GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 9 (29) — No. 1 — 1974.

# DIE STRIKTIONSLINIENFLÄCHE EINES LINEAREN REGELFLÄCHENSYSTEMS 2. ORDNUNG

**Ljerka Dočkal,** Zagreb

## Einleitung

Legt man durch eine Erzeugende $h$ einer Regelfläche $H$ eine Ebene senkrecht auf die asymptotischen Ebene dieser Erzeugenden $h$, so erhält man die Zentralebene $\zeta$ der erwähnten Erzeugenden $h$, deren Berührpunkt mit der Fläche $H$ ein Zentralpunkt $S$ genannt wird. Der Ort der Zentralpunkte $S$ einer Regelfläche $H$ ist die vom G. Monge definierte Striktionslinie $s$ der Fläche $H$. Lässt man die Regelfläche $H$ stetig ein lineares Regelflächensystem erzeugen, dann werden die stetig verbundenen Striktionslinien eine Striktionslinienfläche $S$ bilden. Der Gegenstand dieser Arbeit wird die Untersuchung der Striktionslinienflächen $S$ in den Regelflächenbüscheln und in den Regelflächenscharen 2. Ordnung sein.

Bevor diese Untersuchungen durchgeführt werden, werden wir diejenigen, schon bekannten Eigenschaften der Striktionslinie eines einschalligen Hyperboloids und eines hyperbolischen Paraboloids angeben, welche in diesen Untersuchungen gebraucht werden.

1. Je zwei parallele Erzeugende eines einschaligen Hyperboloids $H^2$ gehören zu verschiedenen Erzeugendensystemen. Die diese Erzeugende enthaltende Ebene ist eine asymptotische Ebene $\alpha$ der Fläche $H^2$. Legt man durch jede dieser parallelen Erzeugenden je eine auf die asymptotische Ebene $\alpha$ senkrechte Ebene, so erhält man zwei parallele Zentralebenen $\zeta_1$ und $\zeta_2$ der Fläche $H^2$. Die zu diesen Ebenen gehörigen Berührpunkte sind die Zentralpunkte $S_1$ und $S_2$ der Fläche $H^2$. Diese Punkte liegen bezüglich des Flächenmittelpunktes symmetrisch und ihre Verbindungsgerade ist der den Zentralebenen $\zeta_1$ und $\zeta_2$ konjugierte Diameter $z$. Auf Grund dessen ergibt sich, dass der den zwei parallelen Zentralebenen konjugierte Diameter $z$ sich in der diesen Zentralebenen zugeordneten asymptotischen Ebene $\alpha$ befindet.

2. Die Zentralebene $\zeta$ einer Erzeugenden $h$ verbindet diese mit seiner Zentraltangente $c$, die das Gemeinlot der Erzeugenden $h$ mit ihrer konsekutiven ist. Deswegen ist der Fernpunkt $C_u$ der Zentraltangente $c$ der Pol der Fernspur $a_u{}^2$ der asymptotischen Ebene $\alpha$ bezüglich der Absoluten.

---

*AMS (MOS) subject classifications* (1970): Primary 50D40.

Ovaj rad je financirao Republički fond za naučni rad SRH.

3. Die Fernkurve $h_u^2$ des Hyperboloids $H^2$ wird durch die Fernspuren $a_u$ seiner asymptotischen Ebenen eingehüllt, ist also eine Fernkurve 2. Klasse $a_u^2$. Die Pole dieser Ferngeraden $a_u$ bezüglich der Absoluten sind die Fernpunkte $C_u$ der zu den zugeordneten Erzeugenden $h$ gehörigen Zentraltangenten $c$ und bilden eine Fernkurve 2. Ordnung $c_u^2$. Die Ferngeraden der zugehörigen Zentralebenen, die als Verbindungsgeraden zweiter eindeutig reziprok, also projektiv verwandten Punktreihen 2. Ordnung $h_u^2$ und $c_u^2$ erscheinen, hüllen eine Fernkurve 4. Klasse $\zeta_u^4$ ein, die in den Ferngeraden der Hauptebenen die Doppelgerade hat. Die Pole $z_u$ der Berührgeraden der Fernkurve $\zeta_u^4$ bezüglich der Fernkurve $h_u^2$ bilden eine Fernkurve 4. Ordnung $z_u^4$. Verbindet man die Punkte der Fernkurve $z_u^4$ mit dem Flächenmittelpunkt, erhält man einen Kegel 4. Ordnung $Z^4$, der Zentralkegel genannt wird. Seine Erzeugenden $z$ sind die zu den Zentralebenen konjugierten Diameter. Dies ist ein rationaler Kegel, dessen Doppelerzeugende die Hauptachsen des Hyperboloids $H^2$ sind.

4. Die Striktionslinie eines einschaligen Hyperboloids $H^2$ ist seine Durchdringungskurve mit dem ihm zugeordneten Zentralkegel $Z^4$. Sie ist also eine Kurve 8. Ordnung, die aber in zwei Kurven 4. Ordnung 2. Art $s_1^4$ und $s_2^4$ zerfällt. Jede Erzeugende $h$ der Fläche $H^2$ ist die Unisekante einer diesen Kurven und die Trisekante der anderen. Offenbar gehört jede dieser Kurven je einem Erzeugendensystem der Fläche $H^2$ als Striktionslinie an.

5. Nach E. Danzer kann man die Striktionslinien $s_1^4$ und $s_2^4$ eines einschaligen Hyperboloids $H^2$ erhalten, indem man um die Nebenachse der Kehlellipse des Hyperboloids $H^2$ eine Kugel $K_b^2$ beschreibt. Danach legt man die eine Erzeugende $h$ des Hyperboloids $H^2$ enthaltenden Berührebenen der Kugel $K_b^2$. Man erhält so ein Ebenenpaar, das mit der asymptotischen Ebene der Erzeugenden $h$ gleiche Winkel bildet. Lässt man jetzt die Erzeugende $h$ ein Erzeugendensystem des Hyperboloids $H^2$ erzeugen, so werden die gemeinsamen Berührebenen des Hyperboloids $H^2$ und der Kugel $K_b^2$ zwei Drehzylinder umhüllen. Die Achsen dieser Zylinder sind die Asymptoten der Fokalhyperbel des Hyperboloids $H^2$, also seine Fokalachsen. Diese Zylinder berühren das Hyperboloid $H^2$ längs zweier Ellipsen $e_1$ und $e_2$, die sich in zwei zu den Fokalachsen bezüglich des Hyperboloids $H^2$ konjugierten Ebenen befinden. Die Punkte dieser Ellipsen sind die auf dem Hyperboloid $H^2$ liegenden Berührpunkte der gemeinsammen Berührebenen des Hyperboloids $H^2$ und der Kugel $K_b^2$. Nach dem Chaslessche Korrelationsprinzip ist das Doppelverhältnis der Berührebenen, die durch eine Erzeugende gelegt sind, gleich dem der zugeordneten Berührpunkte. Die asymptotische und Zentralebene sind die Symmetrie-

ebenen des Winkels der durch die Erzeugende $h$ gelegten gemeinsamen Berührebenen des Hyperboloids $H^2$ und der Kugel $K_b^2$. Sie bilden also einen harmonischen Ebenenwurf und ihre Berührpunkte offenbar auch einen solchen. Da der Berührpunkt der asymptotischen Ebene ein Fernpunkt ist, muss sich der Berührpunkt $S$ der Zentralebene, also der Zentralpunkt $S$, in der Mitte der durch die Ellipsen $e_1^2$ und $e_2^2$ auf der Erzeugenden $h$ begrenzten Strecke befinden. Auf diese Weise kann man durch solche Mitten $S$ die beiden Striktionslinien $s_1^4$ und $s_2^4$ des einschaligen Hyperboloids $H^2$ erhalten.

6. Auf die in 5. beschriebene Weise der Erzeugung der Striktionslinie erhält man, dass die Fernpunkte der Ellipsen $e_1$ und $e_2$ also die konjugiert imaginären Fernpunktepaare auch zu der Striktionslinie gehören. Da jeder Punkt des Hyperboloids $H^2$ je zwei Erzeugende enthält, müssen auch die Fernpunkte der Ellipsen $e_1$ und $e_2$ deren zwei enthalten. Diese Punkte gehören also zu der in die Kurven 4. Ordnung $s_1^4$ und $s_2^4$ zerfallene Striktionslinie. Legt man in der Fernebene die gemeinsamen Berührgeraden der Fernkurve $h_u^2$ des Hyperboloids $H^2$ und der Absoluten, so sind die auf der Fernkurve $h_u^2$ liegenden Berührpunkte die Fernpunkte der erwähnten Ellipsen $e_1$ und $e_2$, also die Fernpunkte der Striktionslinien $s_1^4$ und $s_2^4$. Diese Berührpunkte sind in Paaren konjugiert imaginär, und deren Fernträger enthält den Fernpunkt der Nebenachse $b$ der Kehlellipse des Hyperboloids $H^2$.

7. Die Striktionslinie des hyperbolischen Paraboloids $H_p^2$ zerfällt in zwei Parabeln und in zwei Fernerzeugende $g_u$ und $h_u$ dieser Fläche, welche als Doppelgerade zu nehmen sind.

Nämlich, die asymptotischen Ebenen des hyperbolischen Paraboloids $H_p^2$ bilden zwei Parallelebenenbüschel. Legt man durch jede Erzeugende $h$ der Fläche $H_p^2$ die zugeordnete Zentralebene $\zeta$, also die zu der zugehörigen asymptotischen Ebene orthogonale Ebene, so hüllen alle diese Ebenen zwei parabolische Zylinder ein. Die Zentraltangenten der Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids $H_p^2$ bilden zwei Berührzylinder mit den Scheiteln in den Polen der Fernerzeugenden $g_u$ und $h_u$ bezüglich der Absoluten. Die Striktionslinien als Durchdringungskurven des hyperbolischen Paraboloids $H_p^2$ und dieser zwei parabolischen Berührzylinder bestehen aus zwei Parabeln. Diesen Kurven muss man noch die Ferngeraden $g_u$ und $h_u$ als Doppelgerade zuzählen, längs welcher sie das hyperbolische Paraboloid $H_p^2$ schneiden.

8. Der in 3. beschreibene Zentralkegel $Z^4$ zerfällt beim hyperbolischen Paraboloid $H_p^2$ in zwei Büschel von Parallelgeraden, die sich in den Ebenen der Striktionsparabeln befinden und in ein Ferngeradenbüschel, das man zweimal zählen muss.

## 1. Die Striktionslinienflächen in den Regelflächenbüscheln 2. Ordnung

Ein Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1, n)$ ist dadurch charakterisiert, dass ein beliebig angenommener Raumpunkt $P$ je eine Fläche $H^2$ desselben enthält und irgend eine Ebene $\pi$ deren $n$ $(n = 3, 2, 1)$ berührt. Die Fernebene schneidet das Flächenbüschel $(H^2)(1, n)$ in einem Fernkurvenbüschel $(h_u^2)(1, 2)$.

a) Ein Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1, 3)$ hat als Grundkurve, also als gemeinsame Durchdingungskurve aller Flächen des Büschels, eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art $k^4$. Wenn das Flächenbüschel $(H^2)(1, 3)$ ausschliesslich nur Regelflächen enthält, besteht seine Grundkurve aus zwei unpaaren Kurvenzweigen. Dieses Flächenbüschel enthält zwei Paare konjugiert-imaginärer Hauptpunkte als Scheitel des diesem Büschel angehörigen Polartetraeders. Die Mittelpunkte der Flächen $H^2$ bilden als Polare der Fernebene bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ eine Raumkurve 3. Ordnung $o^3$.

SATZ 1. *Die den Flächen eines Flächenbüschels* 2. *Ordnung* $(H^2)$ $(1, 3)$ *zugeordneten Zentralkegel* $Z^4$ *bilden ein Zentralkegelsystem* $|Z^4|$ *mit dem Index* 6.

*Beweis.* Legt man durch einen Raumpunkt $P$ die Diameter $d$ der Flächen $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$, erhält man einen Kegel 3. Ordnung $D^3$, den die Fernebene in einer Fernkurve 3. $d_u^3$ schneidet. Durch jede Erzeugende $d$ dieses Kegels kann man zwei asymptotischen Ebenen an die Flächen $H^2$ des Flächenbüschels legen und alle diese Ebenen hüllen einen Kegel ein. Jeder dieser asymptotischen Ebenen ist je eine Zentralebene $\zeta$ zugeordnet, so dass alle diese Ebenen $\zeta$ ein Ebenengewinde bilden. Es ist zu zeigen wie viele der Erzeugenden $d$ des Kegels $D^3$ den zugeordneten Zentralebenen der entsprechenden Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ konjugiert sind.

Die dem Raumpunkt $P$ zugeordneten Polarebenen $\pi$ bezüglich der Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ bilden, wie bekannt, ein Ebenenbüschel $\pi(t)$. Die Fernebene schneidet das Flächenbüschel in einem Fernkurvenbüschel $(h_u^2)(1, 2)$ und das Polarebenenbüschel $\pi(t)$ in einem Ferngeradenbüschel $p_u(T_u)$. Diese zwei Büschel sind projektiv zugeordnet, so dass die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Elemente eine Fernkurve 3. Ordnung $a_u^3$ bilden. Die Punkte dieser Fernkurve $a_u^3$ sind die Berührpunkte der durch den Punkt $P$ an die entsprechenden Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ gelegten asymptotischen Ebenen. Jede asymptotische Ebene $\alpha$ kann man als Verbindungsebene eines Diameters $d$ mit dem zugeordneten Berührpunkt $A_u$ auffassen. Da man durch jeden Diameter $d$ zwei asymptotische Ebenen an die entsprechende Fläche $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ legen kann, erhält man eine $(1, 2)$-deutige Zuordnung der Punkte der Fernkurven $d_u^3$ und $a_u^3$.

Mittels des Chaslesschen Korrespondenzprizips ergibt sich, dass die durch den Punkt $P$ an die Flächen des Flächenbüschels $(H^2)$ (1, 3) gelegten asymptotischen Ebenen einen Kegel 5. Klasse $A^5$ bilden. ($a_2 n_1 + a_1 n_2 - s = m$; $2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 - 4 = 5$; wo $(a_1, a_2) = (1, 2)$ ist und die Ordnungen der Fernkurven $d_u{}^3$ und $a_u{}^3$ $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ sind; $s = 4$ ist die Zahl der in der Zuordnung (1, 2) sich selbst zugeordneten Fernpunkte $D_u$ und $A_u$, weil die quadratische Polare des Punktes $A_u \equiv T_u$ die Fernkurve $a_u{}^3$ in diesem Punkte berührt und sie in noch vier anderen Punkten schneidet, welche in der beschriebenen Zuordnung (1, 2) sich selbst zugeordnet sind; $m$ ist die Klasse des erhaltenen Kegels).

Die Ferngeraden $\zeta_u$ der Zentralebenen $\zeta$, welche den diesen Kegel $A^5$ bildenden asymptotischen Ebenen $\alpha$ zugeordnet sind, verbinden die Punkte $A_u$ der Fernkurve $a_u{}^3$ mit den zugeordneten Polen $C_u$ der Ferngeraden der Ebenen des Kegels $A^5$. Da die Ferngeraden der Ebenen des Kegels $A^5$ eine Fernkurve 5. Klasse $\alpha_u{}^5$ umhüllen, bilden die Pole $C_u$ dieser Ferngeraden bezüglich der Absoluten eine Fernkurve 5. Ordnung $c_u{}^5$. Durch Verbinden der (1, 1)-deutig zugeordneten Fernpunkte der Fernkurven $a_u{}^3$ und $c_u{}^5$ erhält man eine Fernkurve 8. Klasse $\zeta_u{}^8$. Die Fernpunkte derjenigen Diameter, welche den zu der Fernkurve $\zeta_u{}^8$ gehörigen Zentralebenen konjugiert sind, sind die Pole der zugeordneten Ferngeraden der Fernkurve $\zeta_u{}^8$ bezüglich der entsprechenden Fernkurven des Fernkurvenbüschels $(h_u{}^2)$ (1, 2) in welchem die Fernebene das Flächenbüschel $(H^2)$ (1, 3) schneidet. Es wird gezeigt, dass sie eine Fernkurve 12. Ordnung $z_u{}^{12}$ bilden.

Die Ordnung dieser durch die Pole $Z_u$ gebildeten Fernkurve $z_u{}^{12}$ wird mittels des Chaslesschen Korrespondenzprinzips bewiesen, indem berücksichtigt wird, dass sich der Pol $Z_u$ der Ferngeraden $\zeta_u$ der Zentralebene $\zeta$ bezüglich der entsprechenden Fernkurve $h_u{}^2$ auf der Ferngeraden $\alpha_u$ derjenigen asymptotischen Ebene $\alpha$ befindet, welcher die Ebene $\zeta$ zugeordnet ist. Zwischen den Berührpunkten $A_u$ der einen Raumpunkt $P$ enthaltenden asymptotischen Ebenen und den Polen $Z_u$ der Ferngeraden der entsprechenden Zentralebenen besteht eine (1, 1)-deutige Zuordnung. Da die einen Raumpunkt $P$ enthaltenden asymptotischen Ebenen $\alpha$ einen Kegel 5. Klasse $A^5$ umhüllen, hat dieser Kegel mit der Absoluten zehn Berührebenen gemein. Jede der Ferngeraden $\alpha_u$ dieser gemeinsamen asymptotischen Ebenen ist auch die Ferngerade $\zeta_u$ der zugeordneten Zentralebene $\zeta$. Wenn man, nämlich, den Pol $C_u$ einer dieser Ferngeraden $\alpha_u$ bezüglich der Absoluten aufsucht, befindet sich dieser im Berührpunkt $C_u$ der Ferngeraden $\alpha_u$ mit der Absoluten. Die Ferngerade $\zeta_u$ der zugeordneten Zentralebene $\zeta$ als Verbindungsgerade des Berührpunktes $A_u$ und des Pols $C_u$ fällt mit der Ferngeraden $\alpha_u$ der asymptotischen Ebene zusammen, also $a_u = \zeta_u$. Sucht man den Pol $Z_u$ einer solchen Ferngeraden $\zeta_u$ der Zentralebene $\zeta \equiv \alpha$ bezüglich der Fernkurve $h_u^2$ der entsprechenden Regelfläche $H^2$ auf, wird der Pol $Z_u$ mit dem Berührpunkt $A_u$ zusammenfallen. Daraus ergibt sich, dass es in der erwähnten (1, 1)-deutigen Zuordnung zehn Punkte gibt, die sich selbst zugeordnet sind. Aus der beschriebenen Zuordnung und nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip ergibt sich, dass die durch die Pole $Z_u$ gebildete Fernkurve $z_u^{12}$ 12. Ordnung ist. $(a_2 n_1 + a_2 n_1 - - s = m;\ 3 \cdot 1 + n_2 \cdot 1 - 10 = 5;\ n_2 = 12;$ wobei $(a_1, a_2) = (1, 1)$ ist. $n_1 = 3$ ist die Ordnung der Fernkurve $a_u^3$, $s = 10$ die Zahl der sich selbst zugeordneten Punkte $A_u$ und $Z_u$ und $m = 5$ die Klasse der Fernkurve des Kegels $A^5$.

Verbindet man die Fernkurve 12. Ordnung $z_u^{12}$ mit dem gewählten Raumpunkt $P$, so erhält man einen Direktionskegel 12. Ordnung $Z^{12}$, dessen Erzeugende $z$ denjenigen Zentralebenen $\zeta$ kojugiert sind, welche den asymptotischen Ebenen des Kegels $A^5$ zugeordnet sind. Nur jene Erzeugende des Kegels $Z^{12}$ gehören zu den entsprechenden Zentralkegeln des Systems $|Z^4|$, welche auch zu dem Kegel $D^3$ gehören. Obwohl die Kegel $Z^{12}$ und $D^3$ 36 gemeinsame Erzeugende enthalten, beweisen wir doch, dass nur sechs von ihnen den entsprechenden Zentralebenen konjugiert sind, bzw. dass sie den Mittelpunkt und den Pol $Z_u$ derselben Fläche $H^2$ enthalten.

Damit eine Erzeugende $d$ des Kegels $D^3$ der zugeordneten Zentralebene konjugiert sei, muss die Ferngerade $\zeta_u$ der entsprechenden Zentralebene $\zeta$ mit der Ferngeraden $p_u$ der diesem Diameter $d$ entsprechenden Polarebene $\pi$ zusammenfallen. Die Ferngeraden der dem Punkt $P$ zugeordneten Polarebenen bilden ein Ferngeradenbüschel $p_u (T_u)$ und die Ferngeraden $\zeta_u$ der zugeordneten Zentralebenen $\zeta$ bilden eine Fernkurve 8. Klasse $\zeta_u^8$. Betrachtet man näher die Fernberührpunktkurve $a_u^3$, so bemerkt man, dass der Punkt $A_u \equiv T_u$ ein zweideutiger Punkt dieser Kurve ist. Die Ferngerade $\zeta_u$ der diesem Punkt $A_u \equiv T_u$ zugeordneten Zentralebene $\zeta$ ist eine zweifache Berührgerade der Fernkurve $\zeta_u^8$ und ist von den Ferngeraden $p_u$ der entsprechenden Polarebenen verschieden. Also enthält der Fernpunkt $A_u \equiv T_u$ acht Berührgerade der Fernkurve $\zeta_u^8$, von denen nur sechs mit den Ferngeraden $p_u$ der zugeordneten Polarebenen zusammenfallen, was bedeutet, dass der Index des Zentralkegelsystems $|Z^4|$, das einem Flächenbüschel $(H^2)$ (1, 3) zugeordnet ist, gleich 6 ist.

SATZ 2. *Die Striktionslinienfläche $S^{16}$ in einem Regelflächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)$ (1, 3) ist 16. Ordnung.*

*Beweis.* Jeder beliebig angenommene Raumpunkt $P$ enthält je eine Fläche $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)$ (1, 3) und je sechs Zentralkegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$. Daraus ergibt sich, dass man die Punkte

$P$ einer beliebig angenommenen Geraden $p$ durch eine (4, 12)-deutige Zuordnung verbinden kann. Nämlich, ein Punkt $P$ der Geraden $p$ enthält eine Fläche $H^2$ des Flächenbüschels 2. Ordnung $(H^2)(1, 3)$, welcher ein Zentralkegel $Z^4$ zugeordnet ist. Die Gerade $p$ schneidet den Kegel $Z^4$ in vier Punkten $Z$. Derselbe Punkt $P$ enthält sechs Zentralkegel $Z^4$, denen sechs Flächen $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)(1,3)$ zugeordnet sind. Die Gerade $p$ schneidet diese Flächen in zwölf Punkten $H$. Wenn der Punkt $P$ irgend ein Punkt der Geraden $p$ ist, dann sind diese Punkte $Z$ und $H$ verschieden. Befindet sich der Punkt $P$ auf der Striktionslinie einer Fläche $H^2$ des Flächenbüchels $(H^2)(1, 3)$, dann fällt ein Paar der zugeordneten Punkte $Z$ und $H$ im Punkt $P$ zusammen. Wenn der Punkt $P$ die Gerade $p$ durchläuft, werden die zugeordneten Punkte $Z$ und $H$ durch eine (4, 12) -deutige Zuordnung verbunden. Wie bekannt, gibt diese Zuordnung auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzips sechzehn sich selbst zugeordnete zusammenfallende Punktepaare $(Z, H)$. Da diese Punkte die gemeinsamen Punkte der Flächen $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ und der entsprechenden Zentralkegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$ sind, also die Punkte der Striktionslinien, schliesst man, dass die Striktionslinienfläche in einem Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1, 3)$ eine Fläche 16. Ordnung ist. Sie sei mit $S^{16}$ bezeichnet.

Die Grundkurve 4. Ordnung $k^4$ des Regelflächenbüschels 2. Ordnung $(H^2)(1, 3)$ ist eine sechsfache Kurve der Striktionslinienfläche $S^{16}$, weil jeder Punkt der Grundkurve $k^4$ alle Flächen des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ und je sechs Zentralkegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$ enthält. Dieser Punkt ist also mit den Striktionslinien von sechs Flächen $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)(1, 3)$ inzident.

Die Fernkurve der Striktionslinienfläche $S^{16}$ zerfällt in eine imaginäre Doppelkurve 2. Ordnung $s_u^2$ und sechs Doppelgeraden, welche die Fernerzeugenden dreier im Flächenbüschel $(H^2)(1, 3)$ sich befindenden hyperbolischer Paraboloide sind. In der Einleitung (6.) wurde gezeigt, dass die Striktionslinien in der Fernebene zwei Paare konjugiert imaginärer Punkte enthalten. Legt man die gemeinsamen Berührgeraden der Fernkurve $h_u^2$ der Fläche $H^2$ und der Absoluten, so sind die Berührpunkte auf der Fernkurve $h_u^2$ die Punkte der Fernkurve $s_u^2$. Da jede Fernkurve $h_u^2$ des Fernkurvenbüschels $(h_u^2)(1, 2)$ je vier Fernpunkte der Fernkurve $s_u^2$ enthält, schliesst man, dass die Fernkurve $s_u^2$ eine Fernkurve 2. Ordnung ist. Da jeder Fernpunkt dieser Fernkurve je zwei Erzeugende eines im Flächenbüschel $(H^2)(1, 3)$ sich befindenden einschaligen Hyperboloids enthält, ist diese Fernkurve $s_u^2$ eine Doppelkurve der Fläche $S^{16}$.

Die Ordnung der Striktionslinienfläche $S^{16}$ wird in einem Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1, 3)$ erhalten, wenn dieses ausschliesslich aus Regelflächen gebildet wird. Wegen des Erhaltungsprinzips erhält man dasselbe Ergebnis, wenn das Flächenbüschel auch die allgemeinen Flächen 2. Ordnung enthält. In diesem Falle aber muss die Striktionslinie einer allgemeinem Fläche 2. Ordnung als imaginäre Durchdringungskurve dieser Fläche 2. Ordnung mit der Fläche $S^{16}$ aufgefasst werden.

b) Man betrachte ein besonderes Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1,2)$, dessen Grundkurve $k^4$ in zwei sich doppelt schneidende Kurven 2. Ordnung zerfällt. Jeder beliebig angenommene Raumpunkt $P$ enthält je eine Fläche dieses Büschels und jede Ebene berührt deren zwei. Eine Fläche des Büschels $(H^2)(1,2)$ zerfällt in zwei Ebenen, welche die Grundkurven enthalten. Die Mittelpunkte der Flächen dieses Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ bilden als Pole der Fernebene bezüglich dieser Flächen eine Kurve 2. Ordnung $o^2$.

Obwohl dieses Flächenbüschel $(H^2)(1,2)$ ausser den Regelflächen auch die allgemeine Fläche enthält, wird man beim Aufsuchen der Striktionslinienfläche so vorgehen, als ob alle Flächen als Regelflächen betrachtet würden. Deswegen muss auch hier die Striktionslinie einer allgemeinen Fläche 2. Ordnung $H^2$ als imaginäre Durchdringungskurve dieser Fläche $H^2$ mit der erhaltene Striktionslinienfläche aufgefasst werden.

SATZ 3. *Der Index des Zentralkegelsystems* $|Z^4|$, *das dem besonderen Flächenbüschel* 2. *Ordnung* $(H^2)(1,2)$ *zugeordnet ist, ist gleich* 5.

*Beweis.* Analoge Überlegungen wie beim Beweis des Satzes 1 werden ergeben, dass die durch einen beliebig angenommenen Raumpunkt $P$ an die Flächen eines besonderen Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ gelegten asymptotischen Ebenen einen Kegel 4. Klasse $A^4$ bilden. Die entsprechenden Fernberührpunkte $A_u$ bilden dabei eine Fernkurve 3. Ordnung $a_u^3$, die im Fernpunkt der Schnittgeraden der im Büschel $(H^2)(1,2)$ sich befindenden in zwei Ebenen zerfallenen Fläche einen Doppelpunkt enthält. Um die Ferngerade der diesen asymptotischen Ebenen $\alpha$ des Kegels $A^4$ zugeordneten Zentralebenen $\zeta$ zu erhalten, müssen die Pole $C_u$ der Ferngeraden $a_u$ der asymptotischen Ebenen bezüglich der Absoluten aufgesucht werden. Sie bilden eine Fernkurve 4. Ordnung $c_u^4$. Die Ferngeraden $\zeta_u$ der erwähnten Zentralebenen $\zeta$ hüllen als Verbindungsgerade der (1, 1) -deutig zugeordneten Fernpunkte $A_u$ und $C_u$ der Fernkurven $a_u^3$ und $c_u^4$ eine Fernkurve 7. Klasse $\zeta_u^7$ ein. Durch die Anwendung des Chaslesschen Korrespondenzprinzips erhält man, wie vorhin, dass die Pole $Z_u$ der Zentralebenenfernspuren $\zeta_u$ bezüglich der entsprechenden Fernkurven $h_u^2$ des Fernkurvenbüschels $(h_u^2)(1,2)$ eine Fernkurve $z_u^9$ bilden. Verbindet man den Raumpunkt $P$ mit den Punkten dieser Fernkurve $z_u^9$, erhält man einen Kegel 9. Ordnung $Z^9$. Nur diejenigen Erzeugenden des Kegels $Z^9$ gehören zu den Zentralkegeln $Z^4$ des Systems $|Z^4|$, welche die Diameter der entsprechenden Flächen $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)(1,2)$ sind. Das sind also diejenige Erzeugenden $z$, welche auch zu dem Kegel $D^2$ gehören, der durch die den Punkt $P$ enthaltenden Diameter gebildet wird.

Da die Kegel $D^2$ und $Z^9$ achtzehn gemeinsame Erzeugende enthalten, könnte man schliessen, dass der Index des Zentralkegelsystems $|Z^4|$ 18 sein müsste. Unter diesen gemeinsammen Erzeugenden sind jedoch nur diejenigen zu nehmen, die zu dem entsprechenden Zentralkegel $Z^4$ als Diameter derselben Fläche $H^2$ des Flächenbüschels $(H^2)(1, 2)$ gehören.

Durch eine analoge Betrachtung wie beim Flächenbüschel $(H^2)$ $(1, 3)$ wird gezeigt, dass der Index des einem Flächenbüschel $(H^2)(1, 2)$ zugeordneten Zentralkegelsystems $|Z^4|$ gleich 5 ist. Wenn eine Erzeugende $d$ des Kegels $D^2$ auch eine Erzeugende $z$ des zugeordneten Zentralkegels $Z^4$ ist, muss ihr Fernpunkt $Z_u \equiv D_u$ der Ferngeraden $\zeta_u$ der Zentralebene $\zeta$ konjugiert sein bezüglich der zugeordneten Flächenkurve $h_u^2$. Deswegen muss die Ferngerade $\zeta_u$ der Zentralebene $\zeta$ mit der Ferngeraden $p_u$ der zugeordneten Polarebene $\pi$ zusammenfallen. Obwohl die Fernkurve $\zeta_u^7$ des dem Kegel $A^4$ zugeordneten Zentralebenengewindes $\zeta^7$ 7. Klasse ist, enthält das Ferngeradenbüschel $p_u(T_u)$ des dem Punkt $P$ zugeordneten Polarebenenbüschels $\pi(t)$ nur fünf Ferngerade $p_u$, die mit den Ferngeraden $\zeta_u$ der entsprechenden Zentralebenen $\zeta$ zusammenfallen. Nämlich, von sieben den Fernpunkt $A_u \equiv T_u$ enthaltenden Ferngeraden $\zeta_u$ der Zentralebenen $\zeta$ fallen zwei als Doppelgerade der Fernkurve $\zeta_u^7$ zusammen und sind von der Ferngeraden $p_u$ der entsprechenden Polarebene $\pi$ verschieden. Es verbleibt also, dass es fünf Diameter $d$ gibt, die mit den zugeordneten Erzeugenden $z$ der Zentralkegel $Z^4$ des Zentralkegelsystems $|Z^4|$ zusammenfallen.

SATZ 4. *Die Striktionslinienfläche in einem Flächenbüschel* 2. *Ordnung* $(H^2)(1, 2)$ *ist* 12. *Ordnung* $S^{12}$.

*Beweis.* Analoge Betrachtungen wie beim Beweis des Satzes 2 ergeben bei einem Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1, 2)$, dass man an einer beliebig angenommenen Gerade $p$ eine $(4, 10)$ -deutige Zuordnung erhält, welche, wie bekannt, vierzehn sich selbst zugeordnete Punkte enthält. Man muss beachten, dass ein Flächenbüschel $(H^2)(1, 2)$ eine in zwei Ebenen zerfallene Fläche enthält und deswegen von vierzehn Inzidenzpunkten zwei zu diesen Ebenen und zwölf zu der Striktionslinienfläche $S^{12}$ gehören. Also ist die Striktionslinienfläche $S^{12}$ eines Flächenbüschels $(H^2)(1, 2)$ 12. Ordnung.

Die Fernkurve dieser Fläche $S^{12}$ besteht aus vier Geraden, der Fernerzeugenden zweier hyperbolischer Paraboloide als Doppelgeraden und einer Fernkurve 2. Ordnung $s_u^2$, welche auch die Doppelkurve dieser Fläche ist.

Die Kurven 2. Ordnung, welche die Grundkurve des Flächenbüschels 2. Ordnung $(H^2)(1, 2)$ bilden, sind fünffache Kurven der Striktionslinienfläche $S^{12}$.

## 2. Die Striktionslinienfläche in den Regelflächenscharen 2. Ordnung

Den Flächenbüscheln 2. Ordnung $(H^2)(1, n)$ sind die Flächenscharen 2. Ordnung $(H^2)(n, 1)$ dual. Die Grundeigenschaft einer Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(n, 1)$ ist, dass jeder beliebig angenommene Raumpunkt $P\,n\,(n = 3, 2, 1)$ Flächen der Schar enthält und dass jede Ebene $\pi$ deren eine berührt. Es besteht ein Ebenengewinde 4. Klasse, das von gemeinsamen Berührebenen dieser Flächen gebildet wird. Die Mittelpunkte als Pole der Fernebene bezüglich aller Flächen der Schar bilden einen gemeinsamen Diameter $d^*$. Die Fernebene schneidet die Flächenschar $(H^2)(n, 1)$ in einer Fernkurvenschar $(h_u{}^2)(n, 2)$.

a) Die Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(3, 1)$ enthält vier Flächen, die in Kurven 2. Klasse ausgeartet sind und die sie enthaltende Ebenen müssen als Doppelebenen betrachtet werden. Wenn die Schar $(H^2)(3, 1)$ von lauter Regelflächen gebildet wird, dann sind diese Ebenen und das Berührebenengewinde 4. Klasse imaginär. Um die Ordnung der Striktionslinienfläche in einer Regelflächenschar 2. Ordnung $(H^2)(3, 1)$ zu erhalten, muss zuerst das zugeordnete Zentralkegelsystem $|Z^4|$ untersucht werden.

SATZ 5. *Der Index des einer Flächenschar* 2. *Ordnung* $(H^2)(3, 1)$ *zugeordneten Zentralkegelsystems* $|Z^4|$ *ist* 6.

*Beweis.* Um den Index des Zentrakegelsystems $|Z^4|$ zu finden muss zuerst untersucht werden, ob der gemeinsame Diameter $d^*$ zu einem Zentralkegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$ gehört. Diese Frage kann beantwortet werden, indem zuerst festgestellt wird, wievielmal die Ferngerade $p_u$ einer Polarebene $\pi$ mit der Ferngeraden $\zeta_u$ der zugeordneten Zentralebene $\zeta$ zusammenfällt.

Die durch den gemeinsamen Diameter $d^*$ an die Flächen der Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(3, 1)$ gelegten asymptotischen Ebenen bilden ein Ebenenbüschel $\alpha(d^*)$. Ihre Berührpunkte $A_u$ bilden eine Fernkurve 5. Ordnung, die aus zwei Ferngeraden, der Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids und einer Fernkurve 3. Ordnung $a_u{}^3$ besteht, welche im Fernpunkt $D_u{}^*$ des Diameters $d^*$ einen Doppelpunkt enthält. Die Punkte dieser Fernkurve $a_u{}^3$ sind durch die dem Fernpunkt $D_u{}^*$ zugeordneten Ferngeraden $p_u$ der Polarebenen $\pi$ bezüglich der Flächen der Flächenschar $(H^2)(3, 1)$ in Paare verbunden. Die dem Fernpunkt $D_u{}^*$ als Pol zugeordneten Polarebenen $\pi$ bilden ein Ebenengewinde 3. Klasse $\pi^3$, das auch die Fernebene enthält. Deswegen hüllen die Ferngeraden $p_u$ dieser Polarebenen eine Fernkurve 2. Klasse ein.

Die Ferngerade $\zeta_u$ der einer asymptotischen Ebene $\alpha$ zugeordneten Zentralebene $\zeta$ erhält man, indem man den Berührpunkt $A_u$ der asymptotischen Ebene $\alpha$ mit dem Pol $C_u$ der Ferngeraden $\alpha_u$

der asymptotischen Ebene $\alpha$, bezüglich der Absoluten, verbindet. Da die Ferngeraden $a_u$ der asymptotischen Ebenen ein Ferngeradenbüschel $a_u(D_u^*)$ bilden, erzeugen die Pole $C_u$ dieser Ferngeraden bezüglich der Absoluten eine Ferngerade $c_u$. Man betrachte eine Ferngerade $a_u$. Der dieser Ferngeraden $a_u$ zugeordnete Pol $C_u$ bezüglich der Absoluten befindet sich auf der Ferngeraden $c_u$, welche die Polare des Fernpunktes $D_u^*$ bezüglich der Absoluten ist. Dieselbe Ferngerade $a_u$ enthält einen Berührpunkt $A_u$ dessen zugeordnete Polare $p_u$ die Ferngerade $c_u$ in einem Fernpunkt $P_u$ schneidet. Führt man dies für alle Ferngeraden $a_u$ des Büschels $a_u(D_u^*)$ durch, erhält man auf der Ferngeraden $c_u$ eine $(1, 1)$ -deutige Zuordnung der Punkte $C_u$ und $P_u$. Wie bekannt, ergibt diese Zuordnung zwei inzidente Punkte, was bedeutet, dass für den gemeinsamen Diameter $d^*$ zweimal die Ferngerade $p_u$ der Polarebene mit der Ferngeraden $\zeta_u$ der zugeordneten Zentralebene zusammenfällt. Also, der gemeinsame Diameter $d^*$ gehört zu zwei Zentralkegeln $Z^4$ des Systems $|Z^4|$.

Man lege durch einen beliebig angenommenen Raumpunkt $P$ und den gemeinsamen Diameter $d^*$ die Ebene $\delta \equiv (d^*, P)$. Schneidet man mit dieser Ebene $\delta$ das Zentralkegelsystem $|Z^4|$, so bilden die Erzeugenden $z$ in dieser Ebene eine Kurve 6. Klasse. Jeder Punkt des gemeinsamen Diameters $d^*$ enthält nämlich vier Erzeugende $z$ des entsprechenden Zentralkegels $Z^4$. Da die Gerade $d^*$ die gemeinsame Erzeugende $z$ zweier im System $|Z^4|$ sich befindender Kegel $Z^4$ ist, schliesst man dem Erheltungprinzip nach, dass die Erzeugenden $z$ der Zentralkegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$ in der Ebene $\delta \equiv (d^*, P)$ eine Kurve 6. Klasse umhüllen, was weiterhin bedeutet, dass jeder in der Ebene $\delta$ sich befindende Punkt $P$ auf je sechs Zentralkegeln $Z^4$ liegt. Also, das Zentralkegelsystem $|Z^4|$, das einer Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(3, 1)$ zugeordnet ist, hat den Index 6.

SATZ 6. *Die Striktionslinienfläche einer Flächenschar* 2. *Ordnung* $(H^2)(3, 1)$ *ist* 16. *Ordnung.*

*Beweis.* Die Ordnung der Striktionslinienfläche einer Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(3, 1)$ wird auch hier durch die Zahl der Inzidenzpunkte der Flächen $H^2$ der Flächenschar $(H^2)(3, 1)$ mit den entsprechenden Zentralkegeln $Z^4$ des zugeordneten Systems $|Z^4|$ auf einer Geraden $p$ erhalten. Man nehme eine Gerade $p$ beliebig an. Irgend ein Punkt $P$ dieser Geraden enthält drei Flächen der Flächenschar $(H^2)(3, 1)$, denen drei Zentralkegel des Systems $|Z^4|$ zugeordnet sind. Die Gerade $p$ schneidet diese Kegel in zwölf Punkten Z. Derselbe Punkt $P$ enthält sechs Zentralkegel des Systems $|Z^4|$, denen sechs Flächen $H^2$ der Flächenschar $(H^2)(3, 1)$ entsprechen. Die Gerade $p$ schneidet diese Flächen $H^2$ in zwölf Punkten $H$. Führt man dies für alle Punkte $P$ der Geraden $p$ durch, so erhält man auf der Geraden $p$ eine $(12, 12)$-deutige Zuordnung der Punkte $Z$ und $H$.

Dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip nach ergibt sich, dass in dieser Zuordnung 24 Inzidenzpunkte enthalten sind. Dies müsste bedeuten, dass die Striktionslinienfläche in eine Flächenschar $(H^2)(3,1)$ die Ordnung 24 erhält. Aber die Flächenschar $(H^2)(3,1)$ enthält vier Flächen, die in Kurven 2. Klasse ausgeartet sind. Die diese Kurven enthaltenden Ebenen sind als Doppelebenen aufzufassen. In der beschriebenen Zuordnung ergeben sie vier Doppelinzidenzpunkte. Deswegen verbleibt, dass die Striktionslinienfläche $S^{16}$ in einer Flächenschar $(H^2)(3,1)$ eine Fläche 16. Ordnung ist.

Eine Flächenschar $(H^2)(3,1)$ enthält ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Zentralkegel $Z^4$ ausgeartet ist. Deswegen schneidet die Fernebene die Striktionslinienfläche $S^{16}$ in zwei Doppelgeraden, die die Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids sind, und in einer imaginären Fernkurve 6. Ordnung, die eine Doppelkurve der Fläche $S^{16}$ ist.

Diese Betrachtungen sind für eine Flächenschar $(H^2)(3,1)$ durchgeführt, welche aus lauter Regelflächen gebildet wird. Dasselbe Ergebnis erhält man aber, wenn die Flächenschar $(H^2)(3,1)$ auch allgemeine Flächen 2. Ordnung enthält. Dabei aber müssen so wie bei einem Flächenbüschel $(H^2)(1,3)$ die Striktionslinien der allgemeinen Flächen 2. Ordnung als imaginäre Durchdringungskurven dieser Flächen mit der Fläche $S^{16}$ aufgefasst werden.

b) Dem Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1,2)$ ist eine Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(2,1)$ dual, die also die Eigenschaft hat, dass ein beliebig angenommener Raumpunkt $P$ auf zwei Flächen der Schar liegt und eine beliebige Ebene $\pi$ deren eine berührt. Das gemeinsame Berührebenengewinde 4. Klasse zerfällt in zwei Kegel 2. Klasse, die zwei gemeinsame Berührebenen enthalten. Diese gemeinsamen Berührebenen gehören als ausgeartete Fläche der Flächenschar $(H^2)(2,1)$ an, die noch zwei in Kurven 2. Klasse degenerierte Flächen enthält.

SATZ 7. *Der Index des Zentralkegelsystems* $|Z^4|$, *das einer Flächenschar* 2. *Ordnung* $(H^2)(2,1)$ *zugeordnet ist, ist* 5.

*Beweis.* Um den Index des Zentralkegelsystems $|Z^4|$ in der besonderen Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(2,1)$ zu erhalten, wird zuerst geprüft, ob der gemeinsame Diameter $d^*$ die Erzeugende eines zu dem System $|Z^4|$ gehörigen Zentralkegels ist. Hiezu werden die dem Fernpunkt $D_u{}^*$ des Diameters $d^*$ zugeordneten Polarebenen $\pi$ bezüglich der Flächen der Flächenschar $(H^2)(2,1)$ gelegt. Sie bilden, wie bekannt, einen Zylinder 2. Klasse, aber da die Fernebene diesem Zylinder angehört, bilden ihre Ferngeraden $p_u$ ein Ferngeradenbüschel $p_u(E_u)$ mit dem Büschelscheitelpunkt im Fernpunkt $E_u$ der Schnittgeraden zweier Ebenen, welche die zwei in Kurven 2. Klasse ausgearteten Flächen der Schar $(H^2)(2,1)$ enthalten.

Legt man durch den gemeinsamen Diameter $d^*$ die asymptotischen Ebenen $\alpha$ an die Flächen $H^2$ der Flächenschar $(H^2)(2, 1)$, bilden diese ein Ebenenbüschel $\alpha(d^*)$. Die Berührpunkte $A_u$ dieser Ebenen mit den entsprechenden Flächen der Schar bilden eine zerfallene Fernkurve 4. Ordnung, die aus den Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids und einer Fernkurve 2. Ordnung $a_u^2$ besteht.

Legt man durch jeden Fernpunkt $A_u$ der Fernkurve $a_u^2$ die Ferngerade $\zeta_u$ der zugeordneten Zentralebene $\zeta$, so muss man untersuchen, wie viele dieser Ferngeraden $\zeta_u$ mit der Ferngeraden $p_u$ der entsprechenden Polarebene $\pi$ zusammenfallen. Die Pole $C_u$ der Ferngeraden $\alpha_u$ des Büschels $\alpha_u(D_u^*)$ bezüglich der Absoluten bilden eine Ferngerade $c_u$, die die Polare des Fernpunktes $D_u^*$ bezüglich der Absoluten ist. Da die Fernpunkte $A_u$ der Fernkurve 2. Ordnung $a_u^2$ (1, 1)-deutig den Fernpunkten $C_u$ der Ferngeraden $c_u$ zugeordnet sind, erhält man durch Verbinden der zugeordneten Fernpunktepaare $A_u$ und $C_u$ als Ferngeraden $\zeta_u$ der entsprechenden Zentralebenen $\zeta$ eine Fernkurve 3. Klasse $\zeta_u^3$. Das Ferngeradenbüschel $p_u(E_u)$ der Polarebenen enthält deswegen drei Ferngeraden $p_u$, welche mit den Ferngeraden $\zeta_u$ der entsprechenden Zentralebenen zusammenfallen. Zwei von diesen sind aber mit den Ferngeraden der ausgearteten Flächen identisch, so dass nur eine Ferngerade $p_u$ verbleibt, die mit der entsprechenden Ferngeraden $\zeta_u$ zusammenfällt. Auf Grund dessen schliesst man, dass der gemeinsame Diameter $d^*$ eine Erzeugende $z$ eines Zentralkegels $Z^4$ des Systems $|Z^4|$ ist.

Um die Zahl der einen Raumpunkt $P$ enthaltenden Zentralkegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$ zu erhalten, wird durch den Punkt $P$ und den gemeinsamen Diameter $d^*$ eine Ebene $\delta \equiv (d^*, P)$ gelegt. Da jeder Punkt des Diameters $d^*$ in der Ebene $\delta$ vier Erzeugende $z$ der entsprechenden Zentralkegel $Z^4$ enthält und da der Diameter $d^*$ selbst zu einem Zentralkegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$ gehört, erhält man, dass die Erzeugenden $z$ in der Ebene $\delta$ eine Kurve 5. Klasse umhüllen. Der Punkt $P$ enthält also fünf Kegel $Z^4$ des Systems $|Z^4|$, woraus sich ergibt, dass das Zentralkegelsystem $|Z^4|$, das einer Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)(2, 1)$ zugeordnet ist, den Index 5 hat.

SATZ 8. *Die Striktionslinienfläche* $S^{12}$ *in einer besonderen Flächenschar* 2. *Ordnung* $(H^2)(2, 1)$ *ist* 12. *Ordnung.*

*Beweis.* Analog wie vorher kann man die Punkte $P$ einer beliebig angenommenen Gerade $p$ mittels der Flächen $H^2$ einer Flächenschar $(H^2)(2, 1)$ und das zugeordnete Zentralkegelsystem $|Z^4|$ durch eine (8, 10)-deutige Zuordnung der Punkte $Z$ und $H$ verbinden. Diese Zuordnung ergibt, wie bekannt, achzehn inzidente Punkte. Es muss aber beachtet werden, dass die Flächenschar $(H^2)(2, 1)$ zwei Flächen enthält, die in Kurven 2. Klasse ausgeartet sind und die diese Kurven enthaltenden Ebenen als Doppelebenen in dieser Zuordnung aufzufassen sind. Weiterhin enthält die Flächenschar $(H^2)(2, 1)$ eine Fläche, die aus zwei Ebenen besteht, welche auch in der beschriebenen Inzidenz vorkommen. Deswegen gehören von den achtzehn Inzidenzpunkten nur zwölf zu der Striktionslinienfläche, also ist diese 12. Ordnung.

Die Fernebene schneidet diese Fläche in zwei Doppelgeraden die die Ferngeraden des hyperbolischen Paraboloids sind und in einer Fernkurve 4. Ordnung $s_u^4$, die als Doppelkurve zu der Striktionslinienfläche $S^{12}$ gehört.

## 3. Die Striktionslinienfläche in dem speziellen Regelflächensystem 2. Ordnung

Das spezielle Flächenbüschel 2. Ordnung $(H^2)(1, 1)$ hat die Eigenschaft, dass jeder beliebig angenommene Raumpunkt $P$ eine Fläche $H^2$ desselben enthält und eine beliebig angenommene Ebene $\pi$ deren eine berührt. Deswegen hat dieses Flächenbüschel $(H^2)(1, 1)$ auch die Eigenschaften einer Flächenschar. Alle Flächen dieses Flächenbüschels $(H^2)(1, 1)$ sind Regelflächen und durchdringen sich in einem windschiefen Vierkant. Das gemeinsame Berührebenengewinde zerfällt hier in vier Ebenenbüschel. Zwei Flächen dieses Flächensystems $(H^2)(1, 1)$ sind in je zwei Ebenen ausgeartet. Die Pole einer Ebene $\pi$ bezüglich aller Flächen des Flächensystems 2. Ordnung $(H^2)(1, 1)$ bilden eine Gerade und die Polarebenen eines Punktes $P$ bilden ein Ebenenbüschel.

SATZ 9. *Ein Zentralkegelsystem* $|Z^4|$, *das einem Flächensystem 2. Ordnung* $(H^2)(1, 1)$ *zugeordnet ist, hat den Index* 4.

*Beweis.* Um den Index des einem speziellen Flächensystem $(H^2)(1, 1)$ zugeordneten Zentralkegelsystems zu erhalten, wird man analog wie bei einem Flächenbüschel vorgehen.

Die Pole der Fernebene bezüglich aller Flächen $H^2$ des Flächensystems $(H^2)(1, 1)$ bilden eine Gerade $d^*$, den gemeinsamen Diameter aller dieser Flächen. Nimmt man einen Raumpunkt $P$ beliebig an, so bilden die den Punkt $P$ enthaltenden Diameter $d$ der Flächen dieses Systems $(H^2)(1, 1)$ ein Geradenbüschel $d(P)$, das in der Ebene $\delta \equiv (d^*, P)$ liegt. Die Ebene $\delta$ schneidet offenbar das dem Flächenbüschel $(H^2)(1, 1)$ zugeordnete System asymptotischer Kegel $|A^2|$ in einer Kurve 2. Klasse $\alpha^2$. Deswegen bestehen zwei asymptotische Kegel des Systems $|A^2|$, die den Punkt $P$ enthalten. Es gibt also zwei Erzeugende $a$ dieser Kegel, die mit dem entsprechenden Diameter $d$ des Büschels $d(P)$ zusammenfallen. Dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip nach erhält man wegen dieser Überlegungen, dass in einem Flächensystem $(H^2)(1, 1)$ die durch den Punkt $P$ an die Flächen dieses Systems gelegte asymptotische Ebenen einen Kegel 3. Klasse $A^3$ umhüllen. $(a_2 n_1 + a_1 n_2 - s = m;\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 = 3)$.

Um die Ferngeraden $a_u$ der den asymptotischen Ebenen des Kegels $A^3$ zugeordneten Zentralebenen $\zeta$ zu bestimmen, müssen die Pole $C_u$ der Ferngeraden $a_u$ des Kegels $A^3$ bezüglich der Absoluten umfasst werden. Sie bilden eine Fernkurve 3. Ordnung $c_u^3$. Die Ferngeraden der Zentralebenen als Verbindungsgerade der (1, 1)-deutig zugeordneten Fernpunkte $A_u$ und $C_u$ der Fernkurven $a_u^3$ und $c_u^3$ hüllen offenbar eine Fernkurve 6. Klasse $\zeta_u^6$ ein. Die Pole $Z_u$ der Ferngeraden $\zeta_u$ der Fernkurve $\zeta_u^6$ bezüglich der entsprechenden Flächen des Flächensystems $(H^2)(1,1)$ befinden sich auf den Ferngeraden $a_u$ der zugeordneten asymptotischen Ebenen $\alpha$ und bilden eine Fernkurve 6. Ordnung $z_u^6$. $(a_2 n_1 + a_1 n_2 - s = m;\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot n_2 - 6 = 3;\ n_2 = 6)$.

Verbindet man die Fernkurve 6. Ordnung $z_u^6$ mit dem Punkt $P$, erhält man einen Kegel 6. Ordnung $Z^6$. Die Ebene $\delta \equiv (d^*, P)$ schneidet diesen Kegel $Z^6$ in sechs Erzeugenden, aber auf Grund dieser Tatsache darf man doch nicht sogleich schliessen, dass das dem Flächensystem $(H^2)(1,1)$ zugeordnete Zentralkegelsystem $|Z^4|$ den Index 6 hat.

Wenn eine Erzeugende $z$ des Kegels $Z^6$ auch eine Erzeugende eines Zentralkegels $Z^4$ wird, muss sie bezüglich der entsprechenden Fläche $H^2$ des Flächensystems $(H^2)(1,1)$ der zugeordneten Zentralebene konjugiert sein. Die dem Punkt $P$ zugeordneten Polarebenen bilden ein Ebenenbüschel $\pi(t)$, das die Fernebene in einem Ferngeradenbüschel $p_u(T_u)$ schneidet. Da die Ferngeraden der dem Punkt $P$ zugeordneten Zentralebenen die Fernkurve 6. Klasse $\zeta_u^6$ umhüllen, enthält das Ferngeradenbüschel $p_u(T_u)$ sechs Ferngerade $\zeta_u$ der Zentralebenen $\zeta$. Aber, so wie bei anderen Flächenbüscheln, fallen zwei von ihnen zusammen und bilden eine zweifache Ferngerade, die nicht mit der Ferngeraden $p_u$ der zugeordneten Polarebene identisch ist. Daraus ergibt sich dass der Kegel $Z^6$ nur vier Erzeugende $z$ enthält, welche den zugeordneten Zentralebenen konjugiert sind. Also, das Zentralkegelsystem $|Z^4|$, das einem Flächensystem $(H^2)(1,1)$ zugeordnet ist, hat den Index 4.

Auf Grund dessen und mittels eines auf dieselbe Weise wie vorher durchgeführten Beweises kann folgender Satz bewiesen werden.

SATZ 10. *Die Striktionslinienfläche $S^8$ in einem Flächensystem 2. Ordnung $(H^2)(1,1)$ ist 8. Ordnung.*

*Beweis.* Analog wie vorher können alle Punkte $P$ einer beliebig angenommenen Geraden $p$ durch eine (4, 8)-deutige Zuordnung der Punkte $Z$ und $H$ verbunden werden. Wie bekannt, ergibt das zwölf Inzidenzpunkte. Man muss aber beachten, dass das Flächensystem $(H^2)(1,1)$ zwei Flächen enthält, die in je zwei Ebenen ausarten. Vier von den erwähnten Inzidenzpunkten gehören zu diesen ausgearteten Flächen und nur acht Punkte verbleiben, die der Striktionslinienfläche angehören. Also, in einem Flächensystem $(H^2)(1,1)$ ist die Striktionslinienfläche $S^8$ eine Fläche 8. Ordnung.

Die Fernebene schneidet die Striktionslinienfläche $S^8$ in zwei Doppelgeraden, die die Fernerzeugenden des hyperbolischen Paraboloids sind und in einer imaginären Fernkurve 2. Ordnung $s_u^2$ die als Doppelkurve der Fläche $S^8$ angehört.

Vergleicht man die erhaltenen Ergebnisse, bemerkt man, dass das einem Flächenbüschel bzw. einer Flächenschar 2. Ordnung $(H^2)$ zugeordnete Zentralkegelsystem $|Z^4|$ den Index 6 hat und die zugeordnete Striktionslinienfläche $S^{16}$ eine Fläche 16. Ordnung ist. Enthält das Büschel bzw. die Schar $r$ $(r = 1, 2)$ Flächen, die in je zwei Ebenen ausarten, verringert sich der Index des Zentralsystems um $r$ und die Ordnung der Striktionslinienfläche um $4r$.

## LITERATUR:

[1] *E. Müller - J. L. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie Bd III, Leipzig und Wien 1931, 147—158.

[2] *Th. Reye*, Die Geometrie der Lage, III Abt., Leipzig 1910, 51—57.

[3] *K. Strubecker*, Differentialgeometrie Bd II, Berlin 1964.

(Eingegangen am 9. V. 1973.)

*Mathematisches Institut*
*der Universität Zagreb*

## PLOHA STRIKCIONIH LINIJA LINEARNOG SISTEMA PRAVČASTIH PLOHA 2. REDA

*Ljerka Dočkal, Zagreb*

### Sadržaj

Zadana je pravčasta ploha 2. reda $H^2$. Njene strikcione linije $s_1^4$ i $s_2^4$ promatraju se kao prodorne krivulje plohe $H^2$ i centralnog stošca 4. reda $Z^4$ kojeg su izvodnice $z$ konjugirani dijametri centralnih ravnina plohe $H^2$. Opisuje li ploha $H^2$ linearni sistem ploha 2. reda $(H^2)(1, 3)$ odnosno $(H^2)(3, 1)$ pridruženi centralni stošci $Z^4$ čine sistem stožaca $|Z^4|$ s indeksom 6, a strikcione linije tvore plohu 16. reda $S^{16}$. Ako sistem ploha 2. reda sadrži $r$ $(r = 1, 2)$ ploha koje degeneriraju u par ravnina, indeks sistema stožaca $|Z^4|$ umanjuje se za $r$, a red plohe strikcionih linija za $4r$.