

## DIE HAUPTKURVENFLÄCHE IN LINEAREN FLÄCHENSYSTEMEN 2. ORDNUNG

### Einleitung

Es sei eine Fläche 2. Ordnung  $H^2$  gegeben. Die Fernebene schneidet diese Fläche  $H^2$  in einer Fernkurve 2. Ordnung  $h_u^2$ . Verbindet man die Fernpunkte  $A_u$  des gemeinsamen Polardreiecks der Fernkurve  $h_u^2$  und der Absoluten mit der Flächenmitte  $O$ , erhält man das Haupttetraeder der Fläche  $H^2$ . Die Kanten dieses Tetraeders sind die Flächenachsen  $a$ , welche die Fläche  $H^2$  in den Scheitelpunkten  $T$  schneiden. Die Seiten des Haupttetraeders sind die Haupt- oder Symmetrieebenen  $\gamma$  und schneiden die Fläche  $H^2$  in dem Hauptkurven  $g^2$ . Lässt man die Fläche  $H^2$  ein lineares Flächensystem, also ein Flächenbüschel  $(H^2)(1, n)$  oder eine Flächenschar  $(H^2)(n, 1)$  ( $n = 3, 2, 1$ ) stetig erzeugen, dann werden die Flächenachsen eine Regelfläche, die Hauptebenen ein Ebenengewinde und die Hauptkurven eine Fläche auch stetig erzeugen. Die Scheitelpunkte  $T$  erzeugen eine Raumkurve. Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Ordnung bzw. die Klassen dieser Erzeugnisse zu ermitteln. Bei diesen Untersuchungen wird man sich mit dem Chassleschen Korrespondenzprinzip bedienen,

$$a_2 n_1 + a_1 a_2 - s = m \quad (1)$$

wo  $a_1, a_2$  die Korrespondenz der zugeordneten Elemente bezeichnet;  $n_1$  und  $n_2$  sind die Ordnungen bzw. Klassen der gegebenen Kurven und  $m$  ist die Klasse des Erzeugnisses;  $s$  bezeichnet die Zahl der in der Zuordnung sich selbst zugeordneten Elemente.

1. Wenn ein Flächenbüschel  $(H^2)(1,3)$  gegeben ist, dann wird jeder beliebig angenommene Raumpunkt  $P$  eine Fläche des Büschels enthalten und jede Ebene  $\pi$  drei Flächen desselben berühren. Die Grundkurve des Büschels ist die allen Flächen gemeinsame Kurve 4. Ordnung erster Art  $k^4$ . Die Flächenmitten  $O$  bilden, wie bekannt, als Pole der Fernebene bezüglich der Flächen des Flächenbüschels  $(H^2)(1,3)$  eine Raumkurve 3. Ordnung  $o^3$ .

Die Fernebene schneidet das Flächenbüschel  $(H^2)(1,3)$  in einem Fernkurvenbüschel  $(h_u^2)(1,2)$ . Die Fernecken der gemeinsamen Polardreiecke

der Absolute und je einer Fernkurve  $h_u^2$  des Fernkurvenbüschels  $(h_u^2)$  (1,2) bilden die bekannte Jacobische Fernkurve 3. Ordnung  $a_u^3$ . V. Niče hat in [1] bewiesen, dass die Flächenachsen der Fläche eines Flächenbüschels eine Regelfläche 9. Grades bilden.

Da eine Hauptebene  $\gamma$  an die entsprechende Flächenachse  $a$  orthogonal ist, wird ihre Ferngerade  $\gamma_u$  dem Fernpunkt  $A_u$  der Achse  $a$  bezüglich der Absolute konjugiert sein. Wie erwähnt, bilden die Fernpunkte  $A_u$  der Flächenachsen der Flächen eines Büschels  $(H^2)$  (1,3) eine Jacobische Fernkurve 3. Ordnung  $a_u^3$ . Die Polaren  $\gamma_u$  der Fernpunkte  $A_u$  bezüglich der Absolute werden deswegen eine Fernkurve 3. Klasse  $\gamma_u^3$  einhüllen. Eine Hauptebene  $\gamma$  einer Fläche  $H^2$  erhält man als Verbindungsebene der Flächenmitte  $O$  mit der entsprechenden Ferngerade  $\gamma_u$  der Fernkurve  $\gamma_u^3$ . Auf Grund dessen kann man zwischen den Punkten  $O$  der Raumkurve  $o^3$  und den Ferngeraden  $\gamma_u$  der Fernkurve  $\gamma_u^3$  eine (1,3)-deutige Zuordnung herstellen. Daraus wird sich mittels der Relation (1) die Klasse  $m$  des ersuchten Hauptebengewindes  $I^6$  ergeben.  $(3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 - 6 = 6; n_1 = 3$  ist die Ordnung der Raumkurve  $o^3; n_2 = 3$  ist die Klasse der Fernkurve  $\gamma_u^3; s = 6$  ist, weil ein Flächenbüschel  $(H^2)$  (1,3) drei hyperbolische Paraboloiden enthält, die in den Fernscheitelpunkten die Inzidenz der Flächenmitten mit den Ferngeraden je zweier eigentlichen Hauptebenen enthalten.

Das Hauptebengewinde  $I_u^6$ , das einem Flächenbüschel  $(H^2)$  (1,3) zugeordnet ist, ist also 6. Klasse. Die Fernebene als Hauptebene dreier im Büschel sich befindenden hyperbolischen Paraboloiden, gehört als dreifache Ebene dem Gewinde  $I^6$  an.

Um die Ordnung der dem Flächenbüschel  $(H^2)$  (1,3) zugeordneten Hauptkurvenfläche  $H^{15}$  zu erhalten, werden die Punkte einer beliebig angenommenen Gerade  $p$  durch die Flächen  $H^2$  des Flächenbüschels  $(H^2)$  (1,3) und durch die Ebenen  $\gamma$  des Hauptebengewindes verbunden. Durch das Chaslessche Korrespondenzprinzip ermittelte Inzidenzpunkte dieser Zuordnung wird die Ordnung der Hauptkurvenfläche bestimmt.

Man nehme an der Gerade  $p$  irgend einen Punkt  $P$  beliebig an. Dieser Punkt  $P$  enthält eine Fläche  $H^2$  des Flächenbüschels  $(H^2)$  (1,3) welcher drei Ebenen des Gewindes  $I^6$  zugeordnet sind. Die Gerade  $p$  schneidet diese Ebene in drei Punkten  $G$ . Derselbe Punkt  $P$  enthält sechs Ebenen  $\gamma$  des Gewindes  $I^6$ , denen sechs Flächen  $H^2$  des Flächenbüschels  $(H^2)$  (1,3) entsprechen, welche von der Gerade  $p$  in zwölf Punkten  $H$  durchgeschnitten sind. Einem Punkt  $P$  der Gerade  $p$  korrespondieren also 3 Punkte  $G$  und 12 Punkte  $H$ . Lässt man den Punkt  $P$  die Gerade  $p$  durchlaufen, so werden die auf die beschriebene Weise erhaltene Punkte  $G$  und  $H$  durch eine (3, 12)-deutige Zuordnung der Punkten der Gerade  $p$  verbunden. Wie bekannt, ergibt dies 15 Inzidenzpunkte, welche die gemeinsame Punkte der Flächen  $H^2$  mit ihren Hauptebenen sind. Die Hauptkurvenfläche  $H^{15}$ , die einem Flächenbüschel  $(H^2)$  (1,3) zugeordnet ist, ist also eine Fläche 15. Ordnung.

In der Fernebene gehören dieser Fläche sechs Ferngeraden, die die Fernerzeugenden der dreier im Büschel  $(H^2)$  (1,3) sich befindenden hyperbolischen Paraboloiden sind und eine Fernkurve 9. Ordnung  $h_u^9$ .



Die Grundkurve  $k^4$  ist eine sechsfache Kurve der Fläche  $H^{15}$ , weil jeder Punkt dieser Kurve je sechs Ebenen des Geviertes  $I^6$  und alle Flächen des Büschels  $(H^2)(1,3)$  enthält.

Die Flächenachsen schneiden eine Fläche 2. Ordnung  $H^2$  in den Scheitelpunkten  $T$  und deswegen können sie durch die Flächenachsen involutorisch verbunden werden. Die Relation (1) ergibt in diesem Falle, dass die Scheitelpunkte in einem Flächenbüschel  $(H^2)(1,3)$  eine Raumkurve 15. Ordnung  $t^{15}$  bilden.  $(2n - 12) : 2 = 9$ ; wo  $(a_1, a_2) = (1,1)$ ;  $n_1 = n_2 = n$ ;  $s = 12$ , weil in den Fernscheitelpunkten dreier hyperbolischen Paraboloiden, die an den Fernachsen liegende Fernscheitelpunkte zusammenfallen; wegen der involutorischen Korrespondenz die Relation durch 2 dividiert ist.

2. Ein Flächenbüschel  $(H^2)(1,2)$  hat die Eigenschaft, dass jeder Raumpunkt  $P$  eine Fläche  $H^2$  des Büschels  $(H^2)(1,2)$  enthält und jede Ebene dessen zwei berührt. Eine Fläche des Büschels degeneriert in zwei Ebenen, die zwei sich doppelt schneidenden Kurven 2. Ordnung als Grundkurve enthalten. Die Flächenmitten  $O$  bilden eine Kurve 2. Ordnung  $o^2$ .

Die Fernebene schneidet das Flächenbüschel in einem Fernkurvenbüschel  $(h_u^2)(1,2)$ . Die Fernecken der gemeinsamen Polardreiecke der Absolute und je einer Fernkurve  $h_u^2$  des Fernkurvenbüschels  $(h_u^2)(1,2)$ , bilden wiederum eine Jacobische Fernkurve 3. Ordnung  $a_u^3$ . Durch die Anwendung der Relation (1) erhält man, dass die Flächenachsen eine Regelfläche 7. Ordnung  $A^7$  bilden.  $(3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 2 = 7)$ ; in diesem Falle ist  $s = 2$ , weil das Flächenbüschel  $(H^2)(1,2)$  zwei hyperbolische Paraboloiden enthält, in dessen Fernscheitelpunkten die Fernmitten mit den zugeordneten Fernpunkten  $A_u$  der Fernkurve  $a_u^3$  zusammenfallen.

Das Hauptebengewinde  $I^5$ , das einem Flächenbüschel  $(H^2)(1,2)$  zugeordnet ist, ist wegen analogen Überlegungen ein Ebenengewinde 5. Klasse  $(3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 4 = 5)$ .

Die Ordnungen der Hauptkurvenfläche eines Flächenbüschels  $(H^2)(1,2)$  kann analog wie beim Flächenbüschel  $(H^2)(1,3)$  durch die Zuordnung der Punkte  $G$  und  $H$  auf einer beliebig angenommenen Gerade  $p$ , erhalten werden. Es wird hier eine (3,10)-deutige Korrespondenz dieser Punkte hergestellt. Dies ergibt dreizehn Inzidenzpunkte. Aber, zwei von diesen gehören der in zwei Ebenen ausgearteten Fläche, so dass die Gerade  $p$  die Hauptkurvenfläche in elf Punkten schneidet. Sie ist also eine Fläche 11. Ordnung  $H^{11}$ .

In der Fernebene hat diese Fläche vier Fernerzeugenden zweier hyperbolischen Paraboloiden und eine Fernkurve 7. Ordnung.

Die Kurven 2. Ordnung, welche die Grundkurve bilden, sind fünffache Kurve der Fläche  $H^{11}$ .

Die Scheitelpunkte  $T$  bilden hier eine Raumkurve 10. Ordnung  $t^{10}$  und eine Gerade, die Schnittgrade der in zwei Ebenen ausgearteten Fläche des Büschels  $(H^2)(1,2)$ .  $(2n - 8) : 2 = 7$ ;  $n = 11$ .

3. Wenn eine Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  gegeben ist, dann wird jeder beliebig angenommene Raumpunkt  $P$  drei Flächen der Schar enthalten und jede Ebene deren eine berühren. Es besteht ein gemeinsames Berührebenengewinde 4. Klasse erster Art. Die Flächenmitten bilden als Pole der

Fernebene bezüglich der Flächen der Schar  $(H^2)(3,1)$  eine Gerade, die das gemeinsame Diameter  $d$  dieser Flächen ist. Die Fernebene schneidet diese Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  in einer Fernkurvenschar  $(h_u^2)(3,2)$ .

Für weitere Untersuchungen wird zuerst die Ordnung der Fernkurve  $a_u^5$  der Fernecken  $A_u$  der gemeinsamen Polardreiecke der Absolute und je einer Fernkurve  $h_u^2$  der Fernkurvenschar  $(h^2)(3,2)$  ersucht. Hier muss man beachten, dass die Pole  $G_u$  einer Ferngerade  $g_u$  bezüglich der Fernkurven  $h_u^2$  einer Fernkurvenschar  $(h_u^2)(3,2)$  eine Fernkurve 2. Ordnung  $g_u^2$  bilden. Ausserdem hüllen die Polaren  $\kappa_u$  eines Fernpunktes  $P_u$  bezüglich der Fernkurven dieser Fernkurvenschar  $(h_u^2)(3,2)$  eine Fernkurve 3. Klasse  $\kappa_u^3$  ein.

Man nehme eine Ferngerade  $p_u$  und irgend einen Fernpunkt  $P_u$  dieser Ferngerade beliebig an. Nimmt man die Polare  $g_u$  dieses Fernpunktes  $P_u$  bezüglich der Absolute in Betracht, dann bilden die Pole  $G_u$  der Ferngerade  $g_u$  eine Fernkurve 2. Ordnung  $g_u^2$ . Diese Fernkurve  $g_u^2$  schneidet die Ferngerade  $p_u$  in zwei Fernpunkten  $G_u$ . Die Polaren  $\kappa_u$  desselben Fernpunktes  $P_u$  bezüglich der Fernkurven der Fernkurvenschar  $(h_u^2)(3,2)$  hüllen eine Fernkurve 3. Klasse  $\kappa_u^3$  ein. Der Pol  $A_u$  der Ferngerade  $p_u$  bezüglich der Absolute enthält drei Tangenten  $\kappa_u$  der Fernkurve  $\kappa_u^3$ . Die diesen drei Tangenten konjugierte Pole  $K_u$  bezüglich der Absolute befinden sich an der Ferngerade  $p_u$ . Auf diese Weise werden je einem Fernpunkt  $P_u$  zwei Fernpunkte  $G_u$  und drei Fernpunkte  $K_u$  der Ferngerade  $p_u$  zugewiesen. Lässt man den Fernpunkt  $P_u$  die Ferngerade  $p_u$  durchlaufen, werden die Fernpunkte  $G_u$  und  $K_u$  durch eine (2,3)-deutige Zuordnung verbunden. Dies ergibt, wie bekannt, fünf Inzidenzpunkte, woraus man schliesst, dass die Fernecken der gemeinsamen Polardreiecke der Absolute und je einer Fernkurve  $h_u^2$  der Fernkurvenschar  $(h_u^2)(3,2)$ , eine Fernkurve 5. Ordnung  $a_u^5$  bilden.

Da man eine Flächenachse als Verbindungsgerade der Flächenmitte  $O$  und der entsprechenden Fernpunkte der Fernkurve  $a_u^5$  auffassen kann, werden jeder Flächenmitte  $O$  je drei Fernpunkte  $A_u$  der Fernkurve  $a_u^5$  zugeordnet. Die Achsenregelfläche einer Flächenschar  $(h_u^2)(3,2)$  wird deswegen als Fläche der Verbindungsgeraden der (1,3)-deutig zugeordneten Punkte  $O$  des gemeinsamen Diameters  $d$  und der Fernpunkte  $A_u$  der Fernkurve  $a_u^5$  erhalten. Mittels des Chaleschen Korrespondenzprinzips (1) ergibt sich, dass die Achsenregelfläche in einer Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  7. Grades  $A^7$  ist. ( $3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 1 = 7$ ).

Die Fernebene schneidet die Fläche  $A^7$  in der Fernkurve  $a_u^5$  und in zwei Ferngeraden, die die Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids sind.

Da die Ferngerade  $\gamma_u$  einer Hauptebene dem Fernpunkt  $A_u$  der entsprechenden Flächenachse  $a$  bezüglich der Absolute konjugiert ist, werden die Ferngeraden der Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  zugeordneten Hauptebenen eine Fernkurve 5. Klasse  $\gamma_u^5$  einhüllen. Da jeder Flächenmitte  $O$  des gemeinsamen Diameters  $d$  je drei Ferntangente der Fernkurve  $\gamma_u^5$  zugeordnet sind, erhält man mittels (1), dass die Hauptebengwinde  $\Gamma^6$  einer



Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  ein Ebenengewinde 6. Klasse  $I^6$  bilden.  $(1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 - 2 = 6)$ .

Die Fernebene ist eine Hauptebene des in der Schar sich befindenden hyperbolischen Paraboloids und gehört dem Ebenengewinde  $I^6$  an.

Analog wie bei den Flächenbüscheln, erhält man die Ordnung der Hauptkurvenfläche auch in einer Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  durch die Zuordnung der Punkte  $G$  und  $H$  an einer beliebig angenommenen Gerade  $p$ . Irgend ein Punkt  $P$  der Geraden  $p$  enthält drei Flächen der Schar, denen neun Hauptebenen  $\gamma$  des Ebenengewindes  $I^6$  zugeordnet sind. Derselbe Punkt enthält sechs Ebenen  $\gamma$  des Ebenengewindes  $I^6$ , denen sechs Flächen  $H^2$  der Schar  $(H^2)(3,1)$  zugeordnet sind. Die Gerade  $p$  schneidet sie in zwölf Punkten  $H$ . Lässt man den Punkt  $P$  die Gerade  $p$  durchlaufen, werden die Punkte  $G$  und  $H$  dieser Geraden durch eine  $(9, 12)$  Korrespondenz verbunden. Dies ergibt 21 Inzidenzpunkte. Die Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  enthält vier Flächen, die in vier Kurven 2. Klasse ausgeartet sind. Die Schnittpunkte der Geraden  $p$  mit diesen vier Ebenen sind als Doppelinzipidenzpunkte unter den 21 Punkten enthalten. Es verbleibt, dass die Gerade  $p$  die Hauptkurvenfläche in 13 Punkten schneidet. Also, die Hauptkurvenfläche, welche einer Flächenschar  $(H^2)(3,1)$  zugeordnet ist, ist eine Fläche 13. Ordnung  $H^{13}$ .

Die Fernebene schneidet diese Fläche in einer Fernkurve 11. Ordnung und zwei Ferngeraden, die die Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids sind.

Die Scheitelpunktkurve wird auch hier durch die mittels der involutorisch verbundenen Zuordnung dieser Punkte erhalten. Auf Grund der Relation (1) ergibt sich  $(2n - 4) : 2 = 7; n = 9$ . Die Scheitelpunktkurve ist doch eine Raumkurve 5. Ordnung  $t^5$ , weil die Schar vier in die Kurven 2. Klasse, also in die Ebenen ausgeartete Flächen enthält. Die Scheitelpunkte sind in diesem Falle unbestimmt und  $n$  wird um 4 vermindert.

4. Wenn eine Schar  $(H^2)(2,1)$  gegeben ist, dann wird jeder beliebig angenommene Raumpunkt  $P$  zwei Flächen der Schar enthalten und jede Ebene  $\pi$  eine dieser Flächen berühren. Das gemeinsame Berührebenengewinde zerfällt hier in zwei Kegel. 2. Klasse. Die Schar enthält zwei Flächen die in Kurven 2. Klasse degenerieren und eine Fläche, die in zwei Ebenen ausgeartet ist. Die Fernebene schneidet diese Schar in einer Fernkurvenschar  $(h^2)(2,2)$ . Die Flächenmitten  $O$  bilden den gemeinsamen Diameter  $d$  aller Flächen der Schar.

Die Fernecken der gemeinsamen Polardreiecke der Absolute und je einer Fernkurve  $h_u^2$  der Schar  $(h_u^2)(2,2)$  bilden hier eine Fernkurve 4. Ordnung  $ao^4$ . Nämlich, analoge Betrachtungen wie im 3. ergeben wiederum, dass die Pole einer Ferngeraden  $g_u$  bezüglich den Fernkurven  $h_u^2$  der Fernkurvenschar  $(h_u^2)(2,2)$  eine Fernkurve 2. Ordnung  $g_u^2$  bilden, aber die Polaren  $\kappa_u$  eines Fernpunktes  $P_u$  bezüglich derselben Schar eine Fernkurve 2. Klasse  $\kappa_u^2$  einhüllen. Man nehme jetzt eine Ferngerade  $p_u$  und auf ihr einen Fernpunkt  $P_u$  beliebig an. Die Pole der Polare  $g_u$  dieses Fernpunktes  $P_u$  bezüglich der Absolute bilden wieder eine Fernkurve  $g_u^2$ , die die Ferngerade  $p_u$  in zwei Fernpunkten  $G_u$  schneidet. Die Polaren des-

selben Fernpunktes  $P_u$  bezüglich aller Fernkurven  $h_u^2$  der Schar  $(h_u^2)$  (2,2) hüllen eine Fernkurve 2. Klasse  $\varkappa_u^2$  ein. Der Pol  $A_u$  der Ferngerade  $p_u$  bezüglich der Absolute enthält zwei Tangenten dieser Fernkurve  $\varkappa_u^2$ . Diesen Tangenten sind bezüglich der Absolute zwei Fernpunkte  $K_u$  der Ferngerade  $p_u$  konjugiert. Auf diese Weise sind einem Fernpunkt  $P_u$  zwei Fernpunkte  $G_u$  und zwei Fernpunkte  $K_u$  zugeordnet. Lässt man den Fernpunkt  $P_u$  die Ferngerade  $p_u$  durchlaufen, wird man eine (2,2) Korrespondenz der Fernpunkte  $G_u$  und  $K_u$  erhalten. Dies ergibt vier Inzidenzpunkte, woraus man schliesst, dass die Fernecken  $A_u$  der gemeinsamen Polar-dreiecke der Absolute und je einer Fernkurve  $h_u^2$  der Fernschar  $(h_u^2)$  (2,2) eine Fernkurve 4. Ordnung  $a_u^4$  bilden.

Durch (1,3) Korrespondenz der Punkte  $O$  des Diameters  $d$  und der Fernpunkte  $A_u$  der Fernkurve  $a_u^4$  erhält man aus der Relation (1), dass die Achsenregelfläche in einer Flächenschar  $(H^2)$  (2,1) eine Regelfläche 6. Ordnung  $A^6$  ist.  $(1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 1 = 6)$ . Die Fernebene schneidet die Fläche  $A^6$  in der Fernkurve  $a_u^4$  und zwei Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids.

Die Ferngeraden  $\gamma_u$  der Hauptebenen hüllen als Polaren der Fernpunkte  $A_u$  der Fernkurve  $a_u^2$  bezüglich der Absolute eine Fernkurve 4. Klasse  $\gamma_u^4$  ein. Durch (1,3) Korrespondenz der Punkte  $O$  des gemeinsamen Diameters  $d$  und der Ferntangenten der Fernkurve  $\gamma_u^4$  bilden die Hauptebenen ein Ebenengewinde 5. Klasse  $I^5 \cdot (1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 = 5)$ . Die Fernebene als Hauptebene des hyperbolischen Paraboloids gehört diesem Gewinde  $I^5$  an.

Durch die Ebenen  $\gamma$  des Gewindes  $I^5$  und die Flächen  $H^2$  der Flächenschar  $(H^2)$  (2,1) sind die Punkte  $G$  und  $H$  einer angenommenen Gerade  $p$  durch eine (6, 10)-deutige Zuordnung verbunden. Dies ergibt sechzehn Inzidenzpunkte. Unter diesen sind zwei Doppelinzidenzpunkte, in denen die Gerade  $p$  die Kurven 2. Klasse enthaltenden Ebenen schneidet und zwei dieser Punkte gehören der in zwei Ebenen ausgearteten Fläche an. Es bleibt, dass die Gerade  $p$  die einer Schar  $(H^2)$  (2,1) zugeordnete Hauptkurvenfläche in 10 Punkten schneidet. Diese Fläche ist also 10. Ordnung  $H^{10}$ .

Die Scheitelpunktkurve wird wieder durch die mittels den Flächenaachsen durchgeführte involutorische Verbindung der Punkte  $T$  erhalten. Aus Relation (1) ergibt sich  $(2n - 4) : 2 = 6; n = 8$ . Wegen zwei in der Schar sich befindenden Flächen, die in Kurven 2. Klasse ausarten, vermindert sich  $n$  um 2. Die Scheitelpunktkurve besteht hier aus einer Raumkurve 5. Ordnung  $t^5$  und einer Gerade, welche die Schnittgerade der in zwei Ebenen degenerierten Fläche ist.

5. Ein Flächenbüschel  $(H^2)$  (1,1) hat die Eigenschaft, dass jeder beliebig angenommene Raumpunkt  $P$  eine Fläche des Büschels enthält und jede Ebene  $\pi$  eine Fläche desselben berührt. Deswegen hat das Flächenbüschel  $(H^2)$  (1,1) auch die Eigenschaft einer Flächenschar. Die Fernebene schneidet dieses Flächenbüschel  $(H^2)$  (1,1) in einen Fernkurvenbüschel  $(h_u^2)$  (1,2). Die Grundkurve des Büschels besteht aus einem windschiefen Vierkant und das gemeinsame Berührebenengewinde zerfällt in vier Ebenenbüschel. Die Flächenmitten  $O$  bilden den gemeinsamen Diameter  $d$ .



Die Fernecken der gemeinsamen Polardreiecken der Absolute und der Fernkurven  $h_u^2$  des Fernkurvenbüschels  $(h_u^2)(1,2)$  bilden, so wie bei anderen Büscheln, die Jacobische Fernkurve 3. Ordnung  $a_u^3$ . Die Achenregelfläche wird deswegen eine Regelfläche 5. Ordnung  $A^5$  sein. ( $1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 1 = 5$ ). In der Fernebene gehört dieser Fläche die Fernkurve  $a_u^3$  an und zwei Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids.

Das Hauptebengewinde ist hier ein Gewinde 4. Klasse  $I^4$ . ( $1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 2 = 4$ ). Die Fernebene, als Hauptebene des hyperbolischen Paraboloids, gehört diesem Gewinde  $I^4$  an.

Durch die Ebenen des Gewindes  $I^4$  und die Flächen  $H^2$  des Flächenbüschels  $(H^2)(1,1)$  werden hier die Punkte  $G$  und  $H$  einer beliebig angenommenen Gerade  $p$  durch eine  $(3,8)$  Korrespondenz verbunden. Dies ergibt elf Inzidenzpunkte. Da im Flächenbüschel  $(H^2)(1,1)$  zwei Flächen in je zwei Ebenen ausarten, gehören vier von diesen Inzidenzpunkten den ausgearteten Flächen. Die Gerade  $p$  schneidet also die Hauptkurvenfläche in sieben Punkten und diese Fläche  $H^7$  ist deswegen 7. Ordnung.

Die Scheitelpunkte bilden eine Raumkurve 5. Ordnung  $T^5$  und zwei Geraden, welche die Schittgeraden der in je zwei Ebenen ausgeratete Flächen des Büschels sind. ( $(2n - 4) : 2 = 5$ ;  $n = 7$ ).

Betrachtet man die erhaltene Ergebnisse bemerkt man, dass in einem Flächensystem  $(H^2)$  das Hauptebengewinde 6.  $I^6$  ist. Wenn das System  $r$  ( $r = 1,2$ ) Flächen enthält, verringert sich die Klasse des Gewindens um  $r$ .

Wenn man die Fernebene als Fernseite der Haupttetraeder aller Flächen des Systems  $(H^2)$  der Hauptkurvenfläche zugibt, wird diese auch eine Fläche 16. Ordnung  $H^{16}$  sein. Bei den Flächenscharen  $(H^2)(n, 1)$  wird die Fernebene offenbar  $n$ -fach zugegeben. Enthält das Flächensystem  $(H^2)$   $r$  Flächen, die in je zwei Ebenen ausarten, wird die Ordnung der Hauptkurvenfläche um  $4r$  vermindert.

Wenn sich in einem Flächensystem  $(H^2)$   $p$  ( $p = 1, 2, 3$ ) hyperbolische Paraboloiden befinden, dann ist die Scheitelpunktkurve eine Raumkurve  $5p$ -ter Ordnung.

#### LITERATUR:

- [1] *Müller-Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Leipzig und Wien 1931, Bd III, S 46–56.
- [2] *V. Niče*, Die Achsenregelfläche eines Flächenbüschels 2. Grades Glasnik matematički 1 21 1966, 215–221.
- [3] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, Leipzig, 1910, III A<sup>1</sup>, S 51–57.

Angenommen zur Veröffentlichung am 28. IX. 1973. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

## PLOHE GLAVNIH KRIVULJA U LINEARNIM SISTEMIMA PLOHA 2. REDA

### Sadržaj

Svaka ploha 2. reda  $H^2$  ima tri glavne ravnine, odnosno ravnine simetrije koje se sijeku u osima plohe, a plohu  $H^2$  sijeku u glavnim krivuljama. Opiše li ploha 2. reda  $H^2$  linearni sistem ploha ( $H^2$ ), tada osi plohe izvode pravčastu plohu, glavne ravnine omataju omataljku  $I^6$ , a glavne krivulje tvore plohu  $G^{16}$ . Tjemena  $T$  plohe  $H^2$  opisuju dvostruku krivulju  $t^{15}$  na plohi glavnih krivulja  $G^{16}$ .

Neka je zadan pramen plohe 2. reda ( $H^2$ ) (1,3). V. Niče je dokazao da u tom slučaju tvore osi pravačastu plohu 9. reda, pri čemu su beskonačno daleke točke osi vrhovi zajedničkih autopolaranih trovrha apsolute i pojedinih beskonačno dalekih krivulja ploha tog pramena te tvore Jacobijevu krivulju 3. reda  $a_u^3$ . S obzirom na to da su glavne ravnine okomite na odgovarajućim osima, beskonačno daleki tragovi  $\gamma_u$  kao polare točaka krivulje  $a_u^3$  s obzirom na apsolutu omataju beskonačno daleku krivulju 3. razreda  $\gamma_u^3$ . Pomoću Chaslesova principa korespondencije i zbog (1,3)-značnog pridruženja točaka krivulje središta, dakle krivulje 3. reda  $o^3$  i tangenta krivulje  $\gamma_u^3$  u članku se izvodi da glavne ravnine koje su pridružene ploham pramena ( $H^2$ ) (1,3) omataju omataljku 6. razreda  $I^6$ .

Točke po volji odabranog pravca  $p$  mogu se povezati pomoću ploha pramena ( $H^2$ ) (1,3) i ravnina omotaljke  $I^6$  (3,12)-značnim pridruženjem koje daje 15 incidentnih točaka. Iz tog zaključujemo da glavne krivulje ploha pramena ( $H^2$ ) (1,3) tvore plohu 15. reda  $G^{15}$ .

Tjemena plohe 2. reda involutorno su povezana pomoću osi plohe. Budući da je poznat stupanj pravčaste plohe osi izvodi se pomoću Chaslesova principa korespondencije da tjemena  $T$  tvore prostornu krivulju 15. reda  $t^{15}$ .

Nadalje se promatra niz ploha 2. reda ( $H^2$ ) (3,1) i dokazuje da vrhovi zajedničkih autopolaranih trovrha apsolute i beskonačno dalekih krivulja pojedinih ploha niza ( $H^2$ ) (3,1) tvore beskonačno daleku krivulju 5. reda  $a_u^5$ . (1,3)-značnim pridruženjem točaka  $O$  zajedničkog dijametra  $d$  i odgovarajućih točaka krivulje  $a_u^5$  dobije se da osi ploha kao spojnice ovako pridruženih točaka tvore pravčastu plohu 7. stupnja.



Beskonačno daleki tragovi glavnih ravnina kao polare točaka krivulje  $a_u^5$  s obzirom na apsolutu omataju krivulju 5. razreda  $\gamma_u^5$ . Spajanjem (1,3)-značno pridruženih točaka  $O$  zajedničkog dijametra  $d$  i tangenata krivulje  $\gamma_u^5$  dobiva se da glavne ravnine ploha niza  $(H^2)(3,1)$  omataju omataljku 6. razreda  $I^6$ .

Na temelju Chaslesova principa korespondencije mogu se točke po volji odabranog pravca  $p$  povezati pomoću ploha niza  $(H^2)(3,1)$  i ravnina omataljka  $I^6$  (9,12)-značnim pridruženjem. Ovo pridruženje daje 21 incidentnu točku od kojih su 4 dvostruke incidentne točke i u njima pravac  $p$  proboda ravnine u kojima leže plohe iz niza  $(H^2)(3,1)$  koje su degenirale krivulje 2. razreda. Preostaje da glavne krivulje u nizu ploha  $(H^2)(3,1)$  tvore plohu 13. reda  $G^{13}$ . Tjemena ploha involutorno su povezana pomoću osi ploha i tvore prostornu krivulju 5. reda  $t^5$ .

U pramenu ploha  $(H^2)(1,1)$  osi tvore plohu 5. reda, glavne ravnine omataju omataljka 4. razreda, a glavne krivulje tvore plohu 7. reda. Tjemena se nalaze na prostornoj krivulji 5. reda.

Pridruži li se beskonačno daleka ravnina kao strana glavnih tetraedara svih ploha linearnog sistema ploha  $(H^2)$  plohi glavnih krivulja i usporedimo li izvedene rezultate, dobije se da u linearnom sistemu ploha 2. reda  $(H^2)$  glavne ravnine omataju omataljke 6. razreda  $I^6$ , a glavne krivulje tvore plohu 16. reda  $G^{16}$ . Ako sistem sadrži  $r$  ( $r = 1, 2$ ) ploha koje degeneriraju u po dvije ravnine, razred omataljke se umanjuje za  $r$ , a red ploha glavnih krivulja za  $4r$ . Ako sistem sadrži  $p$  ( $p = 1, 2, 3$ ) hiperboličkih paraboloida, tjemena ploha tvore prostornu krivulju  $5p$ -tog reda.

*Primljeno za publikaciju 28. IX. 1974. u Razredu za matematičke, fizičke, i tehničke nauke Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.*