante des Polartetraeders

Unter allen Bisekanten der Kurve k_c^3, nehmen die Verbindungsgeraden der Scheitelmittelpunkte der Singulärflächen des Büschels $/F^2/$ eine besondere Stelle ein.

Die Gegenkanten des Polartetraeders $ABCD$ sind, wie bekannt, die konjugierte Geraden bezüglich aller Flächen des Büschels $/F^2/$. Jedem Punkt der Geraden AB ist ein und derselbe Strahl des (TK) Komplexes zugeordnet, u. zw. die Gegenkante CD des Tetraeders $ABCD$. Die Strahlen des (UN) Komplexes mit den I Punkten längs der Kante AB, sind die Senkrechten die aus den Punkten der Geraden AB auf die Gerade CD gelegt sind, und die die Gerade CD als eine Menge der Z Punkte dieser Strahlen haben. Alle solche (UN) Komplexstrahlen bilden ein Erzeugendensystem eines hyperbolischen Paraboloides H_1, was leicht ersichtlich ist.

Es gibt in diesem Fall keinen Sinn zu untersuchen, wo sich der Restteil der Fläche 6. Grades jener (UN) Komplexstrahlen befindet, die die I Punkte auf der Geraden AB haben. Betrachten wir die Punkte A und B nur als die Punkte der Geraden AB, aber nicht gleichzeitig auch als die Eckpunkte des Polartetraeders, dann ist jedem von ihnen je eine Erzeugende der Fläche H_1 zugeordnet. Nehmen wir inzwischen den Punkt A, ausser dem, dass er sich auf der Geraden AB befindet, auch als einen

Eckpunkt des Polartetraeders an. Dem Punkt A sind dann ∞^1 Büschel der (TK) Komplexstrahlen in der Ebene α zugeordnet, denen sich die Scheitelpunkte längs der Kante CD befinden. (Vergleich mit C *1 a*!) Dies bedeutet, dass dem Punkt A jede Gerade der Ebene α, als ein Strahl des (TK) Komplexes zugeordnet ist, und dem Punkt A, den wir als I Punkt betrachten, ist jeder Punkt der Ebene α als ein Z Punkt der Strahlen des (UN) Komplexes zugeordnet. Dieselben Betrachtungen könnten wir auch für den Punkt B und die Ebene β des Polartetraeders durchführen.

Die Punkte der Kante AB können wir auch als Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen betrachten. Offensichtlich befinden sich die I Punkte solcher Strahlen nur längs der Kante CD, und die (UN) Komplexstrahlen selbst, bilden ein Erzeugendensystem eines neuen hyperbolischen Paraboloides H_2.

Da wir solche Betrachtungen auch für jede zwei Gegenkanten des Tetraeders durchführen können, wo die Eckpunkte des Tetraeders nur als allgemeine Punkte dieser Gegenkanten betrachtet werden, folgt:

SATZ C 5.

(UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf der Kante t_r des Polartetraeders $ABCD$ haben, bilden ein Erzeugendensystem eines hyperbolischen Paraboloides, während sich die Z Punkte dieser Strahlen auf der Gegenkante t_s dieses Tetraeders befinden. Befinden sich die I Punkte der (UN) Komplexstrahlen auf der Kante t_s, bilden die ihnen zugeordneten Strahlen dieses Komplexes ein Erzeugendensystem eines anderen hyperbolischen Paraboloides mit den Z Punkten längs der Kante t_r. Diese zwei Flächen dringen sich in vier Geraden durch, u. zw. in der Erzeugenden t_r und t_s (des anderen Erzeugendensystems) und in deren kürzesten und deren Ferntransverzale.

Man sieht nicht, aus diesen Betrachtungen, dass auch jeder Punkt T, z. B. der Geraden AB, ein Z Punkt für drei Strahlen des (UN) Komplexes ist. Offenbar muss:

1. $T = \chi(C)$
2. $T = \chi(D)$
3. $T = \chi(T_i)$ wo $T_i \in (CD)$ für $\overline{TT_i} \in H_2$

sein.

3. DIE BISEKANTE DER GRUNDKURVE k^4 DES BÜSCHELS $/F^2/$

Es ist bekannt, dass jede Bisekante der Grundkurve k^4 des $/F^2/$ Büschels, eine Erzeugende d einer Regelfläche dieses Büschels ist, und die den Punkten dieser Erzeugenden zugeordneten Strahlen des (TK) Komplexes ein Erzeugendensystem eines Hyperboloides bilden, dem die Gerade d eine Erzeugende des anderen Systems ist. Hieraus folgt, dass die Torse τ_1 (siehe *A 1*). 3. Klasse ist, während sich die Torse τ_2 in ein Ebenenbüschel zusammenzieht. Alle Strahlen des $(\mathcal{UN})$ Komplexes, die die I Punkte auf der Erzeugenden d haben, bilden, Chasles nach, eine Regelfläche 4. Grades, auf der die Gerade d eine dreifache ist (als die Menge der I Punkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen und als der zweifache Strahl dieses Komplexes). Z Punkte dieser Strahlen bilden eine Raumkurve 5. Ordnung.

Der Ergänzteil der Fläche 6. Grades der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen mit den I Punkte auf der Erzeugenden d, bilden zwei Büschel jener Strahlen, denen sich die I- und Z Punkte in Schnittpunkten der Geraden d mit der Kurve k^4, befinden. Die Ebenen E_1 und E_2 dieser Büschel sind senkrecht auf den Tangenten der Kurve k^4 in dessen Schnittpunkten mit der Erzeugenden d gestellt. */B 2./.*

Es sei die Erzeugende d als eine Menge der Z Punkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen angenommen. Hier ist es leicht festzustellen, dass jede Ebene des Büschels $[d]$ die zugeordnete I-Punktkurve in sieben Punkten schneidet, was weiter bedeutet, dass sie 7. Ordnung ist. Die Fläche dieser $(\mathcal{UN})$ Strahlen zerfällt in eine Fläche 8. Grades $(7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2)$, auf der die Gerade d eine fünffache ist (dreifache als die Menge der Z Punkte und zweifache als die Erzeugende) und in die zwei bekannten Büschel der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen mit den Scheitelpunkten in den Schnittpunkten der Erzeugenden d mit der Kurve k^4. */B 2./.*

a) Die Tangente der Grundkurve k^4

Die Tangenten der Grundkurve k^4 des $/F^2/$ Büschels sind die ausserordentlichen Bisekanten dieser Kurve, und deshalb sind sie auch die Erzeugenden der Flächen dieses Büschels und die Doppelstrahlen des $(\mathcal{UN})$ Komplexes.

Auf Grund der bekannten Tatsachen wissen wir, dass den Punkten der Tangente t der Grundkurve k^4, die wir als I Punkte betrachten, die zugeordneten Punkte

$$Z = \chi\,(I)$$

eine Kurve 5. Ordnung bilden, während die Strahlen

$$O = \psi\,(I) \quad \text{für jeden} \quad I \in t$$

die Regelfläche 4. Grades und das bekannte Büschel der zweideutigen $(\mathcal{UN})$ Strahlen bilden, mit dem Scheitelpunkt in dem Berührungspunkt der Tangente t mit der Kurve k^4, wo die Ebene dieses Büschels senkrecht auf der Tangente t steht. */Satz B 7/.*

Wenn wir die Tangente t als eine Menge der Z Punkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen betrachten, gelten die gleichen Behauptungen für die

I-Punktkurve und für die Fläche dieser Strahlen wie im Fall der Erzeugenden d, nur jetzt fallen die zwei Strahlbüschel des ($\mathcal{UN}$) Komplexes in ein zusammen, und jeder sein Strahl ist zweideutig.

b) Die Erzeugenden der Singulärflächen des /F^2/ Büschels

Zwischen den Bisekanten der Grundkurve k^4 des /F^2/ Flächenbüschels, nehmen die Erzeugenden der Singulärflächen dieses Büschels eine besondere Stelle ein. Es ist bekannt, dass jede solche Erzeugende auch einen Eckpunkt des Polartetraeders enthält. Die Fläche der ($\mathcal{UN}$) Komplexstrahlen, die auf einer solchen Erzeugende die I- resp. Z Punkte haben, haben Eigenschaften, die von den Eigenschaften der Bisekanten der Kurve k^4 und der speziellen Unisekanten der Kurve $k_c{}^3$ abhängig sind.

Offensichtlich ist es ganz egal, welche Erzeugende der vier Kegel wir wählen. Diese Behauptungen gelten für jede Erzeugende jeder Singulärfläche des Büschels /F^2/.

Wählen wir die Erzeugende a ($\equiv AA_1$) des Kegels A^2 2. Grades, der die Singulärfläche des Büschels /F^2/ ist und der Scheitelmittelpunkt in dem Eckpunkt A des Polartetraeders $ABCD$ hat. Die Erzeugende a soll die Ebene (BCD) des Tetraeders im Punkt A_1 durchdringen. Die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in a\ (\equiv AA_1)$$

hüllen eine Regelfläche ein, die in zwei Strahlbüschel, mit gemeinsamen Scheitelpunkt K in der Ebene (BCD) zerfällt. /Vergleich *C 1 a)*/. Die Ebene des einen Büschels ist die Berührungsebene des Kegels A^2 längs der Erzeugenden a, während sich der andere Büschel in der Ebene (BCD) befindet. Die Strahlen dieses zweiten Büschels sind, wie bekannt, Strahlen des (TK) Komplexes, die dem Punkt A, als dem Punkt der Geraden a, aber auch als dem Eckpunkt des Tetraeders $ABCD$ zugeordnet sind. In diesem Fall ist der Punkt A der gemeinsame I Punkt der ($\mathcal{UN}$) Komplexstrahlen, die die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades mit dem Scheitelpunkt A sind, während die Z Punkte dieser Strahlen einen Kreis in der Ebene (BCD) bilden.

Uns werden jetzt die übrigen Strahlen

$$o = \psi(I) \quad \text{für jeden} \quad I \in a\ (\equiv A\,A_1)$$

interessieren, wo wir den Punkt A als einen Punkt der Geraden a betrachten werden. Da die Strahlen

$$t = \varphi(I) \quad \text{für jeden} \quad I \in a$$

in derselben Berührungsebene ($A\,A_1K$) des Kegels A^2, längs seiner Erzeugenden a liegen, setzt sich das räumliche Problem des allgemeinen Falls, in ein ebenes um. Es folgt, dass auch die erwähnte Strahlen

$$o = \psi(I) \quad \text{für jeden} \quad I \in a$$

in der Berührungsebene ($A\,A_1K$) liegen und eine Kurve 2. Klasse einhüllen, was leicht durch die gewohnte Behandlung ersichtlich ist. Die Z Punkte dieser Strahlen bekommen wir als eine Menge der Schnittpunkte der ein-eindeutig zugeordneten (UN) Komplexstrahlen, die die erwähnte Kurve 2. Klasse einhüllen, und der (TK) Komplexstrahlen des Büschels (K) in der Ebene ($A\,A_1\,K$). Hier bekommen wir wieder, dass die Z-Punktkurve dieser Strahlen, eine Zirkulärkurve z^3 3. Ordnung ist. *(Satz C 2).* Die Ferngerade der Ebene ($A\,A_1\,K$) schneidet die Kurve z^3 ausser in zwei absoluten Punkten noch in einem Punkt, der dem Fernpunkt der Geraden $A\,A_1$, als dem I Punkt zugeordnet ist. Das bedeutet, dass die Kurve 2. Klasse der (UN) Komplexstrahlen in der Ebene ($A\,A_1\,K$), die die I Punkte auf der Geraden $A\,A_1$ haben, eine P a r a b e l ist, da sie eine Ferntangente hat.

Die Ebene ($A\,A_1\,K$) berührt die Grundkurve k^4 des $/F^2/$ Büschels in zwei Punkten T_1 und T_2 der Geraden $A\,A_1$. Die, diesen Punkten zugeordnete Strahlen

$$t_n = \varphi(T_n) \qquad (n = 1{,}2)$$

sind, wie bekannt, die Tangenten der Kurve k^4 in denselben Punkten, so dass diese Tangenten die Bestandteile des Büschels (K) der (TK) Strahlkomplexes sind. Auf Grund der bekannten Polareigenschaften des Büschels (F^2) folgt, dass der Wert des Doppelverhältnises

$$(A\,A_1\,T_1\,T_2) = -1$$

gleich ist. Da die Punkte T_1 und T_2 zweifache Punkte einer involutorischen Reihe der konjugierten Punkte auf der Geraden a sind, ist es leicht möglich, irgend einem Punkt T dieser Reihe den ihm involutorkonjugierten Punkt T_x zu bestimmen, mittels dem Doppelverhältnisse.

$$(T\,T_x\,T_1\,T_2) = -1,$$

wie auch das umgekehrte. Diese Eigenschaft ermöglicht uns dass wir konstruktiv einem beliebigen Punkt T auf der Geraden a, den ihm konjugiert zugeordneten Punkt T_x bestimmen können, aber ebenso den, dem Punkt T zugeordneten Strahl

$$t = \varphi\,(T)$$

der die Verbindungsgerade T_xK ist.

Es soll die Berührungsebene des Kegels A^2 und die in ihr liegende Erzeugende a gegeben sein *[Abb. 1.]*. Auf dieser Erzeugenden sollen der Kegelscheitelpunkt A und die Punkte T_1 und T_2 bekannt sein, in denen diese Ebene die Kurve k^4 berührt. Die Tangenten t_1 und t_2 in diesen Punkten sollen sich im Punkt K schneiden. Den Punkt A_1, der dem

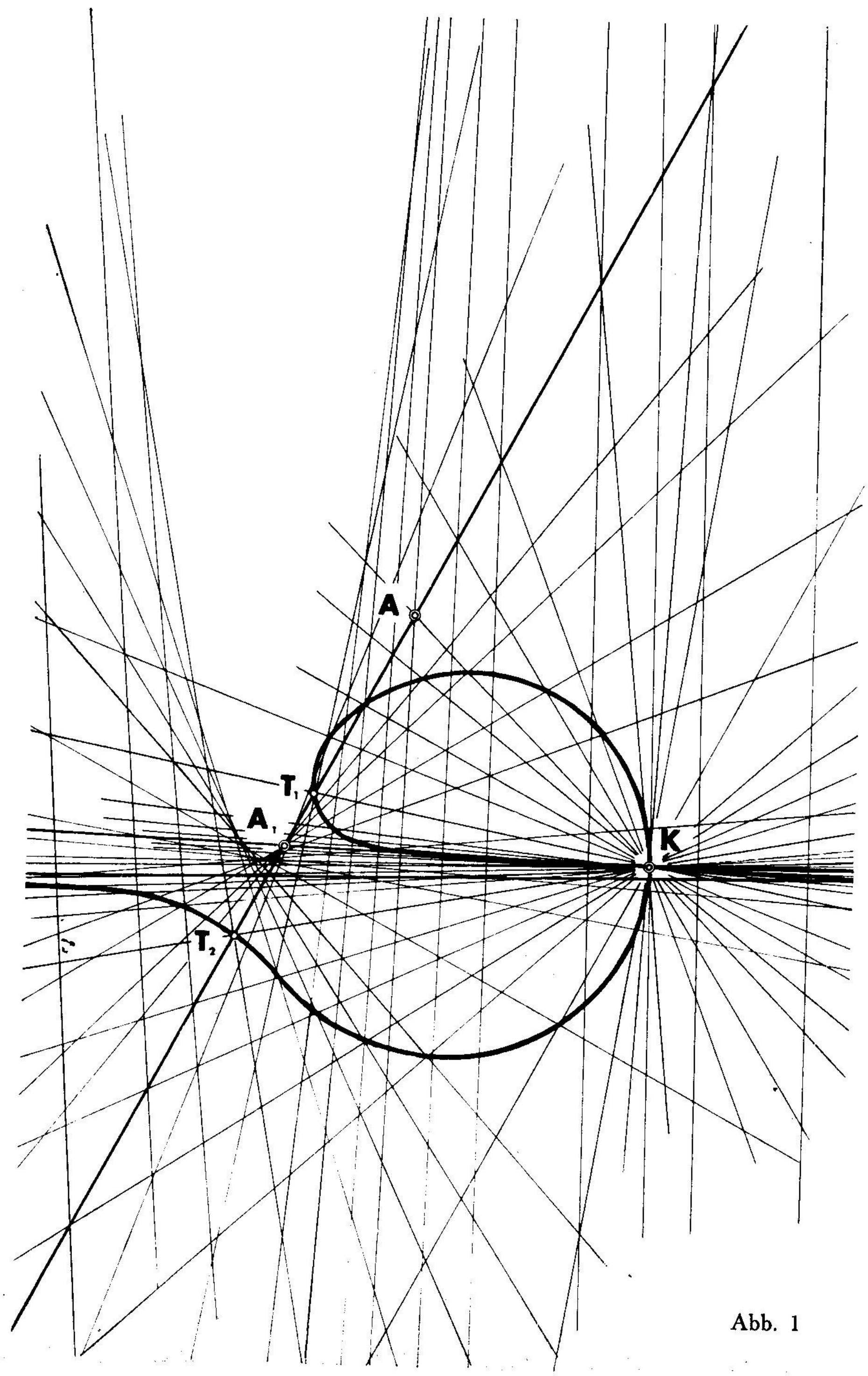

Abb. 1

Punkt A konjugiert ist, können wir leicht als den vierten harmonischen Punkt des Doppelverhältnisses $(A\ A_1\ T_1\ T_2) = -1$ konstruieren. Die Verbindungsgerade $A_1\ K$ ist die Schnittgerade der Ebene (BCD) mit der erwähnten Berührungsebene $(A\ A_1\ K)$. Auf die beschriebene Weise können wir weiterhin jedem Punkt der Reihe (a) den zugeordneten Strahl des (TK) Komplexes konstruieren. Die (UN) Komplexstrahlen, die den Punkten der Reihe (a) als den I Punkten zugeordnet sind, sind die Senkrechten, die aus den Punkten der Reihe (a) auf die ihnen zugeordneten (TK) Komplexstrahlen des Büschels (K) gestellt sind. Die Schnittpunkte dieser ein-eindeutig zugeordneten Strahlen des (UN)- und (TK) Komplexes, sind die Z Punkte dieser Strahlen. Der dem Punkt T_1 bzw. T_2 als dem I Punkt zugeordnete Strahl des (UN) Komplexes, ist auf der Tangente t_1 bzw. t_2 senkrecht, und in demselben Punkt befindet sich sein Z Punkt.

Da die Reihe der konjugierten Punkte auf der Geraden a involutorisch ist, folgt, dass auch die (TK) Komplexstrahlen des Büschels (K), ein Büschel involutorisch zugeordneter Strahlen bilden, wo t_1 und t_2 die zweifache Strahlen sind. Wie bekannt, besteht innerhalb eines Involutorstrahlbüschels ein Paar zugeordneter Strahlen, die senkrecht sind. Die Punkte der Reihe (a), denen die Strahlen dieses senkrechten Paares zugeordnet sind, sind die I Punkte der (UN) Komplexstrahlen, die den gemeinsamen Z Punkt in dem Punkt K haben. Die Z Punktkurve z^3 3. Ordnung ist demnach 0-ten Geschlechtes.

Die Z-Punktkurve z^3 schneidet die Erzeugende a $(\equiv A\ A_1)$ ausser in den Punkten T_1 und T_2 noch in demjenigen Punkt, welcher der Z Punkt der Erzeugenden a, als eines Strahles des (UN) Komplexes, ist. Wir wissen inzwischen, dass die Gerade a, die die Erzeugende der Regelfläche ist, ein zweifacher Strahl des (UN) Komplexes sein muss. Auf dem Strahl a muss sich deshalb noch ein Paar I–Z Punkte dieses Strahles befinden. Dies ist tatsächlich erfüllt, aber wir müssen den Punkt A der Geraden a auch als einen Eckpunkt des Tetraeders und einen I Punkt des Strahles a betrachten, dem sich der Z Punkt im Punkt A_1 befindet. Die Z-Punktkurve z^3 enthält deshalb dem Punkt A_1, nicht.

In allgemeinen gilt also:

SATZ C 6.

Die Fläche 6. Grades der (UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf einer Erzeugenden einer Singulärfläche des Büschels /F²/ haben, zerfällt:

1. in einen Kegel 2. Grades dieser Strahlen, dem der Scheitelpunkt sich in jenem Eckpunkt des Polartetraeders befindet, dessen diese Erzeugende enthält,

2. in zwei solchen Strahlbüschel, denen sich die Scheitelpunkte in Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit der Grundkurve k^4 befinden, so dass alle Strahlen desselben Büschels in dem betreffenden Schnittpunkt die I- und die Z Punkte haben, während sich

3. der Rest, d. h. die Fläche 2. Grades in eine Parabel 2. Grades, in der Berührungsebene der Singulärfläche, längs dieser Erzeugenden, zusammenzieht.

Die Z-Punktkurve 5. Ordnung dieser Strahlen zerfällt in den bekannten Kreis in der Ebene (BCD) und in die Zirkulärkurve 3. Ordnung 0.-tes Geschlechtes in der erwähnten Berührungsebene der Singulärfläche.

Alle (*UN*) Komplexstrahlen, denen die *Z* Punkte auf der Erzeugenden *a* liegen, müssen die *I* Punkte auch in der Ebene ($A\ A_1\ K$) auf den (*TK*) Komplexstrahlen des Büschels (*K*) haben. Die Ausnahme bilden jene bekannte (*UN*) Komplexstrahlen, die einen Kegel 3. Grades bestimmen. Die *I* Punkte dieser Strahlen bilden die Kurve m_1 3. Ordnung in der Ebene (*BCD*), und ihrer gemeinsame *Z* Punkt im Eckpunkt *A* des Tetraeders *ABCD* liegt. */B 1. c)/*. Da die *I* Punkte jener (*UN*) Komplexstrahlen, die die *Z* Punkte auf einer Geraden haben, eine Raumkurve 7. Ordnung bilden, erwarten wir, dass auf den übrigen Strahlen dieses Komplexes, die die *Z* Punkte auf der Geraden *a* haben, die *I* Punkte die auf der (*TK*) Komplexstrahlen des Büschels (*K*) liegen, eine ebene Kurve 4. Ordnung bilden müssen. Dass das wirklich erfüllt ist, könnten wir es wie in */C 1. a/* beweisen.

Die Fläche der (*UN*) Komplexstrahlen, denen sich die *Z* Punkte auf der Erzeugenden a der Singulärfläche befinden, und die die *I* Punkte auf der erwähnten Kurve 4. Ordnung haben, zieht sich in eine ebene Klassenkurve ein. Da die gemeinsame Punkte T_1 und T_2, der *I*-Punkt- und der *Z*-Punktkurve, sich selbst zugeordnet sind, und zwischen den Punkten dieser Reihen der *Z*- und der *I* Punkte eine (3, 1)-Korrespondenz besteht, folgt auf Grund der bekannten Chasles-Relation, dass die gesuchte Kurve der (*UN*) Komplexstrahlen in der Ebene ($A\ A_1\ K$) 5. Klasse ist.

Der (*UN*) Komplex ist 8. Grades, was bedeutet, dass alle seine Strahlen, die in einer Ebene liegen, eine Kurve 8. Klasse einhüllen, bzw. dass jeden Punkt dieser Ebene acht (*UN*) Komplexstrahlen, die in dieser Ebene liegen, enthalten muss. Diese Eigenschaft muss auch jeder Punkt der Erzeugenden $A\ A_1$ haben. Jeder Punkt der Erzeugenden a ($\equiv A\ A_1$) ist ein *I* Punkt für einen, und ein *Z* Punkt für drei Strahlen des (*UN*) Komplexes, die alle in der Ebene ($A\ A_1\ K$) liegen, während diese Erzeugende ein zweifacher Strahl des (*UN*) Komplexes ist. Da in der Ebene ($A\ A_1\ K$) keine andere Strahlen des (*UN*) Komplexes, als diejenige bestehen können, die längs der Geraden *a* die *I*- oder die *Z* Punkte haben, so finden wir die Lösung des Problems in der Tatsache, dass die Erzeugende a ($\equiv A\ A_1$) zweideutig in der Berührungsebene ($A\ A_1\ K$) ist.

SATZ C 7.

Die Fläche der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte längs der Erzeugenden der Singulärflächen des Büschels /F^2/ befinden, zerfällt:

1. in einen kubischen Kegel dieser Strahlen mit dem Scheitelpunkt in jenem Eckpunkt des Polartetraeders, der diese Erzeugende enthält,

2. in zwei solche Strahlbüschel, denen sich die Scheitelpunkte in der Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit der Grundkurve k^4 befinden, wobei alle Strahlen desselben Büschels in diesem Schnittpunkt die I- und die Z Punkte haben, während sich

3. der Rest, d. h. die Fläche 5. Grades in eine ebene Kurve 5. Klasse zusammenzieht, die sich in der Berührungsebene der Singulärfläche längs gegebener Erzeugenden befindet.

Die I-Punktkurve dieser Strahlen zerfällt in eine Kurve 3. Ordnung, die in der Ebene des Polartetraeders die gegenüber dem erwähnten Eckpunkt liegt, und in eine Kurve 4. Ordnung in der Berührungsebene der betreffenden Singulärfläche längs seiner Erzeugenden, die eine Menge der Z Punkte ist.

SATZ C 8.

Die (UN) Komplexstrahlkurve 8. Grades in der Berührungsebene der Singulärfläche des /F^2/ Büschels, längs der Erzeugenden a dieser Fläche, zerfällt

1. in eine Kurve 2. Grades (Parabel), deren Strahlen die zugeordneten I Punkte auf der Erzuegenden a der Singulärfläche in dieser Berührungsebene liegen, und die Z Punkte eine Zirkulärkurve 3. Ordnung 0.-ter Geschlechtes bilden,

2. in eine Kurve 5. Klasse, deren Tangentsstrahlen zugeordnete I Punkte eine Kurve 4. Ordnung 3. Geschlechtes bilden, aber denen jeder Punkt auf der Erzeugenden a ein dreifacher Z Punkt ist, und

3. in ein Büschel solcher Strahlen, mit gemeinsamen I-Punkt im Eckpunkt des Polartetraeders, der die Erzeugende a enthält, und dessen Z Punkte in der, diesem Eckpunkt gegenüberliegender Ebene des Polartetraeders liegen.

Zwischen allen Berührungsebenen des Kegels A^2 bestehen je zwei, die den Eckpunkt B, bzw. C oder D des Tetraeders $ABCD$, enthalten.

Eine Berührungsebene des Kegels A^2 soll auch den Mittelpunkt B enthalten. Es ist leicht zu ersehen, dass dann der Scheitelpunkt K der Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in a\,,$$

sich in dem Punkt B befindet. Die (UN) Komplexstrahlen in einer solchen Ebene benehmen sich ähnlich wie in der Ebene $(A\,A_1\,K)$. Der Unterschied besteht nur in dem, dass jetzt die Kurve 5. Klasse der (UN) Komplexstrahlen in ein Büschel dieser Strahlen des Scheitels B zerfällt, mit gemeinsamen Z Punkt in B, und in eine Kurve 4. Klasse mit I Punkten auf der Kurve 4. Ordnung, 3.-tes Geschlechtes. Die Z Punkte aller diesen Strahlen befinden sich wieder auf der gegebenen Erzeugenden a des Kegels A^2.

4. DIE GERADEN UND (UN) KOMPLEXSTRAHLEN IN DEN SEITENEBENEN DES POLARTETRAEDERS

Wählen wir eine beliebige Gerade s in der Ebene (BCD) des Polartetraeders $ABCD$. Die, den Punkten dieser Geraden zugeordnete, (TK) Komplexstrahlen bilden dann die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades, da sie alle den Punkt A enthalten müssen. Drei dieser Erzeugenden sind die Verbindungsgeraden AB, AC und AD. Durch die schon bekannte Behandlung können wir beweisen, dass hier so, wie im allgemeinen Fall, alle Strahlen

$$o = \psi(I) \quad \text{für jeden} \quad I \in s$$

eine Regelfläche 6. Grades bilden und ihre Z Punkte auf einer Kurve 5. Ordnung liegen. Ebenfalls können wir zeigen, dass es auch für diejenige (UN) Komplexstrahlen, die auf der Geraden a die Z Punkte haben, keinen Unterschied von allgemeinen Fall gibt.

Enthält die Gerade s der Ebene (BCD) einen der drei Eckpunkte des Tetraeders, dass bekommen wir den Fall, der ähnlich dem in /*C 1. a*/ ist.

Ist die Gerade s der Ebene (BCD) eine Kante, z. B. BC des Tetraeders, die wir vorrecht als eine G e r a d e d e r E b e n e (BCD) betrachten, dann zerfällt die Fläche 6. Grades der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf der Geraden BC befinden, in ein hyperbolisches Paraboloid und in zwei Kegel 2. Grades dieser Strahlen mit dem Scheitelpunkt B bzw. C. Die Z-Punktkurve 5. Ordnung dieser Strahlen zerfällt dann in die Gerade AD und in zwei Kreise, von denen sich einer in der Ebene (ACD) und der andere in der Ebene (ABD) dieses Tetraeders befindet /vergleiche mit *C 2. a*/, u. zw. so, dass jeder von ihnen den Punkt A enthält, aber in allgemeinen Fall des Büschels /F^2/ enthält er die Punkte C und D bzw. B und D nicht.

Nehmen wir die Gerade CD der Ebene (BCD) als eine Menge der Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen an. Es ist leicht zu sehen, dass die Fläche 10. Grades dieser Strahlen zerfällt

1. in zwei bekannte Kegel 3. Grades mit den Scheitelpunkten in C bzw. D;
2. in zwei Strahlbüschel mit den Scheitel- und I Punkten in A bzw. B;
3. in die Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides.

Die I-Punktkurve 7. Ordnung dieser Strahlen zerfällt in die bekannte Kurven 3. Ordnung in die, den Eckpunkten C bzw. D gegenüberliegenden Seitenebenen des Tetraeders $ABCD$ und in die Erzeugende AB.

Offenbar gelten ähnliche Behauptungen auch für andere Kanten des Tetraeders in der Ebene (BCD), wie auch im Fall, wenn wir in ihr die beliebige Seitenebene des Tetraeders, und in ihr die beliebige Kante dieses Tetraeders annehmen.

Von sich selbst stellt sich die Frage auf, was jene der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen bilden, die sich in der Seitenebene des Polartetraeders befinden. Auf die ähnliche Frage war es ganz spontan beantwortet in der Berührungsebene der Singulärfläche längs seiner Erzeugenden. Offenbar sind die Seitenebenen des Tetraeders, als auch die erwähnte Berührungsebenen, die Singulärebenen des $(\mathcal{UN})$ Komplexes. Wegen der grösseren Anzahl der Gruppen der Singulärebenen, und noch mehr wegen dem Wunsch, dass die Arbeit nicht zu gross wird, sind die Singulärebenen, d. h. die Ebenen in denen die Kurve 8. Klasse der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen zerfällt, nicht systematisch bearbeitet. Zwei interessante Beispiele sollen deshalb genügen, weil sie offenbar hinweisen, wann und wegen was in den betrachteten Singulärebenen es zum Zerfall kommt und zw. nicht nur der Klassenkurve der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen, sondern auch der *I*-Punktkurve und der *Z*-Punktkurve auf diesen Strahlen.

Wählen wir jene Seitenebene des Tetraeders *ABCD*, die seine Eckpunkte *B, C* und *D* enthält. Die diesen Punkten als *I* Punkte zugeordnete $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen in der Ebene (*BCD*), bilden die Büschel (*B*), bzw. (*C*) bzw.(*D*) dieser Strahlen, mit dem gemeinsamen *I* Punkt in betreffendem Eckpunkt, und mit den *Z* Punkten längs diesem Eckpunkt gegenüberliegender Seite des Dreiecks *BCD*.

Nehmen wir die Eckpunkte *B, C* und *D* als *Z* Punkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen in der Ebene dieser Punkte an, so können wir leicht behaupten, dass z. B. der Punkt *B*, ein *Z* Punkt für

1. $B = \chi\,(C)$
2. $B = \chi\,(D)$ und
3. $B = \chi\,(T)$ ist,

wo sich der Punkt *T* im Durchstosspunkt der Geraden *CD* mit der Ebene befindet, die den Punkt *B* enthält und auf der Geraden *AB* senkrecht steht. Ähnlich können wir auch für die übrigen zwei Eckpunkte *C* und *D* des Tetraeders behaupten. Jeder von diesen Eckpunkten ist ein ∞^1-deutiger *I* Punkt und ein dreideutiger *Z* Punkt der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen in dessen Ebene.

Alle übrigen Strahlen des $(\mathcal{UN})$ Komplexes in dieser Ebene sollen solche sein, dass sie auf den Seiten des Dreiecks *BCD* weder *I* Punkte, noch *Z* Punkte haben.

Die *I*-Punktkurve der gesuchten $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen muss 5. Ordnung sein, da sie irgend eine Gerade *s* der Ebene *BCD* in fünf Punkten schneidet. Wir haben nämlich in /*C 4.*/ gezeigt, dass die Raumkurve jener $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen, die die *I* Punkte auf der Geraden *s* haben, 5. Ordnung ist, und weil die Ebene (*BCD*) diese Kurve in fünf Punkten schneidet, befinden sich auf der Geraden *s* fünf *Z* Punkte derjenigen fünf $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen, die sich in der Ebene (*BCD*) befinden. Die *I*-Punktkurve i^5 hat zweifache Punkte in *B, C* und *D*, von wessen wir sich überzeugen können, wenn wir diese Kurve i^5 mit der Geraden *BC*, bzw. *BD*, bzw. *CD*, schneiden.

Die Z-Punktkurve jener ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen, die in einer Ebene liegen, ist, wie bekannt, 7. Ordnung. Im Fall der Seitenebene des Tetraeders, zerfällt sie in drei Seiten des Dreiecks BCD, und so erwarten wir mit Recht, dass der Rest, eine Kurve 4. Ordnung sein muss. Um das zu beweisen, müssen wir den Punkten der Geraden s der Ebene (BCD) die Strahlen des ($\mathfrak{T}K$) Komplexes zuordnen, die die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades des Scheitelpunktes A sind, und die die Ebene (BCD) in den Punkten einer Kurve k^2 2. Ordnung durchdringen. Die den Punkten dieser Kurve, die auch die Punkte B, C und D enthält, zugeordneten Strahlen des ($\mathfrak{T}K$) Komplexes bilden, wie bekannt, eine Fläche 4. Grades. Diese Fläche zerfällt in vier Strahlbüschel des Scheitelpunktes A u. zw. in den Ebenen (ACD), (ABD), (ABC) und (A, s). Alle ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen die die I Punkte auf der Kurve k^2 haben, und in der Ebene (BCD) liegen, können die Z Punkte nur auf der Schnittgeraden der erwähnten Ebene mit der Ebene (BCD) haben. Da wir das Problem der ersten drei Büschel (B), (C) und (D) der ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen in der Ebene (BCD) schon mit anderen Mitteln gelöst haben, werden wir auf die bisherige Behandlungsweise diejenige ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen bestimmen, die die I Punkte auf der Kurve k^2, und die Z Punkte auf den Strahlen des ($\mathfrak{T}K$) Komplexes des Büschels (A) in der Ebene (A, s), haben. Wir können beweisen, dass die Torsen τ_1 und τ_2 /aus A *1.*/ 3.-ter Klasse sind; dies bedeutet, dass die gesuchte Fläche der ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen 6. Grades ist, und die Z-Punktkurve auf dieser Fläche 4. Ordnung hat. Die Gerade s schneidet diese Kurve 4. Ordnung in vier Punkten, da sich alle vier Durchstosspunkte dieser Kurve mit der Ebene (BCD), auf der Geraden s befinden müssen. Da die Gerade s irgend eine Gerade der Ebene (BCD) ist, folgt, dass die gesuchte Z-Punktkurve z^4 der ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen in der Ebene (BCD) 4. Ordnung haben muss.

Zwischen den Punkten der Kurve i^5 5. Ordnung und der Punkten der Kurve z^4 4. Ordnung ist eine ein-eindeutige Zuordnung hergestellt. Weiterhin wissen wir, dass jede Ebene die Grundkurve k^4 des /F^2/ Büschels in vier Punkten durchdringt, in denen der I Punkt und der Z Punkt desselben Strahles zusammengefallen sind. Deshalb, dem Chasles-Satze nach, folgt, dass die übrigen ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen in der Ebene (BCD) eine Kurve 5.-ter Klasse einhüllen.

Da wir dieselbe Betrachtungen auf jede der Seitenebenen des Polartetraeders $ABCD$ übertragen können, folgt:

SATZ C 9.

In einer Seitenebene des Polartetraeders des Büschels /F^2/ zerfällt die Kurve 8.-ten Grades der ($\mathfrak{V}\mathfrak{N}$) Komplexstrahlen in drei Strahlbüschel mit den Scheitelpunkten in den Eckpunkten des Tetraeders, und in eine Kurve 5. Klasse. Die I-Punktkurve 5. Ordnung dieser Strahlen enthält auch die drei Eckpunkte des Tetraeders in der gegebenen Ebene, die zweifache Punkte dieser Kurve sind, während *die Z-Punktkurve 7.-ter Ordnung dieser Strahlen, in drei Verbindungsgeraden der erwähnten Eckpunkte und in eine Kurve 4. Ordnung zerfällt, die alle diese drei Eckpunkte, als einfache Punkte enthält.*

Vergleichen wir den *Satz A 11.* mit den Resultaten, die für die Kurve k^2 2. Ordnung in der Seitenebene des Polartetraeders enthalten sind, können wir behaupten:

SATZ C 10.

Die (UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte auf jener Kurve k^2 2. Ordnung haben, die drei Eckpunkte des Polartetraeders enthält, bilden die Erzeugenden einer Regelfläche 12. Grades, die in eine Fläche 6. Grades und in drei Kegel 2. Grades zerfällt, denen die Scheitelpunkte in den erwähnten Eckpunkten des Tetraeders sind. Die Z-Punktkurve 10. Ordnung dieser Strahlen zerfällt in eine Kurve 4. Ordnung in der Ebene dieser Eckpunkte, welche sie auch enthält, und in drei Kurven 2. Ordnung (Kreise), von denen jede in je einer der übrigen Seitenebenen des Tetraeders liegt.

Vergleichen wir mit diesem, den *Satz A 12.*, folgt:

SATZ C 11.

Die (UN) Komplexstrahlen, die die Z Punkte auf jener Kurve k^2 2. Ordnung haben, welche die drei Eckpunkte des Polartetraeders enthält, bilden die Erzeugenden einer Regelfläche 20. Grades, die in eine Fläche 11. Grades $(2 \cdot 3 + 5 \cdot 1)$ *und in drei Kegel 3. Grades zerfällt, von denen jeder den Scheitelpunkt in je einem der erwähnten Eckpunkte des Tetraeders hat. Die I-Punktkurve 14. Ordnung dieser Strahlen zerfällt in die Raumkurve 5. Ordnung und in drei Kurven 3. Ordnung, von denen jede in je einer Seitenebene des Tetraeders liegt, die verschieden von der Ebene der Kurve k^2 ist und alle drei Eckpunkte des Tetraeders in der betreffenden Seitenebene enthält.*

Schon einige diese Beispiele weisen uns auf die Gesetzlichkeit des Zerfalls hin, wie der Kurven und Flächen der (*UN*) Komplexstrahlen, so auch der Kurven der denen zugeordneten Punkte, wenn die Menge der *I* Punkte, bzw. *Z* Punkte dieser Strahlen einen oder mehr der Singulärpunkte im Endlichen enthält. Obgleich sich die Untersuchungen auch in diesem Sinn wie erweitern, so auch vertiefen können, werden wir sie bei einen anderen Gelegenheit behandeln.

5. DIE GERADEN DER FERNEBENE

Bei den Untersuchungen der Eigenschaften der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen meldet sich ein besonders wichtiges Problem, wenn wir den Punkten einer beliebigen Geraden q der Fernebene, die zugeordneten $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen bestimmen wünschen, u. zw. so, dass sich oder I Punkte, oder Z Punkte dieser Strahlen auf der ausgewählten Geraden q befinden.

a) Die $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen mit den I Punkten auf der Ferngeraden

Eine beliebige Ferngerade q werden wir als eine Menge der I Punkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen betrachten. Wenn wir die Z Punkte dieser Strahlen auf die gewöhnte Weise finden versuchen, dann bekommen wir wie in */B 1. a)/*, dass die Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in q$$

die auch die Bisekanten der Kurve $k_c{}^3$ sind, ein Erzeugendensystem des Hyperboloides H bilden, den die Fernebene in einer Kurve h^2 2. Ordnung schneidet. Die den Punkten der Kurve h^2 zugeordneten Polaren, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, hüllen eine Kurve h_p 2. Klasse ein. Durch die Punkte der Geraden q und die ihnen ein-eindeutig zugeordneten Polaren der Kurve h_p, ist dieselbe Fernebene bestimmt, die die Erzeugenden der Fläche H in den Punkten der Kurve h^2 schneidet. Diese Punkte sind die Z Punkte jener Strahlen

$$o = \psi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in q\,,$$

die sich in der Fernebene befinden und in ihr, nach Chasles, eine Kurve 3. Klasse einhüllen.

Wir wissen aber, dass die Z Punkte jener Strahlen des $(\mathcal{UN})$ Komplexes, denen sich die I Punkte auf einer Geraden befinden, eine Raumkurve 5. Ordnung bilden, während diese Strahlen eine Regelfläche 6. Grades bilden. Im Fall der Ferngeraden, ist j e d e m seinem Punkt, als dem I Punkt, je ein Punkt der Kurve 2. Ordnung als ein Z Punkt zugeordnet. Da jeder Raumpunkt, der kein Singulärpunkt ist, ein I Punkt nur für einen $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahl ist, drängt sich als einzige Möglichkeit für die Entdeckung des Restes der Z-Punktkurve auf, dass sich in der Fernebene noch eine Menge der Singulärpunkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen befindet, dem seine I Punkte bilden.

Die Lösung dieses, findet man in folgendem:

Die Punkte der Geraden q sollen eine Reihe n_1 bestimmen. Jeden Punkt der Geraden q enthalten auch zwei Polaren der Kurve h_p 2. Klasse, und sie ordnen auf der Geraden q eine andere Reihe n_2 so an, dass jedem Punkt der Reihe n_1 je ein Punkt der Reihe n_2 zugeordnet ist, aber jedem Punkt der Reihe n_2 sind zwei Punkte der Reihe n_1

zugeordnet. Nach Chasles, bekommen wir, dass diese zwei Reihen drei gemeinsame Punkte haben. Das bedeutet weiterhin, dass sich auf jeder Geraden q der Fernebene, drei solche Punkte befinden, die auch jene Polaren p bezüglich des absoluten Kegelschnittes enthalten, die diesen Punkten durch den (TK) Komplex auf die beschreibene Weise zugeordnet sind. Zeigen wir vorläufig eine, aber die fundamentalste unter der unersichtlichen Mengen der Folgen dieser scheinbar einfachen Tatsache.

Es soll einer, der erwähnten drei Punkte auf der Geraden q, der Punkt T sein. Der ihm zugeordnete Strahl des (TK) Komplexes ist

$$t_T = \varphi(T)$$

und p ist die erwähnte, den Punkt T enthaltende Polare, bezüglich des absoluten Kegelschnittes. Mit der Geraden p und seinem Punkt T ist das ganze Parallelebenenbüschel $[p]$ bestimmt, und alle diese Ebenen auf den Strahl t_T senkrecht stehen. Da jeder Durchstosspunkt einer Ebene des Büschels $[p]$ mit dem Strahl t_T ein Z Punkt jenes (VN) Komplexstrahles ist, dem sich der I Punkt im Punkt T befindet, folgt, dass der Punkt T ein ∞^1-deutiger I Punkt des Büschels (T) der parallelliegenden (VN) Komplexstrahlen in der Ebene (T, t_T) ist, denen sich die Z Punkte längs der Geraden t_T befinden.

Da sich auf jeder Geraden der Fernebene drei solche Punkte befinden, können wir behaupten:

SATZ C 12.

In der Fernebene besteht eine Kurve μ 3. Ordnung, die eine Menge der ∞^1-deutigen I Punkte der (VN) Komplexstrahlen ist. Jeder Punkt dieser Kurve ist der I Punkt für ein Büschel der (VN) Komplexstrahlen, denen sich die zugeordneten Z Punkte auf dem Strahl des (TK) Komplexes befinden, der dem betreffenden Punkt der Kurve μ zugeordnet ist. Die Kurve μ enthält auch drei Fernmittelpunkte der hyperbolischen Paraboloide des Büschels $/F^2/$.

Dass die letzte Behauptung richtig ist, können wir leicht beweisen auf Grund der Eigenschaften der Kurve μ und mittels der bekannten Tatsachen über die Mittelpunkte der hyperbolischen Paraboloide des $/F^2/$ Büschels */B 1 b/*.

SATZ C 13.

Die Fläche 6. Grades der (VN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte auf einer Ferngeraden befinden, zerfällt in drei Büschel untereinander paralleler Strahlen im Endlichen, mit den Scheitelpunkten auf dieser Ferngeraden, während sich der Rest, d. h. die Fläche 3. Grades, in eine Kurve 3. Klasse in der Fernebene zusammenzieht. Die Kurve 5. Ordnung der Z Punkte dieser Strahlen zerfällt in drei Geraden im Endlichen und in eine Kurve 2. Ordnung in der Ferebene.

Die Kurve μ kann keinen zweifachen Punkt haben, was wir auf Grund der Tatsache beweisen können, dass jedem Raumpunkt, ausser der Eckpunkte des Tetraeders *ABCD,* nur ein Strahl des (TK) Komplexes zugeordnet ist. Ein Punkt der Kurve μ kann ein zweifacher Punkt dieser Kurve nur dann sein, wenn ihm zwei, diesem Punk auf die beschriebene Weise zugeordneten Polaren, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, enthalten, was weiterhin nur dann möglich wäre, wenn diesem Punkt auch zwei parallele (TK) Komplexstrahlen zugeordnet wären, was offensichtlich unmöglich ist.

Ein solches Flächenbüschel, in dem sich als eine seine Singulärfläche ein Zylinder befindet, was bedeuten müsste, dass sich ein Eckpunkt des Polartetraeders in der Fernebene befindet, nehmen wir vorläufig nicht in Betracht.

In */B 1 a)/* ist erwähnt, dass auch Mittelpunkt jeder Fläche des Büschels $/F^2/$ der Z Punkt für drei (UN) Komplexstrahlen ist. Jetzt können wir das leicht auch beweisen. Jedem Flächenmittelpunkt ist ein ferner (TK) Komplexstrahl zugeordnet, der die Kurve μ 3. Ordnung in I Punkten jener drei (UN) Komplexstrahlen schneidet, denen sich die Z Punkte im Mittelpunkt der betreffenden Fläche befinden.

b) Die (UN) Komplexstrahlen denen sich die Z Punkte auf einer Ferngeraden, und dem absoluten Kegelschnitt befinden

Alle (UN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf einer Geraden befinden, bilden eine Regelfläche 10. Grades, auf der diese Gerade eine dreifache ist, und I Punkte dieser Strahlen eine Kurve 7. Ordnung bilden */Satz A 5/.*

Eine Gerade q der Fernebene soll der Ort der Z Punkte der (UN) Komplexstrahlen sein. I Punkte dieser Strahlen befinden sich, wie bekannt, auf einem Hyperboloid H, dessen Erzeugenden die Strahlen

$$t = \varphi(T) \qquad \text{für jeden} \qquad T \in q$$

und die Bisekanten der Kurve k_c^3 sind. Auf Grund dessen und des *Satzes B 1* folgt, dass jeder Flächenmittelpunkt der I Punkt für je einen (UN) Komplexstrahl ist, der den Z Punkt auf der Geraden q hat. Da sich auf jeder Erzeugenden der Fläche H, die ein (TK) Komplexstrahl ist, drei I Punkte dreier (UN) Komplexstrahlen mit gemeinsamen Z Punkt auf der Geraden q befinden müssen, ist es leicht festzustellen, dass sich nebst zwei Mittelpunkten, der dritte I Punkt auf jeder Erzeugenden, in seinem Fernpunkt befindet. Den Beweis kann ähnlich wie in */C 5 a/* durchgeführt werden. Mit diesem Vorgang nahmen wir alle (TK) Komplexstrahlen in Betracht, die den Punkten der Geraden q zugeordnet sind, und auf jedem von ihnen je drei Punkte der I-Punktkurve. Wir wissen aber, dass die Flächenmittelpunkte eine Kurve 3. Ordnung bilden, während die Fernpunkte der Erzeugenden des Hyperboloides H auf einer Kurve 2. Ordnung liegen. Um zu bestimmen, wo sich der Rest, d. h. die

I-Punktkurve 2. Ordnung dieser Strahlen befindet, drängt sich uns als einzige mögliche Lösung dieses Problems, schon wieder der Gedanke auf, dass in der Fernebene noch eine Menge der Singulärpunkte der (UN) Komplexstrahlen bestehen muss, den ihre Z Punkte bilden.

Nehmen wir an, dass eine Kurve c^2 2. Ordnung in der Fernebene eine Menge solcher Singulärpunkte ist. Die Gerade q soll sie in Punkten K_1 und K_2 schneiden, und die Strahlen

$$t_n = \varphi(K_n) \qquad (n = 1,2)$$

seien zwei Erzeugenden der Fläche H. Die den Punkten der Erzeugenden t_1 bzw. t_2 zugeordnete (TK) Komplexstrahlen sind die Erzeugenden des Zylinders 2 .Grades, denen sich die Fernscheitelpunkte in Punkten K_1 bzw. K_2 befinden. Wenn die diesen Fernpunkten der Zylindererzeugenden zugeordnete Polaren p_1 und p_2, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, ihre Scheitelpunkte K_1 und K_2 enthalten, haben wir dann die folgende Situation: beliebiger Punkt T_r, z. B. der Geradenerzeugenden t_1, muss mit der Polare p_1 eine Ebene bestimmen, die in dem Punkt K_1 senkrecht den Strahl des (TK) Komplexes schneidet, der dem Punkt T_r zugeordnet ist. Die Erzeugende t_1 muss dann eine Menge der I Punkte des Büschels (K_1) der parallelen (UN) Komplexstrahlen in der Ebene (K_1, t_1) sein, die alle in dem Punkt K_1 den gemeinsamen Z Punkt haben. (Offenbar gilt das alles auch wenn wir statt der Nummer 1 die Nummer 2 setzen.)

Es ist leicht zu bewiesen, dass wir das Beschriebene in demjenigen Fall haben, wenn die Kurve c^2 der absolute Kegelschnitt ist. Wir wissen nämlich, dass jede Gerade q der Fernebene den absoluten Kegelschnitt in zwei konjugiert imaginäre Punkte K_n $(n = 1,2)$ schneidet, und die Polaren dieser Punkte, bezüglich des absoluten Kegelschnittes, seine konjugiert imaginäre Tangenten in diesen Punkten sind. Daraus folgt, dass sich auf jeder Geraden q der Fernebene zwei solche konjugiert imaginäre Punkte K_n $(n = 1,2)$ befinden, welche die Z Punkte »des Büschels« der (UN) Komplexstrahlen sind, denen sich die I Punkte längs der Strahlen

$$t_n = \varphi(K_n) \qquad (n = 1,2)$$

befinden.

Weiterhin müssen wir in Betracht nehmen, dass es auf dem absoluten Kegelschnitt ∞^2 Paare der konjugiert imaginären Punkte gibt. Die den Punkten solcher Paare zugeordneten (TK) Komplexstrahlen sind die Bisekanten der Kurve k_c^3. Diese Bisekanten sind die konjugiert imaginären Geraden 1. bzw. 2. Art, abhängig davon, ob sich das erwähnte Paar der konjugiert imaginären Punkte auf dem fern (TK) Komplexstrahl, bzw. auf irgendeiner Geraden der Fernebene befindet.

Konjugiert imaginäre Ebenen (K_1, t_1) und (K_2, t_2) schneiden sich in der reellen Geraden s, und so folgt, dass jeder der isotropen (UN) Komplexstrahle aus dem Büschel (K_1) bzw. (K_2) in diesen Ebenen je einen

Punkt der Geraden s enthält. Eine beliebige Ebene der Geraden q ($\equiv K_1 K_2$) schneidet die Strahlen t_1 und t_2 in zwei konjugiert imaginären Punkten T_{r1} und T_{r2}, und die Gerade s im Punkt S. Ein Paar der isotropen (UN) Komplexstrahlen, die die I Punkte in T_{r1} bzw. T_{r2}, und die Z Punkte in K_1 bzw. K_2 haben, schneidet sich in dem reellen Punkt S, und deshalb sind diese isotropen Strahlen *1. Art.* Nehmen wir auf dieselbe Weise alle Ebenen des Büschels $[q]$ in Betracht, dann haben wir alle ∞^1 Paare der isotropen Geraden 1. Art bekommen, die die (UN) Komplexstrahlen sind und sich reell in Punkten der Geraden s schneiden. Die I Punkte dieser Strahlen befinden sich längs der Geraden

$$t_n = \varphi(K_n) \qquad (n = 1{,}2)$$

während die Z Punkte in den Punkten K_n $(n = 1{,}2)$ sind.

Alle übrigen Paare der (UN) Komplexstrahlen der Büschel (K_n) in der Ebenen (K_n, t_n) $(n = 1{,}2)$ sind die isotropen Geraden 2. Art. Die Strahlen eines jeden von diesen Paaren schneiden nämlich die Gerade s in zwei konjugiert imaginären Punkten. Die I Punkte dieser Strahlen befinden sich im Paar konjugiert imaginärer Punkte schon wieder in den Punkten K_1 und K_2. Da jeder der ∞^2 imaginären Punkte der Geraden s inzident mit je einem (UN) Komplexstrahl des Büschels (K_1) bzw. (K_2) in der Ebene (K_n, t_n) $(n = 1{,}2)$ ist, folgt, dass es auch der erwähnten Paare der isotropen Strahlen 2. Art ∞^2 gibt.

Betrachten wir die Punkte der Geraden t_n als die I Punkte der (UN) Komplexstrahlen, dann haben wir zwei »Büschel« solcher Strahlen bekommen, die aus ∞^1 *isotropen Geraden 1. Art* und ∞^2 *isotropen Geraden 2. Art* bestehen, und die »Scheitelpunkte« dieser »Büschel« sich in Punkten K_1 und K_2 des absoluten Kegelschnittes befinden. Es folgt:

SATZ C 14.

Die I Punktkurve 7. Ordnung der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf der Geraden der Fernebene befinden, zerfällt in Flächenmittelpunktkurve k_c^3 3. Ordnung, in zwei konjugiert imaginäre Geraden 1. oder 2. Art und in eine Kurve 2. Ordnung in der Fernebene.

Weiterhin bekommen wir, dass auch die Fläche 10. Grades der (UN) Komplexstrahlen zerfällt, denen sich die Z Punkte auf einer beliebigen Ferngeraden q befinden. Besonders interessanten Teil dieser zerfallenen Fläche bilden jene (UN) Komplexstrahlen, denen sich die I Punkte in Flächenmittelpunkten auf der Kurve k_c^3 befinden, und die die Z Punkte auf der Ferngeraden q haben. Da zwischen den Punkten der Geraden q und den Punkten der Kurve k_c^3 eine (1,2)-Korrespondenz besteht, bilden alle diese (UN) Komplexstrahlen ein K o n o i d 5. Grades.

Wenn die Ferngerade q ein Strahl

$$q = \varphi(O_r) \quad \text{ist, für} \quad O_r \in k_c^3,$$

dann zerfällt dieses Konoid in ein $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlbüschel mit dem Scheitelpunkt und dem gemeinsamen I Punkt in dem Mittelpunkt O_r und in ein *Konoid* 4. Grades. Beweisen können wir das mit der gewohnten Behandlung.

SATZ C 15.

Die Fläche 10. Grades der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf der Ferngeraden befinden, zerfällt in ein Konoid 5. Grades, in zwei »Büschel« der isotropen Geraden 1. und 2. Art, während sich der Rest in eine Fernkurve 3. Klasse zusammensetzt.

Ausser der bekannten Singulärpunkten der Kurve k_c^3 und der Grundkurve k^4 des Flächenbüschels $/F^2/$ im Endlichen, bestehen, wie wir sahen, in der Fernebene noch zwei Kurven: μ 3. Ordnung und der absolute Kegelschnitt 2. Ordnung, die die Mengen der Singulärpunkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen sind. Da über die Kurve μ und die $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen, die auf irgendeine Weise mit dieser Kurve verbunden sind, noch sehr viel Rede im Kapitel D des zweiten Teils dieser Arbeit sein wird, werden wir vorläufig den Ort der I Punkte der $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen bestimmen, welche die Z Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt haben.

Die den Punkten einer beliebigen reellen Fernkurve 2. Ordnung zugeordneten $(\mathcal{TK})$ Komplexstrahlen bilden, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 4. Grades von III. Sturmscher Art. Jede Erzeugende dieser Fläche ist eine Bisekante der Raumkurve k_c^3, und da jeden Punkt dieser Kurve zwei Erzeugenden enthalten, ist sie auf der Fläche zweifach /Vergleich mit *A 5 b*/.

Nehmen wir an, dass diese Fernkurve 2. Ordnung, der absolute Kegelschnitt ist, den die ∞^2 Paare der konjugiert imaginären Punkten bilden, die auf die bekannte Weise definiert sind. Allen diesen konjugiert imaginären Paaren der Punkte des absoluten Kegelschnittes, auf allen Geraden der Fernebene zugeordnete $(\mathcal{TK})$ Komplexstrahlen, bilden eine solche Menge, die aus ∞^2 konjugiert imaginären Geraden 2. Art und aus ∞^1 konjugiert imaginären Geraden 1. Art besteht. Alle diese Geraden sind Bisekanten der Kurve k_c^3. Weiterhin werden wir zeigen, dass eine beliebige Gerade s mit dieser Menge vier und nur vier gemeinsame Punkte hat, von denen immer je zwei konjugiert imaginär sind. Hieraus folgt direkt, dass die gesuchte Menge der I Punkte jener $(\mathcal{UN})$ Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt befinden, eine imaginäre Regelfläche ist, die wir als *»Fläche $\mathcal{A}$«* nennen werden. Diese Fläche $\mathcal{A}$ ist 4. Ordnung bzw. 4. Grades, und die reelle Mittelpunktkurve k_c^3 auf ihr zweifach.

Beweisen wir diese Behauptung:

Die den Punkten einer beliebigen endlichen Geraden s, zugeordnete Strahlen

$$t = \varphi(T) \quad \text{für jeden} \quad T \in s$$

bilden ein Erzeugendensystem des Hyperboloides H, den die Fernebene in einer Kurve h^2 2. Ordnung schneidet. Die Kurve h^2 und der absolute Kegelschnitt schneiden sich in Punkten K_n ($n = 1,2,3,4$) , die in Paaren konjugiert imaginär sind. Die konjugiert imaginären Erzeugenden des Hyperboloides H, die diese Punkte des absoluten Kegelschnittes enthalten, sind die Strahlen des (TK) Komplexes die den Paaren der konjugiert imaginären Punkte T_n ($n = 1,2,3,4$) der Geraden s, zugeordnet sind. Auf Grund des polaren Verhältnisses muss weiterhin

$t_n = \varphi(K_n)$ ein solcher sein, dass der Punkt

$T_n \in t_n \quad (n = 1,2,3,4)$ ist.

Hieraus folgt, dass die Punkte T_n die einzige gemeinsame Punkte der Geraden s und der »Fläche $\mathcal{A}$« sind.

Auf Grund dessen und des *Satzes C 14* folgt, dass alle (UN) Komplexstrahlen, denen die Z Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt liegen, ihre I Punkte auf der »Fläche $\mathcal{A}$« 4. Grades haben.

Im *Satz A 11* haben wir gezeigt, dass die I Punkte der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte in einer Ebene befinden, ein Fläche 5. Ordnung bilden. Da einem beliebigen Fernpunkt, der Z Punkt eines (UN) Komplexstrahles ist, der zugeordnete I Punkt wieder in der Fernebene liegt, fanden wir, das der Ergänzungsteil der I-Punktfläche 5. Ordnung, die »Fläche $\mathcal{A}$« 4. Ordnung ist. Es folgt:

SATZ C 16.

Die I-Punktfläche 5. Ordnung der (UN) Komplexstrahlen, denen sich die Z Punkte in der Fernebene befinden, zerfällt in die Fernebene und in die »Fläche $\mathcal{A}$*« 4. Grades, die* ∞^1 *Paare der konjugiert imaginären Geraden 1. Art, und* ∞^2 *Paare der konjugiert imaginären Geraden 2. Art bilden. Alle diese Geraden sind die Bisekanten der Kurve* k_c^3*, die auf der »Fläche* $\mathcal{A}$*« zweifach und reell ist.*

Durch bisherige Betrachtungen und Behauptungen haben wir nur die Grundeigenschaften des (UN) Komplexes ausgeführt und klargemacht.

In zweiten Teil dieser Arbeit, die bald veröffentlicht sein wird, werden weitere Eigenschaften des (UN) Komplexes ausgeführt. Bei diesen Betrachtungen werden die grösste Rolle die Kurven μ und k_c^3, als die Mengen der Singulärpunkte der (UN) Komplexstrahlen, spielen.

Im Kapitel D werden Eigenschaften der Involutorstrahlen des (UN) Komplexes untersucht. Solche Strahlen führen eine Kongruenz aus, und die ihnen zugeordnete I–Z Punkte, bilden eine interessante Fläche.

Unter allen Eigenschaften des (UN) Komplexes müssen wir besonders die Einführung der Gestaltungrelationen zwischen den Strahlen dieses Komplexes, betonen. Im Kapitel E, werden wir die sogenannten *»Ketten der (UN) Komplexstrahlen«* in Betracht nehmen.

LITERATUR

[1] *V. Niče,* Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschles 2. Grades, Rad JAZU, 331 (1965) 145–172.

[2] *V. Niče,* Zusätzliche Betrachtungen mit ergänzenden Sätzen über den Tangentialkurzwegekomplex eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad JAZU, 349 (1970) 93–107.

[3] *J. Majcen,* O jednoj posebnoj vrsti kubičnoga kompleksa, Rad JAZU, 155 (1903), 159–172.

[4] *V. Niče,* Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik matem.-fiz.- i astr., 2, (18), (1963), 255–268.

[5] *T. Reye,* Die Geometrie der Lage, I., II., III. (IV. Aufl.), Stuttgart, 1910.

[6] *V. Niče,* Uvod u sintetičku geometriju, Zagreb, 1956.

[7] *E. Müller,* Vorlesungen über darstellende Geometrie, Leipzig–Wien, 1931.

Institut für Mathematik
der Universität in Zagreb

Angenommen zur Veröffentlichung am 22. XII. 1972. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

Vlasta Ščurić-Čudovan

ORIJENTIRANI NIČEOV KOMPLEKS ODREĐEN PRAMENOM PLOHA 2. STUPNJA

U projektivnom prostoru, odnosno na modelu projektivnog prostora izgrađenom u nadopunjenom euklidskom prostoru, dan je pramen ploha $/F^2/$ 2. stupnja i njime određen pramen (F^2) polarnih prostora tih ploha.

Sa svakim pramenom ploha 2. stupnja određen je *»tetraedarski kompleks«* ili kraće «(*TK*) *kompleks*« ([5], Bd III.), *»Majcenov kompleks«* [3], *»kompleks normala«* [4] i *»kompleks najkraćih dirnih staza među plohama pramena ploha 2. stupnja«* [1], [2].

Bilo koja točka prostora nalazi se na jednoj od ploha pramena $/F^2/$, a po volji odabrana točka T neka se nalazi na plohi F. Dirna ravnina R te plohe u točki T sadrži zraku t poznatog (*TK*) kompleksa. Pravac točke T okomit na ravninu R zraka je kompleksa normala. Pravci pramena (T) u ravnini R diraju plohu F u točki T, dok im se drugo dиralište s još jednom plohom pramena $/F^2/$ nalazi u njihovu sjecištu sa zrakom t. Pravac pramena (T) usporedan sa zrakom t zraka je Majcenova kompleksa, a pravac na kojemu je udaljenost među diralištima najkraća, tj. okomica o položena iz točke T na zraku t, zraka je kompleksa najkraćih dirnih staza.

Točku T zrake o nazvat ćemo njenom I točkom, a sjecište zraka $t \wedge o$ Z točkom te zrake. Pokazuje se da točke I i Z zrake o nisu ravnopravne, pa izlazi da one na prirodni način određuju o r i j e n t a c i j u te zrake. Kako je kompleks, koji čine sve na opisani način određene zrake o, definirao i odredio mu niz svojstava V. Niče, nazvat ćemo ga: *»Orijentirani Ničeov kompleks određen pramenom ploha 2. stupnja«* ili kraće: *»*(*VN*) *kompleks«*. Ovaj je kompleks 8. stupnja.

Činjenica da se na svakoj zraci (*VN*) kompleksa nalaze dvije njoj pridružene točke i da je bilo koja točka T prostora I točka za jednu i Z točka za tri zrake (*VN*) kompleksa, koje su sve komplanarne, omogućuje razna istraživanja o međusobnoj zavisnosti geometrijskog mjesta zraka (*VN*) kompleksa, te geometrijskog mjesta I točaka, odnosno Z točaka tih zraka.

Uspoređivanje većeg broja stavaka iz poglavlja *A* prikazanih na priloženoj shemi daje nam dosta dobar uvid u te zavisnosti.

I točke na:	*Z točke*	*zrake* (*UN*) *kompleksa*
pravcu	krivulja 5. reda	ploha 6. stupnja
krivulji 2. reda	krivulja 10. reda	ploha 12. stupnja
ravnini	ploha 7. reda	kongruencija 9. reda 5. razreda
plohi 2. reda	ploha 14. reda	kongruencija 18. reda 10. razreda

Z točke na:	*I točke*	*zrake* (*UN*) *kompleksa*
pravcu	krivulja 7. reda	ploha 10. stupnja
krivulji 2. reda	krivulja 14. reda	ploha 20. stupnja
ravnini	ploha 5. reda	kongruencija 11. reda 7. razreda
plohi 2. reda	ploha 10. reda	kongruencija 22. reda 14. razreda

Krivulje singularnih točaka zraka (*UN*) kompleksa obrađene su u poglavljima *B* i *C*. Pokazano je da je svaka točka krivulje k_c^3 *3.* reda središta ploha pramena /F^2/ ∞^1-značna *I* točka zraka (*UN*) kompleksa. Na toj krivulji posebno su istaknuta svojim svojstvima četiri središta singularnih ploha tog pramena, kao i beskonačno daleka središta hiperboličkih paraboloida pramena /F^2/. Točke temeljne krivulje k^4 ovog pramena nosioci su pramenova zraka (*UN*) kompleksa, kojima *I* i *Z* točke padaju zajedno.

Zrake (*UN*) kompleksa kojima se *I* točke, odnosno *Z* točke nalaze na pravcu koji sadrži jednu, odnosno dvije točke krivulje k_c^3 i k^4 određuju plohe, a njima pridružene *Z* točke, odnosno *I* točke određuju krivulje, koje se raspadaju prema zakonitostima naslijeđenim od ovih singularnih točaka.

To nasljeđe ima utjecaj i na skupove ravnina, u kojima se krivulja 8. razreda zraka (*UN*) kompleksa, kao i krivulja pridruženih *I*, odnosno *Z* točaka raspada. Obrađene su dvije skupine singularnih ravnina, i to dirnih ravnina duž izvodnica singularnih ploha pramena $/F^2/$ i pobočnih ravnina autopolarnog tetraedra pramena (F^2). Već nam i ova dva interesantna primjera zorno prikazuju kada i zbog čega dolazi do spomenutih raspada, kako razredne krivulje zraka $(\mathcal{UN})$ kompleksa, tako i krivulja I točaka i Z točaka na njima.

Beskonačno daleka raznina sadrži također dvije krivulje singularnih točaka zraka $(\mathcal{UN})$ kompleksa. O krivulji μ 3. reda, koja je geometrijsko mjesto ∞^1-značnih I točaka zraka tog kompleksa, bit će još mnogo govora u poglavljima D i E drugog dijela ove radnje, koji će biti uskoro objavljen.

Istraživanja apsolutne konike kao geometrijskog mjesta ∞^2-značnih Z točaka zraka $(\mathcal{UN})$ kompleksa mogla su se provesti tek pošto je istražen niz svojstava $(\mathcal{TK})$ kompleksa u imaginarnom području. Tako su, npr., parovima konjugirano imaginarnih točaka apsolutne konike pridružene zrake $(\mathcal{TK})$ kompleksa, konjugirano imaginarni pravci 1, odnosno 2. vrste ovisno o tome nalazi li se taj par konjugirano imaginarnih točaka na beskonačno dalekoj zraci $(\mathcal{TK})$ kompleksa ili na bilo kojem pravcu beskonačno daleke ravnine. Svim parovima konjugirano imaginarnih točaka apsolutne konike pridružene zrake $(\mathcal{TK})$ kompleksa određuju imagirnu plohu $\mathcal{A}$ 4. stupnja. Izvodnice te plohe, ∞^2 spomenutih parova konjugirano imaginarnih zraka $(\mathcal{TK})$ kompleksa, bisekante su krivulje k_c^3, koja je na toj imaginarnoj plohi realna i dvostruka. Imaginarnu plohu $\mathcal{A}$ čine I točke onih parova konjugirano imaginarnih zraka $(\mathcal{UN})$ kompleksa koje su izotropni pravci 1. i 2. vrste, a Z točke im se nalaze u spomenutim parovima konjugirano imaginarnih točaka apsolutne konike.

Institut za matematiku
Sveučilišta u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 22. prosinca 1972. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.