Ljerka Dočkal, Zagreb

DIE FLÄCHEN DER ZENTRISCHEN FUSSPUNKTKURVEN IN LINEAREN REGELFLÄCHENSYSTEMEN 2. ORDNUNG

Einleitung

Nach E. Danzer wird als zentrische Fusspunktkurve n einer Regelflächen 2. Crdnung H^2 diejenige Fusspunktkurve n bezeichnet, dessen Pol sich in der Flächenmitte O befindet. Nach R. Sturm ist die Ordnung der Fusspunktkurve einer Regelfläche n-ter Ordnung gleich $2n$.

Lässt man eine Regelfläche H^2 ein Regelflächenbüschel bzw -schar 2. Ordnung (H^2) stetig erzeugen, werden die stetig verbundene zentrische Fusspunktkurven eine Fläche bilden. Bevor man die Ordnung dieser Fläche aufsucht, werden einige schon bekannte, aber für diese Ersuchungen notwendige Eigenschaften der zentrischen Fusspunktkurve des einschalligen Hyperboloids und hyperbolischen Paraboloids angeführt werden.

Beim Aufsuchen der zentrischen Fusspunktkurve eines einschalligen Hyperboloids H^2 muss man berücksichtigen, dass jede asymptotische Ebene dieser Fläche je zwei parallele Erzeugende enthält. Deswegen schneidet jede durch die Flächenmitte O an eine Erzeugende h gelegte Normale n auch die parallele Erzeugende h_1 orthogonal. Diese gemeinsame Normale n zweier paralellen Erzeugenden kann man also als Schnittgerade der diese Erzeugenden enthaltende asymptotische Ebene α und derjenigen Normalebene ν erhalten, die durch die Flächenmitte O orthogonal an die parallelen Erzeugenden gelegt ist. Da die asymptotischen Ebenen des einschalligen Hyperboloids einen Kegel 2. Klasse A^2 umhüllen, bilden die entsprechenden Normalebenen ν auch einen Kegel 2. Klasse N^2. Die Normalen n als Schnittgeraden der asymptotischen Ebenen des Kegels A^2 und der Normalebenen des Kegels N^2 bilden einen rationalen Kegel 4. Ordnung N^4, der in den Flächenachsen die Doppelerzeugenden enthält. Die Durchdringungskurve des Normalkegels N^4 und des Hyperboloids H^2 ist 8. Ordnung, aber sie zerfällt in zwei Raumkurven 4. Ordnung zweiter Art ${n_1}^4$ und ${n_2}^4$. Diese Kurven haben die Scheitelpunkte des Hyperboloids H^2 gemein. Die Erzeugenden eines Systems des Hyperboloids H^2 sind die Unisekanten einer diesen Kurven und die Trisekanten der anderen.Nach Danzer kann die zentrische Fusspunktkurve n^4 eines einschalligen Hyperboloids H^2 mittels derjenigen Kuglen erhalten werden, die um die Flächenmitte O umbeschrieben sind. Dann ist der Fusspunkt N der durch die Flächenmitte O an eine Erzeugende h des Hyperboloids H^2 gelegte Normale n die Mitte der durch die Kugel an dieser Erzeugende h begrenzten Sehne. Wenn man um die Flächenmitte O die Kugel $K_a{}^2$ beschreibt, deren Durchmesser der Hauptachse $2a$ der Kehellipse gleich ist, dringt diese Kugel $K_a{}^2$ das Hyperboloid H^2 in zwei Kreisen. Sie liegen in den zyklischen Ebenen des Hyporboloids H^2 und schneiden sich in der Hauptachse der Kehlellipse. Die Mitten der an den Erzeugenden h des Hyperboloids H^2 liegenden und durch diese Kreise begrenzten Sehnen bilden die beschriebenen Fusspunktkurven $n_1{}^4$ und $n_2{}^4$. Die Fernpunkte in welchen das Hyperboloid H^2 die Absolute schneidet gehören diesen Kurven an, weil sie den in zyklischen Ebenen liegenden Kreisen gehören. Da sie je zwei Erzeugenden des Hyperboloids H^2 enthalten, gehören sie den beiden Fusspunktkurven $n_1{}^4$ und $n_1{}^4$ des Hyperboloids. H^2.

Da sich dieser Pol bezüglich eines hyperbolischen Paraboloids in seinem Fernsoheitelpunkt befindet, wird die Fusspunktkurve dem Müllerschen Satz nach verordnet. Die Fusspunktkurve einer Regelfläche in Bezug auf einen Fernpol zerfällt in die Fernkurve von H und jene Erzeugenden, deren Fernpunkte zum Pol bezüglich der Absolute konjugiert sind. Wendet man dies an das hyperbolische Paraboloid an, und nimmt man den Pol in seinem Fernscheitelpunkt, zerfällt dann die Fusspunktkurve in die Fernerzeugenden und jene Erzeugenden die im Endlichen liegen und den Scheitelpunkt enthalten. Diese Erzeugenden sind, nämlich, an der Flächenachse normal, so dass die Verbindungsgerade ihrer Ferpunkte die Polare des Fernscheitelpunktes bezüglich der Absolute ist. Da ein hyperbolisches Paraboloid zwei Erzeugendensystemen enthällt, sind diese vier Erzeugenden als Doppelgeraden anzunehmen.

1. Die Flächen der zentrischen Fusspunktkurven in den Regelflächenbüscheln 2. Ordnung

a) Es sei ein Regelflächenbüschel 2. Ordnung (H^2) (1,3) gegeben, also ein solches, dessen Grundkurve 4. Ordnung erster art aus zwei unpaaren Zweigen besteht. Jeder Raumpunkt P enthält eine Fläche des Büschels und jede Ebene berührt deren drei. Die Fernebene schneidet das Flächenbüschel (H^2) (1,3) in einem Fernkurvenbüschel $(h_u{}^2)$ (1,2). Die Mittelpunkte O der Flächen des Flächenbüschels (H^2) (1,3) bilden als Pole der Fernebene bezüglich dieser Flächen eine Raumkurve 3. Ordnung o^3. Da jeder Fläche des Flächenbüschels (H^2) (1,3) je ein zentrischer Normalkegel N^4 zugeordnet ist, bilden diese Normalkegel N^4 ein Normalkegelsystem $|N^4|$. Die Kegel N^4 dieses Systems $|N^4|$ dringen die entsprächenden Flächen des Plächenbüschels (H^2) (1,3) in den zentrischen Fusspunktkurven n^4. An einer beliebig angenommenen Gerade p werden die Punkte H und N der Flächen H^2 und N^4 durch die Flächen des Flächenbüschels (H^2) (1,3) und des Normalkegelsystems $|N^4|$ zugeordnet. Die Inzidenzpunkte dieser zwei so zugeordneten Punktreihen gehören den zentrischen Fusspunktkurven der Flächen H^2 des Flächenbüschels (H^2) (1,3) und sind die Schnittpunkte der Geraden p mit der dem Flächenbüschel (H^2) (1,3) zugeordneten Fläche der zentrischen Fusspunktkurven. Die Zahl dieser Schnittpunkte ergibt offenbar die Ordnung dieser Fläche.

Satz 1: *Die zentrische Normalkegel* N^4, *die den Flächen* Hl^2 *eines Regelflächenbüschels* (H^2) (1,3) *zugeordnet sind, bilden ein Normalkegelsystem* $|N^4|$ *mit dem Index* 6.

Beweis: Um den Index eines zentrischen Normalkegelsystems $|N^4|$ zu erhalten, das einem Flächenbüschel (H^2) (1,3) zugeordnet ist, werden zuerst durch einen beliebig angenommenen Raumpunkt P die Diameter d der Flächen dieses Flächenbüschels (H^2) (1,3) gelegt. Da die Flächenmittelpunkte O eine Raumkurve 3. Ordnung o^3 bilden, erzeugen die den Punkt P enthaltende Diameter d einen Kegel 3. Ordnung D^3, den die Fernebene in einer Fernkurve $d_u{}^3$ schneidet.

Da eine zentrische Normale n die Schnittgerade der asymptotischen Ebene α und der entsprechenden Normalebene ν ist, wird ihr Fernpunkt N_u als Schnittpunkt der Fernspur α_u der asymptotischen Ebene mit der Polare π_u des entsprechenden Berührpunktes A_u bezüglich der Absolute erreichen. Die durch den Raumpunkt P an die Flächen des Flächenbüschels (H^2) (1,3) gelegte asymptotische Ebenen bilden, wie bekannt, einen Kegel 5. Klasse A^5. Die Berührpunkte A_u dieser Ebenen bilden eine Fernkurve 3. Ordnung $a_u{}^3$ und die Polaren π_u dieser Punkte bezüglich der Absolute hüllen eine Fernkurve 3. Klase $\pi_u{}^3$ ein. Die Tangenten α_u der Fernkurve $\alpha^5{}_u$ des Kegels A^5 sind (1,1)-deutig zugeordnet den Ferngeraden π_u der Fernkurve $\pi_u{}^3$. Die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden dieser Kurven bilden eine Fernkurve 8. Ordnung $n_u{}^8$. Veribindet man die Fernkurve $n_u{}^8$ mit dem Punkt P, dann erhält man einen Kegel 8. Ordnung N^8.

Da eine zentrische Normale n einer Fläche H^2 auch ein Diameter d derselben ist, muss die einem Kegel N^4 des Normalkegelsystems $|N^4|$ gehörige Erzeugende n des Kegels N^8 auch dem Kegel D^3 als ein Diameter gehören. Die beiden Kegel N^8 und D^3 haben 24 Erzeugenden gemein, aber es muss ausgeprüfft werden wieviele dieser Erzeugenden ein Diameter d und eine zentrische Normale n derselben Fläche des Flächenbüschels (H^2) (1,3) sind.

Wenn ein Diameter d mit der Erzeugende n des entsprechenden Normalkegels N^4 zusammenfällt, wird die Polare δ_u seines Fernpunktes D_u bezüglich der Absolute seine Polare p_u bezüglich der Fernkurve $h_u{}^2$ der entsprechende Fläche des Flächenbüchels (H^2) (1,3) in jenem Fernpunkt A_u schneiden, welcher der dem Diameter d zugeordnete Fernberührpunkt A_u ist. Da die Fernpunkte D_u der den Punkt P enthaltenden Diameter d eine Fernkurve 3. Ordnung $d_u{}^3$ bilden, werden die Polaren δ_u der Fernpunkte D_u dieser Fernkurve $d_u{}^3$, bezüglich der Absolute, eine Fernkurve 3. Klasse $\delta_u{}^3$ einhüllen. Da die den Fernpunkten D_u der Fernkurve $d_u{}^3$ bezüglich der Fernkurven des Fernkurvenbüschels $(h_u{}^2)$ (1,2) zugeordnete Polaren ein Ferngeradenbüschel $p_u(T_u)$ bilden, so erzeugen die Fernschnittpunkte P_u der entsprechenden Ferngeraden der Fernkurve $\delta_u{}^3$ und des

Büschels $p_u(T_u)$ eine Fernkurve 4. Ordnung $p_u{}^4$, welche im Fernpunkt T_u einen dreifachen Punkt enthält. Die Fernkurven $a_u{}^3$ und $p_u{}^4$ haben zwölf Fernpunkte gemein. Der Fernpunkt T_u ist ein dreifacher Punkt der Fernkurve $p_u{}^4$ und ein zweideutiger Funkt der Fernkurve $a_u{}^3$, aber als gemeinsamer Punkt dieser Fernkurven entspricht er nicht dem Fernpunkt eines und desselben Diameters d. Die Fernkurven $a_u{}^3$ und $p_u{}^4$ haben also nur sechs Fernpunkte gemein, welche demselben Diameter d korrespondieren. Daraus ergibt sich, dass es sechs Diameter d gibt, die auch die Erzeugenden n der entsprechenden zentrischen Normalkegel N^4 des Systems $|N^4|$ sind

Satz 2: *Die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven* N^{16} *in einem Flächenbüschel* 2. *Ordnung* (H^2) (1,3) *ist* 16. *Ordnung.*

Beweis: Mittels der Flächen eines Flächenbüschels 2. Ordnung (H^2) (1,3) und der zugeordneten zentrischen Normalkegel N^4 des Systems $|N^4|$ kam man die Punkte einer beliebig angenommener Gerade p durch eine (4, 12)-deutige Zuordnung verbinden. Nimmt man an der Geraden p irgend einen Punkt P an, enthält dieser Punkt eine und nur eine Fläche H^2 des Flächenbüschels (H^2) (1,3). Dieser Fläche H^2 ist ein Kegel N^4 des Systems $|N^4|$ zugeordnet und die Gerade p schneidet ihn in vier Punkten N. Derselbe Punkt P enthält sechs zentrische Normalkegel N^4, denen sechs Flächen H^2 zugeordnet sind. Die Gerade p schneidet diese Flächen in zwölf Punkten H. Lässt man den Punkt die Gerade p durchlaufen, werden auf die beschriebene Weise die Punkte der Geraden p durch eine (4,12)-deutige Zuordnung der Punkte N und der Punkte H verbunden. Wie bekannt, ergibt diese Zuordnung sechzehn Punkte, welche die gemeinsamen Punkte der zugeordneten Flächen N^4 und H^2 sind. Deswegen sind sie die Punkte der Fläche der zentrischen Fusspunktkurven N^{16}, welche dem Flächenbüschel (H^2) (1,3) zugeordnet ist.

Die Grundkurve 4. Ordnung erster Art k^4 ist die sechsfache Kurve dieser Fläche N^{16} weil jeder Punkt dieser Kurve auf allen Flächen H^2 des Flächenbüschels (H^2) (1,3) liegt und sechs zentrischen Normalkegel N^4 des Systems $|N^4|$ enthält.

Die Fernkurve der Fläche N^{16} zerfällt in sechs Fernerzeugenden der dreien sich im Flächenbüschel (H^2) (1,3) befindenden hyperbolischen Paraboloide die als Doppelferngeraden anzunehmen sind und in die Absolute als Doppelkurve. Dies ergibt sich aus dem in der Einleitung angeführten Danzerschen Ausführen der zentrischen Fusspunktkurve eines einschalligen Hyperboloids, wo gezeigt war, dass die zentrischen Fusspunktkurven $n_1{}^4$ un $n_2{}^4$ die Schnittpunkte des Hyperboloids H^2 mit der Absolute enthalten.

Diese Betrachtungen waren für ein deratiges Flächenbüschel (H^2) (1,3) durchgeführt, welches nur Regelflächen enthält. Wenn das Flächenbüschel (H^2) (1,3) ausser Regelflächen auch allgemeine Flächen 2. Ordnung enthält, werden analoge Betrachtungen wegen des Erhaltungsprinzips dieselben Ergebnisse ergeben, aber die zentrische Fusspunktkurve einer allgemeinen Fläche H^2 dieses Büschels wird als imaginäre Durchdringungskurve dieser Fläche mit der Fläche N^{16} aufgefasst.

b) Wenn ein Flächenbüschel $(H^2)(1,2)$ gegeben ist, werden analoge Betrachtungen ergeben, dass der Index des zugeordneten zentrischen Normalkegelsystems gleich 5 ist und die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven eine Fläche 12. Ordnung ist.

Die Grundkurve dieses Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ zerfällt wie bekannt, in zwei sich doppelt schneidenden Kurven 2. Ordnung. Jeder beliebig angenommene Raumpunkt P enthalt eine Fläche des Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ und jede Ebene berührt deren zwei. Eine Fläche dieses Büschels zerfällt in zwei die Grundkurven enthaltenden Ebenen. Die Fernebene schneidet das Flächenbüschel (H^2) (1,2) in einem Fernkurvenbüschel $(h_u{}^2)$ (1,2). Die Flächenmittelpunkte O als Pole der Fernebene bezüglich der Flächen H^2 des Flächenbüschels (H^2) (1,2) bilden eine Kurve 2. Ordnung o^2.

Satz 3: *Der Index eines zentrischen Normalkegelsystems* $|N^4|$, *das einem Flächenbuschel* (H^2) (1,2) *zugeordnet ist, ist gleich* 5.

Beweis: Um den Index des zentrischen Normalkegelsystems $|N^4|$, das einem Flächenbüschel $(H^2)(1,2)$ zugeordnet ist, zu erhalten, wird man analog wie beim Beweis des Satzes 1 vorgehen. Die einen beliebig angenommenen Raumpunkt P enthaltende Diameter d der Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ bilden einen Kegel 2. Ordnung D^2. Legt man durch diesen Punkt P die asymptotischen Ebenen an die Flächen dieses Flächenbüschels (H^2) (1,2), werden die Berührpunkte A_u eine Fernkurve 3. Ordnung $a_u{}^3$ bilden, die im Fernpunkt der Schnittgerade der in zwei Ebenen zerfallenen Fläche des Büschels $(H^2)(1,2)$ einen Doppelpunkt enthält. Mittels der Anwendung des Chulsesschen Korrespondenzprinzips erhält man, dass die durch den Punkt P an die Flächen des Flächenbüschels (H^2) (1,2) gelegte asymptotische Ebenen einen Kegel 4. Klasse A^4 umhüllen.

Der Fernpunkt einer zentrischen Normale n wird als Schnittpunkt der Ferngerade α_u der asymptotischen Ebene α mit der Polare π_u des entsprechenden Berührpunktes A_u bezüglich der Absolute erhalten. Da die Berührpunkte A_u eine Fernkurve 3. Crdnung $a_u{}^3$ bilden, hüllen die Polaren π_u dieser Punkte bezüglich der Absolute eine Fernkurve 3. Klasse $\pi_u{}^3$ ein. Da die Ferngeraden α_u der asymptotischen Ebenen des Kegels A^4 und der Fernkurve $\pi_u{}^3$ (1,1)-deutig zugeordnet sind, bilden die Schnittpunkte N_u der entsprechenden Ferngeraden eine Fernkurve 7. Ordnung $n_u{}^7$. Projiziert man diese Fernkurve aus dem Punkt P, erhält man einen Projektionskegel 7. Ordnung N^7. Wenn eine Erzeugende n dieses Kegels eine zentrische Normale einer Fläche des Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ ist, muss sie ein Diameter d dieser Fläche H^2 sein, also dem Kegel D^2 als Diameter gehören. Da die Kegel N^7 und D^2 vierzehn gemeinsamen Erzeugenden enthalten, muss man prüfen wieviele dieser Erzeugenden gleichzeitig zentrische Normale und Diameter derselben Fläche sind.

Wenn man analog wie beim Beweis des Satzes 1 vorgeht, muss man beachten, dass wenn ein Diameter d mit der zentrischen Normale n der zugeordneten Fläche H^2 zusammenfällt, wird die Polare δ_u des Fernpunktes D_u des Diameters d bezüglich der Absolute die Polare p_u dieses Fernpunktes D_u bezüglich der Fernkurve $h_u{}^2$ der diesem Diameter d zugeordenten Fläche H^2 in einem ihm zugeordneten Berührpunkt A_u schneiden. Da die Fernpunkte D_u der den Kegel bildenden Diameter eine Fernkurve 2. Ordnung d_u^2 bilden, hüllen ihre Polaren δ_u bezüglich der Absolute eine Fernkurve 2. Klasse δ_u^2. Die Polaren p_u der Fernpunkten D_u der Fernkurve d_u^2 bezüglich der Fernkurven des Fernkurvenbüschels $h_u^2(1,2)$ bilden ein Ferngeradenbüschel $p_u(T_u)$. Die Ferngeraden der Fernkurve δ_u und des Ferngeradenbüschels $p_u(T_u)$ sind (1,1)-deutig zugeordnet so dass die Schnittpunkte P_u ihrer entsprechenden Elemente eine Fernkurve 3. Ordnung p_u^3 bilden, die im Fernpunkt T_u einen Doppelpunkt hat. Da dieser Fernpunkt T_u ein zweideutiger Punkt der Fernkurve a_u^3 ist, kann man schliessen, dass die Fernkurven a_u^3 und p_u^3 ausser den Fernpunkt T_u noch fünf Fernpunkte $A_u \equiv P_u$ gemein haben müssen. Diesen fünf Punkten $A_u \equiv P_u$ entsprechen diejenige Diameter d, die auch zentrische Normale der zugeordneten Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ sind. Dem Fernpunkt T_u entsprechen verschiedene Diameter d bezüglich der Punkte P_u und A_u, die in ihm zusammengefallen sind. Also der Index des einem Flächenbüschel $(H^2)(1,2)$ zugeordneten zentrischen Normalkegeksystems $|N^4|$ ist gleich 5.

Satz 4: *Die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven in einem Flächenbüschel* 2. *Ordnung* (H^2) (1,2) *ist eine Fläche* 12. *Oednung* N^{12}.

Beweis: Analog wie beim Beweis des Satzes 2 werden die Punkte einer beliebig angenommenen Geraden p mittels der Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ und dem zugeordneten zentrischen Normalkegelsystem $|N^4|$ durch eine (4,10)-deutige Zuordnung verbunden. Wie bekannt, dies ergibt vierzehn Inzidenzpunkte der Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ mit den entsprechenden zentrischen Normalkegelkegeln N^4. Zwei dieser Punkte gehören der im Flächenbüschel $(H^2)(1,2)$ enthaltenen in zwei Ebenen zerfallenen Flächen und in zwölf Punkten schneidet die Gerade p die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven, die dem Flächenbüschel (H^2) (1,2) zugeordnet, ist. Diese Fläche ist also 12. Ordnung. Die Grundkurve, die aus zwei Kurven 2. Ordnung besteht, ist eine fünffache Kurve dieser Fläche N^{12}, weil jeder Punkt dieser Kurve alle Flächen H^2 des Büschels $(H^2)(1,2)$ und je fünf zentrischen Normalkegel N^4 des Systems $|N^4|$ enthält.

Die Fernebene schneidet die Fläche N^{12} in vier Fernerzeugenden zweier im Flächenbüschel $(H^2)(1,2)$ sich befindenden hyperbolischen Paraboloiden als Doppelgeraden, und in der Absolute, die eine Doppelkurve dieser Fläche ist.

2. Die Flächen der zentrischen Fusspunktkurven in den Flächenscharen 2. Ordnung (H^2)

a) Eine Regelflächenschar 2. Ordnung $(H^2)(3,1)$ ist einem Regelflächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1,3)$ dual und hat die Eigenschaft, dass jeder beliebig angenommene Raumpunkt P drei Flächen der Schar enthält und eine beliebig angenommene Ebene π deren eine berührt. Die Fernebene schneidet diese Schar in einer Fernkurvenschar 2. Ordnung $(h_u^2)(3,2)$.

Die Flächenmittelpunkte als Pole der Fernebene bezüglich der Flächen dieser Schar bilden eine Gerade, ihren gemeinsamen Diametar d. Diese Schar (H^2) (3,1), die von lauter Regelflächen gebildet ist, hat die den allen Flächen gemeinsame Berührebenengewinde 4. Klasse erster Art imaginär. Die Regelflächenschar (H^2) (3,1) enthält vier Flächen, die in Kurven 2. Klasse ausgeartet sind und welche sich in zwei Paaren konjugiert- imaginären Ebenen befinden.

Satz 5: *Der Index des zentrischen Normalkegelsystems* $|N^4|$, *das einer Regelflächenschar* 2. *Ordnung* (H^2) (3,1) *zugeordnet ist, ist* 6.

Beweis: Legt man durch einen beliebig angenommenen Raumpunkt P die asymptotischen Ebenen an die Flächen der Regelflächenschar (H^2) (3,1), erhält man einen Kegel 3. Klasse A^3, den die Fernebene in einer Fernkurve 3. Klasse $a_u{}^3$ schneidet. Da die zugeordnete Berührpunkte A_u eine Fernkurve 5. Ordnung $a_u{}^5$ bilden, hüllen die Polaren der Berührpunkte A_u bezüglich der Absolute eine Fernkurve 5. Klasse $\nu_u{}^5$ ein. Die Tangenten der Fernkurven $a_u{}^3$ und $\nu_u{}^5$ sind (1,1)-deutig zugeordnet und ihre Schnittpunkte erzeugen eine Fernkurve 8. Ordnung $n_u{}^8$. Diejenige Fernpunkte N_u dieser Fernkurve $n_u{}^8$, welche mit der Fernpunkten D_u der entsprechenden Diameter d zusammenfallen, sind die Fernpunkte jener Erzeugenden n der zentrischen Normalkegel des Systems $|N^4|$, welche den Punkt P enthalten. Genauere Überlegungen werden ergeben, dass nur sechs Erzeugenden diese Eigenschaft enthalten.

Durch einen beliebig angenommenen Raumpunkt P und den gemeinsamen Diameter $d^\star$ ist eine Ebene δ bestimmt. Die durch den Punkt P gelegte Diameter d der Flächen der Schar (H^2) (3,1) bilden deswegen ein in der Ebene δ liegendes Strahlbüschel $d(P)$. Wenn man durch die Diameter d des Büschels $d(P)$ die asymptotischen Ebenen an die Flächen der Schar (H^2) (3,1) legt, so wird die Ebene δ selbst eine von diesen sein. Nämlich, da die Fernebene die Flächenschar (H^2) (3,1) in einer Fernkurvenschar $(h_u{}^2)$ (3,2) schneidet, wird die Ferngerade δ_u der Ebene δ zwei Flächen der Schar (H^2) (3,1) berühren. Der eine Berührpunkt gehört dem Fernscheitelpunkt des hyperbolischen Paraboloids und da, in allgemeinen, die Ebene δ keine Fernerzeugende desselben enthält, ist sie keine asymptotische Ebene des hyperbolischen Paraboloids. Es verbleibt, dass die Ebene die asymptotische Ebene jener Fläche $H_l{}^2$ der Schar (H^2) (3,1) ist, die die Ferngerade δ_u im anderen Berührpunkt $A_{l\,u}$ berührt. Durch jeden Diameter d des Büschels $d(P)$ kann man je zwei asymptotischen Ebenen an die Flächen der Schar (H^2) (3,1) legen und die Ebene δ selbst ist die asymptotische Ebene der Fläche $H_l{}^2$ der Schar. Deswegen hüllen die durch den Punkt P an die Flächen der Schar (H^2) (3,1) gelegte asymptotische Ebenen einen Kegl 3. Klasse A^3 ein.

Um die dem Kegel A^3 gehörige Berührpunktkurve zu erhalten, wird zuerst der Index des der Schar (H^2) (3,1) zugeordneten Systems $|A^2|$ der asymptorischen Kegel bestimmt. Da jeder Raumpunkt je drei Flächen der Schar (H^2) (3,1) enthält, wird auch der Fernscheitelpunkt D_u des hyperbolischen Paraboloids noch zwei anderen Flächen der Schar enthalten.

Deswegen ist der gemeinsame Diameter $d^\star$ die Erzeugende a zweier asymptotischen Kegel dieser den Fernpunkt D_u enthaltenden Flächen der Schar (H^2) (3,1). Die Ebene $\delta \equiv (d^\star, P)$ schneidet das System der asymptotischen Kegel $|A^2|$ in einer Kurve 4. Klasse α^4. Nähmlich, jeder Punkt des gemeinsamen Diameter $d^\star$ enthält in der Ebene δ je zwei Erzeugenden a des entsprechenden asymptotischen Kegels A^2 des Systems $|A^2|$. Da der Diameter d selbst zwei Kegeln dieses Systems $|A^2|$ gehört, kann man dem Erhaltungsprinzip nach schliessen, dass der Index des dem Flächenschar (H^2) (3,1) zugeordneten Systems der asymptotischen Kegel $|A^2|$ gleich 4 ist.

Da die Verbindungsgraden der Fernpunkte D_u der Diameter d und der zugeordneten Berührpunkte A_u die Ferngeraden der entsprechenden asymptotischen Ebenen sind, also eine Fernkurve 3. Klasse α_u^3 einhüllen, kann man dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip nach schliessen, dass die angehörige Berührpunkte A_u eine Fernkurve 5. Ordnung a_u^5 bilden.

$a_2n_1 + a_1n_2 - s = m$; $2 \cdot 1 + 1 \cdot n_2 - 4 = 3$; $n_2 = 5$; wo $(a_1, a_2) = (1,2)$ weil jedem Fernpunkt D_u je zwei Berührpunkte A_u zugeordnet sind; n_1 und n_2 sind die Ordnungen der Ferngerade δ_u und der Fernkurve a_u^5; $s = 4$, weil der Punkt P vier Erzeugenden a der asymptotischen Kegel enthalt, die auch die entsprechende Diameter des Büschels $d(P)$ sind; $m = 3$ ist die Klasse des Kegels A^3.

Also die durch einen beliebig gewählten Raumpunkt P an die Flächen der Schar (H^2) (3,1) gelegte asymptotische Ebenen α bilden einen Kegel 3. Klasse A^3 und die zugehörige Berührpunkte bilden eine Fernkurve 5. Ordnung a_u^5. In der Einleitung wurde bemerkt, dass man eine durch den Flächenmittelpunkt O an die in einer asymptotischen Ebene liegenden Erzeugenden h gelegte Normale n als Schnittgerade einer asymptotischen Ebene α mit der durch den Mittelpunkt O orthogonal an die Erzeugenden h gelegte Normalebene ν erhalten kann. Deswegen wird der Fernpunkt N_u dieser Normale n als Schnittpunkt der Ferngerade α_u der ssymptotischen Ebene α mit der Polare ν_u der zugeordneten Berührpunkt A_u bezüglich der Absolute erscheinen. Da die Berührpunkte A_u eine Fernkurve 5. Ordnung a_u^5 bilden, so hüllen die Polaren dieser Punkte bezüglich der Absolute eine Fernkurve 5. Klasse ν_u^5 ein. Die Schnittpunkte der entsprechenden Tangenten der Fernkurven α_u^3 und ν_u^5 bilden eine Fernkurve 8. Odrnung n_u^8. Aber nur diejenige Punkte dieser Fernkurve n_u^8 können als Fernpunkte N_u der den Punkt P enthaltenden Erzeugenden n in Anspruch genommen werden, welche den durch den Punkt P gelegten Diametern, also dem Büschel $d(P)$ gehören. Da die Ferngerade δ_u, der das Büschel $d(P)$ enthaltenden Ebene δ die Fernkurve n_u^8 in acht Fernpunkten schneidet, könnte man schliessen, dass der Raumpunkt P acht Erzeugenden des der Flächenschar (H^2) (3,1) zugeordenten zentrischen Normalkegel des Systems $|N^4|$ enthält. Die Fernebene aber schneidet den Kegel A^3 der durch den Punkt P an die Flächen der Schar (H^2) (3,1) gelegten asymptotischen Ebenen in einer Fernkurve 3. Klasse α_u^3 und da die Ebene δ die asymptotische Ebene der Fläche H_1^2 dieser Schar (H^2) (3,1) ist, fällt die Ferngerade einer durch den gehörigen Diameter d_1 an die Fläche H_1^2 gelegten asymptotischen Ebenen mit der Ferngerade δ_u der Ebene zusammen. Deswegen muss man diese Ebene als eine zweideutige Ebene δ auffassen. Dem Berührpunkt A_{lu} der Fläche H_l^2 entsprechende Fernpunkt D_{lu} des Diameters d_1 ist vom Fernpunkt N_{1u} der zugeordneten zentrischen Normale n_1 verschieden. Also obwohl sich der der Fernkurve n_u^8 gehörige Fernpunkt N_{1u} auf der Ferngerade δ_u befindet, ist der ihm gehörige Diameter d von der entsprechenden zentrischen Normale n_1 verschieden. Wegen der erwähnten Zweideutigkeit der Ebene δ ist auch der Fernpunkt N_{1u} zweimal zu zählen. Es verbleibt also, dass im Strahlbüschel $d(P)$ nur sechs Strahlen als Diameter d und die zentrische Normale n derselben Flächen der Flächenscher (H^2) (3,1) anzunehmen sind.

Satz 6: *Die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven in einer Regelflächenschar* (H^2) (3,1) *ist eine Fläche* 16. *Ordnung* N^{16}.

Bewis: Analog wie bei den Flächenbüscheln 2. Ordnung können auch hier die Punkte einer beliebig angenommenen Gerade p durch die Flächen der Flächenschar (H^2) (3,1) und die zugeordneten zentrischen Normalkegel N^4 des Systems $|N^4|$ verbunden werden. Man nehme an der Gerade p einen Raumpunkt P beliebig an. Dieser Punkt P enthält drei Flächen H^2 der Schar (H^2) (3,1) denen drei Normalkegel N^4 zugeordnet sind. Die Gerade p schneidet diese Kegel in zwölf Punkten N. Derselbe Punkt P enthält sechs Kegel N^4 des Systems $|N^4|$, die den sechs Flächen H^2 in der Schar (H^2) (3,1) zugeordnet sind und die Gerade p schneidet sie in zwölf Punkten H. Lässt man den Punkt P die Gerade p durchlaufen, so werden die Punkte N und H dieser Geraden durch eine (12, 12)-deutige Zuordnung verbunden. Wie bekannt, dies ergibt 24 Inzidenzpunkte, von welchen acht den vier in der Schar (H^2) (3,1) sich befindenden Kurven 2. Klasse gehören und sechzehn an der Fläche der zentrischen Fusspunktkurve gelegt sind. Also die Fläche der zentrischen Fusspunktkurve, die einer Regelflächenschar (H^2) (3,1) zugeordnet ist, ist 16. Ordnung und wird mit N^{16} bezeichnet.

Die Fernebene schneidet die Fläche N^{16} in zwei Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids als Doppelgeraden und in der Absolute, die eine sechsfache Kurve dieser Fläche ist. Nämlich, jeder Punkt der Absolute enthält je drei Flächen der Schar (H^2) (3,1) und jede dieser Flächen enthält je zwei Erzeugenden, welche den der Fusspunktkurven n_1 und n_2 gehörigen Punkt in diesen an der Absolute liegenden Fernpunkt besitzen.

Diese Betrachtungen wurden in einer Flächenschar 2. Ordnung (H^2) (3,1) durchgeführt, die aus lauter Regelflächen gebildet war. Enthält die Schar auch die allgemeinen Flächen 2. Ordnung H^2, so wird wegen des Erhaltungsprinzips dasselbe Ergebnis wie vorher erhalten, aber die zentrische Fusspunktkurve n^4 einer allgemeinen Fläche H^2 wird in diesem Falle als die imaginäre Durchdringungskurve der Fläche N^{16} und dieser Fläche 2. Ordnung erscheinen.

b) Wenn eine Flächenschar (H^2) (2,1) gegeben ist, also eine Schar mit der Eigenschaft, dass jeder beliebig angenommene Raumpunkt P je zwei Flächen der Schar enthält, und jede Ebene π deren eine berührt. Das gemeinsame Berührebenengewinde 4. Klasse erster Art zerfällt hier in zwei Kegel 2. Klasse, die zwei gemeinsame Berührebenen enthalten. Diese Berührebenen gehören als eine ausgeartete Fläche der Schar $(H^2)(2,1)$ an. Ausser dem enthält diese Schar noch zwei Flächen, die in Kurven 2. Klasse ausgeartet sind. Die Flächenmitten O bilden auch hier einen den allen Flüchan der Schar gemeinnsamen Diameter d^*.

Satz 7: *Der Index des zentrischen Normalkegelsystems* $|N^4|$ *das einer Flächenschar* $(H^2)(2,1)$ *zugeordnet ist, ist* 5.

Y& Beweis: Wenn man wie beim Beweis des Satzes 5 vorgeht, erhält man wieder, dass die einen beliebig angenommenen Raumpunkt P enthaltenden asymptotische Ebenen der Flächen einer Flächenschar $(H^2)(2,1)$ einen Kegel 3. Klasse A^3 einhüllen, welchen die Fernebene in einer Fernkurve 3. Klasse $\alpha_u{}^3$ schneidet. Der Index des zugeordneten Systems der asymptotischen Kegel $|A^2|$ ist hier aber gleich 3 und deswegen bilden die den Ebenen des Kegels A^3 gehörige Berührpunkte A_u eine Fernkurve 4. Ordnung $a_u{}^4$. Die Polaren v_u dieser Berührpunkte A_u der Fernkurve $a_u{}^4$ bezüglich der Absolute hüllen eine Fernkurve 4. Klasse $v_u{}^4$ ein. Die Tangenten der Fernkurve $\alpha_u{}^3$ und $v_u{}^4$ sind (1,1)-deutig zugeordnet und ihre Schnittpunkte bilden eine Fernkurve 7. Ordnung $n_u{}^7$. Die Ferngerade δ_u der den Punkt P und den gemeinsamen Diameter d^* enthaltende Ebene δ schneidet diese Kurve in sieben Punkten, aber weil die Ebene α die asymptotische Ebene einer Fläche der Schar $(H^2)(2,1)$ ist, erhält man, aus desselben Grund wie im Satz 7, dass nur fünf den Punkt P enthaltende Diameter d die zentrische Normalen n der entsprechenden Flächen H^2 der Schar $(H^2)(2,1)$ sind. Also der Index des der Flächenschar $(H^2)(2,1)$ zugeordneten Normalkegelsystems $|N^4|$ gleich 5 ist.

Satz 8: *Die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven* n^4, *die den Flächen einer Flächenscher* 2. *Ordnung* $(H^2)(2,1)$ *gehören, bilden eine Fläche* 12. *Ordnung* N^{12}.

Beweis: Mittels der Flächen H^2 einer Flächenschar $(H^2)(2,1)$ und der zugeordneten zentrischen Normalkegel des Systems $|N^4|$, kann man die Punkte einer beliebig angenommenen Gerade p durch eine (8,10)-deutige Zuordnung verbinden. Dies ergibt, wie bekannt, achtzehn Inzidenzpunkte. Zwei von diesen sind die Doppelinzidenzpunkte und gehören zweien Ebenen in welchen sich die in Kurven 2. Klasse ausgearteten Flächen der Schar $(H^2)(2,1)$ befinden. Weitere zwei Punkte gehören der in zwei Berührebenen zerfallenen Fläche. Es ergibt sich also, dass von achtzehn Inzidenzpunkte zwölf die zusammengefallenen Punkte der Fläche H^2 und der entsprechenden zentrischen Normalkegel N^4 sind. Also die einer Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(2,1)$ zugeordnete Fläche der zentrischen Fusspunktkurven ist 12. Ordnung.

Die Fernebene schneidet auch diese Fläche in zwei Ferngeraden, den Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids als Doppelgeraden und in der Absolute die vierfache Kurve dieser Fläche ist.

3. Die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven in einem speziellen Regelflächensystem H^2

Wenn ein spezielles Flächenbüschel $(H^2)(1,1)$ gegeben ist, kann man ihn, wegen der Eigenschaft, dass ein beliebig angenommener Raumpunkt P eine seiner Flächen enthält und irgend eine Ebene π eine Fläche desselben berührt, auch als eine Flächenschar $(H^2)(1,1)$ betrachten. Alle Flüchen dieses Flächensystems $(H^2)(1,1)$ sind Regelflächen, die als Grundkurve einen windschiefen Vierkant enthalten und die gemeinsame Berührebenengewinde hier aus vier Ebenenbüchel besteht. Zwei Flächen des Systems $(H^2)(1,1)$ zerfallen in je zwei Ebenen. Die Flächenmitten bilden einen allen Flächen H^2 dieses Systems $(H^2)(1,1)$ gemeinsamen Diameter $d^\star$.

Satz 9: *Das System der zentrischen Normalkegel* $|N^4|$, *das einem Flächensystem* $(H^2)(1,1)$ *gehört, hat den Index* 4.

Beweis: Alle einen beliebig angenommenen Raumpunkt P emthaltende Diameter d der Flächen eines Flachensystems. 2. Ordnung $(H^2)(1,1)$ bilden ein Strahlbüschel $d(P)$, dass in der den Punkt P und den gemeinsamen Diameter $d^\star$ enthaltenden Ebene δ liegt. Legt man durch diese Diameter die asymptotischen Ebenen an die Flächen des Flächensystems $(H^2)(1,1)$, erhält man so wie bei den anderen Flüchenscharen (H^2) einen Kegel 3. Klasse A^3, den die Fernebene in einer Fernkurve 3. Klasse $\alpha_u{}^3$ schneidet. Die Ebene δ schneidet aber das den Flächensystem $(H^2)(1,1)$ zugeordnete System der asymptotischen Kegel $|A^2|$ in einer Kurve 2. Klasse α^2 und der Index dieses Kegelsystema $|A^2|$ ist also 2. Deswegen bilden hier die den Ebenen des Kegels A^3 zugeordnete Berührpunkte eine Fernkurve 3. Ordnung $a_u{}^3$. Die Polaren v_u der Fernpunkte A_u der Fernkurve $a_u{}^3$ bezüglich der Absolute hüllen eine Fernkruve 3. Klasse $v_u{}^3$ ein. Da die Tangenten der Fernkurven $\alpha_u{}^3$ und $v_u{}^3$ (1,1)-deutig zugeordnet sind, bilden ihre Schnittpunkte A_u eine Fernkurve 6. Ordnung $n_u{}^6$. Auch hier ist die Ebene δ die asymptotische Ebene einer Fläche N^2 des Flächensystems $(H^2)(1,1)$ und obwohl ihre Ferngerade δ_u die Fernkurve $n_u{}^6$ in sechs Fernpunkten N_u schneidet, gibt es auf derselben Grund wie bei anderen Flächenscharen (H^2) nur vier Diameter d des Büschels $d(P)$, die auch zentrische Normale n der entsprechenden Flüschen H^2 sind. Es ergibt sich also, dass der Index des Systema der zentrischen Normalkegel $|H^4|$, das einem Flüchensystem $(H^2)(1,1)$ zugeordnet ist, gleich 4 ist.

Satz 10: *Die Fläche der zentrischen Fusspunktkurvenn, die einem Flächensystem* 2. *Ordnung* $(H^2)(1,1)$ *zugeordnet ist, ist* 8. *Ordnung* N^3,

Beweis: Die Funkte einer beliebig angenomenen Gerade p kann man mittels der Flächen H^2 eines Flächensystems $(H^2)(1,1)$ und der zentrischen Normalkegel N^4 des Systems $|N^4|$ durch eine (4,8)-deutige Zuordnung verbinden. Wie bekannt, ergibt dies zwölf Inzidenzpunkte. Vier dieser Punkte gehören zweien in je zwei Ebenen zerfallene Flächen H^2 des Flächensystems $(H^2)(1,1)$ und acht von ihnen sind die gemeinsamen Punkte der

Flächen H^2 und den zuegordneten zentrischen Normalkegeln N^4. Auf Grund dessen ergibt sich, dass die einem Flächensystem (H^2) (1,1) zu geordnete Fläche der zentrischen Fusspunktkurven eine Fläche 8. Ordnung N^8 ist.

Die Fernebene schneidet die Fläche N^8 in zwei Ferngeraden, die auch hier Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids sind, wieder als Doppelgeraden und in der Absolute als Doppelkurve.

Die Kanten des Grundvierkants sind vierfache Geraden der Flächen N^8, weil jeder Punkt dieser Kante allen Flächen des Systems (H^2) (1,1) gehört und je vier Kegel des Systems $| N^4 |$ enthält.

Wegen allen dieser Überlegungen kann man schliessen, dass das einem Flächenbüschel bzw -schar 2. Ordnung (H^2) zugeordnete System der Zentrischen Normalkegel $| N^4 |$ den Index 6 hat und die zugeordnete Fläche der zentrischen Fusspunktkurven 16. Ordnung N^{16} ist. Wenn das Büschel bzw die Schar r $(r = 1,2)$ Fläche, die in je zwei Ebenen degenerieren, enthält, verringert sich der Index des Kegelsystems um r und die Ordnung der Fläche der zentrischen Fusspunktkurven um $4r$.

LITERATUR:

[1] *Muller-Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Leipzig und wien 1931, Bd III, S 56–56

[2] *V. Niče* Die Achsenregelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades Glasnik matematički 1 21 1966, 215–221

[3] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, Leipzig, 1910, III Abt, S 51–57.

Angenommen zur Veröffentlichung am 28. IX. 1973. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

Ljerka Dočkal, Zagreb

PLOHE CENTRALNIH MNOŽIŠNIH KRIVULJA U LINEARNIM SISTEMIMA PRAVČASTIH PLOHA 2. REDA

Sadržaj

U članku se promatraju centralne nožišne krivulje plohe 2. reda H^2 kao prodorne krivulje te plohe i stošca 4. stupnja N^4 koji tvore normale položene središtem plohe H^2 na izvodnice te plohe. Opiše li plohe H^2 kontinuirano linearni sistem plohe 2. reda (H^2), stošci centralnih normala N^4 izvode kontinuirano linearni sistem stožaca $|N^4|$, a pridružene nožišne krivulje 4. reda $n_1{}^4$ i $n_2{}^4$ tvore plohu N^{16}. Svrha je članka da se ispita indeks sistema stožaca $|N^4|$ i red plohe centralnih nožišnih krivulja u pramenovima ploha $(H^2)(1, n)$ i nizovima ploha $(H^2)(n, 1)$ gdje je $n = 3, 2, 1$.

Da bi se odredio indeks sistema stožaca $|N^4|$ koji je pridružen pramenu ploha $(H^2)(1,3)$, polože se najprije po volji odabranom točkom P prostora dijametri d ploha H^2 tog pramena. Kao što je poznato oni tvore stožac 3. stupnja D^3. Položimo li izvodnicama tog stošca asimptotske ravnine na plohe tog pramena dobivamo stožac 5. razreda A^5, a pridružena dirališta A_u tvore beskonačno daleku krivulju 3. reda $a_u{}^3$. Svakim dijametrom d mogu se položiti po dvije asimptotske ravnine na odgovarajuću plohu, a spojnice parova tako pridruženih dirališta tvore pramen beskonačno dalekih pravaca $p_u(T_u)$. Pravci tog pramena su beskonačno daleki tragovi polarnih ravnina koje su pridružene točki P s obzirom na plohe H^2 pramena $(H^2)(1,3)$.

Da bi neka izvodnica d stošca D^3 bila ujedno i izvodnica n pridruženog stošca N^4 iz sistema $|N^4|$, mora polara δ_u beskonačno daleke točke D_u izvodnice d s obzirom na apsolutu prolaziti onim diralištem A_u koje je pridruženo točki D_u. Budući da točke D_u tvore beskonačno daleku krivulju 3. reda $d_u{}^3$, pridružene polare δ_u koje su konjugirane s obzirom na apsolutu omataju beskonačno daleku krivulju 3. razreda $\delta_u{}^3$. Tangente te krivulje sijeku odgovarajuće pravce pramena $p_u(T_u)$ u točkama neke beskonačne daleke krivulje 4. reda $p_u{}^4$. Krivulja dirališta $a_u{}^3$ i krivulja sjecišta $p_u{}^4$ sijeku se u 12 točaka, ali analiza pokazuje da samo 6 od tih točaka pripadaju dijametrima d koji su ujedno izvodnice n pridruženih stožaca normala N^4, a to znači da sistem stošaca $|N^4|$ ima indeks 6.

Primjenom Chaslesova principa korespondencije mogu se točke nekog po volji odabranog pravca p povezati pomoću ploha pramena (H^2) (1,3) i stožaca sistema $|N^4|$ tako da se dobije (4, 12)-značno pridruženje. Kao što je poznato to pridruženje daje 16 točaka incidencije, iz čega proizlazi da centralne nožišne krivulje koje se nalaze na plohama pramena (H^2) (1,3) tvore plohu 16. reda N^{16}.

Analognim razmatranjem dobije se da sistem stožaca $|N^4|$ koji je pridružen plohama pramena (H^2) (1,2) ima indeks 5, a centralne nožišne krivulje tvore plohu 12. reda N^{12}.

Ako je zadan niz ploha (H^2) (3,1), tada dijametri d tih ploha koji se mogu položiti po volji odabranom točkom P prostora tvore pramen pravaca $d(P)$. Asimptotske ravnine koje se mogu položiti tim dijametrima na pridružene plohe niza (H^2) (3,1) omataju stožac 3. razreda A^3, u pridružena dirališta A_u tvore beskonačno daleku krivulju 5. reda a_u^5. Polare točaka A_u krivulje a_u^5 s obzirom na apsolutu omataju beskonačno daleku krivulju 5. razreda v_u^5. Tangente v_u ove krivulje v_u^5 sijeku pridružene beskonačno daleke tragove asimptotskih ravnina stošca A^3 u točkama beskonačno daleke krivulje 8. reda n_u^8. Ova krivulja siječe beskonačno daleki trag ravnine u kojoj leži pramen $d(P)$ u 8 točaka, no analiza pokazuje da samo 6 od tih točaka pripadaju dijametru d i centralnoj normali n iste plohe niza (H^2) (3,1). Iz toga zaključujemo da sistem stožaca $|N^4|$ koji je pridružen nizu ploha (H^2) (3,1) ima indeks 6.

Točke nekog po volji odabranog pravca p mogu se na temelju Chaslesova principa korespondencije pomoću ploha niza (H^2) (3,1) i stožaca sistema $|N^4|$ povezati (12, 12)-značnim pridruženjem. Od 24 incidentnih točaka tog pridruženja 16 pripadaju plohi centralnih nožišnih krivulja, a ostale su kao dvostruke incidentne točke probodišta pravca p s četirima ravninama u kojima leže one četiri plohe niza koje degeneriraju u krivulje 2. razreda. Izlazi da je ploha centralnih nožišnih krivulja koja je pridružena nizu ploha (H^2) (3,1) 16. reda N^{16}.

Analognim razmatranjem dokazuje se da nizu ploha (H^2) (2,1) odgovara sistem stožaca $|N^4|$ s indeksom 5, a centralne nožišne krivulje tvore plohu 12. reda N^{12}.

Pramenu plohe (H^2) (1,1) pridružen je sisuem stožaca $|N^4|$ s indeksom 4, a centralne nožišne krivulje tvore plohu 8. reda N^8.

Iz navedenog zaključujemo da je linearnom sistemu ploha 2. reda H^2 pridružen sistem stožaca centralnih normala $|N^4|$ s indeksom 6, a pridružene centralne nožišne krivulje tvore plohu 16. reda N^{16}. Ukoliko sistem ploha (H^2) sadrži r $(r = 1{,}2)$ ploha koje degeneriraju u po dvije ravnine, indeks sistema stožaca umanjuje se za r, a red plohe centralnih nožišnih krivulja umanjuje se za $4r$.

Primljeno za publikaciju 28. IX. 1973. u Razredu za matematičke, fizičke, i tehničke nauke Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.